SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA

TAREA 1

Alexis Adrián Carrillo Medina (316733780)

1) Recuerde que la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria Z es invariante bajo el mapeo f si se cumple que:

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(f(Z) \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Denotamos al mapeo logístico como $f_r(x) = rx(1-x)$, $x \in [0,1]$ y $r \in (0,4]$ y a la variable aleatoria asociada a la distribución invariante como X

a) Muestre que

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(X \leq \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{4x}{r}}\right)\right) + \mathbb{P}\left(X \geq \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \tfrac{4x}{r}}\right)\right)$$

Solución

Sea X la v.a. asociada a la distribución invariante y $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que

$$f(X) \leq x \Leftrightarrow rX(1-X) \leq x \Leftrightarrow rX - rX^2 \leq x \Leftrightarrow rX - rX^2 - x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -X^2 + X - \frac{x}{r} \leq 0 \Leftrightarrow X^2 - X + \frac{x}{r} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq X \leq \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4x}{r}}}{2} \text{ ó } \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4x}{r}}}{2} \leq X \leq 1 \quad (*)$$

Notemos que estos dos intervalos son disjuntos.
Ahora, por lo anterior y porque X es invariante bajo f, tenemos que

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(f(X) \leq x) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4x}{r}}}{2} \text{ ó } X \geq \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4x}{r}}}{2}\right)$$

disjuntos

$$= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4x}{r}}}{2}\right) + \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4x}{r}}}{2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X \leq \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{4x}{r}}\right)\right) + \mathbb{P}\left(X \geq \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \tfrac{4x}{r}}\right)\right) \blacksquare$$

b) Muestre que la función de densidad de probabilidad g asociada a X, la distribución invariante bajo f_r, satisface la siguiente ecuación funcional.

$$g(x) = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{4x}{r}}}\left(g\left(\tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{4x}{r}}\right)\right) + g\left(\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \tfrac{4x}{r}}\right)\right)\right)$$

Solución

Recordemos que si $x \in [0,1]$, entonces

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x g(s)\,ds$$

Entonces, como

$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}\left(X \le \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right) + \mathbb{P}\left(X \ge \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right)$$

Por lo tanto (Si recordamos las desigualdades de (*))

$$\int_0^x g(s)ds = \int_0^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4x}{r}}\right)} g(s)ds + \int_{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4x}{r}}\right)}^{1} g(s)ds$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int_0^x g(s)\,ds\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4x}{r}}\right)} g(s)ds + \int_{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4x}{r}}\right)}^{1} g(s)ds\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right)g\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right) - d\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right)g\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{r\sqrt{1-\frac{4x}{r}}}\, g\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right) - \left(-\frac{1}{2}\frac{2}{r\sqrt{1-\frac{4x}{r}}}\right) g\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{r\sqrt{1-\frac{4x}{r}}}\left(g\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right) + g\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\tfrac{4x}{r}}\right)\right)\right) \blacksquare$$

c) Escribe la ecuación funcional para el caso particular en que $r=4$

Solución

Sea $r=4$, entonces

$$g(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left(g\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right) + g\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x}\right)\right)\right) \blacksquare$$

d) Muestre que la función de densidad de probabilidad asociada a la distribución Beta$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ satisface la ecuación funcional del inciso anterior, correspondiente al caso $r=4$.

Solución

Sea $X \sim \text{Beta}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\pi}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

Notemos que

$$g\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x}\right)\right)}} = \frac{2}{\pi\sqrt{x}}$$

$$g\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x}\right)\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}} = \frac{2}{\pi\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left(g\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x}\right)\right) + g\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)\right) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left(\frac{2}{\pi\sqrt{x}} + \frac{2}{\pi\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = g(x)$$

Entonces, la densidad de $X \sim \text{Beta}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ cumple

$$g(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left(g\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right) + g\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x}\right)\right)\right) \blacksquare$$

e) Solucion: Revisar seT1.jl $\blacksquare$

2) Muestre que las Variables aleatorias $U \sim$ Uniforme y Beta (γ, γ) para $\gamma > 0$, son invariantes bajo el mapeo $f(x) = 1 - x$.

Demostración

Sea $U \sim$ Uniforme $(0,1)$, entonces

$$\mathbb{P}(U \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 0 \\ x & \text{Si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

Notemos que

$$\mathbb{P}(f(U) \leq x) = \mathbb{P}(1 - U \leq x) = \mathbb{P}(U \geq 1 - x) = 1 - \mathbb{P}(U \leq 1 - x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } 1-x < 0 \\ 1-(1-x) & \text{Si } 0 < 1-x < 1 \\ 0 & \text{Si } 1-x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{Si } x > 1 \\ x & \text{Si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Si } x < 0 \end{cases} = \mathbb{P}(U \leq x)$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(f(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq x) \Rightarrow U$ es invariante bajo $f(x) = 1 - x$

Sea $X \sim$ Beta(γ, γ), entonces

$$g_X(x) = \frac{\Gamma(\gamma + \gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma)} x^{\gamma - 1}(1-x)^{\gamma - 1} = \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma)^2} x^{\gamma - 1}(1-x)^{\gamma - 1}$$

Por lo que

$$g_{f(X)}(x) = g_X(f^{-1}(x)) \left| \frac{df^{-1}(x)}{dx} \right| = g_X(1-x) = \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma)^2}(1-x)^{\gamma-1}(1-(1-x))^{\gamma - 1}$$

$$= \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma)^2} x^{\gamma-1}(1-x)^{\gamma-1} = g_X(x)$$

Por lo que

$$g_{f(X)}(x) = g_X(x)$$

Entonces $f(X) \sim$ Beta(γ, γ) y en particular

$$\mathbb{P}(f(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Entonces $X \sim$ Beta(γ, γ) es invariante bajo $f(x) = 1 - x$ ■

3) Sea

$$f_{\text{Carpa}}(x) = \begin{cases} 2x & \text{Si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{Si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

el mapeo Carpa.

a) Muestre que la distribución Uniforme $(0,1)$ es invariante bajo el mapeo Carpa

Solución

Sea $U \sim$ Uniforme $(0,1) \Rightarrow U \in [0,1] \Rightarrow U \leq \frac{1}{2}$ o $U > \frac{1}{2}$

Sea $x \in \mathbb{R}$

Por la fórmula de probabilidad total

$$\mathbb{P}(f(U) \leq x) = \mathbb{P}(f(U) \leq x \mid U \leq \tfrac{1}{2})\mathbb{P}(U \leq \tfrac{1}{2}) + \mathbb{P}(f(U) \leq x \mid U > \tfrac{1}{2})\mathbb{P}(U > \tfrac{1}{2})$$

$$= \mathbb{P}(2U \leq x \mid U \leq \tfrac{1}{2})\mathbb{P}(U \leq \tfrac{1}{2}) + \mathbb{P}(2(1-U) \leq x \mid U > \tfrac{1}{2})\mathbb{P}(U > \tfrac{1}{2})$$

Como $U \sim \text{Uniforme}(0,1) \Rightarrow (1-U) \sim \text{Uniforme}(0,1)$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(2U \leq x \mid U \leq \tfrac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \frac{x}{2} < 0 \\ \frac{x/2}{1/2} & \text{Si } 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{Si } \frac{x}{2} > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \mathbb{P}(2(1-U) \leq x \mid U > \tfrac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \frac{x}{2} < 0 \\ \frac{x/2}{1/2} & \text{Si } 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{Si } \frac{x}{2} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $U > \frac{1}{2} \Rightarrow 1-U < \frac{1}{2}$

Y Como

$$\mathbb{P}(U \leq \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(U > \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

Tenemos que

$$\mathbb{P}(2U \leq x \mid U \leq \tfrac{1}{2})\mathbb{P}(U \leq \tfrac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{Si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{Si } x > 1 \end{cases} = \mathbb{P}(2(1-U) \leq x \mid U > \tfrac{1}{2})\mathbb{P}(U > \tfrac{1}{2})$$

Entonces

$$\mathbb{P}(2U \leq x \mid U \leq \tfrac{1}{2})\mathbb{P}(U \leq \tfrac{1}{2}) + \mathbb{P}(2(1-U) \leq x \mid U > \tfrac{1}{2})\mathbb{P}(U > \tfrac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 0 \\ x & \text{Si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

$$= \mathbb{P}(U \leq x)$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(f(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq x) \blacksquare$$

b) Solución: Revisar seT1.jl $\blacksquare$