Aufgabenblatt 4 - Aufgabe 1

1. Dezember 2014

(a) Um die höchst-mögliche Sprosse mit nur 2 Gläsern zufinden, lassen wir ein Glas von jeder $\sqrt{n}$-ten Sprosse fallen. Wenn das Glas bei der k-ten Sprosse zerbricht, muss die gesuchte Sprosse zwischen der k-ten und der $(k-1)$-ten Sprosse liegen. Somit haben wir die möglichen Sprossen auf $\sqrt{n}$ eingegrenzt. Diese können wir nun naiv von unten durchsuchen.
Sowohl das erste Eingrenzen als auch das genaue Suchen benötigen maximal $O\left(\sqrt{n}\right)$ Zeit, was zusammen $O\left(2\sqrt{n}\right) = O\left(\sqrt{n}\right)$ ergibt. Dies liegt in $o(n)$.
Die gesamte Strategie funktioniert ohne Anpassungen nur, wenn $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ ist, also wenn $n = m^2$ mit $m \in \mathbb{N}$ gilt.
Wenn $n \neq m^2$ mit $m \in \mathbb{N}$, führt man obige Strategie für das größte k mit $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$ und $k < m$ durch. Im worst-case verlängert sich so die Laufzeit um maximal $O(\sqrt{m-k})$.

(b) Um die obige Strategie auf die Verwendung von beliebig vielen Gläsern anzupassen, wenden wir den Teil der obigen Strategie, der die Sprossen in $\sqrt{n}$ Teile spaltet, mehrmals an. Als Beispiel sei $n = 81$: Da $\sqrt{81} = 9$ prüfen wir jede 9-te Sprosse. Sobald das Glas bricht, führen wir den Algorithmus für die verbliebenden Sprossen erneut aus.