

# 稀疏表達：向量、矩陣與張量（上）

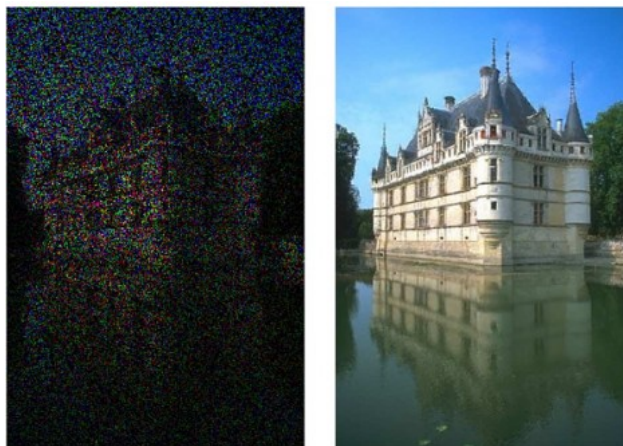
© 2014-06-19 15:26:00



稀疏表達是近年來SP, ML, PR, CV領域中的一大熱點，文章可謂是普天蓋地，令人目不暇給。老闆某門課程的課程需要大綱，我順道給擴展了下，就有了這個上中下三篇介紹性質的東西。遺憾的是，我在絕大多數情況下實在不算是一個勤快的人，這玩意可能充滿bug，更新也可能斷斷續續，盡請諸位看官見諒了。順道一提，ICCV09有一個相關的tutorial。

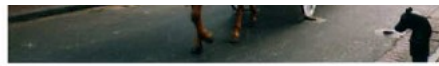
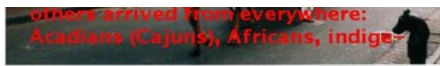
據傳博文里公式數量和其人氣是成反比例關係的，一個公式可以驅散50%的讀者，我寫完這個（上）之後點了點公式數量，覺得大約是要無人問津了。所以，在介紹稀疏表達之前，讓我們先來展示下其在computer vision中的應用，吸引下眼球。

首先是圖像恢復（以前有人貼過Obama還記得不），由左側圖像恢復出右側結果

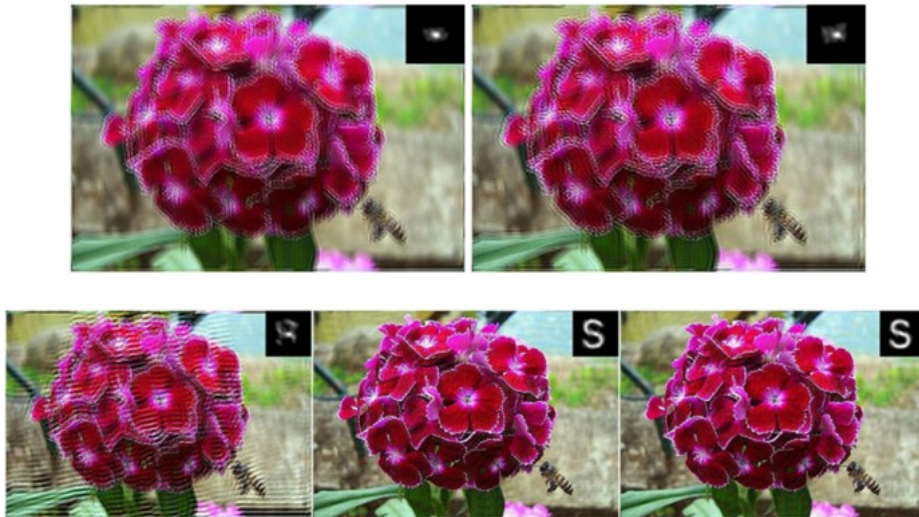


然後是類似的圖像inpainting





然後是圖像去模糊，左上為輸入模糊圖像，右下為輸出清晰圖像及估計的相機運動（其實是PSF），中間均為疊代過程：



再然後是物體檢測（自行車），左側輸入圖像，中間為位置機率圖，右側為檢測結果

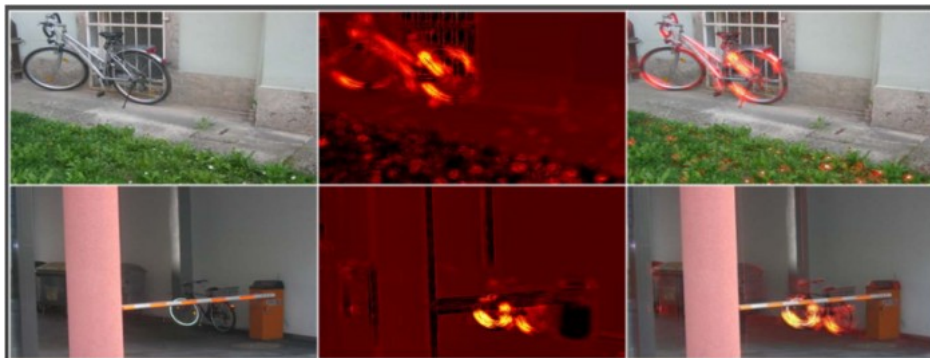
ADVERTISEMENT



## 實現防護鞏固未來 - PAN-OS 8.0 正式推出

參加我們的網路安全創新用戶大會，掌握最新 PAN-OS 8.0 的資訊!

[signup.paloaltonetworks.com](http://signup.paloaltonetworks.com)



當然我個人還推薦Yi Ma的sparse face，這個在對抗噪聲的效果上很棒，比如下圖中左側的那張噪聲圖像（你能辨認是哪位不？這方法可以！）





且說sparse representation這個概念，早在96-97年的時候就火了一把。最著名的大約要數Nature上的某篇文章，將稀疏性加入least square的regularization，然後得到了具有方向特性圖像塊（basis）。這樣就很好的解釋了初級視皮層（V1）的工作機理，即對於線段的方向選擇特性。幾乎同一時期，著名的LASSO算法也被發表在 J. Royal. Statist. Soc B。Lasso比較好的解決了least square (l2 norm) error + l1 norm regularization 的問題。然而，這個時候絕大多數人沒有意識到（或者沒法解決）這l1 norm和稀疏性之間的聯繫。其實早在這之前，Osher等人提出的Total Variation（TV）已經包含了l1 norm的概念了，只不過TV原本是連續域上的積分形式。（啥？你不知道Osher...想想Level Set吧）

ADVERTISEMENT



## 實現防護鞏固未來 - PAN-OS 8.0 正式推

參加我們的網路安全創新用戶大會，掌握最新 PAN-OS 8.0 的資訊!

[signup.paloaltonetworks.com](http://signup.paloaltonetworks.com)



在進入現代的壓縮感知、稀疏表示這一課題前，讓我們來首先回顧下這一系列問題的核心，即線性方程組

其中矩陣，通常而言是滿秩的。向量。現在已知，求解。學過線性代數的同學可能都會說：這個不難啊，因為，故而這個方程組是欠定的，所以有無窮多組解啊，咱還可以算算基礎解系啥的...但是如果我們希望其解儘可能的稀疏：比如（即中非零元個數）儘可能的小。那麼問題就會變得比較微妙了，下圖給出了問題的形象示意。

換言之給定m維空間中一組過完備的基，如何選擇最少個數的基向量，重構給定向量，其嚴格定義可以寫成

時光之輪播快到2003~2004年，Donoho & Elad做了一個很漂亮的證明，如果矩陣滿足某種條件，具體而言：

ADVERTISEMENT



### Stunning Charts & Graphs

Which Chart Type is Right  
For You? Download the Free  
Whitepaper Now!

[tableau.com](http://tableau.com)



那麼上文提及的0範數優化問題具有唯一的解。這裡的是個比較詭異（請允許我使用這詞）的定義：最小的線性相關的列向量集所含的向量個數（吐槽：明白了麼，我做TA的時候就被這個問題問倒了）。本來想在這個概念上嘮叨兩句，後來發現了Elad的一個talk，清晰明了。即便是唯一性



得到了證明，求解這個問題仍然是NP難的。科研的車輪滾滾向前，轉眼到了2006年，傳奇性的華裔數學家Terrence Tao登場了，Tao和Donoho的弟子Candes合作證明了在RIP條件下，0範數優化問題與以下1範數優化問題具有相同的解：

其中RIP條件，即存在滿足某種條件的（與N相關）常數：

RIP條件是對於矩陣列向量正交性的一種衡量（此處咱就不細說了）。其實早在1993年Mallat就提出過Mutual Coherence對於正交性進行度量，並提出了下文還要提及的matching pursuit方法。實際上以上的1範數優化問題是一個凸優化，故而必然有唯一解，至此sparse representation的大坑初步成型。總結一下：

1. 如果矩陣滿足，則0範數優化問題有唯一解。
2. 進一步如果矩陣滿足RIP條件，則0範數優化問題和1範數優化問題的解一致。
3. 1範數優化問題是凸優化，故其唯一解即為0範數優化問題的唯一解。進一步可以考慮含噪聲情況，即

可以得到相似的結果，有興趣的同學可以查閱相關文獻。理論坑只有大牛能挖，但一般人也能挖挖這個優化算法啊，於是SP、ML、CV鄰域裡都有做這個優化算法的，這個出招可就真是五花八門了。據我所知，大致可以分為三大流派：

#### 1. 直接優化

一般的方法是greedy algorithm，代表有Matching Pursuit, Orthogonal Matching Pursuit

#### 2. 優化

還記得上面提到的LASSO麼，這就是它的模型。

#### 3. 如果已知拉格朗日乘子，優化無約束凸優化問題

解這個的方法現在基本上soft thresholding的方法一統天下，常見的有coordinate descent, Bregman Iteration (又是Osher)等

#### 4. 如果未知拉格朗日乘子，優化

這類方法又叫Homotopy，可以認為是3的擴展。核心出發點是objective function是的分段線性函數。除此之外，還有利用p範數逐次逼近0範數的方法等等，此處不再贅述。順道說一句，稀疏表示在不同的領域連名稱都不同，搞信號的管這個叫basis pursuit，搞統計的叫l1 regularization....然後，讓我們把話題拉回到Nature的那篇文章：如果我們不知道矩陣，只知道一堆向量。我們應當如何構造，使得在這一字典（矩陣）下的表示最稀疏？類比以上過程，這個問題被稱為Dictionary Learning，可以寫成以下優化問題：

這個東西可就相對麻煩了，最關鍵的是這個優化不是凸的（優化變量相乘）。所以一般的想法是block descent：首先固定，優化（相當於多個獨立的1範數優化問題）；其次將計算出的固定，優化，這就是一個（可能帶約束）的least square問題。如此反覆，直到算法收斂到某個（局部）極小值。實際上解這個問題的方法目前有三種：efficient sparse coding algorithm NIPS 06; K-SVD tsp 06; Online dictionary learning for sparse coding, ICML 09 & JMLR 10。前兩種都是batch的方法，後一種是online的，據個人測試最後一種的方法比前兩者要快很多很多....下面這個是我利用ICML09的方法從1200張彩色圖像中訓練出一組過完備基，具有比較好的方向特性。



最後，還記得本文開頭的那些demo麼？INRIA做了一個sparse representation的matlab工具包SPAMS，雖然不開源，但其效率（大部分時候）是現有公開工具包之冠（底層用了intel的MKL），利用這個工具包，幾行簡單的matlab代碼就可以幾乎實現以上提及的所有demo了....大家有興趣的話，歡迎嘗試^\_^

下期預告：借著collaborative filter的東風，Candes在08年又挖出了matrix completion的新坑。於是，當向量的1範數推廣到矩陣的跡範數（trace norm）之後.....



文章來源：科學網 ([http://outbound.site/SIG=s3nak3/\\*http://blog.sciencenet.cn/blog-261330-804743.html](http://outbound.site/SIG=s3nak3/*http://blog.sciencenet.cn/blog-261330-804743.html))

 喜歡這篇文章嗎？快分享吧！

稀疏表達：向量、矩陣和張量 (/7MyEja.html)

論文筆記-Augmented Lagrange Multiplier Method for Recovery of Low-Rank Matrices (/ed68Be.html)

擬牛頓法 分析與推導 (/oLng4z.html)

理解線性回歸——總結線性回歸 (/jjKmPG.html)

算法優化之道：避開鞍點 (/7BeoyP.html)

淺談矩陣分解在推薦系統中的應用 (/JDxxBd.html)

在matlab環境下實現支持向量機算法 (/nx7KBm.html)

一種利用矩陣譜範數的直擴信號盲同步方法 (/gRP2Re.html)

zz非負矩陣分解：數學的奇妙力量 (/EyzPO2.html)

壓縮感知——SP（subspace pursuit）重構算法前言翻譯 (/7OazoN.html)



更多好文等你來搜尋