

НИУ ИТМО
Факультет Информационных Технологий и Программирования
Направление "Прикладная Математика и Информатика"

Лабораторная работа 3 курса "Методы Оптимизации"

Выполнили Раков Николай, Булкина Милена

Санкт-Петербург, 2021

1 Постановка задания

1. Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения с учетом следующих требований:

- формат матрицы – профильный;
- размерность матрицы, элементы матрицы и вектор правой части читать из файлов, результаты записывать в файл;
- в программе резервировать объём памяти, необходимый для хранения в нем только одной матрицы и необходимого числа векторов (то есть треугольные матрицы, полученные в результате разложения, должны храниться на месте исходной матрицы);
- элементы матрицы обрабатывать в порядке, соответствующем формату хранения, то есть необходимо работать именно со столбцами верхнего и строками нижнего треугольников.

2. Провести исследование реализованного метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания (то есть оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения).

- Оценить погрешность решения для каждого k , для которого система вычислительно разрешима.
- Для одного из значений k попытаться найти операцию, вызывающую скачкообразное накопление погрешности, пояснить полученные результаты.

3. Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта различной размерности. Матрица Гильберта размерности k строится следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, i, j = \overline{1, k}$$

4. Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для плотных матриц. Сравнить метод Гаусса по точности получаемого решения и по количеству действий с реализованным прямым методом LU – разложения.

5. Реализовать метод сопряженных градиентов для решения СЛАУ, матрица которых хранится в разреженном строчно – столбцовом и является симметричной.

2 Формат хранения матриц

2.1 Плотный

Плотный формат хранения матриц используется, когда матрица не обладает определенной структурой и имеет малые размеры. Этот формат требует $\mathcal{O}(n^2)$ памяти.

2.2 Профильный

Профильный формат хранения матриц используется, когда ненулевые элементы матрицы расположены в произвольном порядке, но при этом они сосредоточены у главной диагонали. Этот формат занимает меньше памяти, чем плотный, если ненулевые элементы плотно расположены около главной диагонали.

Массивы, необходимые для хранения профильной квадратной матрицы:

- Массивы al и au - вещественные массивы, которые хранят внедиагональные элементы нижнего (по строкам) и верхнего (по столбцам) треугольника матрицы.
- Массив $ia[n]$ хранит информацию о профиле. Он содержит указатели начала строк (столбцов) нижнего (верхнего) треугольника в массиве al (au). Индексный массив ia формируется следующим образом:
 - первые два элемента индексного массива ia всегда равны 1: $ia[1] = ia[2] = 1$, так как в первой строке в нижнем треугольнике нет внедиагональных элементов
 - к элементу $ia[k]$ добавляется количество элементов в профиле k -ой строки и получается элемент $ia[k + 1]$.
- $di[n]$ - вещественный массив. Он хранит все диагональные элементы.

2.3 Разреженный строчно-столбцовый симметричный формат

В отличие от профильного формата дополнительно необходим еще один массив, содержащий информацию о положении внедиагонального элемента в строке (для нижнего треугольника) или в столбце (для верхнего

треугольника). Используется, когда количество нулевых элементов велико.

Необходимые массивы для данного формата:

- Вещественные массивы `al` и `au`, которые хранят внедиагональные элементы нижнего (по строкам) и верхнего (по столбцам) треугольника матрицы.
- Целочисленный массив `ja` хранит номера столбцов (строк) внедиагональных элементов нижнего (верхнего) треугольника матрицы.
- Целочисленный массив `ia[n]` хранит указатели начала строк (столбцов) в массивах `ja`, `al` и `au`.

3 Решение СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

3.1 Прямой ход