Дифференциальное уравнение движения маятника

Раков Николай, Булкина Милена
M3236

14 января 2021 г.

Содержание

1 Математический маятник

Математический маятник представляет собой идеальную модель, в которой материальная точка массой m подвешена на невесомой и нерастяжимой струне. Когда маятник смещен из своего исходного положения в начальный угол и отпущен, периодическое движение свободно качается взад-вперед.

2 Дифференциальное уравнение движения

Запишем второй закон Ньютона для вращательного движения:

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1}$$

где τ - момент силы, I - момент инерции тела относительно оси вращения, α - угловое ускорение.
В нашем случае момент силы определяется проекцией силы тяжести на тангенциальное направление, т.е.

$$\tau = -mgL\sin\theta \tag{2}$$

Момент инерции маятника выражается формулой:

$$I = mL^2 \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$-mgL\sin\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{4}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sin\theta \tag{5}$$

3 Точное решение

Для корректного описания колебательной системы нужно решать уравнение.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}sin\theta = 0 \tag{6}$$

Мы будем рассматривать колебания при начальных условиях:

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)(t=0) = 0 \tag{7}$$

где θ_0 - амплитуда колебаний
Понизим порядок данного уравнения умножив на интегрирующий множитель $\frac{d\theta}{dt}$. Получим уравнение:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L}sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{g}{L}cos\theta\right) = 0 \tag{9}$$

Интегрируем и получаем уравнение 1-го порядка:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{g}{L}cos\theta = C \tag{10}$$

Находим С:

$$C = 2\frac{g}{L}cos\theta_0 \tag{11}$$

Получаем уравнение:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{g}{L}cos\left(\theta - \theta_0\right) = 0 \tag{12}$$

Применим тригонометрическую формулу двойного угла:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{13}$$

в следствии чего получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} - 2\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{sin^2\frac{\theta_0}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}} = 0 \tag{14}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{L}\left(sin^2\frac{\theta_0}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{15}$$

Введем обозначения:

$$y = sin\frac{\theta}{2} \text{ и } k = sin^2\frac{\theta_0}{2} \tag{16}$$

Исходя из уравнения (7) получаем:

$$y(0) = \sqrt{k} \tag{17}$$

Выразим $\dfrac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{dt} \tag{18}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{19}$$

Выразим $\dfrac{d\theta}{dt}$:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{4}{1-y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{20}$$

Из (15):

$$\frac{4}{1-y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{L}\left(k-y^2\right) \tag{21}$$

Из чего получим:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}k\left(1-y^2\right)\left(1-\frac{y^2}{k}\right) \tag{22}$$

Введем обозначения:

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{L}} \text{ и } z = \frac{y}{\sqrt{k}} \tag{23}$$

Из (22) получаем:

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = (1-z^2)(1-zk^2) \tag{24}$$

$$z(0) = 1 \quad \left(\frac{dz}{d\tau}\right)(\tau = 0) = 0 \tag{25}$$

Выразим dτ из (24):

$$d\tau = \pm\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}} \tag{26}$$

Интегрируем по отрезку [1, z]

$$\tau = -\int_1^z \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k\beta^2)}} \tag{27}$$

Уравнение (27) также может быть представлено в виде:

$$\tau = \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k\beta^2)}} - \int_0^z \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k\beta^2)}} \tag{28}$$

Интеграл

$$F\left(\gamma; k\right) = \int_0^{sin\gamma} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{29}$$

называется эллиптическим инегралом первого рода. А интеграл

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{30}$$

называется полным эллиптическим интегралом первого рода.
Также эллиптический синус задаётся как:

$$sn(u; k) = \sin\gamma \tag{31}$$

Уравнение (28) может быть записано так:

$$\tau = K(k) - F\left(\arcsin z;\ \sqrt{k}\right) \tag{32}$$

$$F\left(\arcsin z;\ \sqrt{k}\right) = K(k) - \tau \tag{33}$$

Можем выразить с помощью эллиптического синуса:

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}} = sn\left(K\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \sqrt{\frac{g}{L}}t;\ \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) \tag{34}$$

Выразим θ как функцию от t:

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[sin\frac{\theta_0}{2}sn\left(K\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \sqrt{\frac{g}{L}}t;\ \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)\right] \tag{35}$$

4 Приближенное решение

4.1 Малые колебания

В случае малых колебаний полагают, что $\sin\alpha \approx \alpha$. В результате возникает линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{36}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{g}{L} = 0 \tag{37}$$

Получим два комплексно-сопряженных корня

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{38}$$

Запишем решение уравнения

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{L}}t + \theta_1 \sin\sqrt{\frac{g}{L}}t \tag{39}$$

Получаем период малых колебаний

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \delta\right) \tag{40}$$

где θ_0 - это амплитуда колебаний а δ - начальная фаза колебаний

4.2 Разложение в ряд Фурье

Разложим полученную выше $\theta(t)$ в ряд Фурье:

$$\theta(t) = 8 \sum_{n\geq 1 \text{ odd}} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n} \frac{q^{n/2}}{1+q^n} \cos(n\omega t) \tag{41}$$

Где q - эллиптический ном $q = \exp(-\pi K'/K)$ и ω - угловая частота.
Введем обозначение:

$$\epsilon = \frac{1 - \sqrt{\cos\frac{\theta_0}{2}}}{2 + 2\sqrt{\cos\frac{\theta_0}{2}}} \tag{42}$$

тогда можем представить q таким образом:

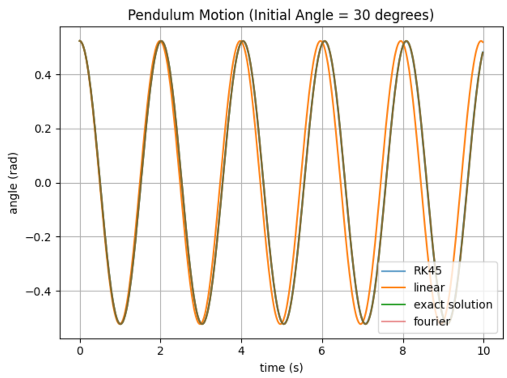
$$q = \epsilon + 2\epsilon^5 + 15\epsilon^9 + 150\epsilon^{13} + 1707\epsilon^{17} + 20910\epsilon^{21} + \cdots \tag{43}$$

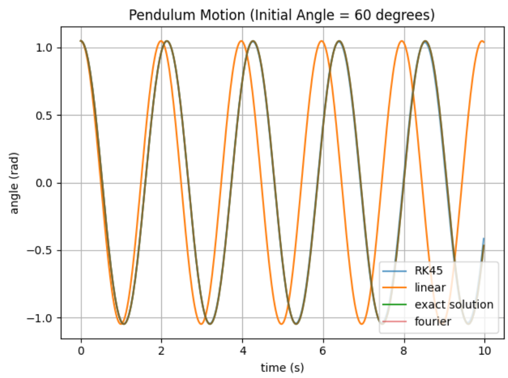
4.3 Использование численных методов Рунге-Кутты

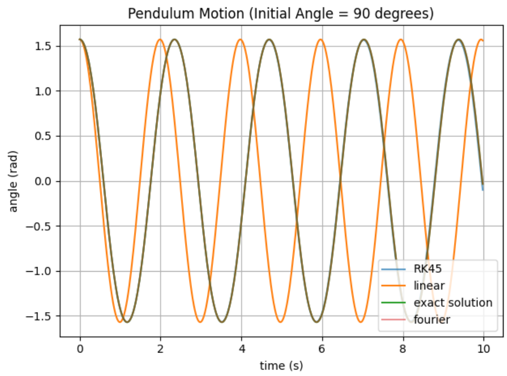
Для подсчета можно также использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка для достаточно точных вычислений.
Так, если у нас есть $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$, можем вычислить приближенное значение в следующих точках $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
h - это величина сетки по x, тогда ошибка на одном шаге будет $\mathcal{O}(h^5)$

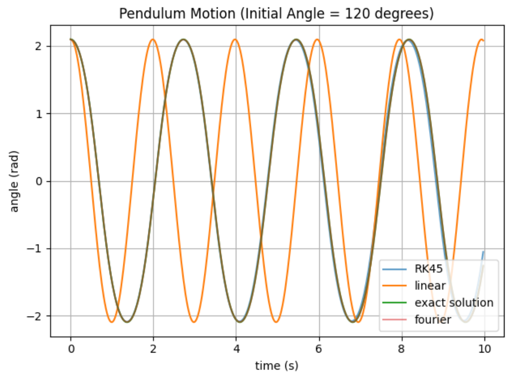
5 Моделирование

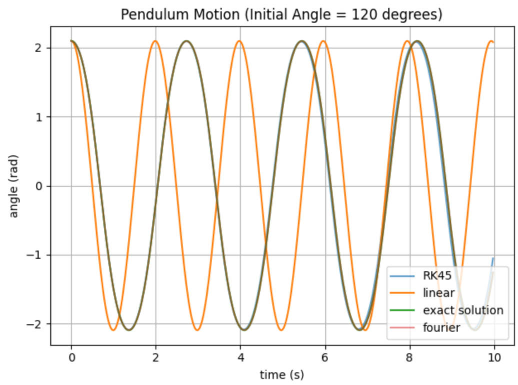
5.1 Анализ методов вычисления











По графикам можем предположить, что разложение в ряд Фурье является более точным, чем метод Рунге-Кутта. Линейное же решение дает существенные отклоения уже при 30 градусах.

5.2 Особенности реализации

Поскольку движение маятника является периодическим, то имеет смысл просчитать значения только один раз и далее использовать только готовые значения, не пересчитывая каждый раз, это открывает возможность для ещё одной оптимизации, несколько маятников с одинаковой моделью движения могут разделять просчитанные значения функции.

Для вычислений был выбран метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, как простой и вполне подходящий для данной задачи.

Теперь самое интересное! Представьте, что Вы - котик, путешествующий во сне по раскачивающимся клубкам мироздания и чем больше клубков Вы соберете, тем мощнее будут Ваши лапищи.

Игровая механика схожа с angry birds. Выбираем направление полета котика, силу прыжка, целью же является приземление кота на маятник. Важно, что прыгать на один и тот же маятник нельзя. Удачи!