8.8 多元函数的极值和最值

8.8.1 无条件极值

定义 8.1. 设点 (x_0, y_0) 是函数 $z = f(x, y)$ 的定义域的内点, 如果存在点 (x_0, y_0) 的某邻域, 使得对于该邻域内的任一异于 (x_0, y_0) 的点 (x, y), 都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极大值$f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的 极大值点.

如果都有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极小值$f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的 极小值点. 极大值与极小值统称为极值, 使函数取得极值的点统称为 极值点.

函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(0, 0)$ 处取极小值 0, 函数 $z = 1 - (x^2 + y^2)$ 在点 $(0, 0)$ 处取极大值 1, 函数 $z = xy$ 在点 $(0, 0)$ 处不取极值.

极值的判定条件

定理 8.1 (函数存在极值的必要条件). 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极值, 并且 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可偏导, 则 $f'_x(x_0, y_0) = 0$ 并且 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

如果函数 $z = f(x, y)$ 可微分, 则它在点 (x_0, y_0) 处有极值的必要条件可以写成向量形式

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \mathbf{0}.$$

能使 $\mathbf{grad} f(x, y) = \mathbf{0}$ 的点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的 驻点(或稳定点).

- 函数 $z = x^2 + y^2$ 的极值点 $(0, 0)$ 是驻点;
- 函数 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 的极值点 $(0, 0)$ 不是驻点, 因为在点 $(0, 0)$ 处 z'_x, z'_y 都不存在;
- 函数 $z = xy$ 虽然有驻点 $(0, 0)$, 但它去不是极值点.

函数 $f(x, y)$ 的驻点以及 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 中至少有一个不存在的点都是 $f(x, y)$ 的 可能的极值点. 而可能的极值点未必一定是极值点.

定理 8.2 (函数存在极值的充分条件). 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0) \subset \mathbb{R}^2$ 内有连续的二阶偏导数, $P_0(x_0, y_0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点, 即 $\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, 记

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

则

(x,y)	$(1,0)$	$(1,2)$	$(-3,0)$	$(-3,2)$
A	12	12	-12	-12
B	0	0	0	0
C	6	-6	6	-6
$AC-B^2$	72	-72	-72	72

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时, $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极值, 且当 $A>0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 是极小值, 当 $A<0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 是极大值;

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时, $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不取极值;

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 是否为极值还需另作讨论.

求可微函数 $z=f(x,y)$ 极值的一般步骤

1. 求出函数在定义域中的所有驻点 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,m)$;
2. 对每一驻点 (x_i,y_i), 分别计算其 A,B,C, 讨论 $AC-B^2$ 的符号, 从而确定极值的类型.

例 8.1. 求函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解: 根据极值点的必要条件, 先求驻点. 为此, 解方程组

$$\begin{cases} z'_x=3x^2+6x-9=0, \\ z'_y=-3y^2+6y=0, \end{cases}$$

得四个驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$. 求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数

$$z''_{xx}=6x+6,\quad z''_{xy}=0,\quad z''_{yy}=-6y+6.$$

算出各驻点处 A 与 $AC-B^2$ 的值: 因此函数 z 在 $(1,0)$ 处有极小值 $z(1,0)=-5$, 在 $(-3,2)$ 处有极大值 $z(-3,2)=31$, 在点 $(1,2)$ 和 $(-3,0)$ 处不取极值.

例 8.2. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$, 则

$$F'_x=2x-2,\quad F'_y=2y+2,\quad F'_z=2z-4.$$

故当 $F'_z=2z-4\neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{x-1}{z-2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{y+1}{z-2}.$$

解方程组

$$\begin{cases} z'_x=-\frac{x-1}{z-2}=0, \\ z'_y=-\frac{y+1}{z-2}=0, \end{cases}$$

得驻点为 $(1,-1)$. 当 $x=1,y=-1$ 时, $z_1=-2$, $z_2=6$.

再求出二阶偏导数

$$z''_{xx}=-\frac{(z-2)^2+(x-1)^2}{(z-2)^3},\ z''_{xy}=-\frac{(x-1)(y+1)}{(z-2)^3},\ z''_{yy}=-\frac{(z-2)^2+(y+1)^2}{(z-2)^3}.$$

在点 $(1,-1,-2)$ 处, $A=\frac{1}{4},B=0,C=\frac{1}{4},AC-B^2=\frac{1}{16}>0$, 所以函数 z 在 $(1,-1)$ 处有极小值 $z(1,-1)=-2$.

在点 $(1,-1,6)$ 处, $A=-\frac{1}{4},B=0,C=-\frac{1}{4},AC-B^2=\frac{1}{16}>0$, 所以函数 z 在 $(1,-1)$ 处有极大值 $z(1,-1)=6$.

8.8.2 最值问题

多元函数最值问题

使得函数取得最大值 (最小值) 的点为函数的最大值点 (最小值点), 统称为最值点; 函数的最大值和最小值统称为最值.

有界闭区域上的连续函数必存在最大值和最小值.

为求 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在某个区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上最大值和最小值, 只需求出函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 D 内部的所有极值和边界上最值, 然后从中比较就可以得到 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 D 上的最值.

例 8.3. 求平面 $x+2y+z=4$ 与点 $(1,0,-2)$ 的最短距离.

解: 设平面上的点为 $(x,y,4-x-2y)$, 则点 $(x,y,4-x-2y)$ 与点 $(1,0,-2)$ 的距离的平方为

$$f(x,y)=(x-1)^2+y^2+(4-x-2y-(-2))^2=(x-1)^2+y^2+(x+2y-6)^2.$$

由 $\nabla f=0$ 解得唯一驻点 $\left(\frac{11}{6},\frac{5}{3}\right)$. 根据题意可知, 平面 $x+2y+z=4$ 与点 $(1,0,-2)$ 的最短距离一定存在, 故唯一驻点记为最小值点. 因此最短距离为 $\sqrt{f\left(\frac{11}{6},\frac{5}{3}\right)}=\frac{5}{\sqrt{6}}$.

例 8.4. 求函数 $z=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$, x 轴与 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

解: 先求函数在 D 内的驻点. 解方程组

$$\begin{cases} z_x'=2xy(4-x-y)-x^2y=0,\\ z_y'=x^2(4-x-y)-x^2y=0,\end{cases}$$

得区域 D 内唯一驻点 $(2,1)$, 且 $z(2,1)=4$.

再求函数 D 在边界上的最值. 在边界 x 轴和 y 轴上均有 $z=0$. 在边界 $x+y=6(0\le x\le 6)$ 上,

$$z=f(x)=x^2(6-x)(4-x-(6-x))=-2x^2(6-x).$$

由 $f'(x)=-24x+6x^2=0$ 得 $x=4$, $y=2$, 而 $z(4,2)=-64$. 比较后得 $z(2,1)=4$ 为最大值, $z(4,2)=-64$ 为最小值.

例 8.5 (最小二乘问题). 假设有一组实验观测值: $x=x_i$, $y=y_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 将这些数据在直角坐标系中描成点 (x_i,y_i), 它们大致在一条直线上, 试求一条直线 $y=ax+b$ 使得与这 n 个点的距离偏差平方和最小, 即确定 a,b 使函数 $F(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$ 最小.

解: 令

$$\begin{cases} F_a'=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=2a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i+2b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0,\\ F_b'=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=2a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-2\sum\limits_{i=1}^{n}y_i+2nb=0,\end{cases}$$

解得

$$a=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad b=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

由于 $A = F''_{aa} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, B = F''_{ab} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, C = F''_{bb} = 2n$, 有

$$AC - B^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

所以 a, b 即为所求.

8.8.3 条件极值问题和拉格朗日乘子法

上面讨论了一类极值问题: 这类问题是求函数在给定定义域中的极值. 由于该类极值问题中, 对自变量无任何限制, 故又称为无条件极值问题. 而实际问题中我们常常会遇到这样的一种极值——当自变量的变化受到某种限制时, 函数是否存在极值以及如何去求出相应的极值, 这类带有某种约束条件的极值问题就称为条件极值问题.

求 n 元函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在一组约束条件

$$\begin{cases} G_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ G_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots \\ G_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (m < n)$$

下的极值.

例 8.6. 某工厂要用铁板做成一个体积为 2m^3 的有盖长方体水箱, 问当长, 宽, 高各取多少时, 可以使用料最少?

解: 设水箱的长为 xm, 宽为 ym, 高为 zm, 则水箱说用材料的面积为

$$A = 2(xy + yz + zx) \quad (x > 0, y > 0, z > 0), \tag{8.8.1}$$

(8.8.1)式称为本问题的目标函数. 又根据条件有

$$xyz = 2, \tag{8.8.2}$$

(8.8.2)式称为本问题的约束条件或 约束方程. 因此本问题是求目标函数(8.8.1)在约束条件(8.8.2)下的条件极值. 从约束条件中可得 $z = \frac{2}{xy}$, 代入目标函数, 得

$$A = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \quad (x > 0, y > 0),$$

从而将问题转化为无条件极值问题.

解方程组

$$\begin{cases} A_x = 2\left(y - \frac{2}{x^2}\right) = 0, \\ A_y = 2\left(x - \frac{2}{y^2}\right) = 0, \end{cases}$$

求得唯一的驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$. 根据题意水箱所用材料面积的最小值一定存在, 并且最小值一定在区域 $D = \{(x, y)|x > 0, y > 0\}$ 内部取到, 故可断定 $x = \sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{2}$ 时, A 取得最小值. 此时 $z = \sqrt[3]{2}$, 即当长、宽、高各为 $\sqrt[3]{2}$m 时, 水箱所用的材料最省.

拉格朗日乘子法

设点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点, 且 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 具有连续的偏导数, 确定隐函数 $y=g(x)$, 则 $x=x_0$ 是一元函数 $z=f(x,g(x))$ 的极值点. 于是

$$f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)g'(x_0)=0.$$

由隐函数存在定理知 $g'(x_0)=-\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$, 故有

$$f'_x(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}=0,$$

即

$$\frac{f'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_x(x_0,y_0)}=\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}:=-\lambda.$$

于是极值点 $P_0(x_0,y_0)$ 需要满足三个条件:

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0,\\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0,\\ \varphi(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

引入拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 称为拉格朗日乘子. 于是上面三个条件即

$$\begin{cases} L'_x(x_0,y_0,\lambda)=f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0,\\ L'_y(x_0,y_0,\lambda)=f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0,\\ L'_\lambda(x_0,y_0,\lambda)=\varphi(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

所以所讨论的条件极值问题转化为了拉格朗日函数的无条件极值问题. 用这种方法去求可能的极值点的方法, 称为拉格朗日乘子法.

求目标函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在一组约束条件

$$\begin{cases} G_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\ G_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\ \cdots\cdots\\ G_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}\quad (m<n)$$

下的极值时, 可以构造相应的拉格朗日函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

于是所求可微的条件极值点满足方程组

$$\begin{cases} L'_{x_1}=f'_{x_1}+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial x_1}=0,\\ \cdots\cdots\\ L'_{x_n}=f'_{x_n}+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial x_n}=0,\\ L'_{\lambda_1}=G_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\ \cdots\cdots\\ L'_{\lambda_m}=G_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0. \end{cases}$$

例 8.7. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求原点到这椭圆的最长距离与最短距离.

解: 目标函数可设为 $f = x^2 + y^2 + z^2$, 限制条件为相应的曲面方程

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y + z = 1.$$

作拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 1).$$

为求驻点, 解方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2x\lambda + \mu = 0, \\ L_y = 2y - 2y\lambda + \mu = 0, \\ L_z = 2z + \lambda + \mu = 0, \\ L_\lambda = z - x^2 - y^2 = 0, \\ L_\mu = x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

求得

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad z = 2 \mp \sqrt{3}.$$

在点 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2 - \sqrt{3}\right)$ 处

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}},$$

在点 $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2 + \sqrt{3}\right)$ 处

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}.$$

故最大距离和最小距离分别为

$$d_1 = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}, \quad d_2 = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

例 8.8. 在第一象限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使之与三个坐标面所围成的四面体的体积最小.

解: 在椭球面上任取一点 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, z_0 > 0)$, 求得过点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0 \quad 即 \quad \frac{x}{\frac{a^2}{x_0}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_0}} + \frac{z}{\frac{c^2}{z_0}} = 1.$$

所围四面体体积为

$$V = \frac{1}{6}\frac{a^2}{x_0} \cdot \frac{b^2}{y_0} \cdot \frac{c^2}{z_0} = \frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}.$$

根据题意, 要求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一象限的一点 (x,y,z), 使得 $U=xyz$ 最大.

引进拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$, 解方程组

$$\begin{cases} L'_x=yz+2\lambda\frac{x}{a^2}=0, \\ L'_y=xz+2\lambda\frac{y}{b^2}=0, \\ L'_z=xy+2\lambda\frac{z}{c^2}=0, \\ L'_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \end{cases}$$

得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}, y=\frac{b}{\sqrt{3}}, z=\frac{c}{\sqrt{3}}$. 根据问题的实际意义, $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 使得 $U=xyz$ 取最大值, 从而使 V 取最小值

$$V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

例 8.9. 求函数 $f(x,y)=2x^2+3y^2-4x+2$ 在闭区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 16\}$ 上的最大值和最小值.

解: 先求 $f(x,y)$ 在 D 的内部 $x^2+y^2<16$ 的驻点. 令

$$f'_x=4x-4=0, \quad f'_y=6y=0,$$

得唯一驻点 $(1,0)$. 再用拉格朗日乘子法求 $f(x,y)$ 在 D 的边界 $x^2+y^2=16$ 上的可能的极值点. 作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=2x^2+3y^2-4x+2+\lambda(x^2+y^2-16),$$

解方程组

$$\begin{cases} L'_x=4x-4+2\lambda x=0, \\ L'_y=6y+2\lambda y=0, \\ L'_\lambda=x^2+y^2-16=0, \end{cases}$$

得到四个可能的极值点

$$(4,0), \quad (-4,0), \quad (-2,2\sqrt{3}), \quad (-2,-2\sqrt{3}).$$

比较函数值

$$f(1,0)=0, \quad f(4,0)=18, \quad f(-4,0)=50,$$

$$f(-2,2\sqrt{3})=54, \quad f(-2,-2\sqrt{3})=54,$$

得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值是 54, 最小值是 0.

8.8.4 思考与练习

练习 234. 求函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$ 的极值.

(x,y)	$(0,0)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
A	0	−12	−12
$AC-B^2$	−16	128	128

解: 根据极值点的必要条件, 先求驻点. 为此, 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x+y+1=0, \\ f_y(x,y)=x+2y-1=0, \end{cases}$$

得唯一驻点 $(-1,1)$. 由于

$$f_{xx}(x,y)=2, \quad f_{xy}(x,y)=1, \quad f_{yy}(x,y)=2,$$

从而 $AC-B^2=3>0$, 且 $A>0$. 故 $f(-1,1)=0$ 是极小值.

练习 235. 求函数 $f(x,y)=-x^4+4xy-y^4-1$ 的极值.

解: 根据极值点的必要条件, 先求驻点. 为此, 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-4x^3+4y=0, \\ f_y(x,y)=-4y^3+4x=0, \end{cases}$$

得三个驻点 $(0,0),(1,1),(-1,-1)$. 求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=-12x^2, \quad f_{xy}(x,y)=4, \quad f_{yy}(x,y)=-12y^2,$$

算出各驻点处 A 与 $AC-B^2$ 的值: 因此 $f(1,1)=f(-1,-1)=1$ 均为极大值, 而 $f(0,0)=-1$ 不是极值.

练习 236. 在椭球面 $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ 上求距平面 $3x+4y+12z=288$ 最近和最远的点.

解: 设所求点的坐标为 (x,y,z), 由点到平面的距离公式知

$$d=\frac{|3x+4y+12z-288|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{|3x+4y+12z-288|}{13}.$$

可设目标函数为

$$f(x,y,z)=(3x+4y+12z-288)^2,$$

约束条件为 $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2-1=0$. 作拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=(3x+4y+12z-288)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{96}+y^2+z^2-1\right).$$

求 L 的驻点, 即解方程组

$$\begin{cases} L_x=6(3x+4y+12z-288)+\frac{1}{48}\lambda x=0, \\ L_y=8(3x+4y+12z-288)+2\lambda y=0, \\ L_z=24(3x+4y+12z-288)+2\lambda z=0, \\ L_\lambda=\frac{x^2}{96}+y^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

求得 $(x,y,z)=\pm\left(9,\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$. 于是最近的点为 $\left(9,\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$, 最远的点为 $\left(-9,-\frac{1}{8},-\frac{3}{8}\right)$.