

Дифференциальное уравнение движения маятника

Раков Николай, Булкина Милена
М3236

14 января 2021 г.

Содержание

1	Математический маятник	2
2	Дифференциальное уравнение движения	2
3	Точное решение	2
4	Приближенное решение	5
4.1	Малые колебания	5
4.2	Разложение в ряд Фурье	6
4.3	Использование численных методов Рунге-Кутты	6
5	Моделирование	7
5.1	Анализ методов вычисления	7
5.2	Особенности реализации	8

1 Математический маятник



Математический маятник представляет собой идеальную модель, в которой материальная точка массой m подвешена на невесомой и нерастяжимой струне. Когда маятник смещен из своего исходного положения в начальный угол и отпущен, периодическое движение свободно качается взад-вперед.

2 Дифференциальное уравнение движения

Запишем второй закон Ньютона для вращательного движения:

$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1)$$

где τ - момент силы, I - момент инерции тела относительно оси вращения, α - угловое ускорение.

В нашем случае момент силы определяется проекцией силы тяжести на тангенциальное направление, т.е.

$$\tau = -mgL \sin \theta \quad (2)$$

Момент инерции маятника выражается формулой:

$$I = mL^2 \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$-mgL \sin \theta = mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad (5)$$

3 Точное решение

Для корректного описания колебательной системы нужно решать уравнение.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (6)$$

Мы будем рассматривать колебания при начальных условиях:

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \left(\frac{d\theta}{dt} \right) (t = 0) = 0 \quad (7)$$

где θ_0 - амплитуда колебаний

Понизим порядок данного уравнения умножив на интегрирующий множитель $\frac{d\theta}{dt}$. Получим уравнение:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{L} \cos\theta \right) = 0 \quad (9)$$

Интегрируем и получаем уравнение 1-го порядка:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 2 \frac{g}{L} \cos\theta = C \quad (10)$$

Находим C:

$$C = 2 \frac{g}{L} \cos\theta_0 \quad (11)$$

Получаем уравнение:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 2 \frac{g}{L} \cos(\theta - \theta_0) = 0 \quad (12)$$

Применим тригонометрическую формулу двойного угла:

$$\cos\theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (13)$$

в следствии чего получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} - 2 \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 0 \quad (14)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{4g}{L} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (15)$$

Введем обозначения:

$$y = \sin \frac{\theta}{2} \text{ и } k = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \quad (16)$$

Исходя из уравнения (7) получаем:

$$y(0) = \sqrt{k} \quad (17)$$

Выразим $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (18)$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (19)$$

Выразим $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4}{\cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{4}{1-y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (20)$$

Из (15):

$$\frac{4}{1-y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{L} (k-y^2) \quad (21)$$

Из чего получим:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L} k (1-y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k}\right) \quad (22)$$

Введем обозначения:

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{L}} \text{ и } z = \frac{y}{\sqrt{k}} \quad (23)$$

Из (22) получаем:

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = (1-z^2)(1-zk^2) \quad (24)$$

$$z(0) = 1 \quad \left(\frac{dz}{d\tau}\right)(\tau=0) = 0 \quad (25)$$

Выразим $d\tau$ из (24):

$$d\tau = \pm \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}} \quad (26)$$

Интегрируем по отрезку $[1, z]$

$$\tau = - \int_1^z \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k\beta^2)}} \quad (27)$$

Уравнение (27) также может быть представлено в виде:

$$\tau = \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k\beta^2)}} - \int_0^z \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k\beta^2)}} \quad (28)$$

Интеграл

$$F(\gamma; k) = \int_0^{\sin \gamma} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (29)$$

называется эллиптическим интегралом первого рода. А интеграл

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (30)$$

называется полным эллиптическим интегралом первого рода.

Также эллиптический синус задаётся как:

$$sn(u; k) = \sin \gamma \quad (31)$$

Уравнение (28) может быть записано так:

$$\tau = K(k) - F(\arcsin z; \sqrt{k}) \quad (32)$$

$$F(\arcsin z; \sqrt{k}) = K(k) - \tau \quad (33)$$

Можем выразить с помощью эллиптического синуса:

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} = sn \left(K \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) - \sqrt{\frac{g}{L}} t; \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (34)$$

Выразим θ как функцию от t :

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left[\sin \frac{\theta_0}{2} sn \left(K \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) - \sqrt{\frac{g}{L}} t; \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \right] \quad (35)$$

4 Приближенное решение

4.1 Малые колебания

В случае малых колебаний полагают, что $\sin \alpha \approx \alpha$. В результате возникает линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad (36)$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{g}{L} = 0 \quad (37)$$

Получим два комплексно-сопряженных корня

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (38)$$

Запишем решение уравнения

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t + \theta_1 \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad (39)$$

Получаем период малых колебаний

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \delta \right) \quad (40)$$

где θ_0 - это амплитуда колебаний а δ - начальная фаза колебаний

4.2 Разложение в ряд Фурье

Разложим полученную выше $\theta(t)$ в ряд Фурье:

$$\theta(t) = 8 \sum_{n \geq 1 \text{ odd}} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n} \frac{q^{n/2}}{1 + q^n} \cos(n\omega t) \quad (41)$$

Где q - эллиптический ном $q = \exp(-\pi K'/K)$ и ω - угловая частота.
Введем обозначение:

$$\epsilon = \frac{1 - \sqrt{\cos \frac{\theta_0}{2}}}{2 + 2\sqrt{\cos \frac{\theta_0}{2}}} \quad (42)$$

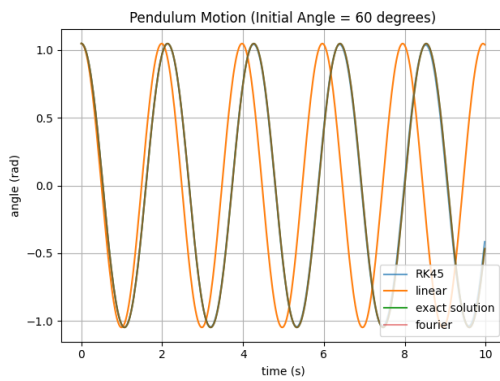
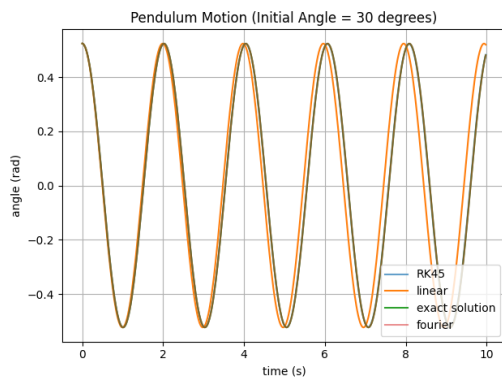
тогда можем представить q таким образом:

$$q = \epsilon + 2\epsilon^5 + 15\epsilon^9 + 150\epsilon^{13} + 1707\epsilon^{17} + 20910\epsilon^{21} + \dots \quad (43)$$

4.3 Использование численных методов Рунге-Кутты

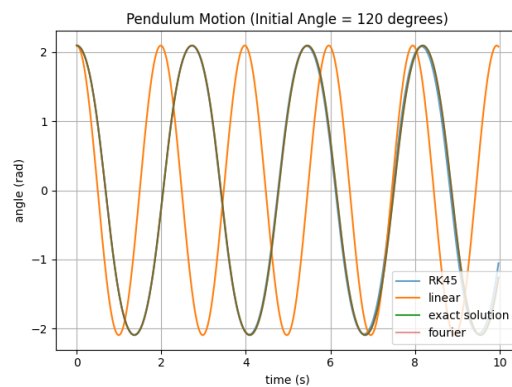
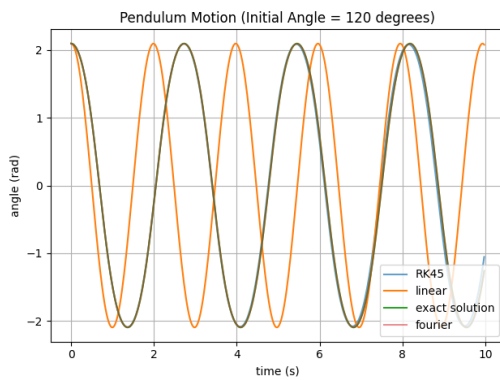
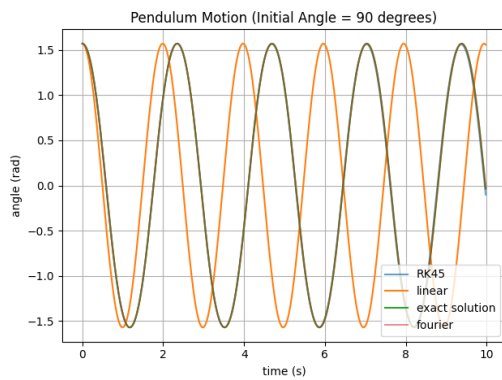
Для подсчета можно также использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка для достаточно точных вычислений.

Так, если у нас есть $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, можем вычислить приближенное значение в следующих точках $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
 h - это величина сетки по x , тогда ошибка на одном шаге будет $\mathcal{O}(h^5)$



5 Моделирование

5.1 Анализ методов вычисления



По графикам можем предположить, что разложение в ряд Фурье является более точным, чем метод Рунге-Кутты. Линейное же решение дает

существенные отклонения уже при 30 градусах.

5.2 Особенности реализации

Поскольку движение маятника является периодическим, то имеет смысл просчитать значения только один раз и далее использовать только готовые значения, не пересчитывая каждый раз, это открывает возможность для ещё одной оптимизации, несколько маятников с одинаковой моделью движения могут разделять просчитанные значения функции.

Для вычислений был выбран метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, как простой и вполне подходящий для данной задачи.

Теперь самое интересное! Представьте, что Вы - котик, путешествующий во сне по раскачивающимся клубкам мироздания и чем больше клубков Вы соберете, тем мощнее будут Ваши лапищи.

Игровая механика схожа с *angry birds*. Выбираем направление полета котика, силу прыжка, целью же является приземление кота на маятник. Важно, что прыгать на один и тот же маятник нельзя. Удачи!