第十四届全国大学生数学竞赛初赛试题

(非数学类，2022 年)

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1+x^2-\cos^2 x}=$ ________.

2、设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1 & x\ge 1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 则复合函数 $f[g(x)]$ 的间断点为 $x=$ ________.

3、 极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=$ ________.

4、 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$ 的通解为 ________.

5、记 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x+y\le\dfrac{\pi}{2},0\le x-y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，则 $\iint\limits_D y\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____.

二、(14 分) 记向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 α，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$，$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OB}$，$0\le\lambda\le 1$.

（1）问当 λ 为何值时，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 取得最小值；

（2）设（1）中的 λ 满足 $0<\lambda<\dfrac{1}{5}$，求夹角 α 的取值范围.

三、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶可导，$f(0)=1$，且当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge 0$，$f'(x)\le 0$，$f''(x)\le f(x)$，证明：$f'(0)\ge-\sqrt{2}$.

四、(14 分) 证明：对任意正整数 n，恒有：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x\le\left(\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{1}{8}\right)\pi^2$.

五、(14 分) 设 $z=f(x,y)$ 是区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 上的可微函数，$f(0,0)=0$，且 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}$.

六、(14 分) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.