《概率论》试卷

2016－2017学年第1学期

杨勇　制作

一．填空题($2'\times 15=30'$)

1.袋中装有编号为1, 2, 3, 4, 5的5只球，从中任取3只，以X表示取出的3只球中最大号码，则X的概率分布为________________，X的分布函数为________________。

解：$X:3,4,5,$

$$P(X=3)=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10},\quad P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10},$$

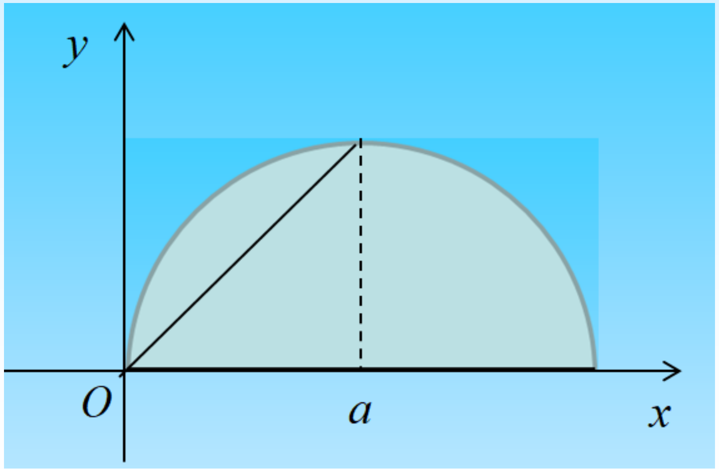
X	3	4	5
p	0.1	0.3	0.6

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<3 \\ 0.1, 3\le x<4 \\ 0.4, 4\le x<5 \\ 1, x\ge 5 \end{cases}$$ 。

2.随机地向半圆$0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\ (a > 0)$内掷点三次,点落入半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则其中恰有两次所掷的点与原点的连线与x轴的夹角小于$\dfrac{\pi}{4}$的概率为_________。

解: 先算一个点落入所述区域的概率,

$$p = \frac{\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{4}\pi}{\dfrac{a^2}{2}\pi} = \frac{\pi + 2}{2\pi},$$



三重贝努利概型,

所求的概率为

$$C_3^2\left(\frac{\pi+2}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{\pi+2}{2\pi}\right)=3\left(\frac{\pi+2}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\pi-2}{2\pi}\right)。$$

注:设X表示3次掷点落入所述区域的次数,

$$X \sim B\left(3,\frac{\pi+2}{2\pi}\right),$$

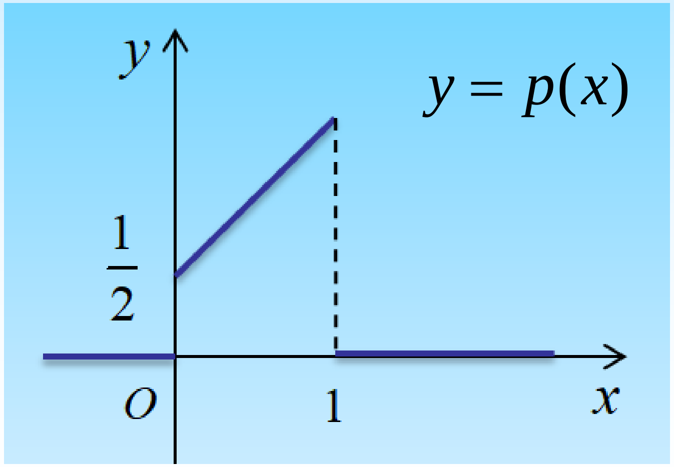
$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{\pi+2}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{\pi+2}{2\pi}\right)=3\left(\frac{\pi+2}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\pi-2}{2\pi}\right)。$$

3.设随机变量X的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} ax+b, 0<x<1 \\ 0, otherwise \end{cases},$$

且$P\left(X\geq\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$,则常数$(a,b)=$____________,

X的分布函数$F(x)=$____________。



解：

$$\int_0^1 (ax+b)dx = 1, \qquad \frac{a}{2}+b=1,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (ax+b)dx = \frac{5}{8}, \qquad \frac{3}{8}a+\frac{b}{2}=\frac{5}{8},$$

$$(a,b)=\left(1,\frac{1}{2}\right),$$

$$0 \le x < 1, F(x)=\int_0^x \left(t+\frac{1}{2}\right)dt = \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2},$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}, 0\le x<1 \\ 1, x\ge 1 \end{cases}$$ 。

4.设$X \sim N(-2,2)$,则$Y=\dfrac{X+1}{2}$的密度函数为

$p_Y(y)=$ ________________。

解:

$$Y \sim N(EY,DY)=N\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

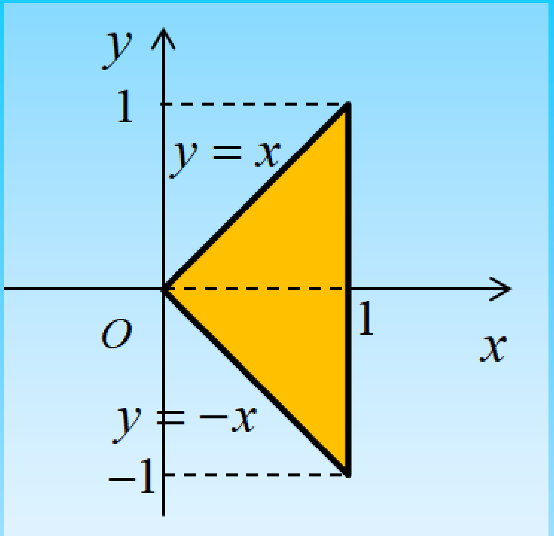
$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2},-\infty<y<+\infty。$$

5.设(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\big|0<x<1,|y|<x\}$内服从均匀分布,则$X$的边际密度函数为

$p_X(x)=$____________________, $D(2X+1)=$______________________。

解:

$$p(x,y)=\begin{cases}1, 0<x<1, |y|<x\\ 0, otherwise\end{cases},$$



$$0<x<1,\ p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-x}^{x}dy=2x,$$

$$p_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, otherwise\end{cases},$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2},$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18},$$

$$D(2X+1)=4DX=\frac{2}{9}。$$

6.设随机变量X,Y,Z相互独立, $X \sim G(0.2)$,

$Y \sim B(10,0.3), Z \sim N(3,4)$, 则$E(XYZ) =$ ___________,

$D(2X - Y + 3Z + 2016) =$ _____________。

解:

$$EX = \frac{1}{p} = 5, DX = \frac{1-p}{p^2} = 20,$$

$$EY = np = 3, DY = npq = 2.1,$$

$$EZ = \mu = 3, DZ = \sigma^2 = 4,$$

因为随机变量X,Y,Z相互独立, 所以,

$$E(XYZ)=EX\cdot EY\cdot EZ=45,$$

$$D(2X-Y+3Z+2016)=4DX+DY+9DZ=118.1。$$

7.设(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.4	0.1
1	0.2	0.2	0

则$P(X+Y=1)=$______________,

$Z=\min\{X,Y\}$的概率分布为________________,

$P(X=1 \mid Y<2)=$______________。

解：

$$P(X+Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=0.6,$$

$X \backslash Y$ (Z)	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1

Z	0	1
p	0.8	0.2

$$P(X=1 \mid Y<2)=\frac{P(X=1, Y<2)}{P(Y<2)}=\frac{0.4}{0.9}=\frac{4}{9}。$$

8.设$(X,Y)\sim N(1,0,9,16,-0.5)$，且$Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，

则$DZ=$ ________，$\rho_{XZ}=$ ________。

解：$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，$Cov(X,Y)=-6$，

$$DZ=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{DX}{9}+\frac{DY}{4}+2Cov\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)=3,$$

$$Cov(X,Z)=Cov\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=0,$$

$$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0。$$

二． 选择题（$2'\times 5=10'$）

1.设连续型随机变量X与Y的分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$,密度函数分别为$p_1(x)$和$p_2(x)$,则以下论断中正确的是________________。

$(A)F_1(x)+F_2(x)$必是某随机变量的分布函数,

$(B)F_1(x)\cdot F_2(x)$必是某随机变量的分布函数,

$(C)\,p_1(x)+p_2(x)$必是某随机变量的密度函数,

$(D)\,p_1(x)\cdot p_2(x)$必是某随机变量的密度函数。

解答:B

2.将一枚均匀的硬币接连抛n次,以A表示事件“正面最多出现一次”,B表示“正面和反面各至少出现一次”,则________________。

$(A)\, n=2$时, A, B相互独立,

$(B)\, n=2$时, A, B互不相容,

$(C)\, n=3$时, A, B相互独立,

$(D)\, n=3$时, A, B互不相容。

解答: C

$$n=2,\Omega=\left\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\right\},$$

$$A=\{(H,T),(T,H),(T,T)\},$$

$$B=\{(H,T),(T,H)\},$$

$$P(AB)=\frac{1}{2},P(A)=\frac{3}{4},P(B)=\frac{1}{2},$$

选项A,B不对,

$n=3,$

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),\\(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,T)\end{array}\right\},$$

$$A=\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,T)\},$$

$$B=\left\{\begin{array}{l}(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),\\(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\end{array}\right\},$$

$$P(AB)=\frac{3}{8},P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{3}{4},$$

选项C正确, 选项D不对。

注： n重贝努利概型,

AB表示恰好出现一次正面,

$$P(AB)=C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n}{2^n},$$

$$P(A)=C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n+1}{2^n},$$

$$P(B)=1-C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n-C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0=1-\frac{2}{2^n},$$

假设A, B独立,即$P(AB)=P(A)P(B)$,

$$\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}\times\left(1-\frac{2}{2^n}\right),$$

$$2^{n-1}=n+1,$$

只有一个正整数解:$n=3$。

3.对随机变量X,Y,如果$Cov(X,Y)=0$,则下列论断中不正确的是________________。

$(A)X,Y$不相关,$(B)E(XY)=EX\cdot EY$,

$(C)D(X-Y)=D(X+Y),(D)F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\forall x,y\in R$。

解答:D

4.设随机变量$X_1, \cdots, X_n$独立同分布，且$EX_1 = \mu$，

$DX_1 = \sigma^2$，记$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则由切比雪夫不等式，

对任意的$\varepsilon > 0$，有______________。

$(A) P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$，$(B) P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$，

$(C) P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \le 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$，$(D) P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \le 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$。

解答：B

$$E\bar{X} = \mu, D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$P(\left|\bar{X}-\mu\right|>\varepsilon)=P(\left|\bar{X}-E\bar{X}\right|>\varepsilon)\leq\frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}。$$

注:

$$P(\left|\bar{X}-\mu\right|<\varepsilon)=P(\left|\bar{X}-E\bar{X}\right|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2}=1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}。$$

5.设随机变量$X_1,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布,且

$$P(X_i=1)=p,P(X_i=0)=1-p,i=1,2,\cdots,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\geq 2\right)=$______________。

$(A)0,(B)1,(C)2\Phi(2)-1,(D)1-\Phi(2)$。

解答：D

三. 分析判断题(5′+5′)

1.设随机变量X和Y独立同分布,则$X=Y$。

解: 错。 反例

$X(Y)$	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且X,Y独立,

$$P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)$$

$$=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{2}。$$

2.对离散型随机变量,既可以用分布列加以刻画,也可以用分布函数加以刻画,且两者相互唯一确定。

解: 对。

若X的概率分布为$p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \cdots,$

不妨设$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots,$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < x_1 \\ p_1, x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, x_2 \le x < x_3 \\ \vdots \\ p_1 + \cdots + p_n, x_n \le x < x_{n+1} \\ \vdots \end{cases};$$

反之,由$F(x)$可得X的概率分布。

四.计算题

1.$(5'\times 2=10')$　类似的习题还有习题集P96第28 题

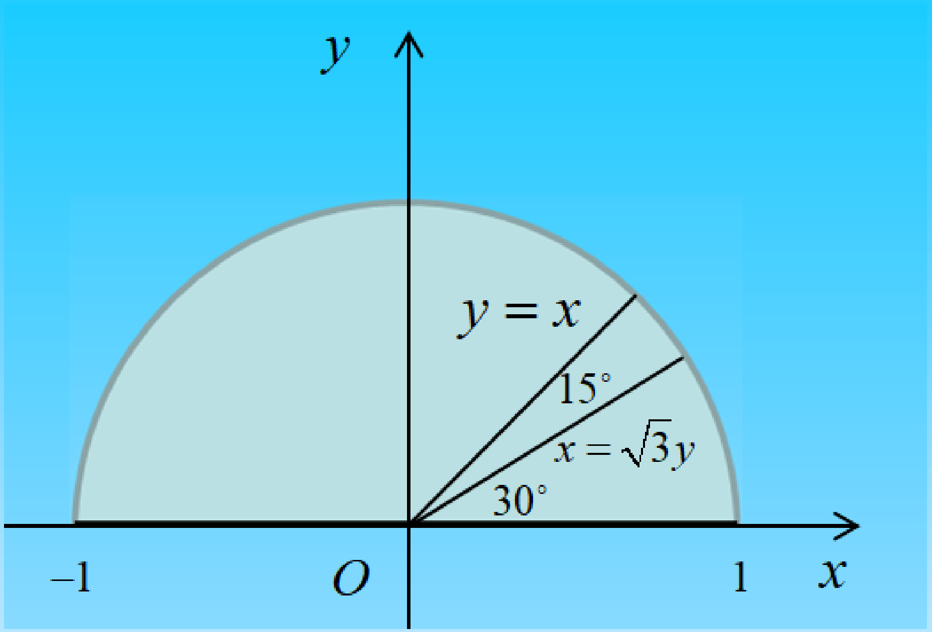
设向量(X,Y)服从$G=\{(x,y)\big|y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$上的均匀分布。定义随机变量$U,V$如下：

$$U=\begin{cases} 0, X\leq 0 \\ 1, 0<X\leq Y \\ 2, X>Y \end{cases}, V=\begin{cases} 0, X>\sqrt{3}Y \\ 1, X\leq \sqrt{3}Y \end{cases},$$

求(1)(U,V)的联合概率分布;(2)相关系数ρ_{UV}。

解:

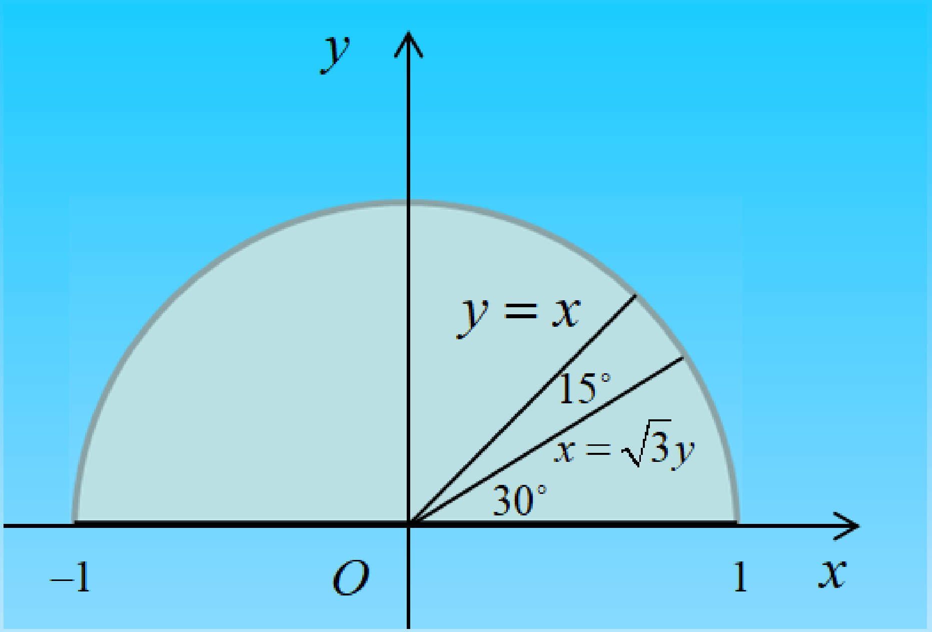
(1)



$$P(U=0,V=0)=P(X\le 0,X>\sqrt{3}Y)=0,$$

$$P(U=0,V=1)=P(X\le 0,X\le \sqrt{3}Y)=\frac{1}{2},$$

$$P(U=1,V=0)=P(0<X\le Y,X>\sqrt{3}Y)=0,$$



$$P(U=1,V=1)=P(0<X\le Y,X\le\sqrt{3}Y)=\frac{1}{4},$$

$$P(U=2,V=0)=P(X>Y,X>\sqrt{3}Y)=\frac{1}{6},$$

$$P(U=2,V=1)=P(X>Y,X\le\sqrt{3}Y)=\frac{1}{12},$$

$V \backslash U$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

(2)

$V \backslash U$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$EU=\frac{3}{4},EU^2=\frac{5}{4},DU=\frac{11}{16};$$

$$EV=\frac{5}{6},DV=\frac{5}{36};$$

$$E(UV)=(0\times 0)\times 0+(0\times 1)\times 0+(0\times 2)\times\frac{1}{6}$$

$$+(1\times 0)\times\frac{1}{2}+(1\times 1)\times\frac{1}{4}+(1\times 2)\times\frac{1}{12}=\frac{5}{12},$$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\frac{E(UV)-EU\cdot EV}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=-\frac{5}{\sqrt{55}}。$$

$2.(5'\times 2=10')$

某小镇每天发生的交通事故数可以用参数$\lambda=0.1$的泊松分布描述,连续观察一个月(30 天),求

(1)一个月内发生的交通事故数不多于3次的概率;

(2)一个月内至多2天有交通事故的概率。

解：(1)记X_i为第i天发生的交通事故数,

则$X_i \sim P(0.1), i=1,2,\cdots,30$。

可认为$X_1,\cdots,X_{30}$相互独立,由可加性,

从而$\sum_{i=1}^{30} X_i \sim P(3)$,故

$$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \le 3\right) = \sum_{k=0}^{3} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \approx 0.6472 。$$

注:不要用中心极限定理。

(2)先算一天有交通事故数的概率,

$$p = P(X_i \geq 1) = 1 - P(X_i = 0) \approx 0.095,$$

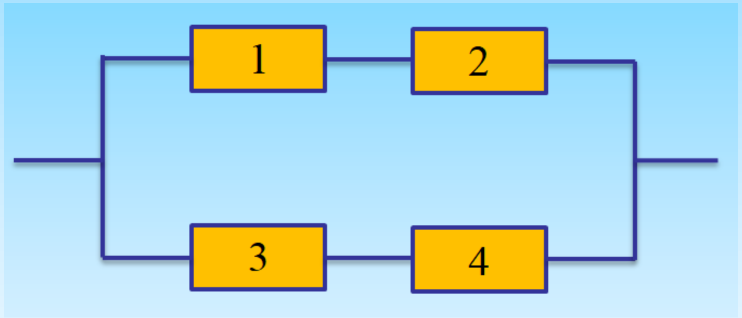
记Y为一个月内有交通事故的天数,则

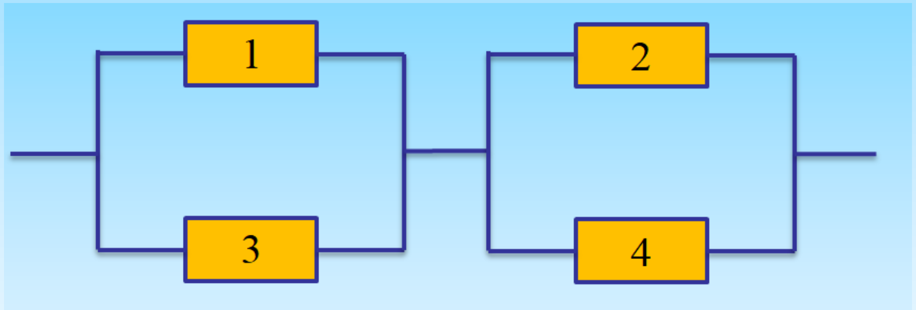
$Y \sim B(30, 0.095)$, 故

$$P(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} C_{30}^{k} 0.095^k 0.905^{30-k} \approx 0.4476。$$

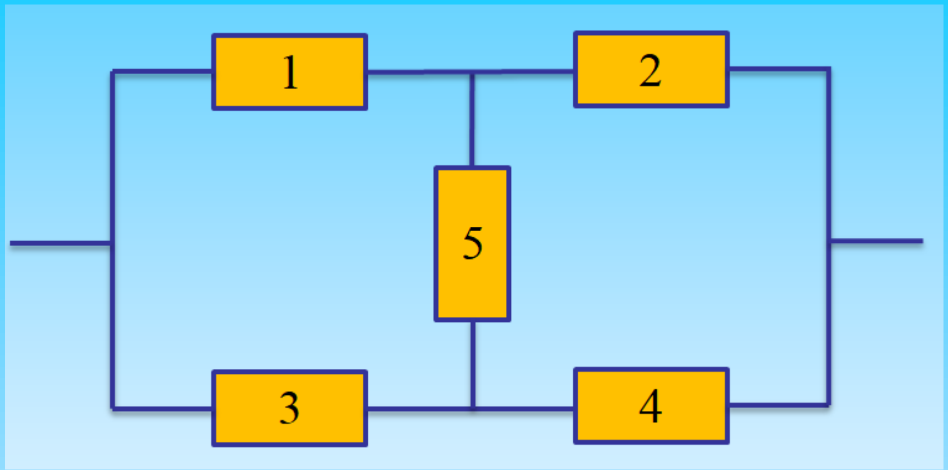
3.$(5'\times 2=10')$

(1)由4个元件组成两个系统,如下图。设每个元件的可靠性均为0.9,且各元件是否正常工作相互独立,分别求两个系统的可靠性大小;





(2)若5个元件组成如下系统,每个元件的可靠性均为0.9,各元件相互独立工作,求该系统的可靠性。



解:

记A_i为第i个元件能正常工作, $i=1,2,3,4,5$,

$A_1,\cdots,A_5$相互独立。

(1) 系统1: $p_1=P(A_1A_2\cup A_3A_4)$

$$=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$=0.9636,$$

系统2: $p_2=P((A_1\cup A_3)(A_2\cup A_4))$

$$=P(A_1\cup A_3)P(A_2\cup A_4)$$

$$=\left(1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_3)\right)\cdot\left(1-P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_4)\right)=0.9801,$$

(2)记B为系统正常工作的事件,由全概率公式,

$$P(B)=P(A_5)P(B\,|\,A_5)+P(\bar{A}_5)P(B\,|\,\bar{A}_5)$$

$$=0.9\times 0.9801+0.1\times 0.9636=0.97848。$$

$4.(5' \times 2=10')$

设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}x(x-y),0\le x\le 2,|y|\le x\\ \quad\quad 0,otherwise\end{cases},$$

(1)求X,Y的边际密度函数,并且讨论X 和Y 的独立性;

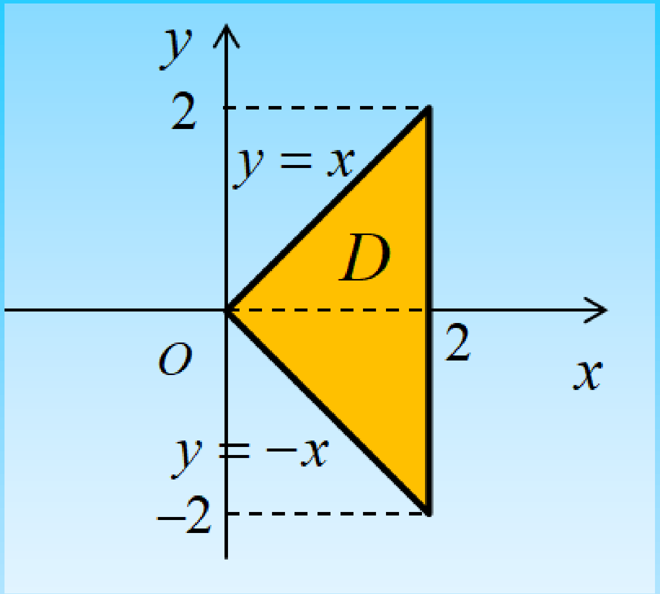
(2)计算$E(XY)$。

解: (1)

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy$$

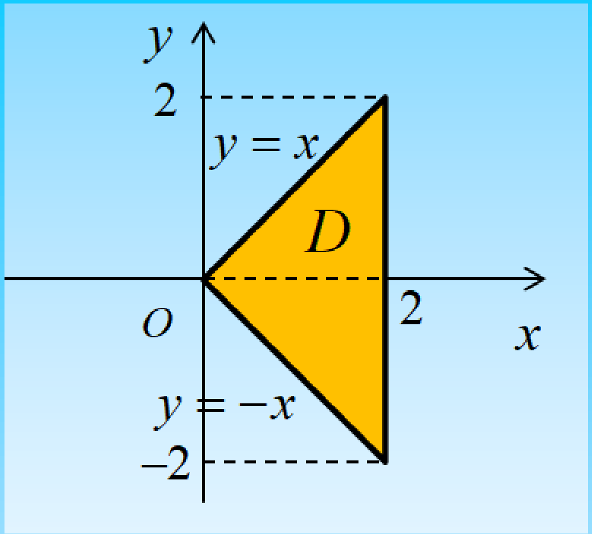
$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\frac{1}{8}x(x-y)dy, 0<x<2\\ 0, otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{x^3}{4}, 0<x<2\\ 0, otherwise\end{cases},$$



$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$$

$$= \begin{cases} \int_{y}^{2} \frac{1}{8} x(x-y)dx, 0 < y < 2 \\ \int_{-y}^{2} \frac{1}{8} x(x-y)dx, -2 < y \le 0, \\ 0, otherwise \end{cases}$$



$$=\begin{cases} \frac{1}{8}\left(\frac{8}{3}-2y+\frac{y^3}{6}\right), 0<y<2 \\ \frac{1}{8}\left(\frac{8}{3}-2y+\frac{5y^3}{6}\right), -2<y\le 0, \\ 0, otherwise \end{cases}$$

在区域D内, $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$,

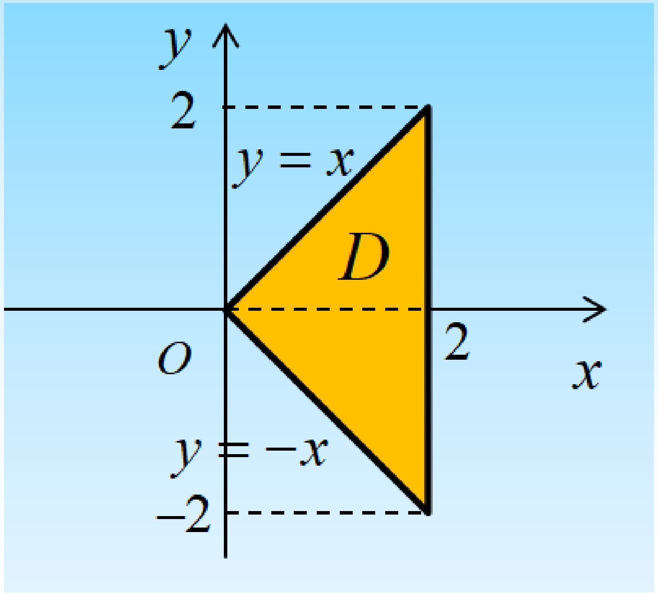
故X,Y不独立;

$$(2)E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,p(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D} xy\cdot\frac{1}{8}x(x-y)\,dxdy$$

$$=\int_{0}^{2}dx\int_{-x}^{x}\frac{1}{8}x^{2}y(x-y)\,dy$$

$$=-\frac{8}{9}\text{。}$$



$5.(5' \times 2 = 10')$

假设生产线上组装每件成品的时间服从指数分布,统计资料表明该生产线每件成品的组装时间平均为10分钟,各件产品的组装时间相互独立,

(1)求组装100件成品需要15小时至20小时的概率;

(2)以95%的概率在16小时以内最多可以组装多少件成品?

解：　记X_i为组装第i件成品所需时间(单位：分)，

$$X_i \sim Exp(0.1), \mu = EX_i = 10, \sigma^2 = DX_i = 100,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$独立，

$$(1) P\left(15 \times 60 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 20 \times 60\right)$$

$$= P\left(\frac{900-1000}{100} \le \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 10}{\sqrt{100} \times 10} \le \frac{1200-1000}{100}\right)$$

$$\overset{\text{中心极限定理}}{\approx} \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.8186。$$

(2)设最多可组装n件，则$P(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 16\times 60) = 0.95$,

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 10n}{10\sqrt{n}} \le \frac{960-10n}{10\sqrt{n}}\right) = 0.95,$$

$$\Phi\left(\frac{960-10n}{10\sqrt{n}}\right) \approx 0.95, \qquad \frac{96-n}{\sqrt{n}} = 1.65,$$

$$n = 81$$

结束