ANALISIS NUMERICO
EXAMEN 2

ALEXIS ADRIAN CARRILLO MEDINA (316733780)

1. Normas Vectoriales

1.1. Demuestre que $||\cdot||_\infty$ es una norma vectorial

Demostración

1) Sea $x \in V$ tal que $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$|x_i| \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} \geq 0 \Rightarrow ||x||_\infty \geq 0$$

2) Sea $x \in V$ tal que $||x||_\infty = 0$

$$\iff max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} = 0 \iff |x_i| \leq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \iff |x_i| = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$\iff x_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \iff x = 0$$

3) Sea $\alpha \in K$ y $x \in V \Rightarrow \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

$$||\alpha x||_\infty = max_{1\leq i\leq n}\{|\alpha x_i|\} = max_{1\leq i\leq n}\{|\alpha||x_i|\} \overbrace{=}^{max.prop.} |\alpha| max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} = |\alpha|||x||_\infty$$

4) Sean $x, y \in V$

$$|x_i + y_i| \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad \leq |x_i| + |y_i| \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad \leq max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} + max_{1\leq i\leq n}\{|y_i|\} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow max_{1\leq i\leq n}\{|x_i + y_i|\} \leq max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} + max_{1\leq i\leq n}\{|y_i|\}$$
$$\Rightarrow ||x + y||_\infty \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$$

Por lo tanto $||\cdot||_\infty$ es norma vectorial

1.2. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $||\cdot||$ la norma vectorial, demostrar las siguientes desigualdades

- $||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$

Demostración

$$||x||_1 = \sum_{i=0}^{n} |x_i| = \sum_{i=0}^{n} |x_i| \cdot 1 \overbrace{\leq}^{Cuachy-Schwarz(1)} \left(\sqrt{\sum_{i=0}^{n} 1}\right) \left(\sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2}\right) = \sqrt{n}||x||_2$$

- $||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=0}^{n}(x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=0}^{n} max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(n \cdot max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\cdot max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} = \sqrt{n}||x||_\infty$$

2. Normas inducidas

2.1. Sea $A, B \in M_{n\times n}$ sobre $\mathbb{R}$, $||\cdot||$ una norma vectorial cualquiera y la definicion $||A|| = sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||}$, demostrar que

$1)||A|| \geq 0, \quad 2)||A|| = 0 \iff A = 0, \quad 3)||\alpha A|| = |\alpha|||A||, \quad 4)||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

Demostración

1) Sean $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \Rightarrow Ax \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$||x|| \geq 0, ||Ax|| \geq 0 \Rightarrow \frac{||Ax||}{||x||} \geq 0 \Rightarrow sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||} \geq 0$$
$$\Rightarrow ||A|| \geq 0$$

2) Supongamos $||A|| = 0$

$$\iff sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||} = 0 \overbrace{\iff}^{||z||\geq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$$
$$\iff ||Ax|| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \iff Ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \iff A = 0$$

3) Sean $\alpha \in R$

$$||\alpha A|| = Sup_{x\neq 0}\frac{||\alpha Ax||}{||x||} = Sup_{x\neq 0}|\alpha|\frac{||Ax||}{||x||} \overbrace{=}^{sup.prop} |\alpha| Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||} = |\alpha|||A||$$

4) Sea $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$

$$\frac{||(A+B)x||}{||x||} \overbrace{\leq}^{||\cdot|| \quad prop.} \frac{||Ax||}{||x||} + \frac{||Bx||}{||x||} \overbrace{\leq}^{Def.} Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||} + Sup_{x\neq 0}\frac{||Bx||}{||x||}$$

Esto es para toda $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, entonces encontramos una cota superior y como el supremo es la mínima cota superior tenemos

$$Sup_{x\neq 0}\frac{||(A+B)x||}{||x||} \leq Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||} + Sup_{x\neq 0}\frac{||Bx||}{||x||} \Rightarrow ||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

2.2. Derivar la formula para calcular $||A||_\infty$, $||A||_\infty = max_{1\leq i\leq n}||a_i||_\infty$

Notemos que en realidad la proposición esta incorrecta y debería ser $||A||_\infty = max_{1\leq i\leq n}||a_i||_1$, puesto a que como esta definida sera el máximo de los máximos de los renglones y en realidad queremos tener el máximo de la suma de los renglones; ahora si

Demostración

$$||Ax||_\infty = ||\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j||_\infty = max_{1\leq i\leq n}|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \leq max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \leq max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|||x||_\infty$$

$$\Rightarrow ||Ax||_\infty \leq ||x||_\infty max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = ||x||_\infty max_{1\leq i\leq n}||a_i||_1$$

$$\Rightarrow \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \leq max_{1\leq i\leq n}||a_i||_1 \Rightarrow Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \leq max_{1\leq i\leq n}||a_i||_1$$

Ahora, consideremos $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ tal que

$$x = \begin{cases} 1, & \text{Si } a_{ij} \geq 0 \\ -1, & \text{Si } a_{ij} < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $||x||_\infty = 1$, entonces

$$Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \geq \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = ||Ax||_\infty \overbrace{\geq}^{max.prop.} |\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j| \overbrace{=}^{x \quad Def.} |\sum_{j=0}^{n}|a_{ij}|| = \sum_{j=0}^{n}|a_{ij}|$$

$$\Rightarrow Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \geq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=0}^{n}|a_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n}||a_i||_1$$

Por lo tanto

$$||A||_\infty = Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \max_{1\leq i\leq n}||a_i||_1$$

2.3. Sea $A \in M_{n\times n}$ sobre $\mathbb{R}$, demostrar las siguientes desigualdades de normas matriciales

- $||A||_1 \leq \sqrt{n}\cdot||A||_2$

Demostración

$$||A||_1 = Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_1}{||x||_1} \overbrace{\leq}^{Eje. \quad 1.2} Sup_{x\neq 0}\frac{\sqrt{n}\cdot||Ax||_2}{||x||_1} \overbrace{\leq}^{||\cdot||_2 \leq ||\cdot||_1} Sup_{x\neq 0}\frac{\sqrt{n}\cdot||Ax||_2}{||x||_2}$$

$$\Rightarrow ||A||_1 \leq \sqrt{n}\cdot Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sqrt{n}\cdot||A||_2$$

- $\sqrt{n}\cdot||A||_2 \leq n\cdot||A||_\infty$

Demostración

$$\sqrt{n}\cdot||A||_2 = \sqrt{n}\cdot Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_2}{||x||_2} \overbrace{\leq}^{Eje.1.2} \sqrt{n}\cdot||A||_2 \sup_{x\neq 0}\frac{\sqrt{n}||Ax||_\infty}{||x||_2} \overbrace{=}^{Sup.prop.} n\cdot Sup_{x\neq o}\frac{||Ax||_\infty}{||x||_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\cdot||Ax||_2 \overbrace{\leq}^{||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_2} n\cdot Sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = n\cdot||A||_\infty$$

2.4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 4 & -5 & 10 \\ 9 & 15 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular las siguientes normas

- $||A||_1$ 1-norma

$$||A||_1 = Max_{1\leq i\leq 3}||a_j||_1 = Max_{1\leq i\leq 3}\{(1+9+4=14),(5+5+15=25),(8+10+2=20)\} = 25$$

- $||A||_\infty$ Norma del supremo

$$||A||_\infty = Max_{1\leq i\leq 3}\{(1+5+8=14),(4+5+10=19),(9+15+2=26)\} = 26$$

- $||A||_2$ Norma espectral
  Calculemos A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & -5 & 15 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^TA = \begin{pmatrix} 90 & 59 & 68 \\ 59 & 141 & -59 \\ 68 & -59 & 310 \end{pmatrix} \Rightarrow A^TA - \lambda I = \begin{pmatrix} 90-\lambda & 59 & 68 \\ 59 & 141-\lambda & -59 \\ 68 & -59 & 310-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det(A^TA - \lambda I) = -\lambda^3 + 541\lambda^2 - 72714\lambda + 1416100 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \approx 23.359..., \quad \lambda_2 \approx 179.0353\ldots \quad \lambda_3 \approx 338.606...$$

$$\Rightarrow ||A||_2 = \sqrt{\lambda_3} \approx 18.401\ldots$$

- $||A||_F$ Norma de Frobenius

$$A^TA = \begin{pmatrix} 90 & 59 & 68 \\ 59 & 141 & -59 \\ 68 & -59 & 310 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A^TA) = 90 + 141 + 310 = 541 \Rightarrow ||A||_F = 23.259...$$

3. Factorizacion y Substituciones

3.1. Emplea algún tipo de factorizacion(A=LU, PA=LU) para encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

<u>Solucion</u>

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvamos para L

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y_0 = 3 \Rightarrow 3(3) + y_1 = 13 \Rightarrow y_1 = 4 \Rightarrow 2(3) + 4 + y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = -6$$

Resolvamos para U

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$3x_2 = -6 \Rightarrow x_2 = -2 \Rightarrow 2x_1 + 2(-2) = 4 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow x_0 + 8 - 8 = 3 \Rightarrow x_0 = 3$$

Por lo tanto la solución es

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.2. Calcula el numero total de operaciones (en términos de n) para el algoritmo de sustitución hacia adelanta. Muestra el desarrollo y concluye a que orden de complejidad pertenece este algoritmo

Demostración

Tenemos que el algoritmo es calcular para cada $1 \leq i \leq n$ la siguiente cantidad

$$y_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} l_{ij} y_j$$

Entones,para cada $1 \leq i \leq n$ tenemos 1 resta, $i-2$ sumas e $i-1$ multiplicaciones, por lo que en total hay las siguientes operaciones

$$\sum_{i=0}^{n} 1 + (i-2) + (i-1) = \sum_{i=0}^{n} 2i - 2 = -2n + 2\sum_{i} i = -2n + n(n+1) = n^2 - n = n(n-1)$$

Es decir se hacen $n(n-1)$ operaciones si tenemos una matriz de $n \times n$ y por ende la complejidad en tiempo es $O(n^2)$

4. Estabilidad de algoritmos

4.1. Calcula los números de condición $\kappa_1, \kappa_\infty, \kappa_2, \kappa_F$ de la siguiente matriz, muestra los cálculos realizados

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>
Notemos que

$$det(A) = -19$$

Entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/19 & 6/19 \\ 9/19 & -7/19 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora las normas

$$||A||_1 = \{(17+9=16), (6+5=11)\} = 17, \quad ||A^{-1}|| = \{(14/19), (13/19)\} = 14/19$$

$$\Rightarrow \kappa_1 = ||A||_1||A^{-1}||_1 = \frac{224}{19}$$

$$||A||_\infty = \{(7+6=13), (9+5=14)\} = 14, \quad ||A^{-1}|| = \{(11/19), (16/19)\} = 16/19$$

$$\Rightarrow \kappa_\infty = ||A||_\infty||A^{-1}||_\infty = \frac{224}{19}$$

Para la norma 2

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 130 & 87 \\ 87 & 61 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A^T A - \lambda I) = \lambda^2 - 191\lambda + 361$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-3\sqrt{3893}+191}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3\sqrt{3893}+191}{2}$$

$$\Rightarrow ||A||_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 13.75103...$$

$$A^{-1^T} = \begin{pmatrix} -5/19 & 9/19 \\ 6/19 & -7/19 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1^T} A = \begin{pmatrix} 106/361 & -93/361 \\ -93/361 & 85/361 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A^T A - \lambda I) = 361\lambda^2 - 191\lambda + 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-3\sqrt{3893}+191}{722}, \quad \lambda_2 = \frac{3\sqrt{3893}+191}{722}$$

$$||A^-1||_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 0.7237...$$

$$\kappa_2 = ||A||_2||A^-1||_2 \approx 9.9521...$$

Para la norma de Frobenius

$$||A||_F = \sqrt{130+61} = \sqrt{191} \approx 13.8202...$$

$$||A^-1||_F = \sqrt{\frac{191}{361}} \approx 0.727..$$

$$\Rightarrow \kappa_F \approx 10.0526...$$

5. Examen Practico

1.1.2

En el caso de mi algoritmo las soluciones, el numero de iteraciones era el mismo para todas las normas No obstante, los criterios relacionados con normas (los que involucran tolerancia) si cambiaban, algunos tenias resultados mayores que otros; lo cual es debido justamente a la desigualdad que existe entre normas $||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_2 \leq ||\cdot||_1$, esto nos aseguraba que la norma infinito iba a acercarse mas rápido a la tolerancia que la norma 1 o 2.

Referencias

[1] Wu, H.-H., and Wu, S. Various proofs of the cauchy-schwarz inequality. *Octogon Mathematical Magazine 17*, 1 (2009), 221–229.