Problem 1

若 n 是正整数，$A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是非奇异矩阵，并且 $ACB = 2A + 3B$，证明：$BCA = 2A + 3B$.

Problem 2

已知 n 是大于 1 的整数，定义 $f : \mathbb{R}^{n\times n}$ 如下：

$f(A) = \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|$.

证明：f 是 $R^{n\times n}$ 上的相容范数，但不是相容范数.

Problem 3

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $f(X) = AXA$ 在基底

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

下的表示矩阵.

Problem 4

求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准型和极小多项式.

Problem 5

给定正整数 n 和 n 阶实方阵 A, 证明：$\mathrm{rank}(A^n) = \mathrm{rank}(A^{n+1})$.

Problem 6

给定正整数 n 和 n 阶实方阵 A，若对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $x^T Ax = 0$, 证明：$A^T = -A$.

Problem 7

给定大于 1 的正整数 n 和对称三对角矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 若 $a_{i,i+1} \neq 0$ 对 $i = 2, 3, \cdots, n$ 成立，证明：A 没有重特征值.

(注：三对角矩阵是满足当 $|i - j| > 1$ 时，$a_{i,j} = 0$ 的矩阵)

Problem 8

给定正整数 n 及矩阵 $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$，证明：关于 X 的矩阵方程 $AXB = C$ 有解的充要条件是关于 Y 和 Z 的方程组 $AY = ZB = C$ 有解.