

2022年B题讲解与 真题复现

主讲人：颖老师

01

赛题解析

一、赛题解析

问题背景

【真题阐述】随着无人机的广泛应用，定位技术成为关键问题。相比成本高、技术复杂的有源定位，**无源定位**通过接收其他无人机的电磁信号计算自身位置，具备更高的实用性与灵活性。在该问题中，某架无人机**可以接收到其余多架无人机的电磁信号，可以得到两架无人机发射的信号之间的夹角**，问题从这一条件来解决下述问题。

【问题一】：十架无人机组成的队列呈**圆形**，其中一架（FY00）在中央，剩余九架（FY01-FY09）均匀分布在圆周上。**无人机处于同一高度上**。该问题分成三个小问，下面一一描述题意。

1. FY00（圆心无人机）和已知位置的两架无人机（FY01、FY02）对某架待定位置的无人机（FY0X）发射信号。待定位置无人机（FY0X）**利用接收到的信号分析计算自身坐标**。
2. 依然由FY00和FY01发射信号。需要从剩余已知位置的无人机中选择第三架无人机，辅助确定FY0X的准确位置。目标是**确定第三架信号发射无人机是谁**，以及总共**多少架无人机参与发射**。
3. 编队要求所有 n 架无人机均匀排列在直径为100米的圆周上，以FY00为圆心。由于实际排布存在偏移，某架无人机（FY0X）**需接收FY00和至多三架**其他无人机的信号，计算自身准确位置。反复进行该信号接收和位置校正，直到无人机达到准确位置。结合表格中的已知数据，**制定具体的信号发射和位置校正操作方案**。

一、赛题解析

问题背景

【真题阐述】 随着无人机的广泛应用，定位技术成为关键问题。相比成本高、技术复杂的有源定位，**无源定位**通过接收其他无人机的电磁信号计算自身位置，具备更高的实用性与灵活性。在该问题中，某架无人机**可以接收到其余多架无人机的电磁信号，可以得到两架无人机发射的信号之间的夹角**，问题从这一条件来解决下述问题。

【问题一】：十架无人机组成的队列呈**圆圈形**，其中一架（FY00）在中央，剩余九架（FY01-FY09）均匀分布在圆周上。**无人机处于同一高度上**。该问题分成三个小问，下面——描述题意。

3. 编队要求所有 n 架无人机均匀排列在直径为100米的圆周上，以FY00为圆心。由于实际排布存在偏移，某架无人机（FY0X）**需接收FY00和至多三架**其他无人机的信号，计算自身准确位置。反复进行该信号接收和位置校正，直到无人机达到准确位置。结合表格中的已知数据，**制定具体的信号发射和位置校正操作方案**。

【问题二】：当无人机的排队列**为锥形队伍时**，以列内的某架领导无人机距离某一架无人机对于准确位置一定的值，**提出无人机的无源定位得到无人机的调整方案**。

02

问题一的分析与求解

一、问题一的分析与求解

1. 三架无人机无源定位

【第一小问】：要求给出在发射信号的无人机位置准确且编号已知条件下的**接收信号无人机的定位模型**。这里我们认为编号已知指接收信号的无人机可以确定方向信息中**某一角对应的两个无人机编号**。求解步骤如下：

一、输入已知条件

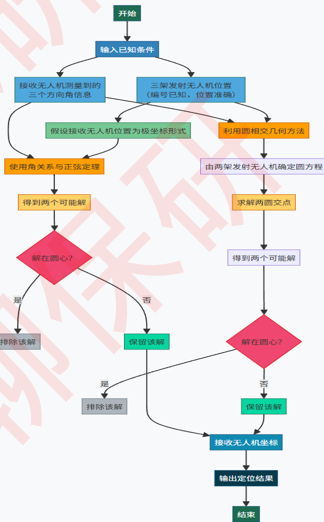
三架发射无人机的**精确位置和编号**，以及接收无人机测量到的**三个方向角**（相邻信号方向之间的夹角）。

二、极坐标假设

将接收无人机的位置表示为**极坐标形式**，便于进行角度关系的数学建模。

三、正弦定理方法

利用三角形的角度关系和正弦定理建立方程，**求解接收无人机位置**。此方法会产生两个数学解。



一、问题一的分析与求解

1. 三架无人机无源定位

【第一小问】：要求给出在发射信号的无人机位置准确且编号已知条件下的**接收信号无人机的定位模型**。这里我们认为编号已知指接收信号的无人机可以确定方向信息中**某一角对应的两个无人机编号**。求解步骤如下：

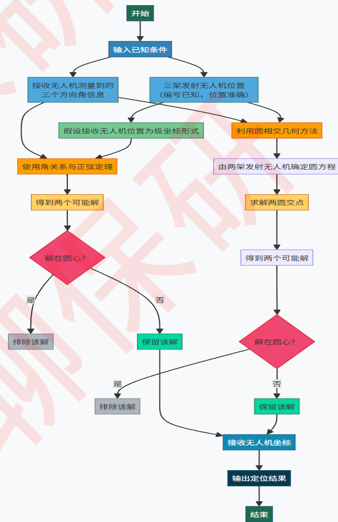
四、圆相交方法

基于几何原理（弦对应的圆心角是圆周角的二倍），由两对发射无人机确定两个圆，求解两圆交点。此方法**同样产生两个数学解**。

五、解的有效性验证

两种方法都需要**排除位于圆心（FY00位置）的无效解**，保留有效解作为接收无人机的位置。

最终得到接收无人机的精确坐标（数值解）。



一、问题一的分析与求解

1. 详细求解

图1中圆周上发射信号的无人机为FY01和FY04，接收信号的无人机为FY07

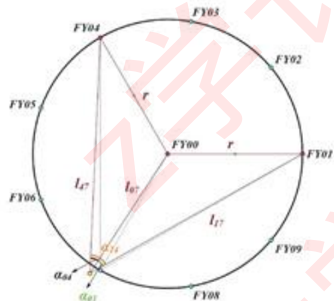


图 1: 三架无人机无源定位示意图

1、基于正弦定理的极坐标求解方法（复杂一些）

已知发射无人机位置：FY00(圆心), $FYOS_1(r, \theta_1)$, $FYOS_2(r, \theta_2)$, 接收无人机FYOR极坐标设为 (d, θ) 。

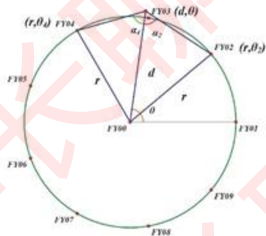


图 2: 正弦定理求解坐标

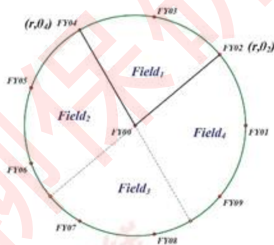


图 3: 正弦定理求解坐标的局限性

一、问题一的分析与求解

1. 详细求解

1、基于正弦定理的极坐标求解方法（复杂一些）

已知发射无人机位置：FY00(圆心)，FYOS₁(r, θ_1)，FYOS₂(r, θ_2)，接收无人机FYOR极坐标设为(d, θ)。

基于三角测量原理，利用正弦定理建立方程组求解接收无人机位置。

$$\begin{aligned} r/\sin \alpha_1 &= d/\sin(\alpha_1 + \theta - \theta_1) \\ r/\sin \alpha_2 &= d/\sin(\alpha_2 + \theta_2 - \theta) \end{aligned}$$

- 联立两个方程消除d
- 求解tan θ 的表达式：

$$\tan \theta = [\sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \theta_2) - \sin \alpha_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \theta_1)] / [\sin \alpha_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \theta_1) + \sin \alpha_1 \cdot \cos(\alpha_2 + \theta_2)]$$

- 代入求得d值：

$$d = (r/\sin \alpha_1) \cdot \sin(\alpha_1 + \theta - \theta_1)$$

- 得到接收无人机极坐标(d, θ)

对该方法进行分析时，我们发现OS₁和OS₂对应的直线会把整个圆分成四个部分，正弦定理在这四个部分中的表达方式不相同，所以**需要进行分类讨论。**

$$\text{公式(7): } \frac{r}{\sin \alpha_{OS_1}} = \frac{d}{\sin(\alpha_{OS_1} + \theta - \theta_{S_1})}$$

$$\text{公式(8): } \frac{r}{\sin \alpha_{OS_2}} = \frac{d}{\sin(\alpha_{OS_2} + \theta - \theta_{S_2})}$$

通过计算得到的极角的正切值，可以发现两者表达不同，不可以统一成一类。

$$\text{公式(9): } \tan \theta = \frac{\sin \alpha_{OS_1} \sin(\alpha_{OS_2} - \theta_{S_2}) - \sin \alpha_{OS_2} \sin(\alpha_{OS_1} - \theta_{S_1})}{\sin \alpha_{OS_1} \cos(\alpha_{OS_2} - \theta_{S_2}) - \sin \alpha_{OS_2} \cos(\alpha_{OS_1} - \theta_{S_1})}$$

这种分类讨论求解方程的做法过于麻烦，我们实际使用的是下面一种更为巧妙的方法。

一、问题一的分析与求解

2. 无源定位的无人机最小需求

【第二小问】：相比于上一小问，**本题的难点**在于发射信号的**无人机编号未知**，需要接收信号的无人机自行判断。如果能**确定发射信号**的无人机的**编号**，就可以**转入上一问**的模型进行求解。下面根据误差大小分类，**讨论如何确定信号的来源**，进而求解无人机的位置。

一、基本思路

利用角度特征区分无人机类型：

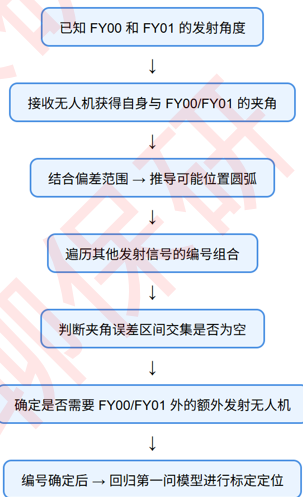
- FY00与接收机、圆周无人机形成的夹角： $(20k+10)^{\circ}$ (如 $10^{\circ}, 30^{\circ}, 50^{\circ}, 70^{\circ}$)
- 圆周无人机之间形成的夹角： $(20k)^{\circ}$ (如 $20^{\circ}, 40^{\circ}, 60^{\circ}, 80^{\circ}$)

通过角度误差分析确定信号来源。

二、误差极小情况 (极角误差 $\leq 0.5^{\circ}$ ，极径误差 $\leq 1m$)

- 只需额外1架无人机 (除FY00和FY01外)

求解步骤：



一、问题一的分析与求解

2. 无源定位的无人机最小需求

【第二小问】：相比于上一小问，**本题的难点**在于发射信号的**无人机编号未知**，需要接收信号的无人机自行判断。如果能**确定发射信号**的无人机的**编号**，就可以**转入上一问**的模型进行求解。下面根据误差大小分类，**讨论如何确定信号来源**，进而求解无人机的位置。

二、误差极小情况（极角误差 $\leq 0.5^\circ$ ，极径误差 $\leq 1\text{m}$ ）

- 只需额外1架无人机（除FY00和FY01外）

求解步骤：

根据**角度特征**识别出FY00相关角度；

通过**角度值推算**另一架无人机的可能编号（通常两个候选）；

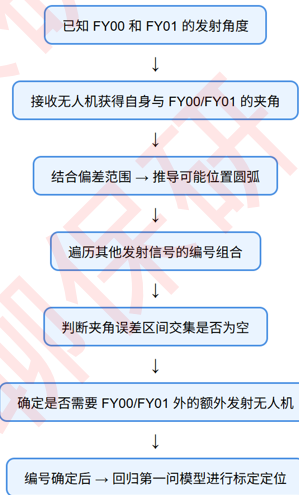
计算每个候选位置的**理论角度范围**；

与实际测量值比对，**选择误差最小的候选**。

示例：

接收角度： $50.6^\circ, 70.5^\circ, 121.2^\circ$

- $70.5^\circ \rightarrow$ FY00相关角
- $50.6^\circ \rightarrow$ FY00相关角 → 候选编号：4号或9号
- 理论角度比对：
4号： $\angle 029=50^\circ$,
 $\angle 124=120^\circ \rightarrow$ 匹配
9号： $\angle 024=50^\circ$,
 $\angle 129=20^\circ \rightarrow$ 不匹配



一、问题一的分析与求解

2. 无源定位的无人机最小需求

【第二小问】：相比于上一小问，**本题的难点**在于发射信号的**无人机编号未知**，需要接收信号的无人机自行判断。下面根据误差大小分类，**讨论如何确定信号的来源**，进而求解无人机的位置。

三、略有偏差情况（极角误差 $\leq 0.5^\circ$ ，极径误差 $\leq 15\text{m}$ ）

- 同样只需额外1架无人机

求解步骤：

利用**FY00-FY01角度**确定接收机可能位置范围（一段小圆弧）；

计算当接收机在圆弧上移动时，**第三架无人机角度**($\angle X_{20}$)的变化范围；

预计算圆周无人机对形成的角度($\angle P_2Q$)变化范围；

比较实际角度与两类角度范围：

匹配 $\angle X_{20}$ 范围 \rightarrow 确定X编号；不匹配 $\angle P_2Q$ 范围 \rightarrow 排除干扰

确定所有发射无人机编号后转入问题一定位模型。

无人机 X	$\angle X_{20_min}$	$\angle X_{20_max}$
1	59.1°	59.1°
7	9.1°	9.5°
8	27.5°	27.9°
9	45.1°	45.4°

角度变化范围： $|\angle X_{20_max} - \angle X_{20_min}| \leq 2^\circ$

位置约束：接收机位于圆心角 $\leq 2^\circ$ 的小圆弧上

角度特征： $\angle P_2Q = (20k)^\circ$ ， $\angle X_{20} = (20k+10)^\circ$

通过分离角度范围，确保实际角度要么匹配某个X的 β 区间，要么落入某个 γ 区间，但不会同时匹配，从而实现无人机编号的确定。

一、问题一的分析与求解

3. 圆周上无人机位置调整方案

【第三小问】：**调整圆周上9架无人机的位置** (FY02-FY10)，使其达到预期位置，已知FY00和FY01位置准确。

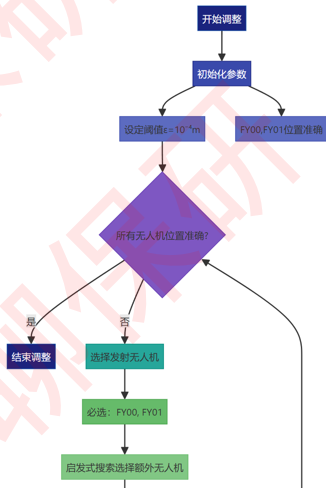
一、关键策略

发射信号无人机选择策略：

- 必选无人机：FY00和FY01
- 额外选择：圆周上至多3架无人机（共3-5架发射无人机）
- 使用带阈值的启发式搜索算法选择最优发射组合

位置调整策略：

- 接收无人机通过电磁信号计算自身位置
- 建立位置变化矢量并移动
- 设置阈值 $\epsilon=10^{-4}\text{m}$ ，当所有无人机距离预期位置小于 ϵ 时结束



一、问题一的分析与求解

3. 圆周上无人机位置调整方案

【第三小问】：**调整圆周上9架无人机的位置** (FY02-FY10)，使其达到预期位置。

二、求解过程

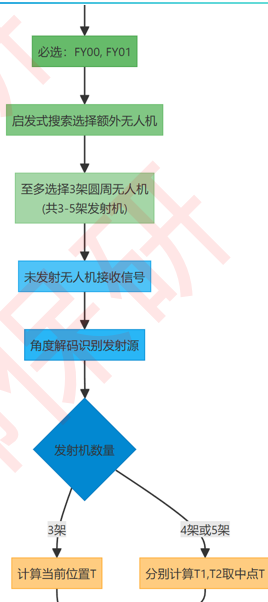
1. 位置调整步骤（单架无人机）

a. 角度解码：

- 接收无人机识别发射信号源（类似问题二方法）
- 通过角度特征判断无人机编号
- 径向误差 $\leq 5\text{m}$ 时，角度变化范围 $\leq 5^\circ$

b. 位置计算：

- 假设发射无人机在预期位置（实际可能略有偏差）
- 使用问题一定位模型计算自身当前位置 T
- 对于四架发射机情况：分别使用(FY00,FY01,FY0S1)和(FY00,FY01,FY0S2)计算位置 T_1 和 T_2 ；取中点 $T = (T_1 + T_2)/2$ 作为当前位置。



一、问题一的分析与求解

3. 圆周上无人机位置调整方案

【第三小问】：**调整圆周上9架无人机的位置**（FY02-FY10），使其达到预期位置。

二、求解过程

c. 移动执行：

- 建立位置变化矢量： $x = R_exp - T$ （ R_exp ：预期位置，由编号确定）
- 最终位置： $OR_final = OR + x$

2. 发射无人机选择算法

- 估价函数： $L = \sum_{i=1}^{9} d_i^2$ （所有无人机到预期位置距离平方和）
- 带阈值启发式搜索：

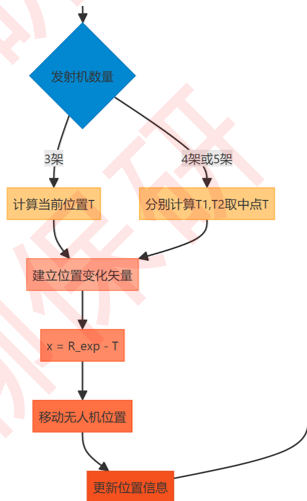
基准点：FY00和FY01（必选）

在圆周上剩余无人机中选择至多两架

构建决策树（最大搜索层数N）

选择使L最小的发射组合

优势：避免贪心算法的局部最优，实现全局快速收敛



一、问题一的分析与求解

3. 圆周上无人机位置调整方案

【第三小问】：**调整圆周上9架无人机的位置**（FY02-FY10），使其达到预期位置。

二、求解过程

3. 调整过程

- 多轮调整：每轮选择一组发射无人机
- 收敛条件：所有 $d_i < \varepsilon$
- 最优策略实例（6轮调整后达到 $10^{-(23)} m^2$ 精度）：

FY00, FY01, FY02, FY07

FY00, FY01, FY05

FY00, FY01, FY09

FY00, FY01, FY08

FY00, FY01, FY06

FY00, FY01, FY02

算法对比：

- → 随机选择：收敛慢，20-30轮达到 $10^{-6} m^2$
- → 贪心算法：局部收敛快，易陷入局部最优
- → 启发式搜索：全局收敛快，4轮达到 $10^{-6} m^2$
- → 混合策略：结合3架和4架发射机，收敛最快

收敛速度对比（L2损失函数）



实际精度：4轮调整后位置偏差 $\leq 1mm$ ，满足实际应用需求

03

问题二的分析与求解

二、问题二的分析与求解

问题二分析

【问题二】：核心挑战在于在锥形编队中，问题一的定位模型面临两个主要问题：**三点共线问题**（多架无人机位置共线，难以通过方向信息判断编号）；**四点共圆问题**（定位时可能出现四点共圆情况，导致定位精度急剧下降）求解步骤如下：

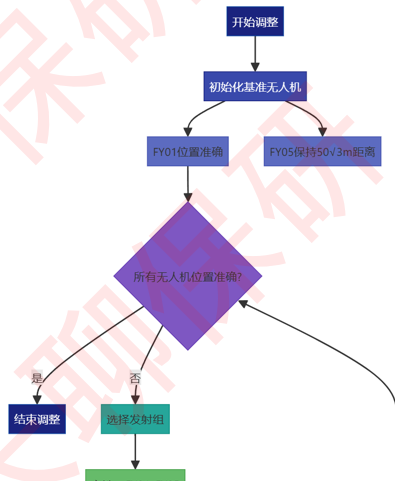
一、基本假设

- **无人机偏差范围**：以标准位置为圆心，半径5m的圆内
- **基准无人机**：FY01（位置始终准确）和FY05（与FY01距离保持 $50\sqrt{3}\text{m}$ ）
- 每次发射信号都包含FY01和FY05

二、解决方案

1. 编号识别问题

- **预定义信号发射顺序**：所有无人机使用相同随机种子生成随机序列；接收机通过信号接收顺序判断发射无人机编号
- 定位方法：**沿用问题一的作图求交方法**



二、问题二的分析与求解

问题二分析

【问题二】：核心挑战在于在锥形编队中，问题一的定位模型**面临两个主要问题**：**三点共线问题**（多架无人机位置共线，难以通过方向信息判断编号）；**四点共圆问题**（定位时可能出现四点共圆情况，导致定位精度急剧下降）求解步骤如下：

二、解决方案

2. 四点共圆问题

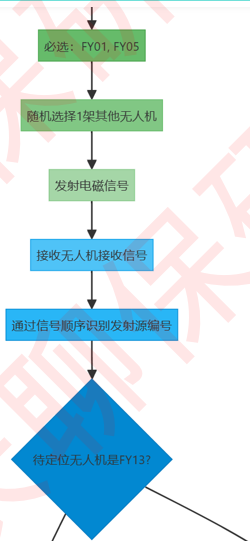
- 检测机制：当发射无人机标准位置与自身标准位置**四点共圆时**
- 处理策略：判定为**无法定位，本轮不进行调整**

3. FY13特殊处理

- 前9次调整：FY01+FY05+其他1架发射信号，**FY13不调整**
- 第10次调整：FY01+FY02+FY03发射信号，**仅FY13调整**

三、调整过程

- 初始化**：设定基准无人机FY01和FY05
- 选择发射组**：包含FY01、FY05和1架其他无人机



二、问题二的分析与求解

问题二分析

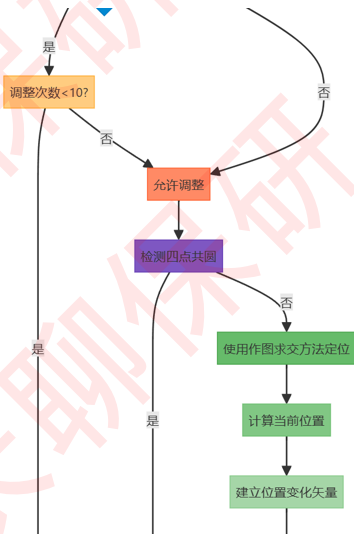
【问题二】：核心挑战在于在锥形编队中，问题一的定位模型**面临两个主要问题**：**三点共线问题**（多架无人机位置共线，难以通过方向信息判断编号）；**四点共圆问题**（定位时可能出现四点共圆情况，导致定位精度急剧下降）求解步骤如下：

三、调整过程

1. **信号接收**：接收无人机通过信号顺序识别发射源编号
2. **共圆检测**：检测是否四点共圆
3. **定位计算**：使用作图求交方法计算当前位置
4. **位置调整**：建立位置变化矢量并移动（FY13特殊处理）
5. **收敛检测**：所有无人机位置误差<阈值时结束

四、收敛性能

1. **初始误差0.5m**：快速收敛（约20次调整）
2. **初始误差5m**：60次调整后达到高精度
3. **总体趋势**：初始误差越小，收敛速度越快



二、问题二的分析与求解

问题二分析

【问题二】：求解步骤如下：

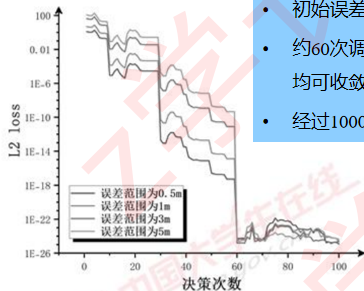
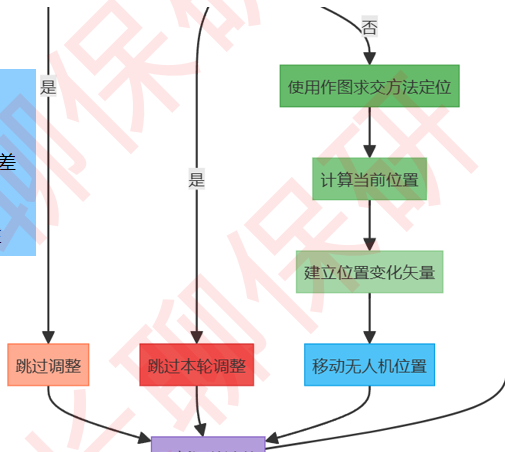


图 18: 不同误差范围内决策次数与收敛速度的关系

关键结论：

- 初始误差越小，收敛速度越快
- 约60次调整后，5m以内的初始误差均可收敛到高精度
- 经过10000次测试验证策略有效性























谢谢

主讲人：颖老师

• 领取免费资料

竞赛资料免费领取

关注微信公众号“**z学长聊保研**”，即可免费获取由本人亲自整理的【数模竞赛国奖精华资料】

 【z学长聊保研】小白进阶大神学习干货2023最新版	 	 【3】遗传算法课件	
 【z学长聊保研】算法大全	-	 【2】数据分析课件	
 【z学长聊保研】数据库大全	-	 【1】机器学习课件	
 【z学长聊保研】书籍大全	-	 【5】数学建模-算法-汇总.zip	
 【z学长聊保研】软件大全	-	 【4】模型算法大全（30+种常用算法模型+课件讲义代码）.zip	
 【z学长聊保研】模型大全	-	<input type="checkbox"/>  【6】origin绘图软件安装+教程	-
 【z学长聊保研】论文大全	-	<input type="checkbox"/>  【5】Lingo软件安装+教程	-
		<input type="checkbox"/>  【4】Latex软件安装+教程	-
		<input type="checkbox"/>  【3】Visio软件安装+教程	-
		<input type="checkbox"/>  【2】Spss软件安装+教程	-
		<input type="checkbox"/>  【1】MATLAB软件安装+教程	-

• 使用方法

➡ 关注微信公众号“z学长聊保研”，领**免费**学习资料



➤ 数学建模资料（超全matlab代码+模型...）

➤ 40+国一获奖资料

➤ 数学建模开源模型

➤ 超全数学建模干货资料

➤

