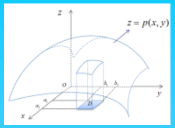


第一章 事件与概率

杨勇制作

第一节 随机现象与随机试验

一. 随机现象

在一定条件下,必然发生或必然不发生的现象,称为确定性现象。

例1: 在平面上给一个三角形,则三个内角之和为180度。

例2: 在一个大气压下, 水没有加热到100度不会沸腾。

高等数学是研究确定性现象, 主要研究函数

$$y = f(x)$$

注: 本课程主要工具是微积分, 如极限, 连续, 导数, 偏导数, 级数, 定积分, 二重积分等

在一定条件下,可能出现这个结果,也可能出现那样结果,而且不能事先确定出现哪一个结果的现象,称为随机现象。

例1: 抛一枚硬币。

例2: 从一工厂的某种产品中抽出n件产品,观察次品个数。

随机现象又分为个别随机现象和大量性随机现象。

个别随机现象:原则上不能在不变的条件下重复出现。例如历史事件。

大量性随机现象:可以在完全相同的条件下重复出现。例如抛硬币。

概率论只研究大量性随机现象在完全相同的条件下重复出现时所表现出来的规律性。

以后随机现象都是指大量性随机现象。

问题:随机现象难道还有规律性吗?

例如,抛一枚硬币。

随机现象所表现出来的规律性称为统计规律性。

概率论和数理统计的研究对象:

概率论和数理统计是研究(大量性)随机现象统计规律性的数学学科。

概率论和数理统计的研究方法:

概率论研究方法是提出数学模型,然后研究它们的性质,特点和规律性。

数理统计是以概率论的理论为基础,利用对随机现象的观察所取得的数据资料来提出数学模型,并加以应用。例如控制和预测等。

二．随机试验

观察一定条件下发生的随机现象称为随机试验，还必须满足下述条件：

1.试验可以在相同的条件下重复进行；

2.试验之前能确定所有可能发生的结果，并且规定每次试验有且仅有一个结果出现；

3. 试验之前不能确定将会出现哪一个结果。

例1：抛一枚硬币。

例2：从一工厂的某种产品中抽出n件产品。

条件实现一次就是一次试验。

第二节 样本空间和随机事件

杨勇制作

一． 样本空间

随机试验的所有可能的结果放在一起组成的集合称为样本空间。记为Ω。

样本空间的每一个元素称为样本点。记为ω。

在概率论中讨论一个随机试验时，首先要求明确它的样本空间。

样本空间可以根据随机试验的内容来决定。但写法不一定惟一。

鉴于写出样本空间的重要性，举一些例子。

例1：抛一枚硬币观察正反面出现的情况。

$$\Omega=\{正面,反面\}$$

正面 $\leftrightarrow$ *Heads*　　反面 $\leftrightarrow$ *Tails*

$$\Omega=\{H,T\}$$

例2：抛二枚硬币观察它们正反面出现的情况。

$$\Omega=\{(二个H),(一个H,一个T),(二个T)\}$$

$$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

注:大家要熟悉这样的方法来表示样本点

抛掷3个硬币,把3个硬币编号,

$$(H,T,H)$$

第1号硬币　第2号硬币　第3号硬币

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H) \\ (H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\end{array}\right\}$$

1个硬币抛掷3次,样本空间一样。

抛掷3个骰子也是这样表示。

例3: 从一工厂的某种产品中抽出n件产品,观察次品个数。

$$\Omega=\{0,1,\cdots,n\}。$$

例4: 从包含两件次品(记作a_1,a_2)和三件正品(记作b_1,b_2,b_3)的五件产品中,任取两件产品。

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),\\(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_2,b_3),(b_1,b_3)\end{array}\right\}$$

$$C_5^2=10$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, b_1), (b_1, a_1), (a_1, b_2), \\ (b_2, a_1), (a_1, b_3), (b_3, a_1), (a_2, b_1), (b_1, a_2), \\ (a_2, b_2), (b_2, a_2), (a_2, b_3), (b_3, a_2), (b_1, b_2), \\ (b_2, b_1), (b_2, b_3), (b_3, b_2), (b_1, b_3), (b_3, b_1) \end{array} \right\}$$

$$A_5^2 = P_5^2 = 20$$

例5: 向某一目标发射一发炮弹,观察落点与目标的距离。

$$\Omega=\left\{d\,\middle|\,d\geq 0\right\}=[0,+\infty)$$

例6: 向某一目标发射一发炮弹,观察落点的分布情况。

$$\Omega=\left\{(x,y)\,\middle|\,-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\right\}=R^2$$

二. 随机事件

例7: 从包含两件次品(记作a_1, a_2)和三件正品(记作b_1, b_2, b_3)的五件产品中,任取两件产品,观察次品个数。

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), \\ (a_2, b_2), (a_2, b_3), (b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_1, b_3) \end{array} \right\}$$

$A_0 =$ "没有抽到次品"

$$= \{(b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_1, b_3)\},$$

A_1 = “抽到一个次品”

$$= \left\{ \begin{array}{l} (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3) \end{array} \right\},$$

A_2 = “抽到两个次品”

$$= \{(a_1, a_2)\},$$

注意:它们都是样本空间Ω的子集。

样本空间的子集称为<u>随机事件</u>，简称事件。

常用A, B, C, A_i, B_j表示随机事件。

这个定义要注意的是样本空间确定后，随机事件所包含的样本点只能在这个样本空间中找。

规定：随机事件A发生当且仅当随机事件A中有某一个样本点出现。

记作：A发生$\Leftrightarrow \omega \in A$

这样集合论就和概率论联系起来了。

例5: 向某一目标发射一发炮弹, 观察落点与目标的距离。

$$\Omega=\left\{d\,\middle|\,d\geq 0\right\}=[0,+\infty)$$

随机事件$A=$"距离目标不超过100 米",

$$A=\{d\,|\,0\leq d\leq 100\}=[0,100]\subset\Omega$$

例6: 向某一目标发射一发炮弹,观察落点的分布情况。

$$\Omega=\left\{(x,y)\middle|-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\right\}=R^2$$

随机事件$A=$"距离目标不超过100 米",

$$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 100^2\}\subset R^2$$

杨勇制作

考虑两个特殊的随机事件：

由于$\Omega \subset \Omega$，所以样本空间Ω也是随机事件。

但每做一次随机试验，样本空间Ω必然发生，

又称样本空间Ω为必然事件。

由于$\varnothing \subset \Omega$，所以空集$\varnothing$也是随机事件。

但每做一次随机试验，空集$\varnothing$一定不发生，

又称空集$\varnothing$为不可能事件。

三. 随机事件的关系和运算

为了简单事件表示复杂事件,需要研究随机事件的关系和运算。

下面的讨论都是在同一个样本空间Ω上,即$A, B, A_i, i=1,2,\cdots$都是Ω的子集。

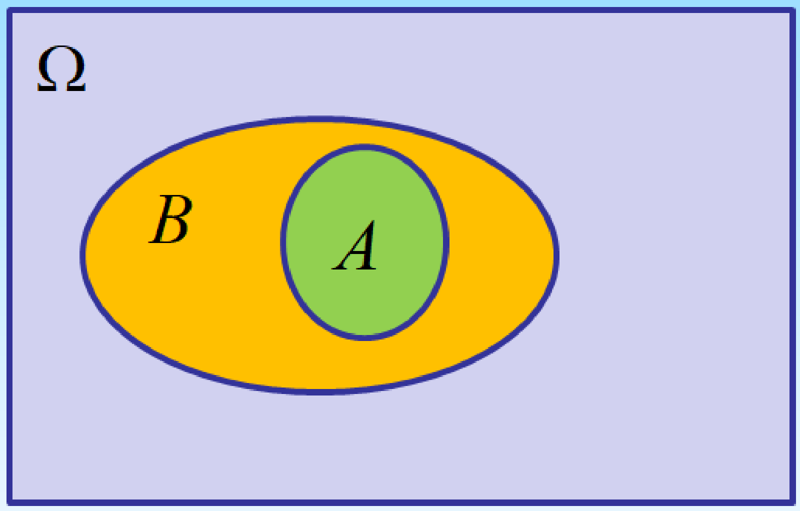
1. 包含

若随机事件A发生必然导致随机事件B发生,则称随机事件B包含随机事件A,或者称随机事件A包含在随机事件B中。

记为$B \supset A$,或者$A \subset B$。

用集合论语言,

$$\forall \omega \in \Omega, \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$



$$A \subset B$$

维恩(Venn)图

若$B \supset A$,且$A \supset B$,则称随机事件A与随机事件B相等,记为$A = B$。

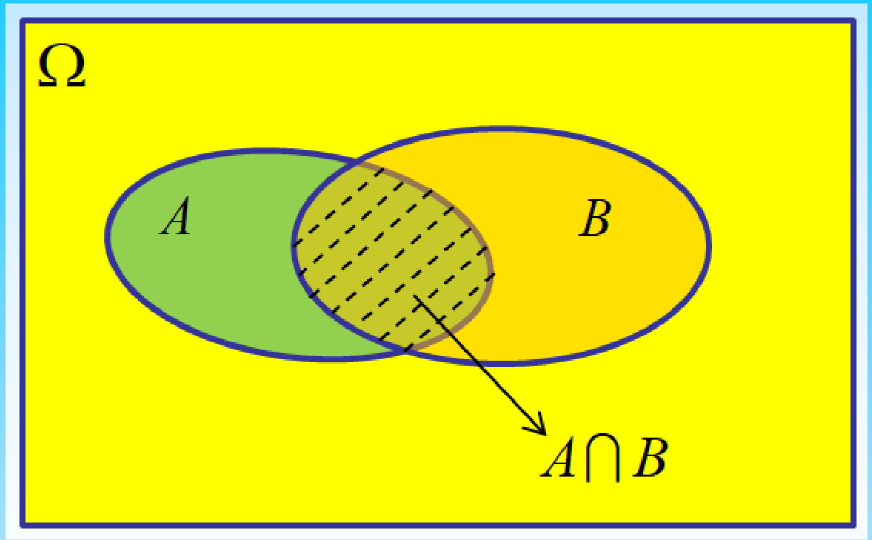
2. 交(积)

“随机事件A与随机事件B同时发生”是一个随机事件,则称此随机事件为随机事件A与随机事件B的交(积),记为

$$A \cap B, \text{或者} AB$$

用集合论语言,

$$\forall \omega \in \Omega, \omega \in A, \omega \in B \Rightarrow \omega \in A \cap B$$

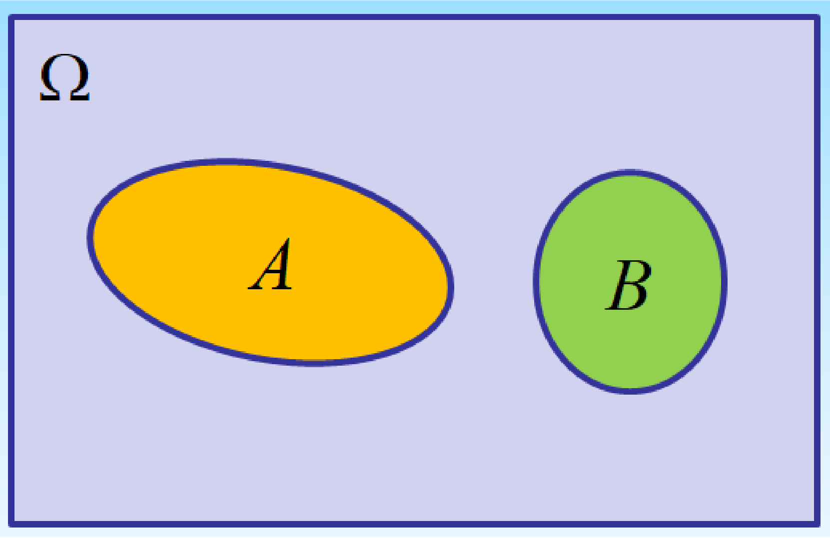


“n个随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生”是一个随机事件,则称此随机事件为n个随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的交(积),记为

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$或$A_1 A_2 \cdots A_n$,简记为$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$。

若随机事件A与随机事件B不能同时发生，则称随机事件A与随机事件B互不相容或互斥。

用集合论语言，$A \cap B = \varnothing$。

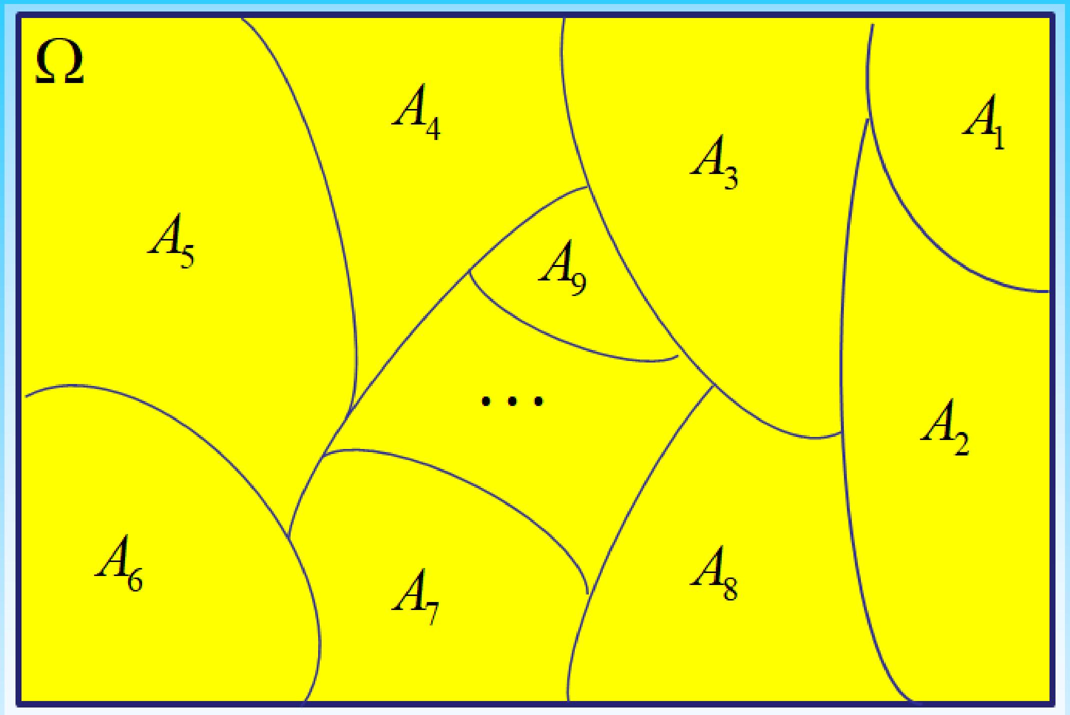


$A \cap B = \varnothing$

若n个随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中任意两个随机事件都不能同时发生，则称n个随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互不相容或两两互斥。

用集合论语言，

$$A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, \ \ i, j = 1, 2, \cdots, n。$$

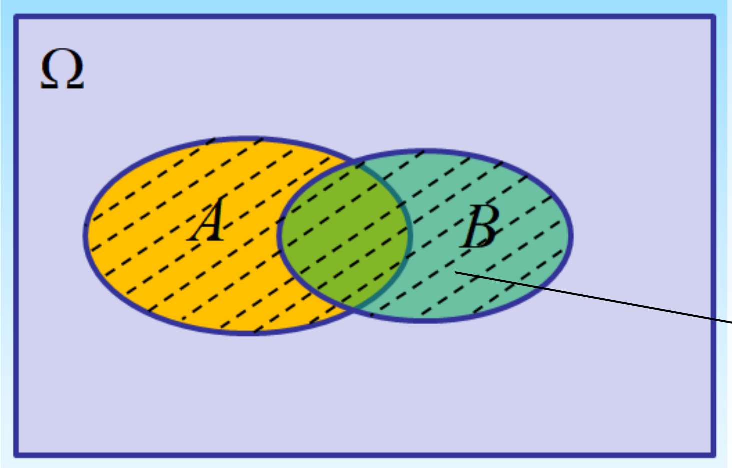


3. 并

“随机事件A与随机事件B至少有一个发生”是一个随机事件,则称此随机事件为随机事件A与随机事件B的并,记为$A \cup B$。

用集合论语言,

$$\forall \omega \in \Omega, \omega \in A \text{或} \omega \in B \Rightarrow \omega \in A \cup B$$



$A \cup B$

“n个随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$至少有一个发生”是一个随机事件,则称此随机事件为n个随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的$\underline{\underline{\text{并}}}$,记为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \text{简记为} \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

若n个随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互不相容,称并$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$为$n$个随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的$\underline{\underline{\text{和}}}$,记为

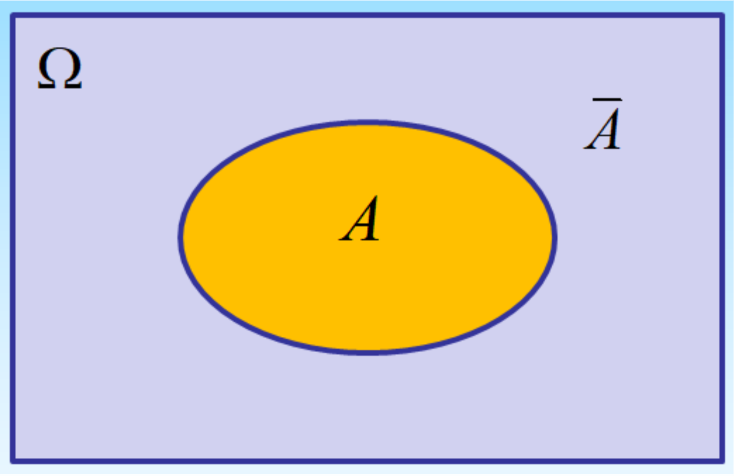
$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n, \text{简记} \sum_{i=1}^{n} A_i 。$$

杨勇制作

4. 对立事件（逆事件）

每次试验随机事件A与随机事件B有且仅有一个发生,则称随机事件B为随机事件A的对立事件(逆事件),记为$B=\bar{A}$。

随机事件A也为随机事件B的对立事件(逆事件),记为$A=\bar{B}$。



用集合论语言,

$$A+B=\Omega$$

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A + \overline{A} = \Omega,$$

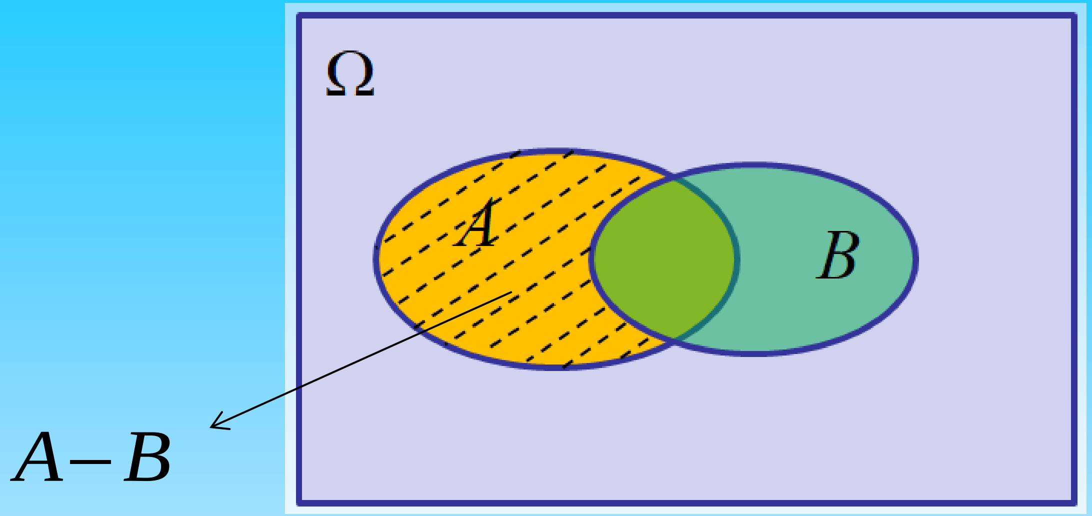
$$\overline{\Omega} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = \Omega 。$$

5. 差

"随机事件A发生,且随机事件B不发生"是一个随机事件,则称此随机事件为随机事件A与随机事件B的差,记为$A-B$,或者$A \setminus B$。

用集合论语言,

$$\forall \omega \in \Omega, \omega \in A, 且 \omega \notin B \Rightarrow \omega \in A-B$$



$$\bar{A} = \Omega - A$$

$$(A - B) + B = A \cup B$$

差化积：$A - B = A - AB = A\bar{B}$

三．运算规律

1. 吸收律：
$$A \cup \Omega = \Omega, A \cap \Omega = A$$
$$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$$

2. 幂等律：
$$A \cup A = A, A \cap A = A$$

3. 交换律：
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

4. 结合律:

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$$

5. 分配律:

$$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$$

6. 德莫根（De Morgan）律:

$$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}, \quad \overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

运算顺序:逆交并差,括号优先

注:“和”与“并”一样处理。

例1: 在图书馆中随意抽取一本书,随机事件A表示数学书,B表示中文书,C表示平装书,

则 $AB\bar{C}$ 表示抽取的是精装中文版数学书,

$\bar{C} \subset B$ 表示精装书都是中文书,

$\bar{A} = B$ 表示非数学书都是中文版的书,且中文版的书都是非数学书。

例2: 若A_i表示第i个射手击中目标($i=1,2,3$),

则

3个射手都击中目标: $A_1A_2A_3$

3个射手都未击中目标: $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

3个射手中至少有一个击中目标: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

3个射手中至少有一个未击中目标:

$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$, $\overline{A_1A_2A_3}$

3个射手中至少有二个击中目标:

$A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$, $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$

3个射手中恰好有二个击中目标:

$$A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$$

还可以写最多1个,最多2个,恰好1个,…,只要你想得出来都可以写。

杨勇制作

第三节 频率与概率

如果随机事件A在n次试验中发生了m次，称比值m/n为随机事件A的频率，记为

$$F_n(A)=\frac{m}{n}。$$

随机事件A发生可能性大小的数值称为随机事件A发生的概率(probability)，记为$P(A)$。

频率具有稳定性。

概率是客观存在的!

例如:测量木棒长度

真实的长度 $\leftrightarrow$ 概率

测量的长度 $\leftrightarrow$ 频率

木棒的真实长度永远不会知道,但是不能因为不知道真实的长度,就说木棒的长度不存在。

我们只知道测量的长度。

杨勇制作

第四节 古典概型与几何概率

一． 古典概型

一个随机试验的样本空间为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,
满足以下性质:

(1) 样本点总数有限,即n有限;

(2) 每个样本点出现的概率相等,即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n},$$

称满足以上2个性质的模型为古典概型。

随机事件$A\subset\Omega, A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$,

其中$i_1,i_2,\cdots,i_m$ 为$1,2,\cdots,n$中的m个数,

定义 $$P(A)=\frac{A\text{所包含样本点个数}}{\Omega\text{所包含样本点总数}}=\frac{m}{n},$$

称此概率为随机事件A的$\underline{\underline{\text{古典概率}}}$。

$0\le m\le n, 0\le P(A)\le 1,$

$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$。

注：

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$$

$$=\{\omega_{i_1}\}+\{\omega_{i_2}\}+\cdots+\{\omega_{i_m}\},$$

$$P(A)=P(\{\omega_{i_1}\})+P(\{\omega_{i_2}\})+\cdots+P(\{\omega_{i_m}\})$$

$$=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m}=\frac{m}{n}\text{。}$$

例1: 将一枚均匀对称的硬币抛3次, 观察正反面,

(1) 写出样本空间;

(2) 设事件A_1为“恰有一次出现正面”, 求$P(A_1)$;

(3) 设事件A_2为“至少有二次出现正面”, 求$P(A_2)$。

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\\(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\end{matrix}\right\}$$

例2: 任取一个正整数,求它是奇数的概率。

设 $A=$ “它是奇数”,

说明有限性

例3: 掷两颗骰子,求它们点数之和为3的概率。

设 $A=$ “它们点数之和为3”,

说明等可能性

例4: P10例1-12(不放回的抽签问题)

袋中有a 个白球和b 个黑球, 每次从袋中任取一球, 取出的球不再放回去, 求第 k次取到白球的概率。

$A =$ "第k次取到白球",

说明用不同的样本空间解决问题

解法一：　白球之间可以区分,黑球之间也可以区分,可以理解为都编号了。

把球随机地一个一个取出排成一排,这样一个排列就是一个样本点。

$$\underbrace{\mathrm{O}\quad *\quad *\quad \mathrm{O}\quad *\quad \cdots\quad \overset{k}{\mathrm{O}}\quad \cdots\quad \mathrm{O}\quad *}_{a+b}$$

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}。$$

注：　$\Omega=\left\{\omega \middle| \omega\text{为一个排列}\right\}$

解法二: 白球之间不可以区分, 黑球之间也不可以区分, 白球和黑球当然可以区分,

把球随机地一个一个取出排成一排,

这样一个组合就是一个样本点,

$$\underbrace{\mathrm{O} \quad * \quad * \quad \mathrm{O} \quad * \quad \cdots \quad \overset{k}{\mathrm{O}} \quad \cdots \quad \mathrm{O} \quad *}_{a+b}$$

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}。$$

注: $\Omega=\{\omega \mid \omega \text{为一个组合}\}$

解法三:仅考虑第 k 个位置的情况,

白球分别用 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_a$ 表示,

黑球分别用 $\omega_{a+1}, \omega_{a+2}, \cdots, \omega_{a+b}$ 表示,

$$\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_a, \omega_{a+1}, \cdots, \omega_{a+b}\right\},$$

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_a\},$$

$$P(A) = \frac{a}{a+b}。$$

例5: P9例1-10

某批产品共N件,其中有M件次品,从中每次任意取1件检查,共取n次,求恰好有k件次品的概率。如果(1)每次检查后的产品不放回;(2)每次检查后的产品放回。

$A=$"恰好有k件次品",

注:这是二个重要模型

解：(1)

$$P(A)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$

(2)

$$P(A)=\frac{C_n^k M^k (N-M)^{n-k}}{N^n}=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}。$$

注:对不放回的情况说明

(一)上面的解法是没有次序的,也可以

考虑次序的解法

$$P(A)=\frac{C_n^k A_M^k A_{N-M}^{n-k}}{A_N^n}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$O \quad O \quad * \quad O \quad * \quad \cdots \quad O \quad *$$

挑k个位置放次品

用比较好理解的方法做

（二）对不放回情况的推广

某批产品共N件，其中M_1件车间1生产，M_2件车间2生产，其余车间3生产，从这批产品中不放回地取出n件，求恰好车间1生产k_1件和车间2生产k_2件的概率。

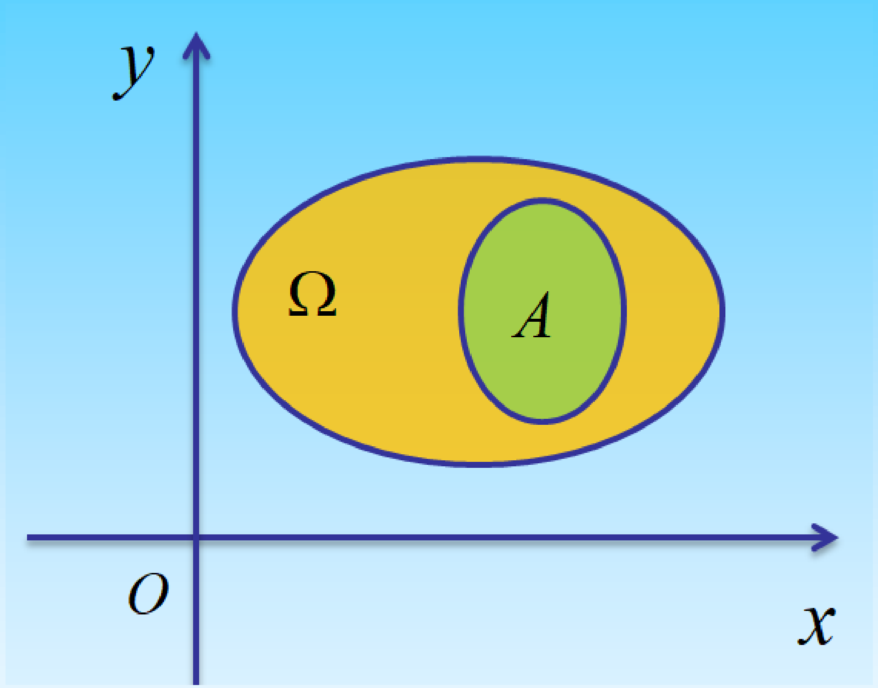
$A=$“恰好车间1生产k_1件和车间2生产k_2件”，

$$P(A)=\frac{C_{M_1}^{k_1}C_{M_2}^{k_2}C_{N-M_1-M_2}^{n-k_1-k_2}}{C_N^n}$$

例6: 任取一个正整数, 求该数的平方末位数为1的概率。

设$A=$“该数的平方末位数为1”,

二．几何概率



$$P(A)=0\overset{?}{\Rightarrow}A=\varnothing$$

设有一个有界区域Ω,区域中的每个点出现的可能性相等,$D\subset\Omega$,事件A表示点落在D中,则定义

$$P(A)=\frac{D\text{的长度（面积，体积）}}{\Omega\text{的长度（面积，体积）}}$$

为事件A的几何概率。

例1: P12例1-13（会面问题）

两人约定于0到T时内在某地会面,先到者等$t(t \le T)$时后离开,假定两人在0到T时内各时刻到达的可能性相等,求两人能会面的概率。

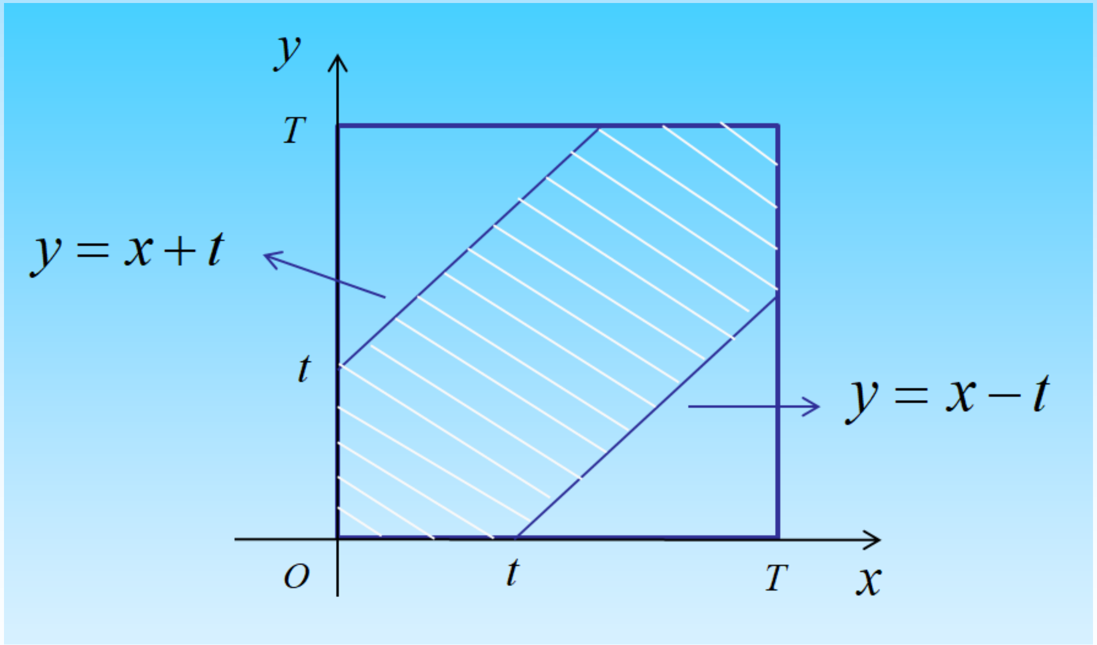
解:

$A =$“两人能会面”,

以x, y分别表示两人到达的时刻,

$$\Omega = \left\{(x, y) \middle| 0 \le x \le T, 0 \le y \le T\right\},$$

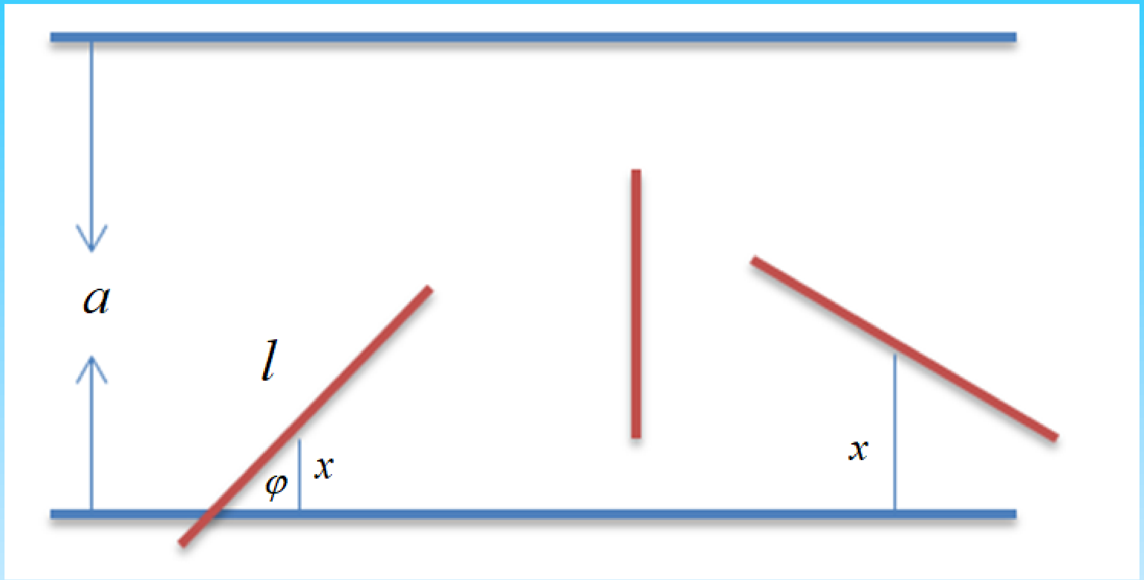
$$A = \left\{(x, y) \middle\| x - y \right| \le t\},$$



$$P(A)=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}。$$

例2: P13例1–15（蒲丰投针问题）

平面上画有等距离为$a(a>0)$的一组平行线,向该平面上任意投一长为$l(l<a)$的针,试求针与一平行线相交的概率。



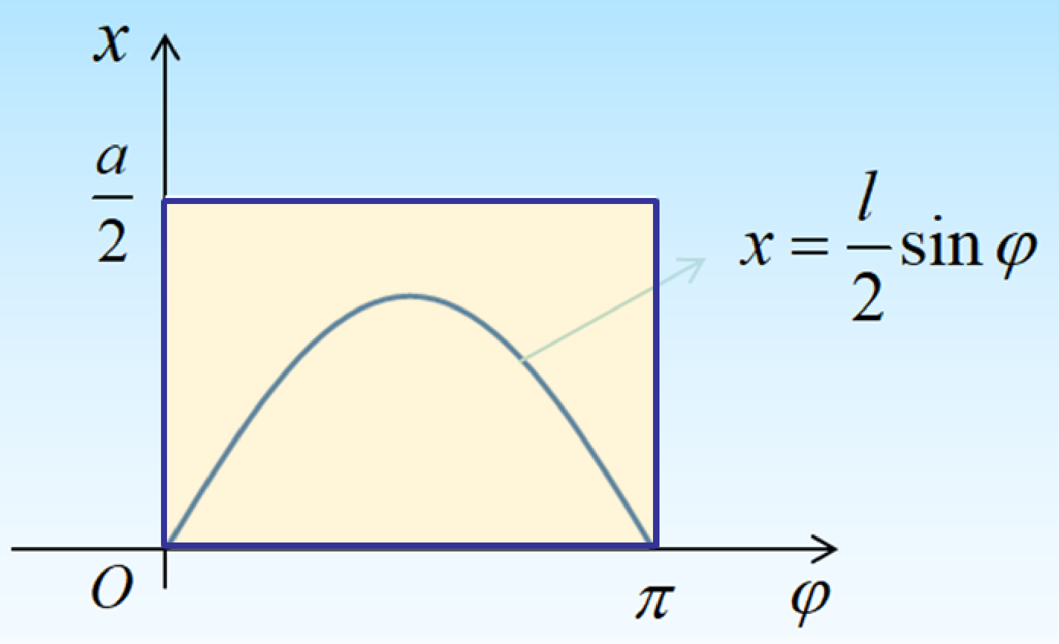
解：　$A=$"针与一平行线相交",

x表示针的中点与最近的一条平行线的距离,

φ表示针与此线的夹角,

$$\Omega: 0 \le x \le \frac{a}{2}, 0 \le \varphi \le \pi,$$

$$A: x \le \frac{l}{2}\sin\varphi,$$



$$P(A)=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{a\pi}{2}}=\frac{-\frac{l}{2}\cos\varphi\Big|_0^{\pi}}{\frac{a\pi}{2}}=\frac{2l}{\pi a}。$$

n次抛掷针,针与平行线相交m次,

由频率具有稳定性,

当n较大时,$\frac{2l}{\pi a}\approx\frac{m}{n}$。

P16习题15

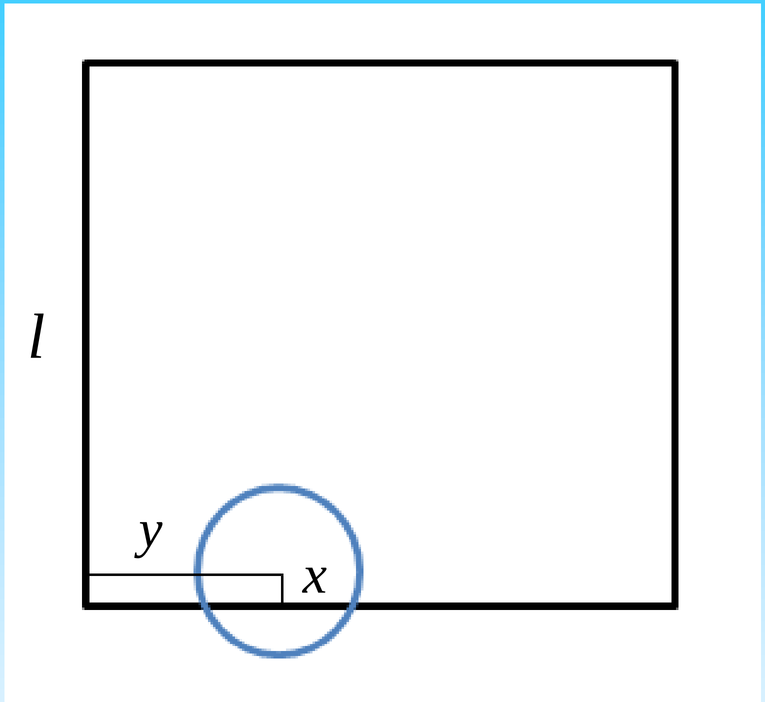
在一张画有方格的纸上投一枚直径为1的硬币,方格要多小才能使硬币与方格的边不相交的概率小于1%?

解: $A=$“硬币与方格的边不相交”,

l表示方格的边长(显然应该大于1),

x表示硬币圆心与方格上下近的边的距离,

y表示硬币圆心与方格左右近的边的距离,



$$\Omega : 0 \le x \le \frac{l}{2}, 0 \le y \le \frac{l}{2},$$

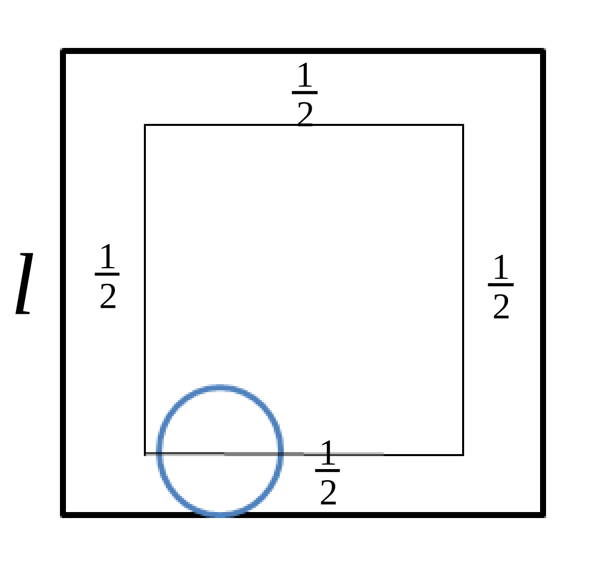
$$A : x > \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2},$$

$$P(A)=\frac{\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}<\frac{1}{100},$$

$$1-\frac{1}{l}<\frac{1}{10},$$

$$l<\frac{10}{9}。$$

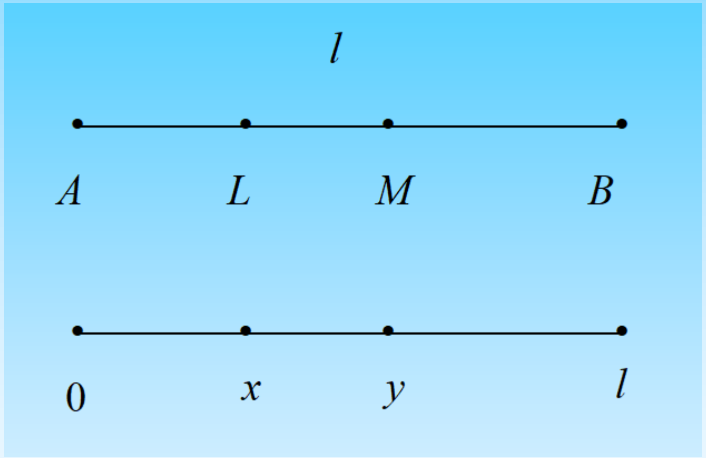
另解：



$$P(A)=\frac{(l-1)^2}{l^2}<\frac{1}{100}, \qquad l<\frac{10}{9}。$$

习题集P10填空题10

在长为l的线段AB上任意地投两点L和M，求LM的长度小于AL的概率。



$C=$“LM的长度小于AL”，

$$\Omega: 0 \le x \le l, 0 \le y \le l,$$

$$C: |x-y| < x\text{。}$$

概率论试卷

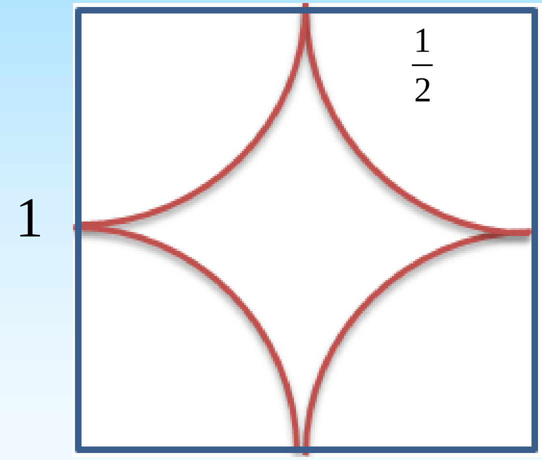
2018-2019学年第1学期

2019年1月3日

2.在边长为1的正方形区域内任取一点,则该点到每个顶点的距离均大于$\frac{1}{2}$的概率为__________________。

解:

$$p=\frac{1-4\times\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}}{1}=1-\frac{\pi}{4}。$$



第五节 概率的公理化定义和性质

一．概率的公理化定义

古典概率的基本性质：

1. (非负性) 对任何事件A, $P(A)\geq 0$;

2. (规范性) $P(\Omega)=1$;

3. (有限可加性) 若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n),$$

或者$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$。

证明:只要证明(3)即可,

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\},$$

先证 $m=2$,

$$A_1=\{\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_p}\},P(A_1)=\frac{p}{n},$$

$$A_2=\{\omega_{j_1},\cdots,\omega_{j_q}\},P(A_2)=\frac{q}{n},$$

A_1和A_2互不相容,

$$A_1+A_2=\{\omega_{i_1},\cdots\omega_{i_p},\omega_{j_1},\cdots,\omega_{j_q}\},P(A_1+A_2)=\frac{p+q}{n},$$

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)。$$

归纳假设：若事件$A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}$

两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_{m-1})=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{m-1}),$$

再证：若事件$A_1, A_2, \cdots, A_m$两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)。$$

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_{m-1}+A_m)=P((A_1+A_2+\cdots+A_{m-1})+A_m)$$

$$=P(A_1+A_2+\cdots+A_{m-1})+P(A_m)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{m-1})+P(A_m),$$

其中 $(A_1+\cdots+A_{m-1})A_m=A_1A_m+\cdots A_{m-1}A_m=\varnothing,$

由归纳法知,结论成立。

几何概率的基本性质:

1. (非负性) 对任何事件A, $P(A) \geq 0$;

2. (规范性) $P(\Omega) = 1$;

3. (可列可加性) 若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$两两互不相容,则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots,$$

或者$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ 。

一般概率的定义,即概率公理化定义:

随机事件A发生可能性大小的数值称为随机事件A发生的概率(probability),记为$P(A)$,

还必须满足以下3条公理:

1. (非负性) 对任何事件A, $P(A) \geq 0$;

2. (规范性) $P(\Omega) = 1$;

3. (可列可加性) 若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$两两互不相容,则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots,$$

或者$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ 。

柯尔莫哥洛夫
Kolmogorov, A.N.


柯尔莫哥洛夫，A. H.

最为人所道的是对概率论公理化所作出的贡献

1903年4月25日生于俄国坦波夫

1987年10月20日卒于苏联莫斯科

1939年,他被选为苏联科学院数理部院士。

1980年鉴于他“在调和分析、概率论、遍历论和动力系统深刻而开创性的发现”而获得沃尔夫(Wolf)奖。

他一生共写学术论文(包括合作)488篇。

他是20世纪苏联最有影响的数学家,也是20世纪世界上为数极少的几个最有影响的数学家之一。

他研究的领域非常广泛,几乎遍及一切数学领域。

二．一般概率的性质

性质1: $P(\varnothing)=0$。

证明: $\Omega,\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing,\cdots$ 两两互不相容,

由可列可加性,

$$P(\Omega+\varnothing+\varnothing+\cdots)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

再由规范性,

$$P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots=0,$$

最后由非负性,

$$P(\varnothing)=0。$$

性质2:（有限可加性）设$A_1, A_2, \cdots, A_n$

两两互不相容,则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)。$$

证明:$A_1, A_2, \cdots, A_n, \varnothing, \varnothing, \cdots$两两互不相容,

由可列可加性,

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + \cdots,$$

由性质1,

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)。$$

性质3：$P(A)+P(\bar{A})=1$。

证明： $A+\bar{A}=\Omega$,

由有限可加性,

$$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})=P(\Omega),$$

再由规范性,

$$P(A)+P(\bar{A})=1。$$

例1: 有4张壹分, 3张贰分, 2张肆分和1张捌分的邮票, 任取其中3张, 求

(1) 取出的3张邮票的总值为壹角的概率;

(2) 取出的3张邮票中至少有2张邮票的面值相同的概率。

解: (1)

$A =$ "取出的3张邮票的总值为壹角",

$A_1 =$ "3张邮票中, 二张壹分, 一张捌分",

$A_2 =$ "3张邮票中, 二张肆分, 一张贰分",

$$A = A_1 + A_2,$$

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$= \frac{C_4^2 C_1^1 C_3^0 C_2^0}{C_{10}^3} + \frac{C_2^2 C_3^1 C_4^0 C_1^0}{C_{10}^3}$$

$$= \frac{3}{40};$$

(2)

$B =$“取出的3张邮票中至少有2张邮票的面值相同”,

考虑B的对立事件,

$\bar{B}$ = “取出的3张邮票的面值都不相同”,

$$\bar{B} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4,$$

$$P(\bar{B}) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$$

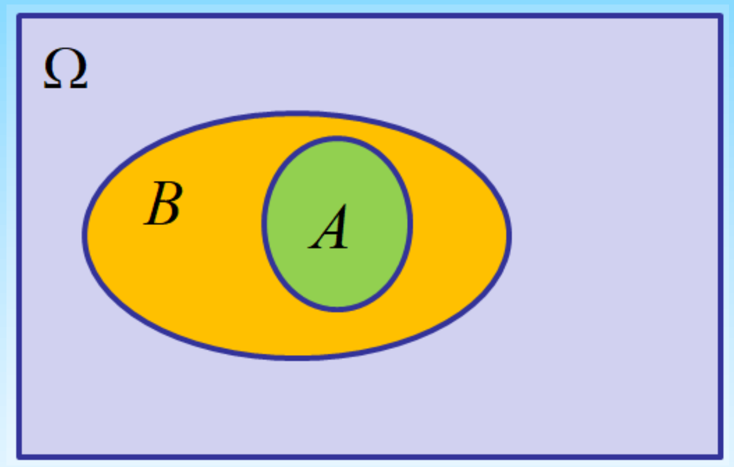
$$= \frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1}{C_{10}^3} + \frac{C_4^1 C_2^1 C_1^1}{C_{10}^3} + \frac{C_4^1 C_3^1 C_1^1}{C_{10}^3} + \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{C_{10}^3}$$

$$= \frac{5}{12}, \qquad P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{7}{12}。$$

性质4：设$A \subseteq B$，则

$$P(B-A) = P(B) - P(A)。$$

证明：



$$A \subset B$$

$$B = A + (B - A),$$

由有限可加性，

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

即 $$P(B-A)=P(B)-P(A)。$$

推论：设$A\subseteq B$，则$P(A)\le P(B)$。

反之不成立。

因为，$\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$，

所以，$0\le P(A)\le 1$。

推广：$P(B-A)=P(B)-P(AB)$。

证明：

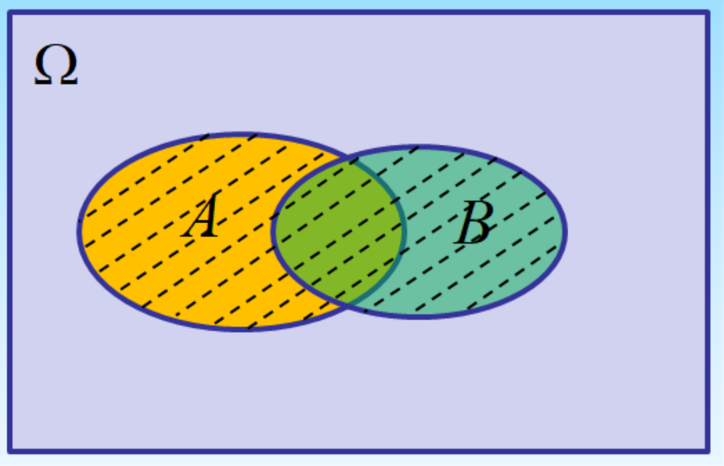
$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)。$$

性质5: (加法定理,其实应该叫并的定理)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)。$$

推论: $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$。

证明:



$A \cup B$

$$A \cup B = A + (B - A),$$

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B - A) \\
&= P(A) + P(B) - P(AB)\text{。}
\end{aligned}
$$

例2: 袋中装有红,黄,白色球各一个,每次抽取一球,有放回地抽三次,求抽出球中无红色或无黄色的概率。

解: $A=$"抽出球中无红色",

$B=$"抽出球中无黄色",

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{2^3}{3^3}+\frac{2^3}{3^3}-\frac{1^3}{3^3}=\frac{5}{9}。$$

习题集$P13$,计算题第4题

从0~9这十个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率。

(1)三个数字中不含0与5;

(2)三个数字中不含0或者不含5;

(3)三个数字中含0但不含5。

解: $A=$“不含0”, $B=$“不含5”,

(1) $$P(AB)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3},$$

(2)

$$P(A)=P(B)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3},$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

(3)

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB),$$

或者

$$\frac{C_8^2}{C_{10}^3}。$$

习题集14页计算题14

从1～9这九个正整数中，有放回地取3次，每次任取一个，求所得到的三个数之积能被10整除的概率。

解：$A=$“三个数中有5”，$B=$“三个数中有偶数”，

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$=1-\left(P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})\right)$$

$$=1-\left(\frac{8^3}{9^3}+\frac{5^3}{9^3}-\frac{4^3}{9^3}\right)\approx 0.214\text{。}$$

推广:

从$1\sim 9$这九个正整数中,有放回地取n次,每次任取一个,求所得到的n个数之积能被10整除的概率。

并且讨论$n\to\infty$的情况。

解: $A=$“n个数中有5”, $B=$“n个数中有偶数”,

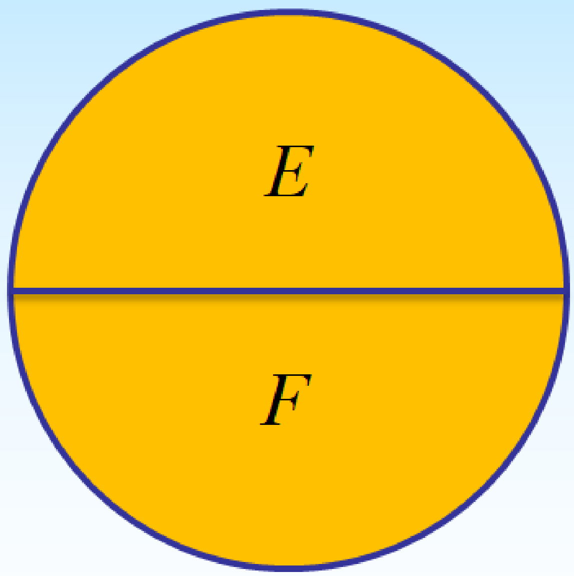
$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$=1-\left(P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})\right)$$

$$=1-\left(\frac{8^n}{9^n}+\frac{5^n}{9^n}-\frac{4^n}{9^n}\right),$$

$n\to\infty, P(AB)\to 1$。

例3：平面上画有等距离为$a(a>0)$的一组平行线，向该平面上任意投一直径为l $(l<a)$的半圆，试求半圆与一平行线相交的概率。



解：设想有另一个半圆和题目中所考虑的半圆恰好构成一个圆。

$E=\{$半圆与一直线相交$\}$,

$F=\{$另一个半圆与一直线相交$\}$,

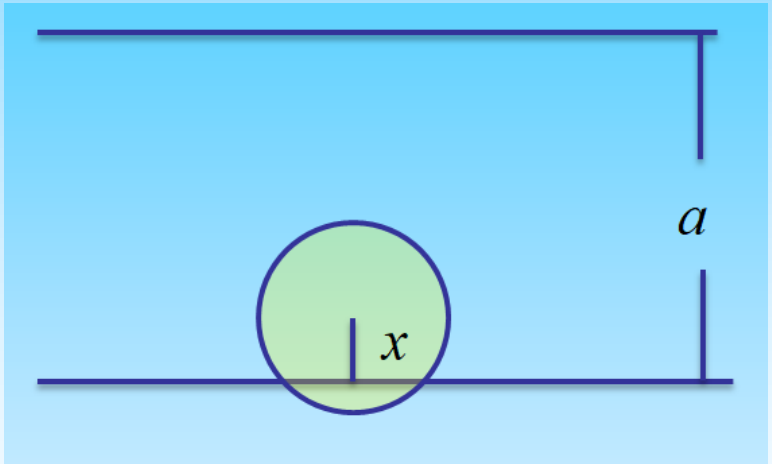
$E\cap F=\{$长为l的针与一直线相交$\}$,

$E\cup F=\{$直径为l的圆与一直线相交$\}$,

$$P(E\cap F)=\frac{2l}{\pi a},P(E\cup F)=\frac{l/2}{a/2},$$

根据对称性知,

$$P(E)=P(F),$$



$0\le x\le\frac{a}{2}$,相交为$0\le x\le\frac{l}{2}$

由加法定理知,

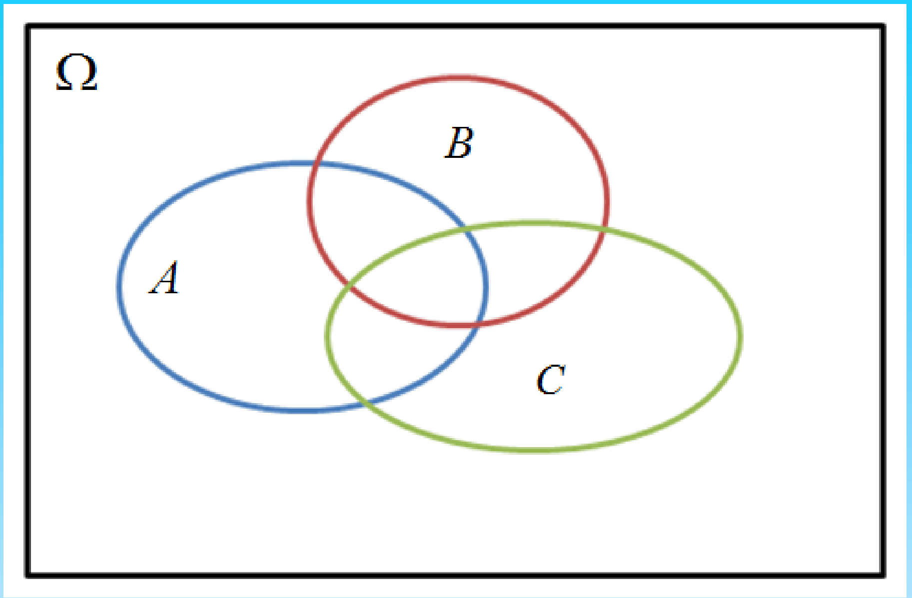
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F),$$

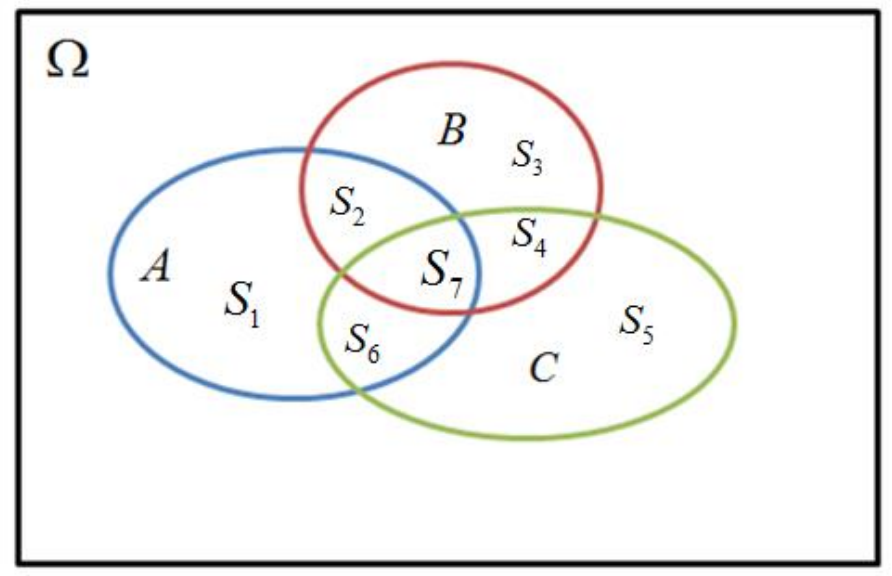
$$P(E) = \frac{l\pi + 2l}{2\pi a}。$$

推广：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$
$$-P(BC)-P(AC)+P(ABC)。$$

证明：
$$P(A\cup B\cup C)=P((A\cup B)\cup C)$$
$$=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)C)$$
$$=P(A\cup B)+P(C)-P(AC\cup BC)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$
$$-P(BC)-P(AC)+P(ABC)。$$


Ω
B
A
C


Ω
B
S_3
S_2
S_4
A
S_7
S_1
S_6
S_5
C

$$S_A + S_B + S_C - S_{AB} - S_{BC} - S_{AC} + S_{ABC}$$

$$= (S_1 + S_2 + S_6 + S_7) + (S_2 + S_3 + S_4 + S_7)$$

$$+ (S_4 + S_5 + S_6 + S_7) - (S_2 + S_7) - (S_4 + S_7)$$

$$- (S_6 + S_7) + S_7$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$$

$$= S_{A \cup B \cup C}$$

注:多退少补

Jordan公式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

归纳法证明

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i A_{n+1})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k)$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) + P(A_{n+1})$$

$$-\{\sum_{i=1}^{n} P(A_i A_{n+1}) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j A_{n+1}) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k A_{n+1})$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n A_{n+1})\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n+1} P(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n} P(A_1 A_2 \cdots A_n A_{n+1})$$

P15例1–16匹配问题

某人写了n封信,又写了n个信封,将n封信任意地装入n个信封,求至少有一封信与信封匹配的概率。

解: $A_i=$"第i封信与信封匹配",$i=1,2,\cdots,n,$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)},$$

$$\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!},$$

由加法定理(*Jordan*公式)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = C_n^1 \bullet \frac{1}{n} - C_n^2 \bullet \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!},$$

其中 $\sum_{1\le i<j\le n} 1 = \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n-1} + \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n-2}$

$$+(1+1)+1$$

2

$$=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2\text{。}$$

19.(收集问题) 某品牌的啤酒举行有奖销售活动，每瓶啤酒在瓶盖内放置一张奖券，n 张不同的奖券为一套，收集齐一套方可获奖，求购买k瓶啤酒能收集齐奖券的概率。

解：

$$A_i = \text{“}k\text{瓶啤酒中有编号为}i\text{ 奖券”}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$P(A_1 \cdots A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cup \cdots \cup \bar{A}_n)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(\bar{A}_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(\bar{A}_i\bar{A}_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(\bar{A}_i\bar{A}_j\bar{A}_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n),$$

$$P(\bar{A}_i)=\frac{(n-1)^k}{n^k},P(\bar{A}_i\bar{A}_j)=\frac{(n-2)^k}{n^k},\cdots。$$