ANALISIS NUMERICO
EXAMEN 4

ALEXIS ADRIAN CARRILLO MEDINA (316733780)

1. Derivación Numérica

1.1. Emplea las definiciones de diferencias hacia adelante y hacia atrás para encontrar una aproximación para la primera derivada de $f(x)$, completa las tablas. Y emplea diferencias centradas para estimar el valor de la derivada (solo en aquel punto x que sea posible)

a)

x	f(x)	f'(x)
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

Solución

Diferencias hacia adelante

$$f'(0.5) = \frac{f(0.6) - f(0.5)}{0.6 - 0.5} = \frac{0.5646 - 0.4794}{0.1} = 0.852$$

$$f'(0.6) = \frac{f(0.7) - f(0.6)}{0.7 - 0.6} = \frac{0.6442 - 0.5646}{0.1} = 0.796$$

Diferencias hacia atrás

$$f'(0.7) = \frac{f(0.7) - f(0.6)}{0.7 - 0.6} = \frac{0.6442 - 0.5646}{0.1} = 0.796$$

$$f'(0.6) = \frac{f(0.6) - f(0.5)}{0.6 - 0.5} = \frac{0.5646 - 0.4794}{0.1} = 0.852$$

Diferencias centradas

$$f'(0.6) = \frac{f(0.7) - f(0.5)}{0.7 - 0.5} = \frac{0.6442 - 0.4794}{0.2} = 0.824$$

x	f(x)	f'(x)
0.5	0.4794	0.852
0.6	0.5646	0.824
0.7	0.6442	0.796

b)

x	f(x)	f'(x)
0.0	0.0000	
0.2	0.7414	
0.4	1.3718	

Solución

Diferencias hacia adelante

$$f'(0.0) = \frac{f(0.2) - f(0.0)}{0.2 - 0.0} = \frac{0.7414 - 0.0000}{0.2} = 3.707$$

$$f'(0.2) = \frac{f(0.4) - f(0.2)}{0.4 - 0.2} = \frac{1.3718 - 0.7414}{0.2} = 3.152$$

Diferencias hacia atrás

$$f'(0.4) = \frac{f(0.4) - f(0.2)}{0.4 - 0.2} = \frac{1.3718 - 0.7414}{0.2} = 3.152$$

$$f'(0.2) = \frac{f(0.2) - f(0.0)}{0.2 - 0.0} = \frac{0.7414 - 0.0000}{0.2} = 3.707$$

Diferencias centradas

$$f'(0.2) = \frac{f(0.4) - f(0.0)}{0.4 - 0.0} = \frac{1.3718 - 0.0000}{0.4} = 3.4295$$

x	f(x)	f'(x)
0.0	0.0	3.707
0.2	0.7414	3.4295
0.4	1.3718	3.152

1.2. Muestre el desarrollo para llegar a las siguientes aproximaciones de la segunda derivada

$$f''(x) \approx \frac{f(x) - 2f(x+\Delta) + f(x+2\Delta)}{\Delta^2}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2\Delta) - 2f(x) + f(x-2\Delta)}{4\Delta^2}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2\Delta) - f(x+\Delta) - f(x-\Delta) + f(x-2\Delta)}{2\Delta^2}$$

Demostración

Primero, aproximaremos por diferencias hacia atrás

$$f''(x) \approx \frac{f'(x) - f'(x-\Delta)}{\Delta} \approx \frac{\frac{f(x)-f(x-\Delta)}{\Delta} - \frac{f(x-\Delta)-f(x-2\Delta)}{\Delta}}{\Delta}$$

$$= \frac{f(x) - 2f(x+\Delta) + f(x+2\Delta)}{\Delta^2}$$

Ahora, aproximamos por diferencias centradas

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+\Delta) - f'(x-\Delta)}{2\Delta} \approx \frac{\frac{f(x+2\Delta)-f(x)}{2\Delta} - \frac{f(x)-f(x-2\Delta)}{2\Delta}}{2\Delta}$$
$$= \frac{f(x+2\Delta) - 2f(x) + f(x-2\Delta)}{4\Delta^2}$$

Por ultimo; aproximamos por diferencias centradas, luego por diferencias hacia adelante y hacia atrás

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+\Delta) - f'(x-\Delta)}{2\Delta} \approx \frac{\frac{f(x+2\Delta)-f(x+\Delta)}{\Delta} - \frac{f(x-\Delta)+f(x-2\Delta)}{\Delta}}{2\Delta}$$
$$= \frac{f(x+2\Delta) - f(x+\Delta) - f(x-\Delta) + f(x-2\Delta)}{2\Delta^2}$$

1.3. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = t + y(t)$$

Con las condiciones

1. $y(0) = 1$
2. $t \in [0, 1]$
3. $dt = h = 0.2$

Muestra:
La discretización que empleaste

Temporal: $t_n = n(0.2), \quad n = 0, \ldots, 5$

La solución numérica para esta ecuación
El proceso que llevaste acabo para contestar esta pregunta

Dada la discretización y usando diferencias finitas, tenemos que la ecuación se transforma en

$$\frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} = t_i + y(t_i)$$

Usamos la notación $y_i = y(t_i)$, $y_{i+1} = y(t_i + h)$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = t_i + y_i \Rightarrow y_{t+1} = h(t_i + y_i) + y_i$$

Por lo tanto la aproximación numérica es

$$y_{i+1} = y_i(h + 1) + ht_i$$

Por lo que la solución numérica es

n	t	y(t)
0	0.0	1
1	0.2	1.2
2	0.4	1.48
3	0.6	1.856
4	0.8	2.3472
5	1	2.97664

2. Integración numérica

2.1. Calcule $\int_1^2 \frac{x^3}{1+x^{1/2}}dx$ empleando

2.1.1 Método del trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x^3}{1+x^{1/2}}dx \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1^3}{1+(1)^{1/2}}+\frac{2^3}{1+2^{1/2}}\right] \approx 1.90685424$$

2.1.2 Metodo de Simpson 1/3

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{b+a}{2})+f(b)\right]$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x^3}{1+x^{1/2}}dx \approx \frac{1}{6}\left[\frac{1^3}{1+(1)^{1/2}}+4\frac{1.5^3}{1+(1.5)^{1/2}}+\frac{2^3}{1+2^{1/2}}\right] \approx 1.64697$$

2.1.2 Metodo de Simpson 3/8

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f(a+\frac{b-a}{3})+3f(a+2\frac{b-a}{3})+f(b)\right]$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x^3}{1+x^{1/2}}dx \approx \frac{1}{8}\left[\frac{1^3}{1+(1)^{1/2}}+3\frac{1.333^3}{1+(1.333)^{1/2}}+3\frac{1.666^3}{1+(1.666)^{1/2}}+\frac{2^3}{1+2^{1/2}}\right] \approx 1.64704$$

2.2. Construye una tabla que muestre el valor obtenido por cada método y su error respecto a la solución analítica

Método	aproximación	solución analítica	error
Trapecio	1.90685424	1.647107951640862	0.25974
Simpson 1/3	1.64697	1.647107951640862	0.00013
Simpson 3/8	1.64704	1.647107951640862	0.00006

3. Método de Monte-Carlo

3.1. Resuelve la siguiente integral de forma analítica y mediante el método de Monte-Carlo aproxima la solución para N=1000,N=10000,N=100000. Crea una tabla donde se muestre la corporación de los resultados así como su porcentaje de error

$$\int_1^5\int_1^4\int_2^3 (x^2+y^2+z^2)dxydz$$

Solucion

$$\int_2^3 (x^2+y^2+z^2)dx = \frac{19}{3}+y^2+z^2$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{19}{3} + y^2 + z^2 dy = 3z^2 + \frac{140}{3} - \frac{20}{3} = 3z^2 + 40$$

$$\Rightarrow \int_1^5 3z^2 + 40 dx = 284$$

La siguiente tabla fue creada usando el Método de Monte-Carlo definido en el código de la parte Practica

N	aproximación	solución analítica	error
1000	286.1058673764758	284	2.10586
10000	284.1537726614581	284	0.153772
100000	283.996709681795	284	0.00329

4. Parcial Practico

4.1. Justifica en la sección teórica ,¿como es que este método sea programado en paralelo y mediante que tipo de dispositivo CPU o GPU?

Supongamos que tuviéramos un sistema de ecuaciones diferenciales, ordinarios o parciales, de $N \times N$. Para programar en paralelo este método necesitaríamos fijarnos cuales ecuaciones son independientes entre si, por ejemplo en la ecuación de calor si $j \neq i+1, i, i-1$ las T_i^n, T_j^n son independientes entre si, entonces podemos calcularlas por separado en distintos núcleos del CPU o GPU.
Por lo que para programar este método en paralelo identificamos las variables que son independientes entre si, les asignamos a cada núcleo una cantidad especifica de variables, y hacemos los cálculos, de cada variable, en cada núcleo: dado que los cálculos no son tan costosos(son sumas o multiplicaciones) y crecen en función de N entonces nos conviene utilizar la GPU.

4.2. Investiga, si es posible convertir este método en una versión en paralelo y explica en la sección teórica de este parcial, como llevarlo acabo o en su defecto, explica el porque no es posible programarlo en paralelo

Si es posible programarlo en paralelo.
Para esto notemos que en realidad todas las variables aleatorias que simulamos son independientes entre si, entonces es posible que a cada núcleo le asignemos una cierta cantidad de variables aleatorias y que cada núcleo simule de ellas, posteriormente se obtiene los los promedios de todas las variables de los núcleos y de ultimo el promedio total entre cada uno de los núcleos. Ver aquí
Existen otras formas de hacerlo, pero para ello se utiliza otro tipo de montecarlos, como el estratificado, donde cada núcleo simula de variables aleatorios en una cierta región, o el famoso parallel Markov Chain Monte-Carlo