Algorithmen und Datenstrukturen Übung 6

3) Kruskal's Algorithmus mit Union-Find-Datenstruktur

Seien die Kanten e_x zwischen zwei Knoten (A,B) mit dem Gewicht w_1, wie folgt bezeichnet:
e_1 = (1,2) $\rightarrow w_1 = 10$
e_2 = (2,3) $\rightarrow w_2 = 10$
e_3 = (3,4) $\rightarrow w_3 = 1$
e_4 = (4,5) $\rightarrow w_4 = 5$
e_5 = (5,6) $\rightarrow w_5 = 9$
e_6 = (6,1) $\rightarrow w_6 = 8$
e_7 = (6,7) $\rightarrow w_7 = 4$
e_8 = (5,7) $\rightarrow w_8 = 3$
e_9 = (3,7) $\rightarrow w_9 = 4$
e_{10} = (2,7) $\rightarrow w_{10} = 3$
e_{11} = (6,2) $\rightarrow w_{11} = 6$
e_{12} = (3,5) $\rightarrow w_{12} = 2$

Kantensortierung (aufsteigend):
e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_9, e_7, e_4, e_{11}, e_6, e_5, e_1, e_2

For-Schleife:

1. Durchlauf:
for e_3 = (3,4)
$\pi(3) \neq \pi(4)$
A = A $\cup$ {(3,4)} = {e_3}
Partition = {{3,4}, {1}, {2}, {5}, {6}, {7}}

2. Durchlauf:
for e_{12} = (3,5)
$\pi(3) \neq \pi(5)$
A = {e_3, e_{12}}
Partition = {{3,4,5}, {1}, {2}, {6}, {7}}

3. Durchlauf:
for e_{10} = (2,7)
$\pi(2) \neq \pi(7)$
A = {e_3, e_{12}, e_{10}}
Partition = {{3, 4, 5}, {1}, {2, 7}, {6}}

4. Durchlauf:
for e_8 = (5,7)
$\pi(5) \neq \pi(7)$
A = {e_3, e_{12}, e_{10}, e_8}
Partition = {{3, 4, 5, 2, 7}, {1}, {6}}

5. Durchlauf:
for e_9 = (3,7)
$\pi(3) = \pi(7)$
keine Veränderung:
A = $\{e_3, e_{12}, e_{10}, e_8\}$
Partition = $\{\{3, 4, 5, 2, 7\}, \{1\}, \{6\}\}$

6. Durchlauf:
for e_7 = (6,4)
$\pi(6) \neq \pi(4)$
A = $\{e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_7\}$
Partition = $\{\{3, 4, 5, 2, 7, 6\}, \{1\}\}$

7. Durchlauf:
for e_4 = (4,5)
$\pi(4) = \pi(5)$
keine Veränderung:
A = $\{e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_7\}$
Partition = $\{\{3, 4, 5, 2, 7, 6\}, \{1\}\}$

8. Durchlauf:
for e_{11} = (6,2)
$\pi(6) = \pi(2)$
keine Veränderung:
A = $\{e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_7\}$
Partition = $\{\{3, 4, 5, 2, 7, 6\}, \{1\}\}$

9. Durchlauf:
for e_6 = (6,1)
$\pi(6) \neq \pi(1)$
A = $\{e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_7, e_6\}$
Partition = $\{\{3, 4, 5, 2, 7, 6, 1\}\}$
→ hier könnte man schon aufhören, da alle Knoten nun 'in einem Baum' zusammenhängen, der Algorithmus läuft jedoch noch durch folgende Schritte:

10. Durchlauf:
for e_5 = (5,6)
$\pi(6) = \pi(6)$
keine Veränderung:
A = $\{e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_7, e_6\}$
Partition = $\{\{3, 4, 5, 2, 7, 6, 1\}\}$

11. Durchlauf:
for e_1 = (1,2)
$\pi(1) = \pi(2)$
keine Veränderung:
A = $\{e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_7, e_6\}$
Partition = $\{\{3, 4, 5, 2, 7, 6, 1\}\}$

12. Durchlauf:
for e_2 = (2,3)
$\pi(2) = \pi(3)$
keine Veränderung:
A = $\{e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_7, e_6\}$
Partition = {{3, 4, 5, 2, 7, 6, 1}}

Somit liefert der Algorithmus den folgenden minimalen Spannbaum für den gegebenen Graphen:
$e_3, e_{12}, e_{10}, e_8, e_7, e_6$