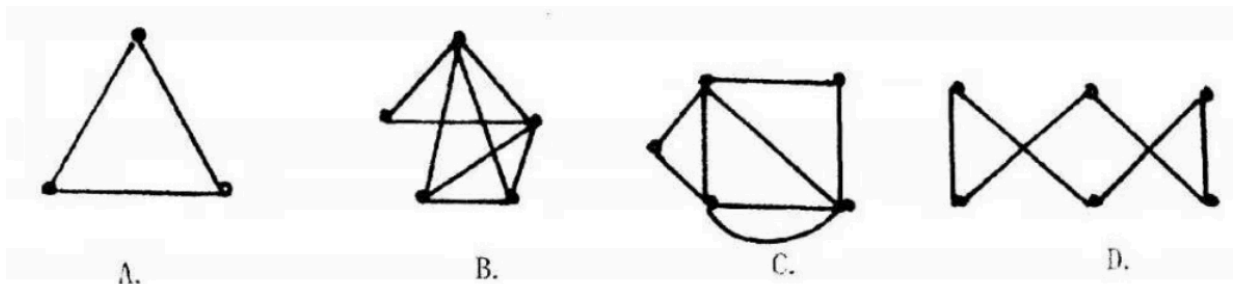


2021-2022第二学期离散数学期末考试

一、单选题 (请选择正确答案的标号, 每小题 1 分, 共计 6 分)

1. 设 $A = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$, 下列各式中正确的是 ()。
A. $\emptyset \subseteq A$
B. $\{6, 7, 8\} \subseteq A$
C. $\{\{4, 5\}\} \in A$
D. $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\} \in A$
2. 下列从 \mathbb{Z} 到 \mathbb{Z} 的所有函数集合上的关系中, 哪个是等价关系? ()。
A. $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$
B. $\{(f, g) \mid \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) - g(x) = 1\}$
C. $\{(f, g) \mid f(0) = g(0) \text{ 或 } f(1) = g(1)\}$
D. $\{(f, g) \mid f(0) = g(1) \text{ 且 } f(1) = g(0)\}$
3. 设 $A = \{\emptyset\}$, $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ($\mathcal{P}(x)$ 为 x 的幂集), 以下正确的式子是 ()。
A. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in B$
B. $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \in B$
C. $\{\{\emptyset, \emptyset\}\} \in B$
D. $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \in B$
4. 下列公式中不是永真式的是 ()。
A. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \vee \exists xQ(x))$
B. $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x((P(x) \vee R(x)) \leftrightarrow (Q(x) \vee R(x)))$
C. $\exists x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y)) \leftrightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \exists yQ(y))$
D. $(\exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)) \rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$
5. 下列哪组集合可以构成整数有序对集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的划分? ()。
A. x 或 y 为奇数的 (x, y) 对的集合; x 为偶数的 (x, y) 对的集合; y 为偶数的 (x, y) 对的集合。
B. x, y 均为奇数的 (x, y) 对的集合; x, y 只有一个为奇数的 (x, y) 对的集合; x, y 均为偶数的 (x, y) 对的集合。
C. x, y 均能被 3 整除的 (x, y) 对的集合; x 被 3 整除且 y 不能被 3 整除的 (x, y) 对的集合; x 不能被 3 整除且 y 被 3 整除的 (x, y) 对的集合; x, y 均不能被 3 整除的 (x, y) 对的集合。
D. $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 的 (x, y) 对的集合; $x = 0$ 且 $y \neq 0$ 的 (x, y) 对的集合; $x \neq 0$ 且 $y = 0$ 的 (x, y) 对的集合。
6. 下图中不是欧拉图的是 ()。



二、填空题 (每空 1 分, 共计 6 分)

1. 设偏序集 $(A, |)$ 中, $A = \{2, 3, 4, \dots, 1000\}$, $|$ 表示整除关系, 则该偏序集所有极大元构成的集合是 _____。

2. 设字母表 $\Omega = \{a, b\}$, Ω^* 为由 Ω 上字符组成的有限串集合 (含空串)。已知 $A = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$, $B = \{w \mid w \in \Omega^* \wedge |w| \geq 2\}$, $C = \{w \mid w \in \Omega^* \wedge |w| \leq 2\}$ 。求: $|B| = \underline{\hspace{1cm}}$; $A - (B \cap C) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。
3. 设谓词 $P(x)$: x 是兔子; $Q(x)$: x 是乌龟; $R(x, y)$: x 比 y 跑得快。 (1) 兔子比乌龟跑得快可符号化为 $\underline{\hspace{1cm}}$; (2) 有的兔子比所有乌龟跑得快可符号化为 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。
4. 设图 $G = (V, E)$ 有 7 个结点, 其度数分别为 2, 4, 4, 6, 5, 5, 2, 则图中共有 $\underline{\hspace{1cm}}$ 条边。

三、计算题 (每题 4 分, 共计 40 分, 请写出计算过程, 直接写结果不给分)

1. 设 $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, 1\}\}$, $B = \{\{\emptyset, 1\}, \{1\}\}$, 计算: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ 。
2. 请符号化命题“穷而惜者贫, 而力而侃者富”。
3. 设 $X = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c)\}$, 求 $r(R)$ 、 $s(R)$ 、 $t(R)$ 。
4. 已知集合 $A = \{a, b, c, d\}$, R 是 A 上的一个等价关系且 $A/R = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$, 写出 R 的集合表达式
5. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, 偏序集 $S = (A, |)$, $|$ 为整除关系:
(1) 画出 S 的哈斯图; (2) 求 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。
6. 在图 a 中, 若把顶点编号为 $1 \sim 8$, 规定, $(i, j) \in R$ 当且仅当从顶点 i 通过图中边能到达顶点 j 。判断 R 是否为集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 上的等价关系; 若是请给出具体划分。

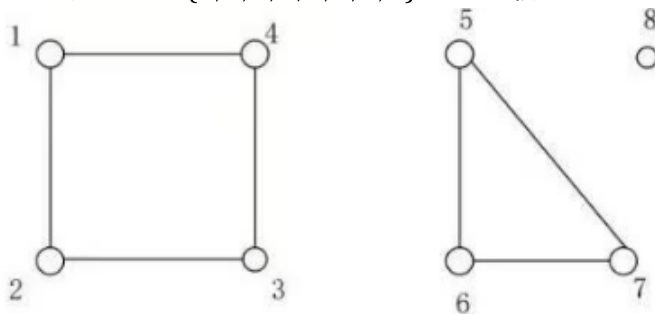


图 a 计算题 4

7. 计算公式 $P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$ 的主合取范式。
8. 求 $\neg(\forall x \exists y P(a, x, y) \rightarrow \exists x (\neg \forall y Q(y, b) \rightarrow R(x)))$ 的前束范式。
9. 一个图有 35 条边, 每个顶点的度数至少是 3, 这个图最多有多少个顶点?
10. 13 个学生要共进晚餐, 他们将围成一个圆桌; 计划每次晚餐上, 每个学生的邻座都与上一次完全不同, 这样能共进晚餐几天?

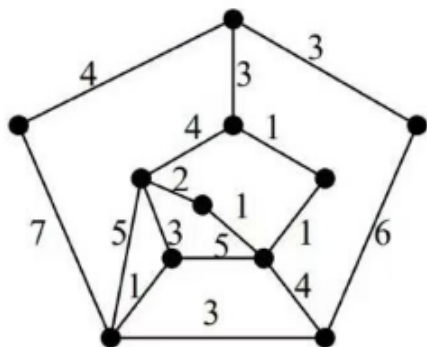
四、证明题 (每题 4 分, 共计 24 分, 请写出证明过程, 直接写结果不给分)

1. 设 A, B, C 是集合, 求等式 $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$ 成立的充要条件。
2. 设 R_1 是非空集合 A 上的等价关系, R_2 是非空集合 B 上的等价关系, 定义关系 R :
 $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$ 当且仅当 $(x_1, y_1) \in R_1$ 且 $(x_2, y_2) \in R_2$ 。证明: R 是 $A \times B$ 上的等价关系。
3. 证明: $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ 。
4. 设 G 是 $(n, n+1)$ 图, 证明 G 中至少存在一个顶点度数 ≥ 3 。
5. 利用推理规则证明: $(M \leftrightarrow Q) \rightarrow P, M \rightarrow S, S \rightarrow \neg R, \neg P \Rightarrow R \rightarrow Q$ 。
6. 证明: 边数小于 30 的无环简单平面图至少存在一个度数不超过 4 的顶点。

五、综合题 (每题 8 分, 共计 24 分, 请写出计算过程)

1. 40 个学生中有 18 个爱好音乐, 22 个爱好美术, 15 个爱好体育, 11 个爱好音乐和美术, 10 个爱好音乐和体育, 8 个爱好美术和体育, 10 个学生这三种爱好均没有。运用排斥原理计算这三种爱好都拥有的学生人数。

2. 在下图中求中国邮递员问题的解。



3. 在一阶谓词逻辑中，将下面用自然语言描述的推理形式化并证明：
 每个科学工作者都是刻苦钻研的。每个刻苦钻研而又聪明的科学工作者在他的事业中将获得成功。小明是科学工作者并且聪明，所以小明在他的事业中将获得成功。
 (1) 给出形式化后的前提与结论； (2) 利用推理规则完成证明。