

2023年B题讲解与 真题复现

主讲人：颖老师

01

赛题解析

一、赛题解析

问题背景

【真题阐述】 海底地形图作用关键，多波束测深系统因**测量范围大、速度快、精度高**，适合**大面积海底地形勘探**。测线相邻条带需 **10% - 20% 重叠率**，因海底地形复杂，不能简单按平均水深设测线间隔，需建数学模型设计合理间隔，**避免重叠率过高或过低，提升探测效率与准确性**。需要解决的问题如下：

1、测线方向垂直平面与海底坡面交线面角为 α 时：

建立多波束测深覆盖宽度、相邻条带重叠率的数学模型，并用其计算表 1 指标值。

2、待测海域为矩形、测线方向与海底坡面法向水平投影夹角为 β 时：

建立矩形海域多波束测深覆盖宽度模型，用其探究表 2 所列位置的覆盖宽度。

3、矩形海域（南北长 2 海里、东西宽 4 海里、深度 110m，西深东浅）：

综合 1、2 的模型，设计测线，满足测线完全覆盖、测量长度最短、重叠率 $\eta \in [10\%, 20\%]$ 。

4、现有南北长 5 海里、东西宽 4 海里单波束测深数据的海域：

设计多波束测量布线方案，使条带尽可能覆盖海域、 η 尽可能 $\leq 20\%$ 、测线总长度最短。

计算测线总长度、漏测海区占比、 $\eta > 20\%$ 部分总长度。

02

问题一的分析与求解

一、问题一的分析与求解

1. 问题一的分析与求解

【第一小问】：重叠率定义基于水平状态，海底不平坦时坡度影响计算，需修正重叠率以适配复杂地形，通过几何关系简图，在二维平面计算海水深度、覆盖宽度、重复率。求解步骤如下：

一、问题分析与传统定义失效

传统重叠率公式： $\eta = 1 - d/W$

在倾斜海底地形中失效 ($\eta_1 < \eta_2$ ，与实际情况相反)

需要重新定义重叠率以适应倾斜地形

二、改进重叠率定义

新定义： $\eta = 1 - (W - L_{re})/W$

关键概念： $d' = W - L_{re}$ (投影测线间距)

消除坡度影响，适用于各种地形

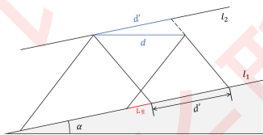


图3 投影测线间距

问题一：坡度影响重叠率计算

修正重叠率适配复杂地形

绘制几何关系简图

二维平面计算深度、覆盖宽度、重复率

一、问题一的分析与求解

问题一：坡度影响重叠率计算

1. 问题一的分析与求解

【第一小问】：重叠率定义基于水平状态，海底不平坦时坡度影响计算，需修正重叠率以适配复杂地形，通过几何关系简图，在二维平面计算海水深度、覆盖宽度、重复率。求解步骤如下：

三、几何模型构建

建立海底坡度角 α 与测量参数关系

海水深度公式： $x_{Dj} = x_{Di} + \Delta d \cdot \tan \alpha$

覆盖宽度分解为左右两部分计算

四、覆盖宽度公式推导

使用正弦定理建立几何关系

最终公式： $W_i = x_{Di} \cdot \sin(\theta/2) [1/\sin((\pi-\theta)/2+\alpha) + 1/\sin((\pi-\theta)/2-\alpha)]$

投影长度： $W_{\text{投影}} = W_{i,\text{总}} \cdot \cos \alpha$

修正重叠率适配复杂地形

绘制几何关系简图

二维平面计算深度、覆盖宽度、重复率

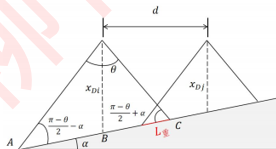


图4 相关位置简图

一、问题一的分析与求解

1. 问题一的分析与求解

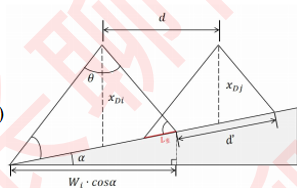
【第一小问】：重叠率定义基于水平状态，海底不平坦时坡度影响计算，需修正重叠率以适配复杂地形，通过几何关系简图，在二维平面计算海水深度、覆盖宽度、重复率。求解步骤如下：

五、重叠率计算模型

基于投影的公式： $\eta = 1 - d'/W$

投影间距： $d' = d \cdot \sin(\pi/2 - \theta/2) / \sin(\pi/2 - \alpha + \theta/2)$

适用于斜面及复杂地形



六、参数计算

输入参数：坡度角 $\alpha=1.5^\circ$ ，开角 $\theta=120^\circ$ ，间距 $d=200\text{m}$ ，中心深度 70m

计算步骤：

计算各点海水深度；计算各点覆盖宽度；计算与前一条测线的重叠率

问题一：坡度影响重叠率计算

修正重叠率适配复杂地形

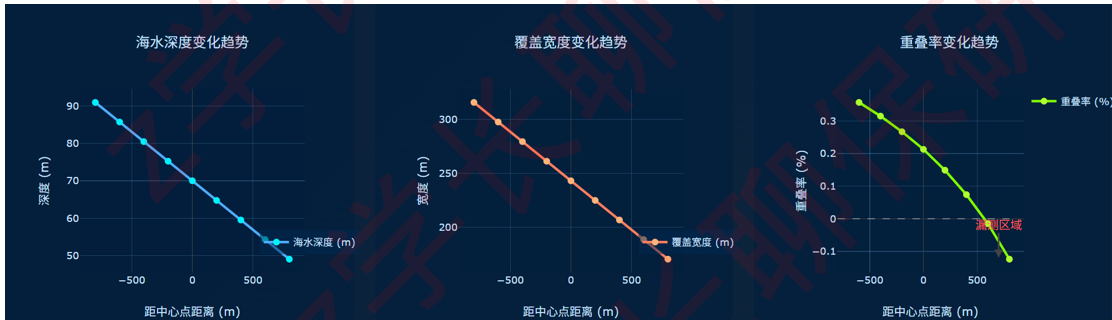
绘制几何关系简图

二维平面计算深度、覆盖宽度、重复率

一、问题一的分析与求解

1. 问题一的分析与求解

【第一小问】：重叠率定义基于水平状态，海底不平坦时坡度影响计算，需修正重叠率以适配复杂地形，通过几何关系简图，在二维平面计算海水深度、覆盖宽度、重复率。求解步骤如下：



03

问题二的分析与求解

一、问题二的分析与求解

基于太阳位置和定日镜参数的阴影长度计算方法

【第二小问】：沿用问题一模型并扩展，**当前深度由距初始航线距离决定**，从**深度与坡度入手**，完善矩形海域多波束测深覆盖宽度模型。求解步骤如下：

一、核心目标

- 建立数学模型描述**阴影长度与太阳位置**的关系
- 考虑定日镜的几何尺寸 ($6\text{m} \times 6\text{m}$)
- 计算不同时刻的阴影长度变化
- 验证 $\beta=135^\circ$ 特殊情况下的阴影特性

二、参数定义与坐标系建立

建立以**定日镜中心为原点的三维坐标系**，定义关键参数：定日镜尺寸： $6\text{m} \times 6\text{m}$ ；太阳高度角： β ；太阳方位角： γ ；阴影投影平面：地面($z=0$)

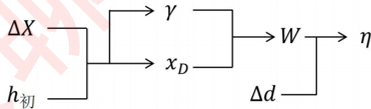
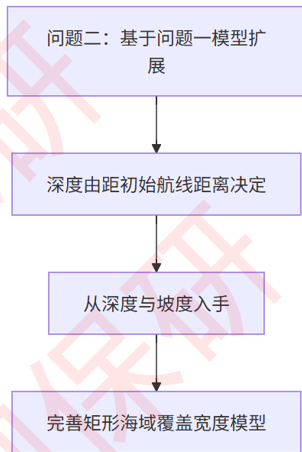


图 6 相关参数关系

一、问题二的分析与求解

基于太阳位置和定日镜参数的阴影长度计算方法

【第二小问】：沿用问题一模型并扩展，**当前深度由距初始航线距离决定**，从**深度与坡度入手**，完善矩形海域多波束测深覆盖宽度模型。求解步骤如下：

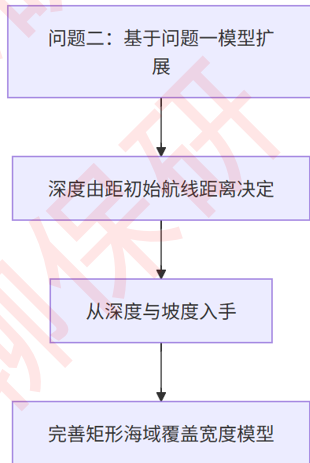
三、光线方向向量确定

根据太阳位置角度**计算光线方向向量**；其中 γ 为太阳方位角， β 为太阳高度角

四、定日镜顶点坐标计算

考虑定日镜高度和旋转，**计算四个顶点在三维空间中的坐标**：

- 镜面高度： $h_m = 4\text{m}$
- 镜面尺寸： $6\text{m} \times 6\text{m}$
- 考虑法向量和倾斜角度的影响



一、问题二的分析与求解

基于太阳位置和定日镜参数的阴影长度计算方法

【第二小问】：沿用问题一模型并扩展，**当前深度由距初始航线距离决定**，从**深度与坡度入手**，完善矩形海域多波束测深覆盖宽度模型。求解步骤如下：

五、阴影投影计算

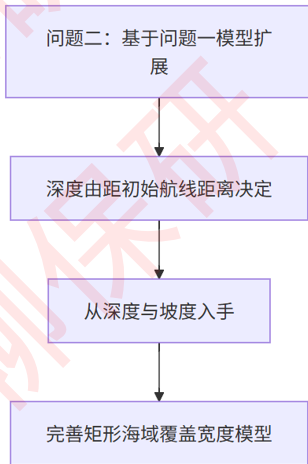
利用光线方程**计算各顶点在地面的投影**： $x_{\text{投影}} = x_0 + t \cdot L_x$ ； $y_{\text{投影}} = y_0 + t \cdot L_y$ ；当 $z = 0$ 时， $t = -z_0/L_z$

六、阴影长度公式推导

基于几何关系**推导阴影长度公式**：

$$W_w = x_D \cdot \sin(\theta/2) \cdot (1/\sin(\theta/2-\gamma) + 1/\sin(\theta/2+\gamma))$$

其中 θ 为定日镜的张角， γ 为太阳方位角



一、问题二的分析与求解

基于太阳位置和定日镜参数的阴影长度计算方法

【第二小问】：沿用问题一模型并扩展，**当前深度由距初始航线距离决定**，从**深度与坡度入手**，完善矩形海域多波束测深覆盖宽度模型。求解步骤如下：

七、不同时刻计算

根据时间计算对应的太阳角度，代入公式**计算阴影长度**：

- 获取不同时刻的 β 和 γ 值
- 代入阴影长度公式
- 考虑 Δx 与 β 的关系： $\Delta x = x_0 \cos(\pi - \beta) \cdot \tan(\alpha)$

八、结果验证与分析

验证计算结果的合理性：检查 $\beta=135^\circ$ 时的特殊情况；分析阴影长度随时间的变化趋势；对比理论值与实际观测的合理性

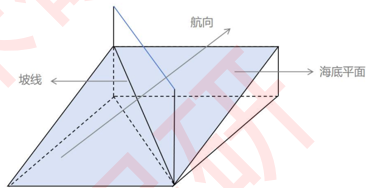


图7 航向坡线关系图

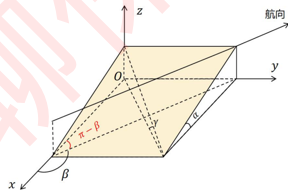


图8 $\beta = 135^\circ$ 时几何关系图

04

问题三的分析与求解

一、问题三的分析与求解

1. 问题三的分析

【第三小问】：在**特定矩形海域设计测线方案**，要求覆盖全海域且长度最短，基于贪心算法，以重叠率为关键指标迭代计算，**使测线各处尽可能宽以缩短长度**。求解步骤如下：

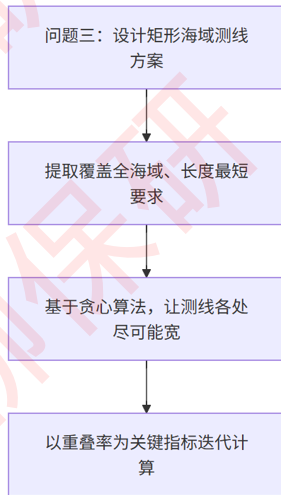
一、阶段一：问题分析与建模

① **海域几何建模**：建立**海域坐标系**，定义测线覆盖宽度函数

- 建立直角坐标系
- 定义海域边界约束
- 确定测线方向角度范围

② **覆盖宽度函数**：根据测线方向**建立覆盖宽度计算模型**

- $w_i = f(\gamma, x_D, i)$ 函数建立
- 考虑不同深度的宽度变化
- 重叠率计算方法确定



一、问题三的分析与求解

1. 问题三的分析

【第三小问】：在**特定矩形海域设计测线方案**，要求覆盖全海域且长度最短，基于贪心算法，以重叠率为关键指标迭代计算，**使测线各处尽可能宽以缩短长度**。求解步骤如下：

一、阶段一：问题分析与建模

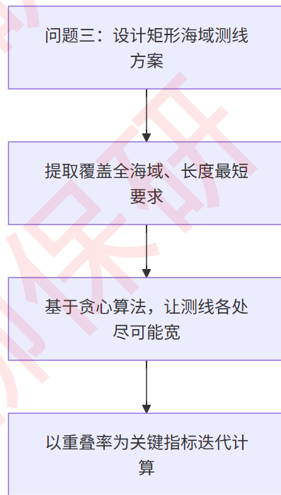
③ 优化目标建立：建立**测线总长度最小化目标函数**

- 目标函数： $S = \int w_i \Delta x$
- 约束条件：完全覆盖海域
- 重叠率约束： $\eta \in [10\%, 20\%]$

二、阶段二：数学模型推导

① 测线间距计算：推导相邻测线间**最优间距公式**

- 基于重叠率计算间距
- 考虑海域边界效应
- 递推公式建立



一、问题三的分析与求解

1. 问题三的分析

【第三小问】：在**特定矩形海域设计测线方案**，要求覆盖全海域且长度最短，基于贪心算法，以重叠率为关键指标迭代计算，**使测线各处尽可能宽以缩短长度**。求解步骤如下：

二、阶段二：数学模型推导

② 深度递推公式：建立**测线深度位置递推计算公式**

$$x_Di = x_D(i-1) - (\sin(\theta/2)/A) \times (1/\tan(\alpha)) / (\eta \cdot \sin(\theta/2) \cdot (1/A + 1/B) - 1/B - 1/\tan(\alpha))$$

③ 迭代求解算法：设计迭代优化算法求解最优方案

- 初始化第一条测线位置
- 递推计算后续测线位置
- 检查海域覆盖完整性

三、阶段三：算法实现与优化

① 多方向优化：尝试**不同测线方向**，寻找最优布局

问题三：设计矩形海域测线方案

提取覆盖全海域、长度最短要求

基于贪心算法，让测线各处尽可能宽

以重叠率为关键指标迭代计算

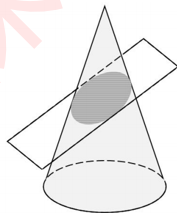
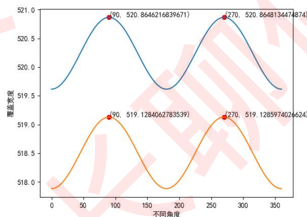


图 9 较浅较深情况（左）与单独抽取的圆锥结构（右）

一、问题三的分析与求解

1. 问题三的分析

【第三小问】：在**特定矩形海域设计测线方案**，要求覆盖全海域且长度最短，基于贪心算法，以重叠率为关键指标迭代计算，**使测线各处尽可能宽以缩短长度**。求解步骤如下：

三、阶段三：算法实现与优化

① **多方向优化**：尝试**不同测线方向**，寻找最优布局

- 90°、270°方向优化
- 斜向测线方案比较
- 最优方向角度确定

② **重叠率优化**：在约束范围内**寻找最优重叠率**

- $\eta \in [10\%, 12.2\%]$ 精细搜索
- 测线数量与长度平衡
- 边界效应处理

问题三：设计矩形海域测线方案

提取覆盖全海域、长度最短要求

基于贪心算法，让测线各处尽可能宽

以重叠率为关键指标迭代计算

选定一条边界，以算出的刚好覆盖到边界的第一条测线 x_1

基于给定的 η 以 x_1 的相关数据计算出 x_i 的数据

是否碰到另一边界

是

输出结果

否

重复

一、问题三的分析与求解

1. 问题三的分析

【第三小问】：在**特定矩形海域设计测线方案**，要求覆盖全海域且长度最短，基于贪心算法，以重叠率为关键指标迭代计算，**使测线各处尽可能宽以缩短长度**。求解步骤如下：

三、阶段三：算法实现与优化

③ **路径优化**：优化测线连接顺序，减少总航行距离

- 字形连接方式设计
- 起点终点优化
- 转向次数最小化

核心技术难点

1. **边界处理**：海域边界处测线覆盖宽度的特殊处理
2. **递推稳定性**：避免数值计算中的发散问题
3. **多目标优化**：平衡测线数量与总长度的关系
4. **路径连接**：设计高效的测线连接策略

问题三：设计矩形海域测线方案

提取覆盖全海域、长度最短要求

基于贪心算法，让测线各处尽可能宽

以重叠率为关键指标迭代计算

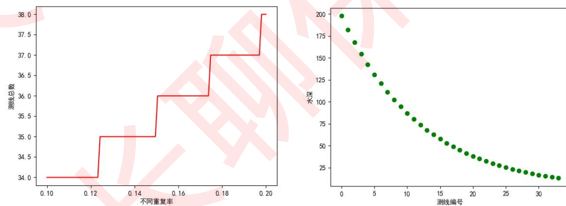


图 13 不同重叠率与测线数量关系（左）与测线位置（右）

05

问题四的分析与求解

一、问题四的分析与求解

1. 问题四的分析

【第四小问】：单波束测深**数据离散**，需用学习模型拟合为连续，从航向确定和重叠率考虑，以**局部最优解组成总体最优解**，设计测量方案后**统计测线总长、漏测占比、重叠超 20% 路线总长**。求解步骤如下：

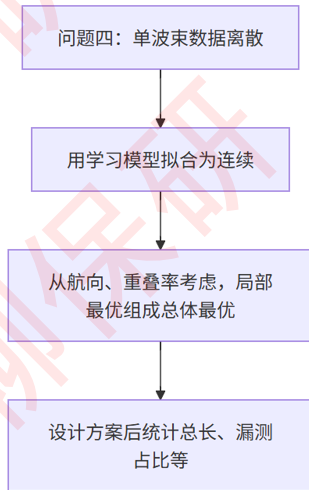
核心任务

根据给定的多波束测深数据，进行数据预处理、三维地形建模，并**设计最优的海底勘测航线路径**。数据包含海底单波束测量的测深深度数据，海域范围大且数据单位不统一。

一、阶段一：数据预处理与可视化

① **数据导入与清洗**：从.xlsx文件读取海底单波束测量数据

- 读取测深深度数据
- 统一数据单位格式
- 识别和处理异常值，数据完整性检查



一、问题四的分析与求解

1. 问题四的分析

【第四小问】：单波束测深**数据离散**，需用学习模型拟合为连续，从航向确定和重叠率考虑，以**局部最优解组成总体最优解**，设计测量方案后**统计测线总长、漏测占比、重叠超 20% 路线总长**。求解步骤如下：

一、阶段一：数据预处理与可视化

② 三次样条插值：使用三次样条插值**处理稀疏数据**

- 分段三次样条插值
- 处理边界条件
- 保证数据连续性
- 提高数据密度和精度

③ 三维可视化：创建海底**地形三维图和等深线图**

- 3D表面图生成，等深线地图绘制
- 颜色映射优化，交互式可视化界面

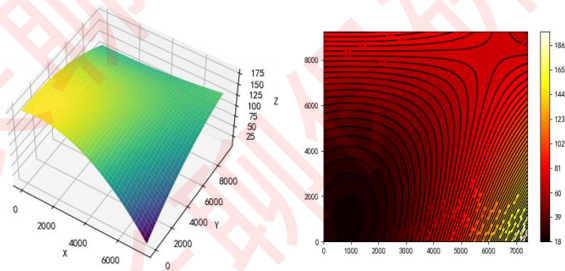


图 15 海底深度三维图（左）与等深线地形图（右）

一、问题四的分析与求解

1. 问题四的分析

【第四小问】：单波束测深**数据离散**，需用学习模型拟合为连续，从航向确定和重叠率考虑，以**局部最优解组成总体最优解**，设计测量方案后**统计测线总长、漏测占比、重叠超 20% 路线总长**。求解步骤如下：

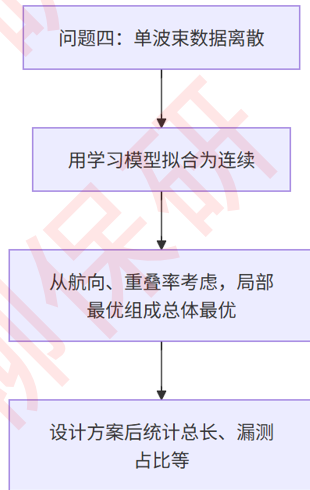
二、阶段二：机器学习模型建立

① **模型选择与训练**：采用**随机森林模型**进行地形拟合

- 尝试线性回归、支持向量机等模型
- 随机森林模型效果最佳
- 达到99.999%拟合精度
- 模型参数优化调整

② **梯度计算**：基于训练模型**计算任意点的梯度信息**

- 梯度单位向量： $\nabla g(x_i, y_i)$ ，在该梯度上的坡度： $\alpha(x_i, y_i)$
- 在该点深度： $x_D(x_i, y_i)$ ，测线探测区域宽度： $w(x_i, y_i)$



一、问题四的分析与求解

1. 问题四的分析

【第四小问】：单波束测深**数据离散**，需用学习模型拟合为连续，从航向确定和重叠率考虑，以**局部最优解组成总体最优解**，设计测量方案后**统计测线总长、漏测占比、重叠超 20% 路线总长**。求解步骤如下：

二、阶段二：机器学习模型建立

③ 优化目标设定：建立多目标优化函数

- 目标函数： $\min(L_{\text{总}}) / \min(S_{\text{海-S}})$
- 约束条件：重叠率 $\geq 10\%$
- 最短航线方向确定
- 航行成本最小化

三、阶段三：航线路径优化算法

① 自适应航线算法：结合**贪心思想和微分思想的"飞蛾火焰"**算法

- 直线应对大源距方案，地图微分化处理
- 适应度函数设计，动态调整策略

问题四：单波束数据离散

用学习模型拟合为连续

从航向、重叠率考虑，局部最优组成总体最优

设计方案后统计总长、漏测占比等

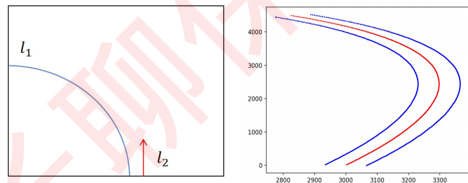


图 19 航线图示说明（左）航线运行方向及覆盖示意图（右）

一、问题四的分析与求解

1. 问题四的分析

【第四小问】：单波束测深**数据离散**，需用学习模型拟合为连续，从航向确定和重叠率考虑，以**局部最优解组成总体最优解**，设计测量方案后**统计测线总长、漏测占比、重叠超 20% 路线总长**。求解步骤如下：

三、阶段三：航线路径优化算法

② 测线间距计算：基于重叠率要求**计算最优测线间距**

- 重叠率计算： $\eta(x_i, y_i) = L_{\text{垂}} / w(x_i, y_i)$
- 间距递推公式应用
- 边界条件处理
- 实时调整测线位置

③ 区域分割优化：将海域**分割为多个子区域独立优化**

- 参考等深线进行区域划分，各区域独立进行航线规划
- 子区域间连接路径优化，“己”字形航线设计

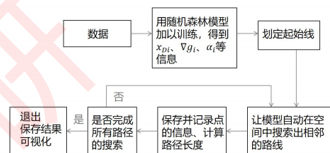
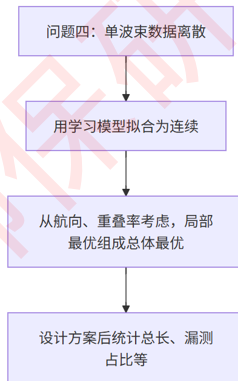


图 21 航线计算流程图示























谢谢

主讲人：颖老师

• 领取免费资料

竞赛资料免费领取

关注微信公众号“**z学长聊保研**”，即可免费获取由本人亲自整理的【数模竞赛国奖精华资料】

 【z学长聊保研】小白进阶大神学习干货2023最新版	 	 【3】遗传算法课件	-
 【z学长聊保研】算法大全	-	 【2】数据分析课件	-
 【z学长聊保研】数据库大全	-	 【1】机器学习课件	-
 【z学长聊保研】书籍大全	-	 【5】数学建模-算法-汇总.zip	-
 【z学长聊保研】软件大全	-	 【4】模型算法大全（30+种常用算法模型+课件讲义代码）.zip	-
 【z学长聊保研】模型大全	-	<input type="checkbox"/>  【6】origin绘图软件安装+教程	-
 【z学长聊保研】论文大全	-	<input type="checkbox"/>  【5】Lingo软件安装+教程	-
		<input type="checkbox"/>  【4】Latex软件安装+教程	-
		<input type="checkbox"/>  【3】Visio软件安装+教程	-
		<input type="checkbox"/>  【2】Spss软件安装+教程	-
		<input type="checkbox"/>  【1】MATLAB软件安装+教程	-

• 使用方法

➡ 关注微信公众号“z学长聊保研”，领**免费**学习资料



➤ 数学建模资料（超全matlab代码+模型...）

➤ 40+国一获奖资料

➤ 数学建模开源模型

➤ 超全数学建模干货资料

➤

