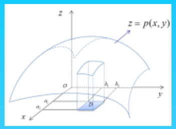


第五章 数字特征（下）

杨勇制作

第二节 方差

一. 方差的定义

我们已经知道,数学期望描述了随机变量取值的平均值,即其是分布的位置特征数,它总位于分布的中心,随机变量的取值总在其周围波动。方差是度量此种波动大小的最重要的特征数,下面引出它的定义。

设有一随机变量X，称$X-EX$为偏差，此种偏差可大可小，可正可负，为了使此种偏差能积累起来，不致于正负抵消，可取绝对数偏差的均值$E|X-EX|$来表示随机变量取值的波动大小。由于绝对值在数学上处理不甚方便，用$(X-EX)^2$衡量偏差更合适。因为$(X-EX)^2$也是随机变量，取其平均值$E(X-EX)^2$就可以作为刻划随机变量X取值的波动大小(或取值离散程度)的一个数字特征。

定义5－4:设X是一个随机变量,若$E(X-EX)^2$存在,则称$E(X-EX)^2$为X的方差(Variance),记为DX或$VarX$。即$DX=E(X-EX)^2$。

方差的平方根$\sqrt{DX}$称为标准差或根方差(Standard deviation)。

若X为离散型随机变量,其概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,n,\cdots,$$

则按方差的定义有

$$DX=E(X-EX)^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-EX)^2 p_i 。$$

若X为连续型随机变量,其密度函数为$p(x)$,则按方差的定义有

$$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 p(x) dx 。$$

方差越小,随机变量取值越在EX附近;

方差越大,随机变量取值离EX越远。

注:1. 当分布给定时,方差DX也是一个常数。

2. $DX = E(X - EX)^2 \geq 0$。

数学期望和方差都是刻划随机变量统计特征的数字特征。前者刻划了随机变量取值的平均位置,因而也有人称它是位置特征;后者刻划了随机变量偏离其数学期望的(分散)程度,方差越小,随机变量取值越集中于数学期望的周围。

数学期望和方差是随机变量的最基本、最常用的两个数字特征。

为计算方便,方差的公式也可简化为:

$$DX = E(X - EX)^2$$

$$= E(X^2 - 2XEX + (EX)^2)$$

$$= E(X^2) - 2EX \cdot EX + (EX)^2$$

$$= E(X^2) - (EX)^2,$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2$$

例5－17:若随机变量X服从0－1分布,试求X的方差。

解:由例5－1知,$EX=p$,

又 $E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$,

则 $$DX=E(X^2)-(EX)^2$$

$$=p-p^2$$

$$=p(1-p)=pq,$$

其中 $q\triangleq 1-p$。

例5－18:设随机变量X服从参数为λ的普阿松分布, $X \sim P(\lambda)$, 试求X的方差。

解: 由例5－2和例5－8知, $EX = \lambda$及

$E(X^2) = \lambda(\lambda+1)$,

则 $DX = E(X^2) - (EX)^2$

$= \lambda(\lambda+1) - \lambda^2$

$= \lambda$。

例5–19:设随机变量X服从参数为p几何分布,即$X \sim G(p)$,求X的方差。

解:　X的概率分布为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots,$$

由例5–3和例5–9知,

$$EX=\frac{1}{p}, E(X^2)=\frac{2-p}{p^2},$$

则　$DX=E(X^2)-(EX)^2$

杨勇制作

$$=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}$$

$$=\frac{1-p}{p^2}$$

$$=\frac{q}{p^2},$$

其中$q\triangleq 1-p$。

例5—20：设X服从均匀分布,即

$X \sim U[a,b]$，试求X的方差。

解：由例5－5和例5－10知,

$$EX=\frac{a+b}{2},\quad E(X^2)=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

则 $DX=E(X^2)-(EX)^2$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}。$$

例5－21:设X服从参数为λ的指数分布,即 $X \sim Exp(\lambda)$,试求X的方差。

解:由例5－6和例5－11知,

$$EX=\frac{1}{\lambda},E(X^2)=\frac{2}{\lambda^2},$$

则 $DX=E(X^2)-(EX)^2$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}。$$

杨勇制作

例5－22:设X服从正态分布,即

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,试求X的方差。

解:由方差的定义知,

$$DX = E(X-EX)^2 = E(X-\mu)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 p(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \left(\text{其中} t = \frac{x-\mu}{\sigma}, dx = \sigma dt\right)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t d\left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[t e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right]$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \sigma^2 \text{。}$$

由例5－7及上例知，正态分布$N(\mu,\sigma^2)$中的第一个参数μ是它的数学期望，第二个参数σ^2是它的方差，于是正态分布的两个参数的概率意义都已明确了。由此可知，正态分布由它的数学期望和方差唯一确定。

二. 方差的性质及切比雪夫不等式

随机变量的方差具有下述基本性质,其中假设性质中的方差均存在。

性质5－4:设c为常数,则

(1) $D(c)=0$,

(2) $D(X+c)=DX$,

(3) $D(cX)=c^2DX$ 。

证明:(1) $D(c)=E(c-Ec)^2$

$$=E(c-c)^2$$

$$=0;$$

(2) $D(X+c)=E(X+c-E(X+c))^2$

$$=E[X+c-(EX+c)]^2$$

$$=E(X-EX)^2$$

$$=DX;$$

(3) $$D(cX) = E(cX - E(cX))^2$$

$$= E(cX - cEX)^2$$

$$= c^2 E(X - EX)^2$$

$$= c^2 DX\text{。}$$

性质5-4的(1),(2),(3)可以写成一个式子,

$$D(aX+b)=a^2DX \text{。}$$

性质$5-5$:若X,Y是两个相互独立的随机变量,则

证明:

$$D(X+Y)=E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)+(Y-EY)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)^2+(Y-EY)^2+2(X-EX)(Y-EY)\right]$$

$$= DX + DY + 2E(X - EX)(Y - EY)$$

$$= DX + DY + 2E\left[XY - YEX - XEY + EXEY\right]$$

$$= DX + DY + 2\left[E(XY) - EX \cdot EY\right]$$

$$= DX + DY$$ 。

其中当X与Y独立时,

$$E(XY) = EX \cdot EY$$ 。

杨勇制作

注:当X和Y独立时,

$$D(X-Y)=D(X+(-Y))$$

$$=DX+D(-Y)$$

$$=DX+DY\text{。}$$

还可以将性质5−5推广到多个随机变量的情况,即设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,则

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=DX_1+DX_2+\cdots+DX_n\text{。}$$

$$D\left(\sum_{k=1}^{n}c_kX_k\right)=\sum_{k=1}^{n}c_k^2DX_k$$,其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为常数。

性质5－5的推广提供了求方差的方法,但要求随机变量之间相互独立。

例5－23:设X服从二项分布,即 $X \sim B(n,p)$,试求DX 。

解:由例5－16可知,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

其中$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立,且都服从参数为p的0－1分布,故由性质5—5的推广可知,

$$DX = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$= DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n$$
$$= npq\ ,$$

其中 $q \triangleq 1 - p$。

教材第四章习题

32.设$X_1 \sim N(1,2), X_2 \sim N(0,3), X \sim N(2,1)$,

且X_1, X_2, X_3相互独立,求:

(1) $Y = 2X_1 + 3X_2 - X_3$的密度函数;

(2) $P(0 \leq Y \leq 6)$。

解:

$$Y \sim N(EY, DY),$$

$$EY = 2EX_1 + 3EX_2 - EX_3,$$

$$DY = 4DX_1 + 9DX_2 + DX_3\text{。}$$

132页习题22

22. 袋中有n张卡片，编号为$1, 2, \cdots, n$，从中有放回地每次抽一张，共抽r次，求所得号码之和X的数学期望和方差。

解： X_i表示第i次抽到的号码，$i = 1, 2, \cdots, r$，

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

且$X_1, X_2, \cdots, X_r$独立，则

$$X=\sum_{k=1}^{r}X_k,$$

其中 $$EX_k=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+\cdots+n\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\bullet\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n+1}{2},$$

$$EX=\sum_{k=1}^{r}EX_k=\frac{n+1}{2}r。$$

其中 $$E(X_k^2)=1^2\times\frac{1}{n}+2^2\times\frac{1}{n}+\cdots+n^2\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\bullet\frac{1}{n}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$DX_k=E(X_k^2)-(EX_k)^2$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2-1}{12},$$

$$DX=\sum_{k=1}^{r}DX_k=\frac{n^2-1}{12}r。$$

2017 – 2018年第二学期

2018年6月5日

概率论试卷

类似习题集83页典型题例7

4.（12分）设随机变量X服从$(0,2)$上的均匀分布，Y服从参数$\lambda=2$的指数分布，且X, Y独立，记随机变量$Z=X+2Y$。

(1)求Z的密度函数$p_Z(z)$;

(2)求EZ及DZ。

解：(2)

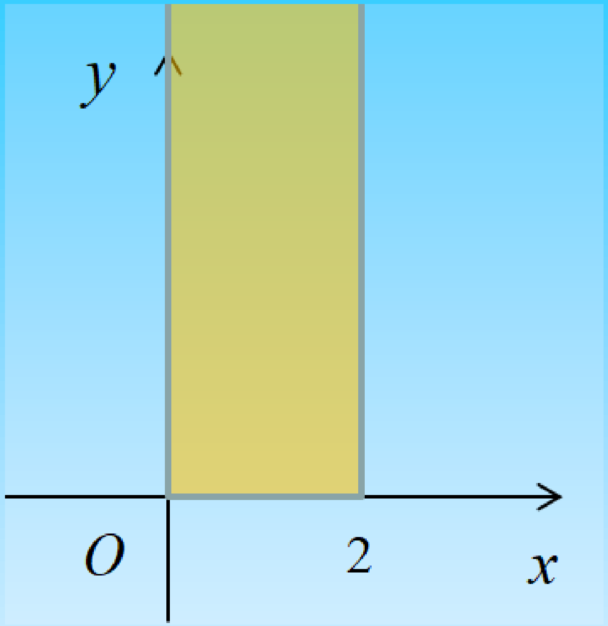
$$EX=\frac{0+2}{2}=1, DX=\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{1}{3},$$

$$EY=\frac{1}{2},DY=\frac{1}{4},X,Y\text{独立},$$

$$EZ=EX+2EY=2,$$

$$DZ=DX+4DY=\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}=\frac{4}{3}\text{。}$$

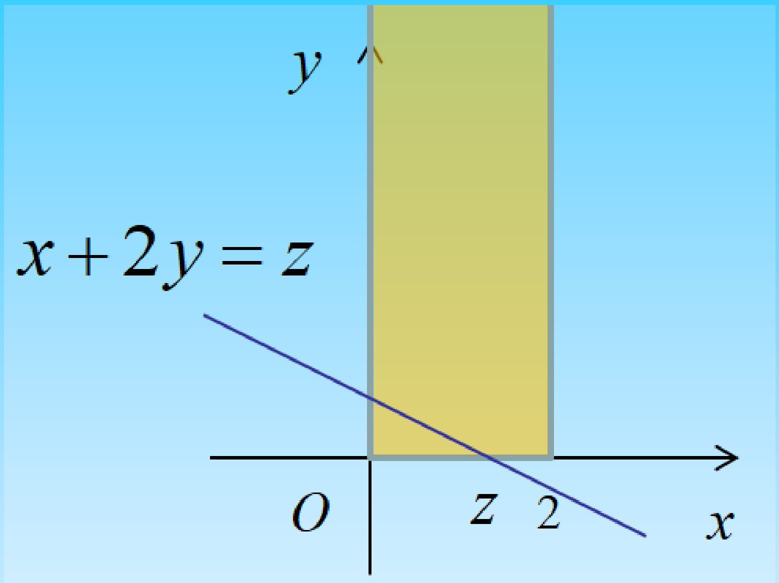
(1)



$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$z \le 0, F_Z(z) = 0,$$

$$0 < z < 2,$$



$$F_Z(z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$= \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} \frac{1}{2} \times 2e^{-2y} dy$$

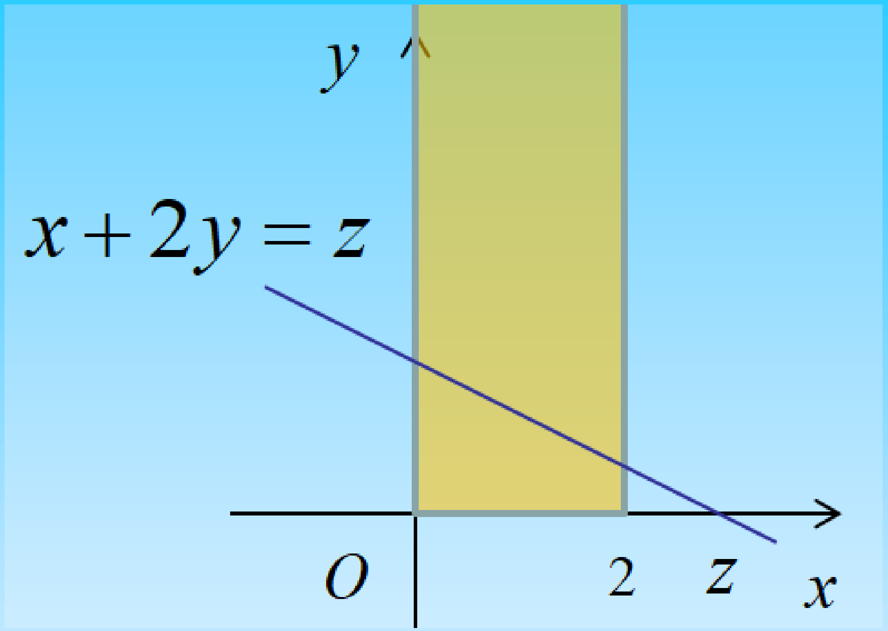
$$= -\frac{1}{2}\int_0^z \left(e^{-2y}\right)\Big|_0^{\frac{z-x}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^z (e^{-(z-x)} - 1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^z e^x dx + \frac{z}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-z} + \frac{z}{2} - \frac{1}{2};$$

$z \geq 2,$



$$F_Z(z) = P(X + 2Y \leq z)$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} \frac{1}{2} \times 2e^{-2y} dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{-2y}\right)\Bigg|_0^{\frac{z-x}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 (e^{-(z-x)} - 1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^2 e^{x}dx + 1$$

$$= \frac{1}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{2-z} + 1,$$

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, z<0 \\ \frac{1}{2}e^{-z}+\frac{z}{2}-\frac{1}{2}, 0\le z<2, \\ \frac{1}{2}e^{-z}-\frac{1}{2}e^{2-z}+1, z\ge 2 \end{cases}$$

$p_Z(z)=F_Z'(z)$,所以,

$$p_Z(z)=\begin{cases}0, z\le 0\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right), 0<z<2\\ \frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right), z\ge 2\end{cases}$$ 。

注：

$$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty} zp_Z(z)dz=\int_0^2 z\frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right)dz+\int_2^{+\infty} z\frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right)dz$$

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 p_Z(z)dz=\int_0^2 z^2\frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right)dz+\int_2^{+\infty} z^2\frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right)dz$$

$$DZ=E(Z^2)-(EZ)^2$$

性质5－6:随机变量X的方差$DX=0$的充分必要条件是X取某个常数的概率为1,即对某个常数a,有$P(X=a)=1$。

定义5－5:对任一随机变量X,若$DX>0$,则称

$$Y=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},$$

为X的标准化(standardized)随机变量。

性质5 – 7:若Y为X的标准化随机变量,则

$$EY=0, DY=1。$$

证明:

$$EY=E\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{DX}}E(X-EX)=0;$$

$$DY=D\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right]$$

$$=\frac{1}{DX}D(X-EX)=1。$$

X的标准化随机变量Y是一个无量纲的随机变量。它是把原分布中心EX移至原点,不使分布中心偏左或偏右,然后缩小或扩大坐标轴,使分布不致过疏或过密。在排除这些干扰后,使原随机变量X的一些性质容易显露出来,故标准化技术在概率论与数理统计中会经常使用。

下面我们来介绍一个重要的不等式--切比雪夫(Chebyshev)不等式。

定理5－4:(切比雪夫不等式)对任一随机变量X,若DX存在,则对任一正数ε,恒有

$$P\left(\left|X-EX\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{DX}{\varepsilon^{2}},$$

或者

$$P\left(\left|X-EX\right|<\varepsilon\right)\geq1-\frac{DX}{\varepsilon^{2}}。$$

证明:

教材证了连续型的情形,我们这里证离散型的情形。

设X的概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,n,\cdots,$$

则 $$P\left(\left|X-EX\right|\geq\varepsilon\right)=\sum_{k:\left|x_k-EX\right|\geq\varepsilon}p_k$$

$$\leq\sum_{k:\left|x_k-EX\right|\geq\varepsilon}\frac{(x_k-EX)^2}{\varepsilon^2}p_k$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-EX)^2p_k=\frac{DX}{\varepsilon^2}。$$

切比雪夫不等式只要知道随机变量的数学期望和方差,没有用到随机变量的分布,这是切比雪夫不等式的优点,所以它有很广泛的应用,它是概率论中一个重要的基本不等式。然而也就是这个原因,一般来说它给出的估计比较粗糙的。

杨勇制作

第三节 协方差和相关系数

二维随机向量的联合分布中还包含有 X 与 Y 之间相互关系的信息,能不能像数学期望和方差那样,用某些数值来刻划 X 和 Y 之间的联系的某些特性呢? 协方差和相关系数就是描述两个随机变量之间联系的数字特征。

定义5−6:设(X,Y)是一个二维随机向量,

且$E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$存在,则称

$$Cov(X,Y)=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

为X与Y的协方差(covariance)。

注:由协方差定义知,$Cov(X,X)=DX$。

若(X,Y)是二维离散型随机向量,则按定义知,

$$Cov(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i-EX)(y_j-EY)p_{ij}。$$

若(X,Y)是二维连续型随机向量,则按定义知,

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)(y-EY)p(x,y)dxdy\text{。}$$

为计算方便,协方差的定义也可简化为:

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E\left[\left(X-EX\right)(Y-EY)\right]\\&=E[XY-YEX-XEY+EX\cdot EY]\\&=E(XY)-EX\cdot EY\text{。}\end{aligned}$$

性质5−8:设X,Y,Z是任意随机变量,且它们的方差均存在,则

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$;

(2) 对于任意常数a 和b,

$$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y);$$

(3) $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$。

证明: (1)

$$Cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$$

$$=E(Y-EY)(X-EX)=Cov(Y,X);$$

(2)

$$Cov(aX,bY)=E(aX-E(aX))(bY-E(bY))$$

$$=E(aX-aEX)(bY-bEY)$$

$$=abE(X-EX)(Y-EY)$$

$$=abCov(X,Y);$$

(3) $$Cov(X+Y,Z)=E\left[(X+Y-E(X+Y))(Z-EZ)\right]$$

$$=E\left[((X-EX)+(Y-EY))(Z-EZ)\right]$$

$$=E\left[(X-EX)(Z-EZ)\right]+E\left[(Y-EY)(Z-EZ)\right]$$

$$=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)。$$

若$Cov(X,Y)=0$,或者$\rho_{XY}=0$,则称X与Y不相关。

X与Y独立$\rightarrow X$与Y不相关,

X与Y独立$\not\leftarrow X$与Y不相关,

不相关表示X与Y没有线性关系。

性质5−9:设随机变量X与Y的方差存在,则

$$D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)。$$

证明:由方差的定义知,

$$D(X+Y)=E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)+(Y-EY)\right]^2$$

$$=E\left[(X-EX)^2+(Y-EY)^2+2(X-EX)(Y-EY)\right]$$

$$=DX+DY+2Cov(X,Y)。$$

类似地可以证明：

$$D(X-Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)。$$

性质5−9可推广为：设$X_1,\cdots,X_n$的方差均存在，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{i<j}Cov(X_i,X_j)。$$

注意：当$X_1,\cdots,X_n$不独立时，

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} DX_i$$

不一定成立。

例5－24:设X服从超几何分布,即

$X \sim H(M, N, n)$,求EX, DX。

解:以产品检验为例加以说明。

产品共N件,其中M件是次品,以X表示抽验的n件产品中次品的个数,显然$X \sim H(M, N, n)$。

设 $$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个产品为次品} \\ 0, & \text{第}i\text{个产品为正品} \end{cases}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

显然 $$X=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

其中$X_1,\cdots,X_n$不独立。由第一章例1−12知,

$$P(X_i=1)=\frac{M}{N},$$

即有

X_i	0	1
P	$1-\frac{M}{N}$	$\frac{M}{N}$

其中$i=1,2,\cdots,n$,则

$$EX_i=\frac{M}{N},i=1,2,\cdots,n,$$

所以,　$EX=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)$

$$=\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

$$=n\frac{M}{N}。$$

下面计算X的方差DX。

因为X_i服从$0-1$分布，所以，

$$DX_i=\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right), i=1,2,\cdots,n。$$

又当$i<j, i,j=1,2,\cdots,n$时，

$$\begin{aligned}P(X_iX_j=1)&=P(X_i=1,X_j=1)\\&=P(X_i=1)P(X_j=1\mid X_i=1)\\&=\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}=\frac{M(M-1)}{N(N-1)},\end{aligned}$$

所以, X_iX_j的概率分布为

X_iX_j	0	1
P	$1-\dfrac{M(M-1)}{N(N-1)}$	$\dfrac{M(M-1)}{N(N-1)}$

从而可知,

$$E(X_iX_j)=\frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

故

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - EX_i EX_j$$

$$= \frac{M(M-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{M}{N}\right)^2$$

$$= -\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}\text{。}$$

再由性质5–9的推广知,

$$DX = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

$$= n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\left[-\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}\right]$$

$$= \frac{nM(N-M)}{N^2} - \frac{2M(N-M)}{N^2(N-1)}\sum_{1\le i<j\le n} 1$$

$$= \frac{nM(N-M)}{N^2} - \frac{2M(N-M)}{N^2(N-1)}\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}。$$

协方差是关于二个随机变量的一个数字特征,它的数值在一定程度上反映了这二个随机变量相互间的的某种关系,不过用它来描述这一关系马上就会发觉一个不足的地方,这就是如让随机变量X和Y各自增大$k(\neq 0)$倍,尽管X,Y相互之间的关系与kX,kY之间的关系从直观上看并无差别,但是

$$Cov(kX,kY)=k^2Cov(X,Y),$$

即协方差却增大了k^2倍，为克服这一缺点，可在计算协方差之前，先对随机变量进行“标准化”。

定义5－7：设(X,Y)为二维随机向量，且X和Y的方差均存在，都为正，则称

$$\rho_{XY}=\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$$

$$=E\left[\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right)\left(\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)\right]=Cov\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)$$

为随机变量X与Y的相关系数

(coefficient of correlation)。

易见,对$k\neq 0$,有

$$\rho(kX,kY)=\rho(X,Y)\text{。}$$

例5–25:设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

则
$$\rho_{XY}=\rho\text{。}$$

证明:由第四章性质4–4可知,

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),$$

从而 $EX=\mu_1, DX=\sigma_1^2, EY=\mu_2, DY=\sigma_2^2$，

令 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}, dx=\sigma_1 du, dy=\sigma_2 dv$，则

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)p(x,y)dxdy$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}uve^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2-2\rho uv+v^2\right)}dudv$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}uve^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(u-\rho v)^2+(1-\rho^2)v^2\right]}dudv$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{ve^{-\frac{v^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}du\right]\right\}dv,$$

其中$p(x,y)$为$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$的联合密度函数。

设$U\sim N(\rho v,1-\rho^2)$,则

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}du=EU=\rho v,$$

所以,$Cov(X,Y)=\dfrac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}ve^{-\frac{v^2}{2}}\rho v dv$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv ,$$

再设$V \sim N(0,1)$,则

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv = E(V^2) = DV = 1,$$

从而, $Cov(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$,

最后,由相关系数的定义知,

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \rho 。$$

由此可知,二维正态分布中的五个参数都有了它们自己明确的含意。

定理5－5:设随机变量X与Y的方差存在,相关系数为ρ_{XY},则有

(1) $|\rho_{XY}|\leq 1$;

(2) $|\rho_{XY}|=1$的充分必要条件是X与Y以概率1线性相关,即存在常数a与b,使有$P(Y=aX+b)=1$。

证明:(1)令$X_1 = X - EX, Y_1 = Y - EY$,对$X_1$与$Y_1$运用定理5-3(柯西一施瓦茨不等式)可得

$$\rho_{XY}^2 = \frac{[E(X-EX)(Y-EY)]^2}{E(X-EX)^2 \cdot E(Y-EY)^2}$$

$$= \frac{[E(X_1Y_1)]^2}{EX_1^2 \cdot EY_1^2} \le 1,$$

即$|\rho_{XY}| \le 1$,由此知(1)成立。

(2)由上述(1)的证明过程可知:

$|\rho_{XY}|=1$等价于$\left[E(X_1Y_1)\right]^2-EX_1^2\cdot EY_1^2=0$,

这等价于二次方程(见定理5−3):

$$E(tX_1+Y_1)^2=t^2EX_1^2+2tE(X_1Y_1)+EY_1^2$$

仅有一个重根t_0,即

$$E(t_0X_1+Y_1)^2=0,$$

又因为

$$E(t_0X_1+Y_1)=t_0EX_1+EY_1=0,$$

杨勇制作

所以, $D(t_0 X_1 + Y_1) = 0$。

而由性质5－6知,

$D(t_0 X_1 + Y_1) = 0$的充分必要条件是

$$P(t_0 X_1 + Y_1 = 0) = 1,$$

令$a = -t_0, b = t_0 EX + EY$,

即有 $P(Y = aX + b) = 1$。

注: $t_0 X_1 + Y_1$等于常数, 又数学期望为0,

所以, $t_0 X_1 + Y_1 = 0$。

注：$a \neq 0,$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

当$\Delta \leq 0$时,

$$a > 0,\ f(x) \geq 0;$$

$$a < 0,\ f(x) \leq 0;$$

当$\Delta = 0$时,

$$x = -\frac{b}{2a},\ f(x) = 0;$$

当$\Delta > 0$时,

$$f(x) = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

我们研究一下：

$$\Delta = E\left[Y-(aX+b)\right]^2$$

$$= E\left[(Y-EY)-a(X-EX)+(EY-aEX-b)\right]^2$$

$$= E\left[(Y-EY)-a(X-EX)\right]^2+(EY-aEX-b)^2$$

$$= DY+a^2DX-2aCov(X,Y)+(EY-aEX-b)^2$$

$$= DY-\frac{(Cov(X,Y))^2}{DX}+\left(a\sqrt{DX}-\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}}\right)^2+(EY-aEX-b)^2$$

当 $a=\dfrac{Cov(X,Y)}{DX}, b=EY-aEX$ 时,

Δ取得最小值。

此时 $\Delta=DY-\dfrac{\left(Cov(X,Y)\right)^2}{DX}=DY(1-\rho_{XY}^2)$,

因此$\rho_{XY}=\pm1$的充要条件是$\Delta=E\left[Y-(aX+b)\right]^2=0$,

当 $b=EY-aEX$ 时, $E(Y-(aX+b))=0$,

所以 $D(Y-(aX+b))=0$。

从而 $P(Y=aX+b)=1$。

$\rho_{XY}=0$,即X,Y不相关,此时$a=0$,

就是说X和Y没有线性关系。

$\Delta=E[Y-(aX+b)]^2$ 表示用$aX+b$作为Y的近似值的精确程度,也表示X,Y之间线性关系的强弱。而Δ又依赖于ρ_{XY},因此ρ_{XY}表示X,Y之间线性关系强弱的程度。

$|\rho_{XY}|$越靠近1,Δ越小,线性程度越好;

$|\rho_{XY}|$越靠近0,Δ越大,线性程度越差。

定理5-5表明：当$|\rho_{XY}|=1$时，在X与Y之间存在着线性关系的事件概率为1，即X与Y之间线性关系不成立的事件的概率为零。

当$\rho_{XY}=1$时，$a>0$，称X与Y正线性相关；

当$\rho_{XY}=-1$时，$a<0$，称X与Y负线性相关；

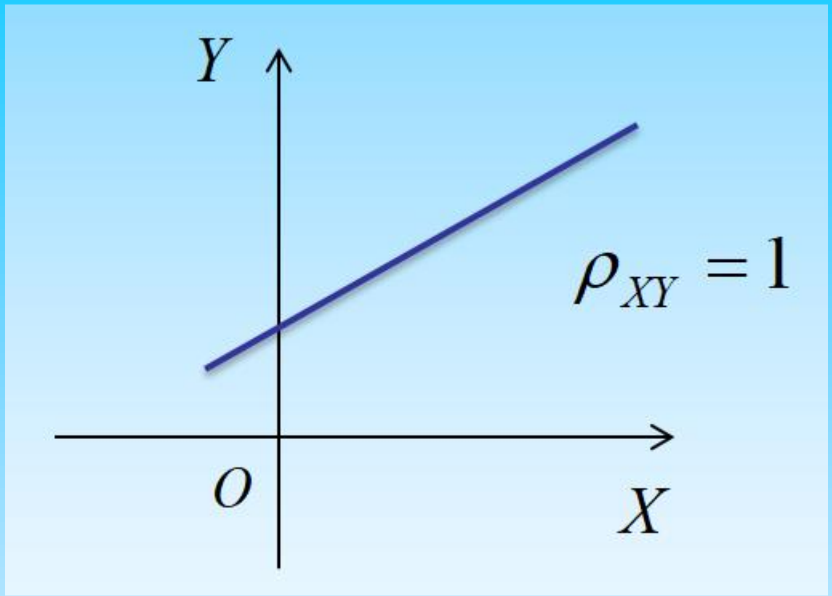
当$|\rho_{XY}|<1$时，这种线性相关的程度随着$|\rho_{XY}|$的减小而减弱。

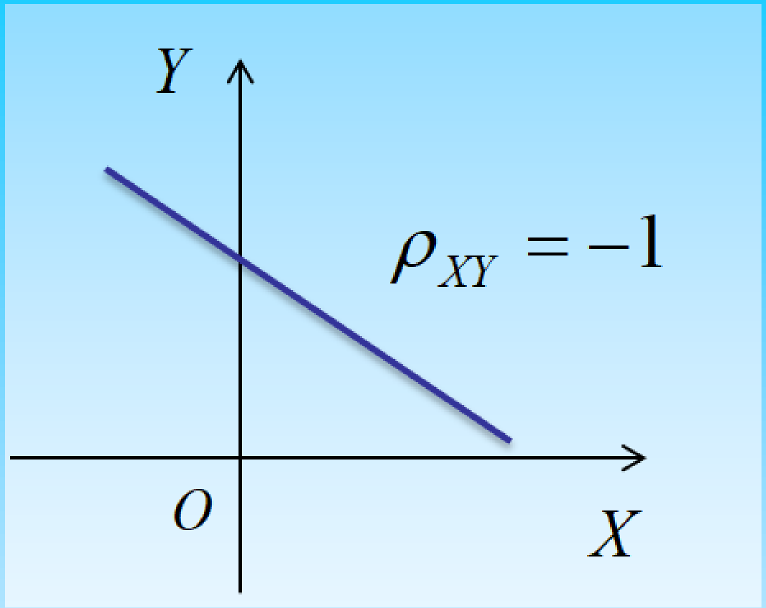
当$\rho_{XY}=0$时，称X与Y是不相关的，即它们是不线性相关的。

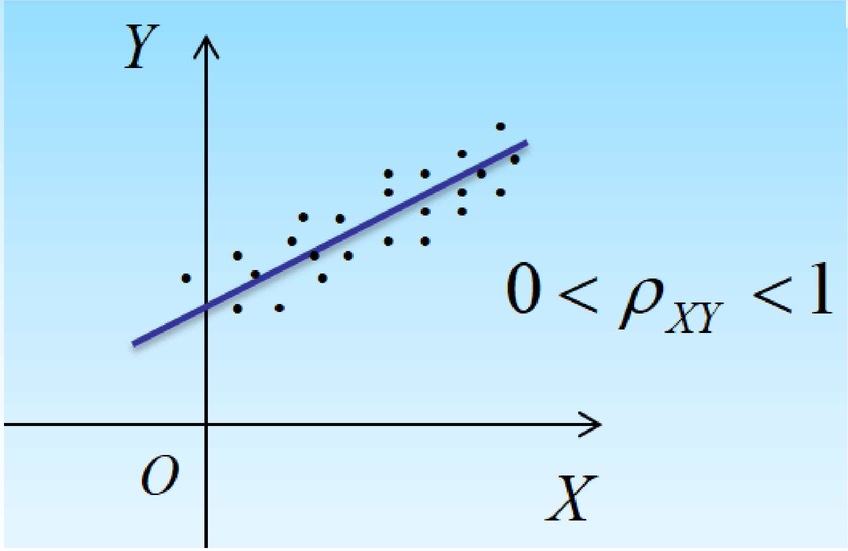
由此可知，相关系数ρ_{XY}：

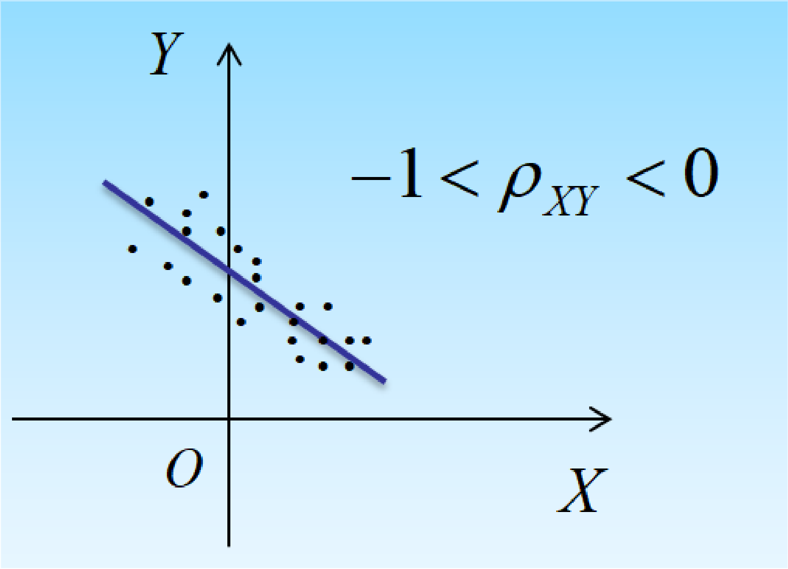
(1) 描述随机变量之间线性关系强弱程度的一个数字特征。

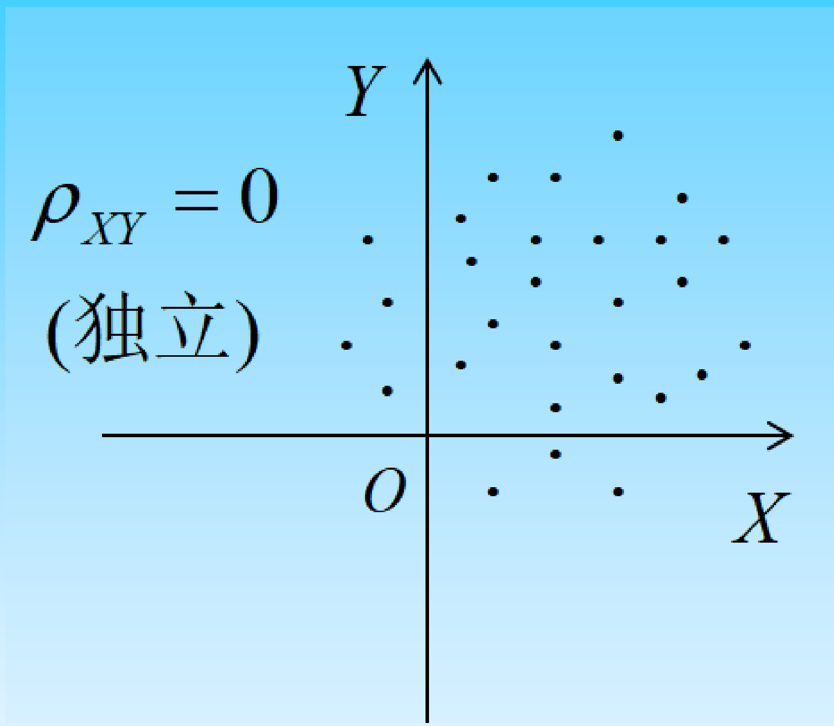
(2) 这种线性相关的程度随着$|\rho_{XY}|$的减小(变大)而减弱(变强)。

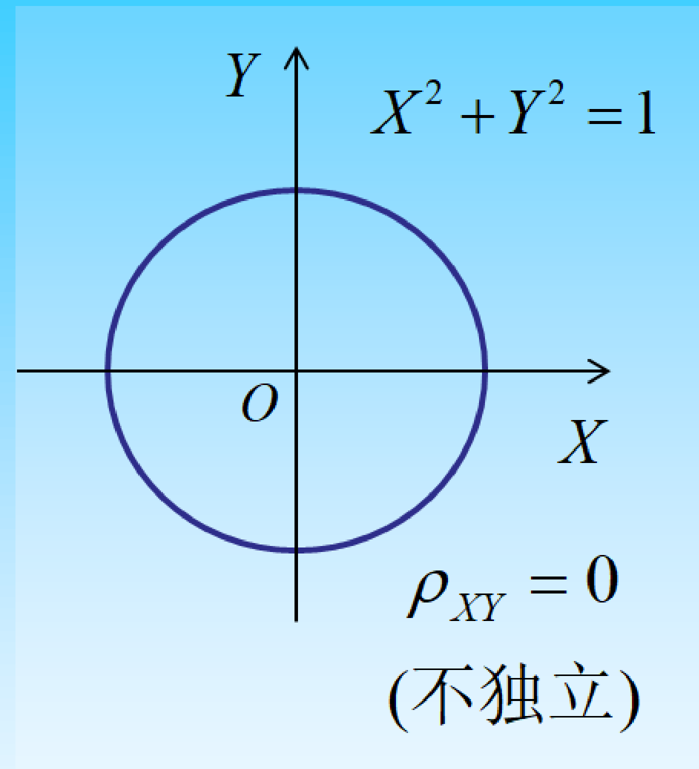

Y
$\rho_{XY} = 1$
O
X


Y
$\rho_{XY} = -1$
O
X


Y
$0 < \rho_{XY} < 1$
O
X


Y
$-1 < \rho_{XY} < 0$
O
X


$\rho_{XY} = 0$
(独立)
Y
O
X


Y
$X^2 + Y^2 = 1$
O
X
$\rho_{XY} = 0$
(不独立)

定理5－6：若随机变量X与Y相互独立，则X与Y不相关；反之不然。

证明：由于X与Y独立，即知

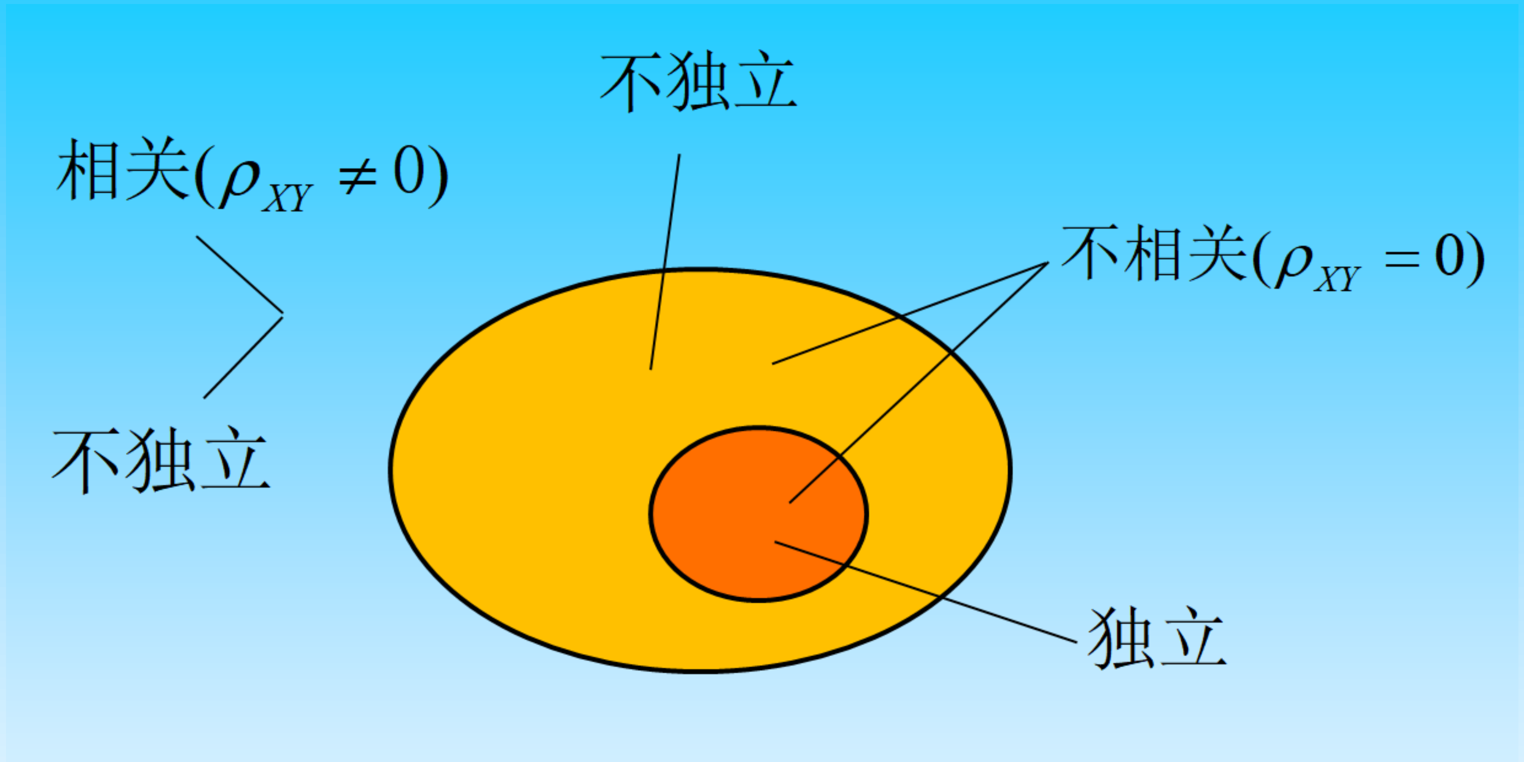
$$E(XY) = EX \cdot EY \ ,$$

所以，

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = 0 \ ,$$

从而可知，$\rho_{XY} = 0$，

即X与Y不相关。



但当X与Y不相关时，X与Y却不一定独立。反例参见下面的例$5-26$。

例$5-26$:设随机变量Θ的密度函数为

$$p_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, 其它\end{cases}$$

且令 $X=\sin\Theta, Y=\cos\Theta$,

证明:(1) X与Y不相关;

(2) X与Y不独立。

证明:(1)由随机变量函数的期望公式知,

$$EX=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\frac{1}{\pi}d\theta=0,$$

$$EY=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\frac{1}{\pi}d\theta=\frac{2}{\pi},$$

$$E(XY)=E(\sin\Theta\cos\Theta)$$

$$=\frac{1}{2}E(\sin 2\Theta)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\cdot\frac{1}{\pi}d\theta=0,$$

于是, $Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=0,$

又显然 $DX>0, DY>0,$ 即知 $\rho_{XY}=0,$

可见 X 与 Y 是不相关的。

(2) 设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y),$

则

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=P\left(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(\sin\Theta \le \frac{1}{2}, \cos\Theta \le \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{\pi}{2} \le \Theta \le -\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} p_\Theta(\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left[-\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{6},$$

其中由$\sin\Theta \le \dfrac{1}{2}$可得$-\dfrac{\pi}{2} \le \Theta \le \dfrac{\pi}{6}$,

由$\cos\Theta \le \frac{1}{2}$可得$-\frac{\pi}{2} \le \Theta \le -\frac{\pi}{3}$或

$\frac{\pi}{3} \le \Theta \le \frac{\pi}{2}$,再由第三章例3—21知,

$$F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{3},$$

$$F_Y\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy$$

$$=\frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3},$$

从而可知,

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\neq F_X\left(\frac{1}{2}\right)F_Y\left(\frac{1}{2}\right),$$

即知X与Y不独立。

注:此时X与Y存在函数关系:$X^2+Y^2=1$。

定理5−6和例5−26说明:二个随机变量之间的独立与不相关是二个不同的概念。“不相关”只说明二个随机变量之间没有线性关系,但可能存在其它函数关系,也可能相互独立,而“独立”说明二个随机变量之间既无线性关系,也无非线性关系,所以“独立”必导致“不相关”,反之不然。

概率论试卷

2018-2019学年第1学期

2019年1月3日

计算题4

4.对二维随机向量(X,Y),设X服从区间$[-1,1]$上均匀分布,$Y=X^2$,

(1)试求X与Y的相关系数$Corr(X,Y)$,并说明两者之间有无线性相关关系;

(2)X与Y相互独立吗?证明你的结论。

解: (1)

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, -1\le x\le 1\\ 0, otherwise\end{cases},$$

$$EX=\frac{-1+1}{2}=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{2}dx=\frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3},$$

$$E(X^3)=\int_{-1}^{1}x^3\frac{1}{2}dx=\frac{x^4}{8}\Big|_{-1}^{1}=0,$$

$$E(X^4)=\int_{-1}^{1}x^4\frac{1}{2}dx=\frac{x^5}{10}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{5},$$

$$Cov(X,Y)=Cov(X,X^2)$$

$$=E(X-EX)(X^2-E(X^2))$$

$$=E\left(X\left(X^2-\frac{1}{3}\right)\right)=E\left(X^3-\frac{X}{3}\right)=0,$$

$$DX = \frac{(1+1)^2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$D(X^2) = E(X^4) - \left(E(X^2)\right)^2$$

$$= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45},$$

$$\rho_{XY} = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0,$$

即X与Y不相关,也即X与Y无线性相关关系。

(2)

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=P\left(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{4}\right)=P\left(X\le\frac{1}{2},X^2\le\frac{1}{4}\right)$$

$$=P\left(-1\le X\le\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$$

$$=P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$F_X\left(\frac{1}{2}\right)=P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},$$

$$F_Y\left(\frac{1}{4}\right)=P\left(X^2\le\frac{1}{4}\right)=P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$P\left(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{4}\right)\ne P\left(X\le\frac{1}{2}\right)P\left(Y\le\frac{1}{4}\right),$$

即 $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\ne F_X\left(\frac{1}{2}\right)F_Y\left(\frac{1}{4}\right),$

所以, X 和 Y 不独立。

例5－27:若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则$X$与$Y$相互独立的充分必要条件是$X$与$Y$不相关。

证明:显然只要证明充分性即可。

设X与Y不相关,由二维正态分布的性质可知,$\rho_{XY}=\rho=0$,且

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),$$

则当$\rho=0$时的二维正态分布的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$=p_X(x)p_Y(y),$$

这说明X与Y相互独立。

我们知道,在一般情况下,X与Y相互独立可以推得X与Y不相关,反之不成立。但是,对于二维正态随机向量(X,Y)而言,“X与Y相互独立”和“X与Y不相关”是等价的。

性质：设$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

(1) $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$；

(2) $\rho_{XY} = \rho$；

(3)"X与Y不相关"和"X与Y独立"等价。

例$5-28$:设随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}15xy^2, 0\le y\le x\le 1\\ 0, 其它\end{cases},$$

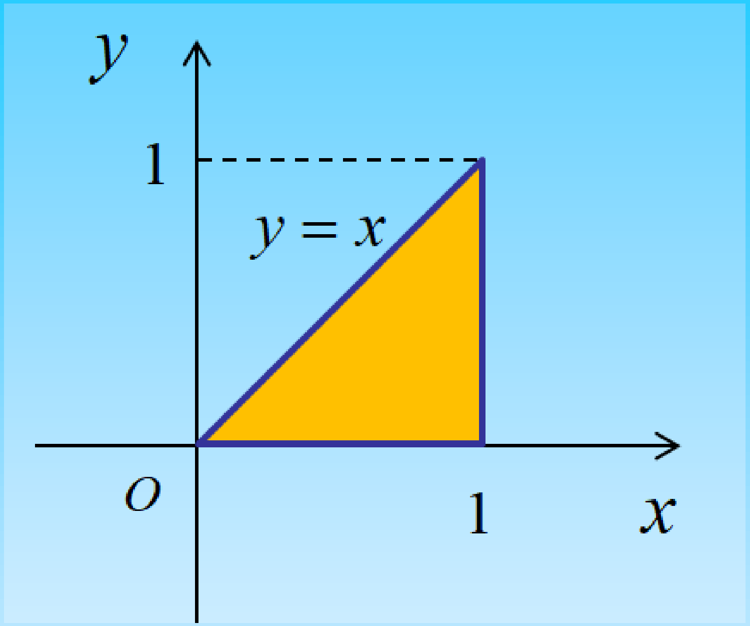
求$(1)\,\rho_{XY}$;$(2)\,D(2X-3Y+7)$。

解:(1)由于相关系数ρ_{XY}由DX,DY和$Cov(X,Y)$确定,所以,先计算DX,DY和$Cov(X,Y)$。

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 15xy^2 dy, 0 \le x \le 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

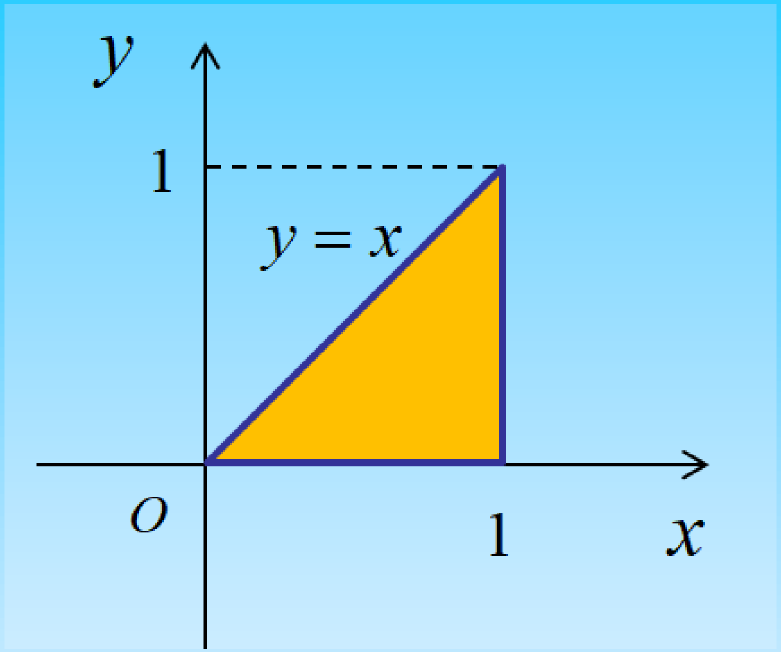
$$= \begin{cases} 5x^4, 0 \le x \le 1 \\ 0, 其它 \end{cases},$$



$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 15xy^2dx, 0\le y\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{15}{2}y^2(1-y^2), 0\le y\le 1\\ 0, 其它\end{cases},$$



$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 5x^4dx=\frac{5}{6},$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot\frac{15}{2}y^2(1-y^2)dy=\frac{5}{8},$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 5x^4dx=\frac{5}{7},$$

$$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2p_Y(y)dy=\int_0^1 y^2\cdot\frac{15}{2}y^2(1-y^2)dy=\frac{3}{7},$$

杨勇制作

所以， $DX = EX^2 - (EX)^2 = \dfrac{5}{252}$，

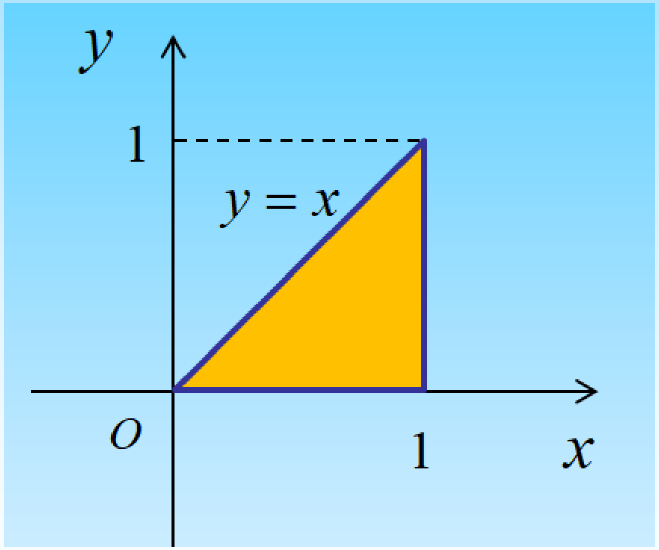
$DY = EY^2 - (EY)^2 = \dfrac{17}{448}$。

又

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 15xy^2 dy$$

$$= \frac{15}{28}。$$



从而 $Cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$

$$= \frac{5}{336},$$

现再来计算相关系数ρ_{XY},得

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$= \frac{\frac{5}{336}}{\sqrt{\frac{5}{252}}\sqrt{\frac{17}{448}}}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{17}}\approx 0.542。$$

(2) 由性质5－8和性质5－9知,

$$D(2X-3Y+7)=D(2X-3Y)$$

$$=D(2X)+D(-3Y)+2Cov(2X,-3Y)$$

$$=4DX+9DY-12Cov(X,Y)$$

$$=4\times\frac{5}{252}+9\times\frac{17}{448}-12\times\frac{5}{336}\approx 0.2423。$$

注：若X和Y不相关，则$D(X+Y)=DX+DY$。

反之也成立。

2016-2017年第1学期试题

1.$(5'\times 2=10')$　　也是习题集P131第40题

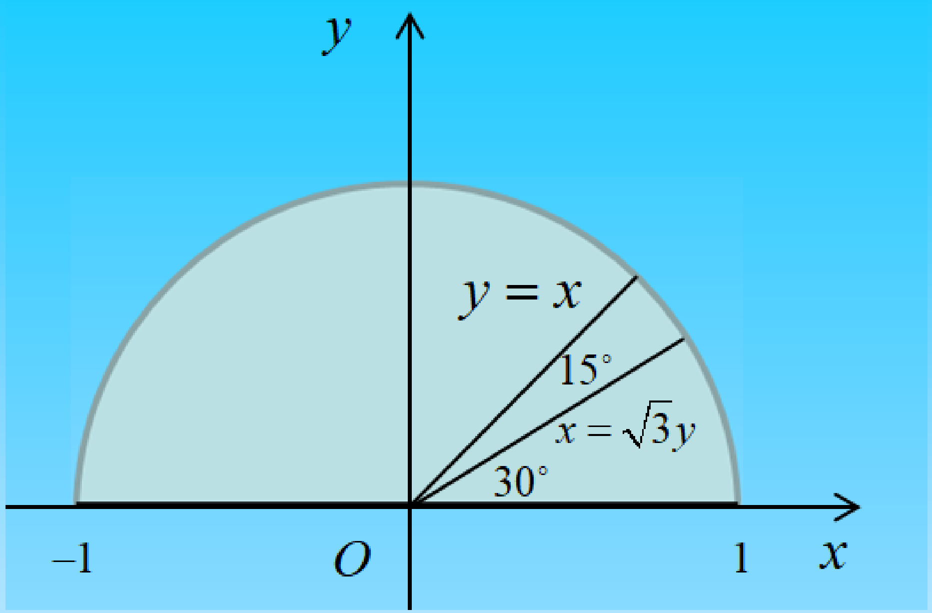
设随机向量(X,Y)服从$G=\{(x,y)\,|\,y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$上的均匀分布。定义随机变量$U,V$如下：

$$U=\begin{cases} 0, X\leq 0 \\ 1, 0<X\leq Y \\ 2, X>Y \end{cases}, V=\begin{cases} 0, X>\sqrt{3}Y \\ 1, X\leq\sqrt{3}Y \end{cases},$$

求(1)(U,V)的联合概率分布；(2)相关系数ρ_{UV}　。

解:

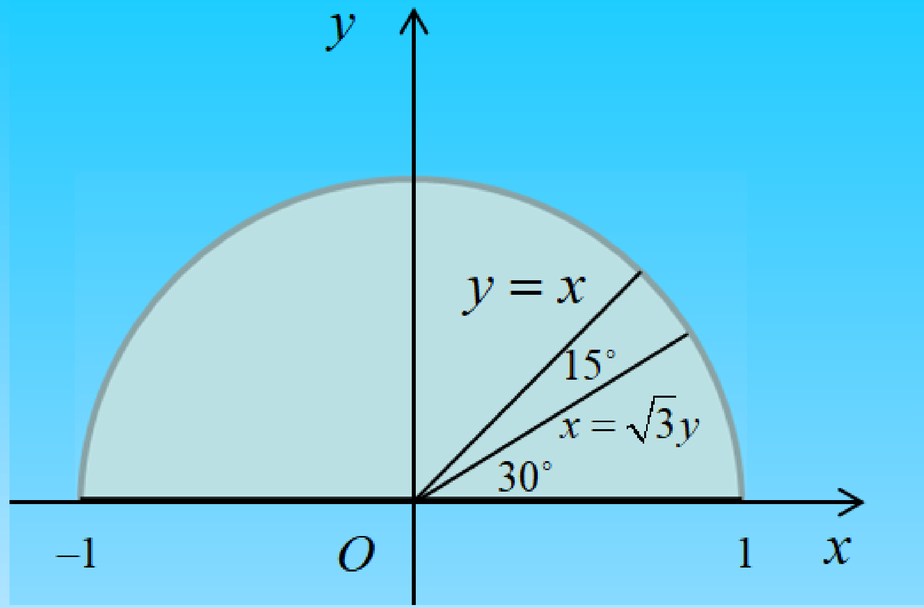
(1)



$$P(U=0,V=0)=P(X\le 0,\ X>\sqrt{3}Y)=0,$$

$$P(U=0,V=1)=P(X\le 0,\ X\le\sqrt{3}Y)=\frac{1}{2},$$

$$P(U=1,V=0)=P(0<X\le Y,\ X>\sqrt{3}Y)=0,$$



$$P(U=1,V=1)=P(0<X\le Y,X\le\sqrt{3}Y)=\frac{1}{4},$$

$$P(U=2,V=0)=P(X>Y,X>\sqrt{3}Y)=\frac{1}{6},$$

$$P(U=2,V=1)=P(X>Y,X\le\sqrt{3}Y)=\frac{1}{12},$$

$V \backslash U$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

(2)

$V \backslash U$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$EU=\frac{3}{4}, EU^2=\frac{5}{4}, DU=\frac{11}{16};$$

$$EV=\frac{5}{6}, DV=\frac{5}{36};$$

$$E(UV)=(0\times 0)\times 0+(0\times 1)\times 0+(0\times 2)\times\frac{1}{6}$$

$$+(1\times 0)\times\frac{1}{2}+(1\times 1)\times\frac{1}{4}+(1\times 2)\times\frac{1}{12}=\frac{5}{12},$$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\frac{E(UV)-EU\cdot EV}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=-\frac{5}{\sqrt{55}}。$$

类似习题,习题集96页28题