第四章 随机向量及其分布(下)

下面介绍二个常用二维连续型随机向量。

1. 二维均匀分布

定义4−8:设G是平面xOy上的一个有界区域,其面积记为$S_G(>0)$。若二维连续型随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_G},(x,y)\in G\\0,(x,y)\notin G\end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域G上的$\underline{\underline{\text{二维均匀分布}}}$

(2−dimensional uniform distribution)。

容易验证$p(x,y)$满足联合密度函数的二个基本性质。

若二维随机向量(X,Y)服从区域G上的二维均匀分布,且$D\subset G$,则

$$P\left(\left(X,Y\right)\in D\right)=\iint_D p(x,y)dxdy$$

$$=\iint_D \frac{1}{S_G}dxdy$$

$$=\frac{1}{S_G}\iint_D dxdy=\frac{S_D}{S_G},$$

其中S_D是区域D的面积。

上式表明,二维随机向量(X,Y)落在区域D内的概率与D的面积成正比,而与D在G中的位置和形状无关。这也是二维均匀分布名称的由来。

如果我们在一个面积为S_G的平面区域G上“等可能”地投点,令(X,Y)表示落点的坐标,则(X,Y)服从区域G上的二维均匀分布。

因此，二维均匀分布实际上就是平面上几何概型的随机向量描述。这样，平面上几何概型问题皆可利用二维均匀分布解决。

特别地，当G为矩形区域时，即

$$G=\{(x,y)\mid a\le x\le b,c\le y\le d\}$$

则此二维均匀分布的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b,c\le y\le d\\ 0\quad, & \text{其他}\end{cases}。$$

79页例4-5

例$4-5$:在区间$(0,a)$的中点两边随机地选取两点,求两点间的距离小于$a/3$的概率。

解:以X表示中点左边所取的随机点到端点O的距离,Y表示中点右边所取的随机点到端点O的距离,即

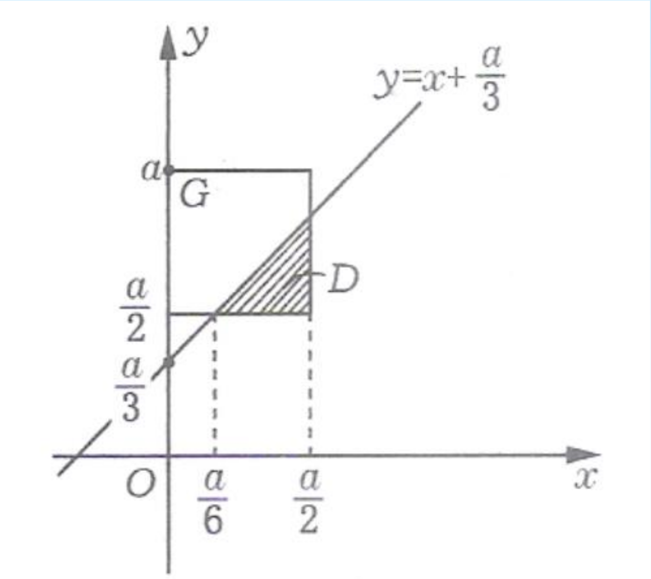
$$G: 0 < X < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < Y < a,$$

(X,Y)服从区域G上的二维均匀分布，所以，(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}, 0<x<\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}<y<a\\ 0 \quad , \quad 其他\end{cases},$$

$$P\left(Y-X<\frac{a}{3}\right)=\iint_D p(x,y)dxdy$$

$$=\int_{\frac{a}{6}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{3}+x}\frac{4}{a^2}dy=\frac{2}{9}。$$



2. 二维正态分布

定义4−9:若二维连续型随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$为常数,且

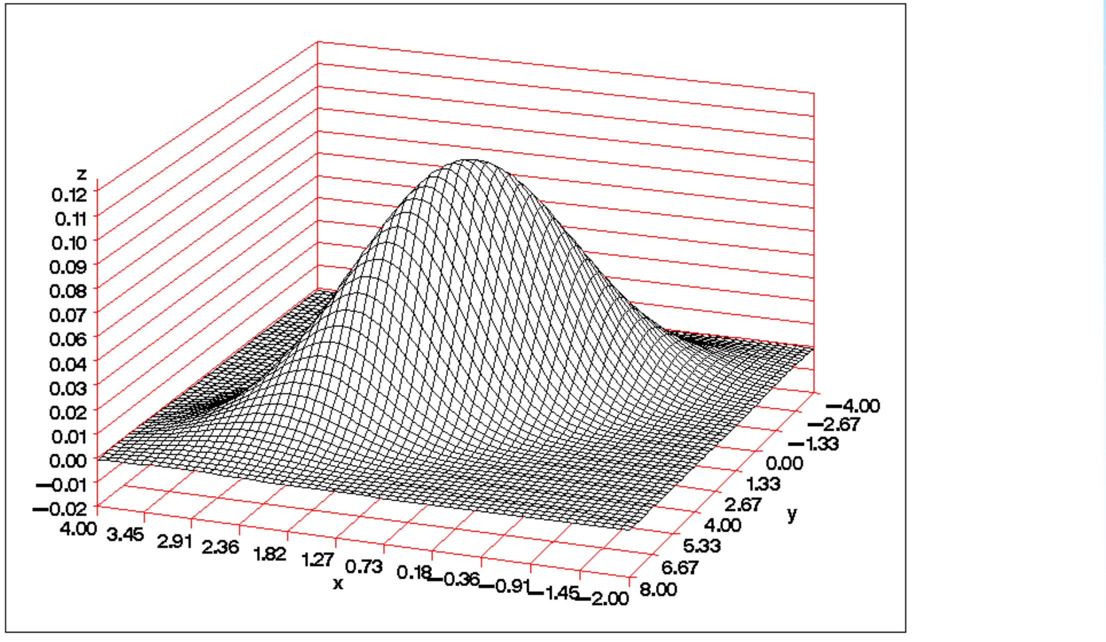
$$-\infty<\mu_1<+\infty,-\infty<\mu_2<+\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1,$$

则称(X,Y)服从二维正态分布

(2 – dimensional normal distribution),

记作$(X,Y) \sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$。

二维正态分布的联合密度函数的图形



可以验证二维正态分布的联合密度函数满足:

(1) $p(x,y)\geq 0, \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$,

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1$。

其中(2)可由性质$4-4$验证。

性质$4-4$:若$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$,

则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。

证明：令 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，

则

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2-2\rho uv+v^2\right)}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((v-\rho u)^2+u^2(1-\rho^2)\right)}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

即$p_X(x)$为正态分布$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$的密度函数,所以,$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$;同理可证:

$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$。

第二节 随机变量的独立性

在上一节中,我们曾经指出,二维随机向量(X,Y)的联合概率分布或联合密度函数不仅描述了X与Y各自的统计规律,而且还包含了X与Y相互之间关系的信息。

当随机变量X与Y取值的规律互不影响时,称X与Y独立,这是本节讨论的重点。

定义4-10：设$F(x,y)$为二维随机向量(X,Y)的联合分布函数，$F_X(x)$，$F_Y(y)$分别为二维随机向量(X,Y)的二个边际分布函数。若对于任意实数x,y，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

或 $P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$，

则称随机变量X与Y相互独立（independent）。否则称随机变量X与Y不独立(not independent)。

定义4−11:设二维离散型随机向量(X,Y)的联合概率分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\begin{matrix} i=1,\cdots,m,\cdots \\ j=1,\cdots,n,\cdots \end{matrix},$$

若对于任意的正整数i,j,有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),$$

即 $$p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j},$$

则称离散型随机变量X与Y相互独立,

否则称X与Y不独立。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$	$p_{m\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot n}$	$\cdots$	1

把不独立写成定义就是：

如果存在i_0, j_0,使得

$$p_{i_0 j_0} \neq p_{i_0 \cdot} \cdot p_{\cdot j_0}$$

则称随机变量X与Y不独立。

对于二维离散型随机向量(X,Y), 则

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\forall x,y \Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j},\forall i,j$$

证明： $$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{i:x_i\le x} p_i$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\sum_{j:y_j\le y} p_j$$

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{i:x_i\le x}\sum_{j:y_j\le y} p_{ij}$$

$(\Leftarrow)$ 若$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j},\forall i,j$成立,

$$F(x,y)=\sum_{i:x_i\le x}\sum_{j:y_j\le y}p_{ij}=\sum_{i:x_i\le x}\sum_{j:y_j\le y}p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

$$=\sum_{i:x_i\le x}p_{i\cdot}\sum_{j:y_j\le y}p_{\cdot j}=F_X(x)F_Y(y)$$

即$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\forall x,y$

$(\Rightarrow)$ 不妨设$x_1<x_2<\cdots<x_m<\cdots,$

$$y_1<y_2<\cdots<y_n<\cdots$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$	$p_{m\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot n}$	$\cdots$	1

若$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\forall x,y$成立,则

$$\sum_{i:x_i\le x}\sum_{j:y_j\le y}p_{ij}=\sum_{i:x_i\le x}p_{i\cdot}\sum_{j:y_j\le y}p_{\cdot j}$$

即 $$\sum_{i:x_i \le x} \sum_{j:y_j \le y} p_{ij} = \sum_{i:x_i \le x} p_{i\cdot} \sum_{j:y_j \le y} p_{\cdot j}$$

对所有x, y均成立。

设$x_1 \le x < x_2, y_1 \le y < y_2$,

$$\text{则 } p_{11} = p_{1\cdot} \times p_{\cdot 1}$$

设$x_1 \le x < x_2, y_2 \le y < y_3$,

$$\text{则 } p_{11} + p_{12} = p_{1\cdot}(p_{\cdot 1} + p_{\cdot 2})$$

即 $p_{12} = p_{1\cdot} \times p_{\cdot 2}$

同理，当$x_2 \le x < x_3, y_1 \le y < y_2$时，

$$p_{21} = p_{2\cdot} \times p_{\cdot 1}$$

当$x_2 \le x < x_3, y_2 \le y < y_3$时，

$$p_{22} = p_{2\cdot} \times p_{\cdot 2}$$

按照此方法，最后可以证明：

$$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, \forall i, j$$

定义4−12:设二维连续型随机向量(X,Y)的联合密度函数为$p(x,y)$, $p_X(x)$, $p_Y(y)$分别是(X,Y)的二个边际密度函数。若

$$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)\ ,\ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

则称连续型随机变量X与Y相互独立。

注：由于密度函数$p_X(x)$和$p_Y(y)$改变有限个点的函数值,联合密度函数改变有限个点或者改变一条曲线的函数值,都不影响概率的计算结果,

所以在定义4-12中,对所有x, y均成立,应该理解为通过适当调整这些函数值,可以对所有x, y均成立。

也就是说,必须在面积大于0的区域上,有$p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y)$,才能证明$X$和$Y$不独立。

例如,存在(x_0, y_0),使得$p(x_0, y_0) \neq p_X(x_0)p_Y(y_0)$,这并不能说明$X$和$Y$不独立。

对于二维连续型随机向量(X,Y), 则

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\forall x,y$$

$$\Leftrightarrow p(x,y)=p_X(x)p_Y(y),\forall x,y$$

性质：若X和Y独立，f,g都是连续函数或者分段连续函数，则$f(X)$和$g(Y)$独立。

注.此性质反过来不成立，反例在习题集95页习题21。

81页例4-7

例$4-7$:设(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

问α,β取什么值时,X与Y相互独立?

解：把所有6个概率加起来应该等于1，可得

$$\alpha+\beta=\frac{1}{3},$$

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	

又 $$P(Y=2)=\frac{1}{9}+\alpha,$$

$$P(X=1)=\frac{1}{3},$$

及X与Y独立,则

$$P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)$$

即 $$\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\cdot\frac{1}{3},\quad \alpha=\frac{2}{9},\beta=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

将α, β的值代入联合概率分布，可以验证X与Y相互独立。

问题：

联合概率分布中出现取某一对数的概率为0，讨论X和Y的独立性。

二维均匀分布的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, a\le x\le b, c\le y\le d \\ 0 \quad , \qquad 其他\end{cases},$$

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)}dy, a\le x\le b \\ 0 \qquad , \quad 其他\end{cases}$$

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, \text{其他}\end{cases},$$

同理

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, c\le y\le d\\ 0, \text{其他}\end{cases},$$

$$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$$

所以，服从矩形上的二维均匀分布的(X,Y)，X,Y独立。

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a<x\le b\\ 0, 其他\end{cases},$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, c\le y\le d\\ 0, 其他\end{cases},$$

此时, $p(a,c)\neq p_X(a)\cdot p_Y(c)$,

不能说: X和Y不独立。

82页例4-9

例$4-9$:设(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in D\\ 0,\text{其他}\end{cases},$$

其中区域D是由x轴,y轴及直线

$2x+y=2$所围成。求

(1) 边际密度函数$p_X(x),p_Y(y)$;

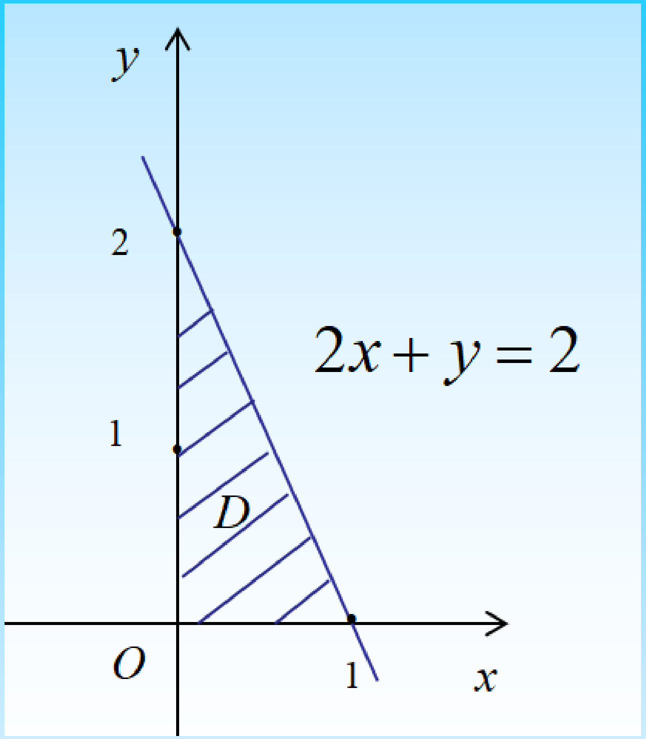
(2) X与Y是否独立?

解：(1)

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2-2x}1dy, & 0\le x\le 1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

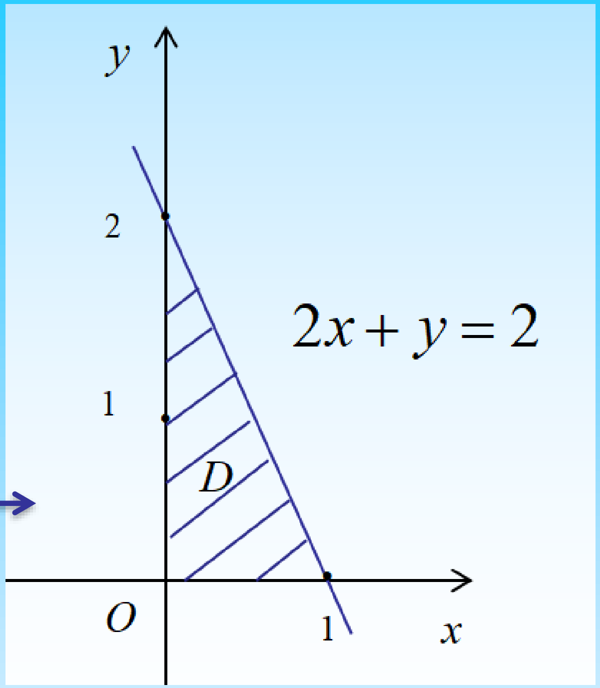
$$=\begin{cases}2-2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$



$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}}1dx, 0\le y\le 2\\ 0\quad ,\text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, 0\le y\le 2\\ 0, \text{其他}\end{cases};$$



(2) 显然, 当(x,y)落在区域D中时,

$p(x,y)\ne p_X(x)p_Y(y)$, 故X与Y不独立。

我们已经知道，通过联合分布，可求得边际分布，而在一般情况下由边际分布不能唯一确定联合分布。但当X与Y相互独立时，则由边际分布可以确定联合分布。

83页例4-10

例$4-10$:假设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,且$X$与$Y$独立,求$(X, Y)$的联合密度函数。

解:由独立性定义知,(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

由此可知,(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$。

综合练习题

已知二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right), 0<y<1-x^2\\ 0, otherwise\end{cases}$$

试求

(1) $p_X(x), p_Y(y)$, 并讨论X和Y的独立性;

(2) $P(X+2Y\le 1)$。

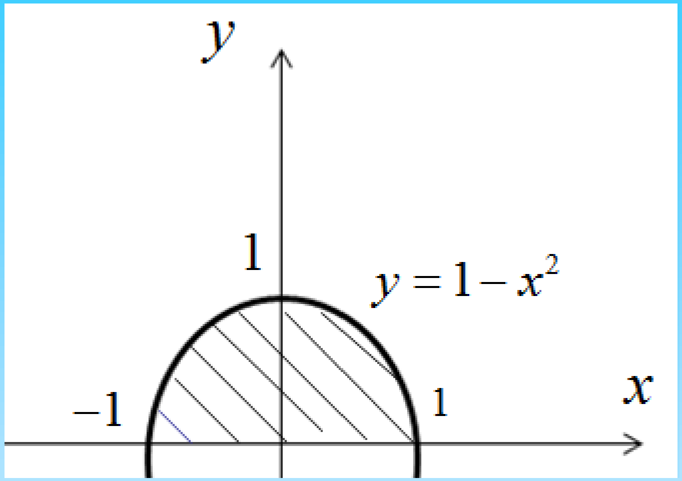
解： (1)

$$-1 < x < 1,$$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$$

$$= \int_0^{1-x^2} \frac{5}{4}\left(x^2 + y\right)dy$$

$$= \frac{5}{4}x^2(1-x^2) + \frac{5}{8}(1-x^2)^2 = \frac{5}{8}\left(1-x^4\right),$$

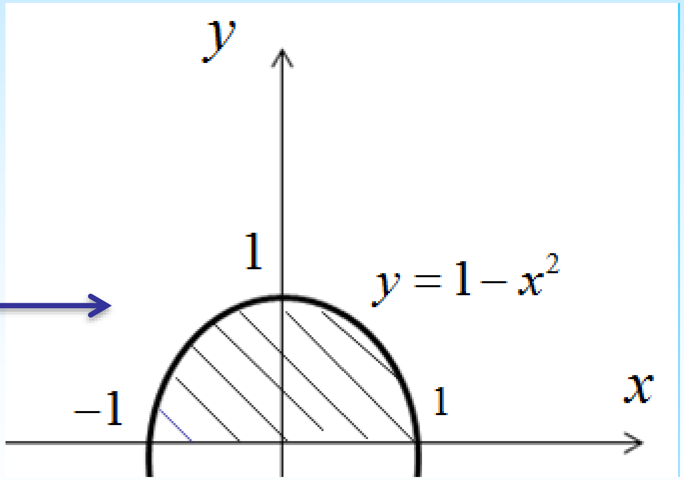


$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{5}{8}\left(1-x^4\right), -1<x<1\\ 0, otherwise\end{cases};$$

$$0<y<1,$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

$$=\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right)dx$$



$$=\left[\frac{5}{12}x^3\right]_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}+\frac{5}{2}y\sqrt{1-y}$$

$$=\frac{5}{6}\sqrt{1-y}\left(1+2y\right),$$

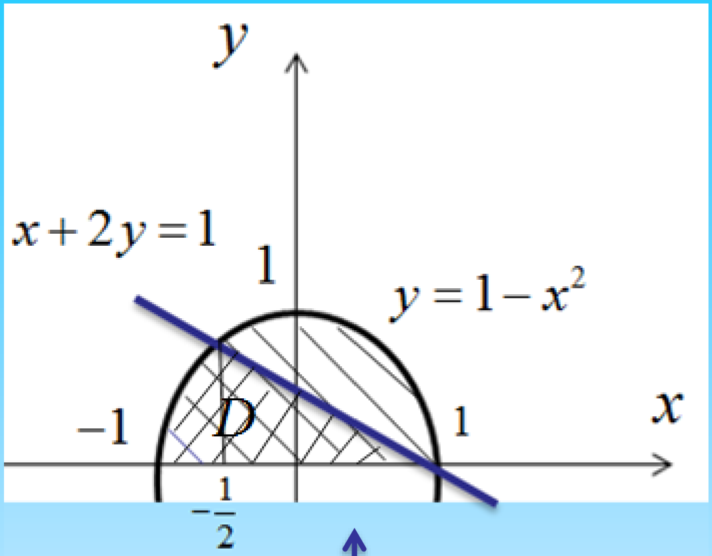
$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{5}{6}\sqrt{1-y}\left(1+2y\right),0<y<1\\ 0,otherwise\end{cases};$$

在$0<y<1-x^2$中

$$p(x,y) \neq p_X(x)\,p_Y(y)$$

所以，X和Y不独立。

(2)



$$P(X+2Y\le 1)=\iint\limits_{x+2y\le 1} p(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right)dxdy$$

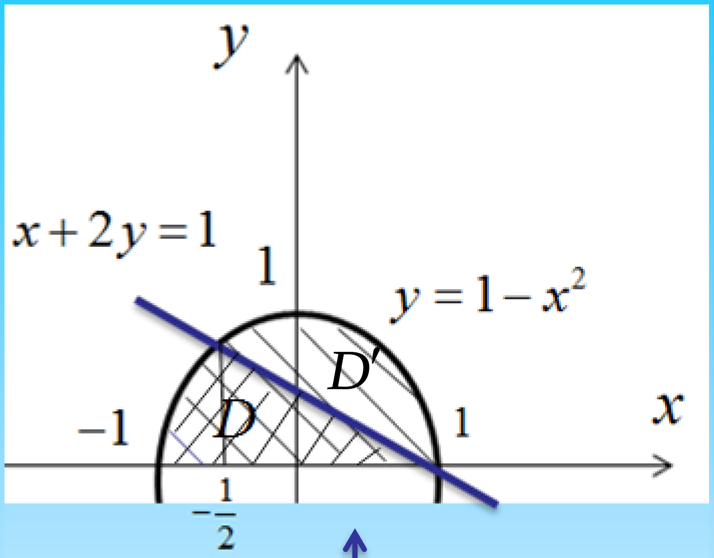
$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}dx\int_{0}^{1-x^2}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right)dy+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{0}^{\frac{1-x}{2}}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right)dy$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{5}{8}\left(1-x^{4}\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{5}{32}\left(1-2x+5x^{2}-4x^{3}\right)dx$$

$$=\frac{49}{256}+\frac{135}{512}=\frac{233}{512}$$

或者

$$P(X+2Y\leq 1)=1-P(X+2Y>1)$$

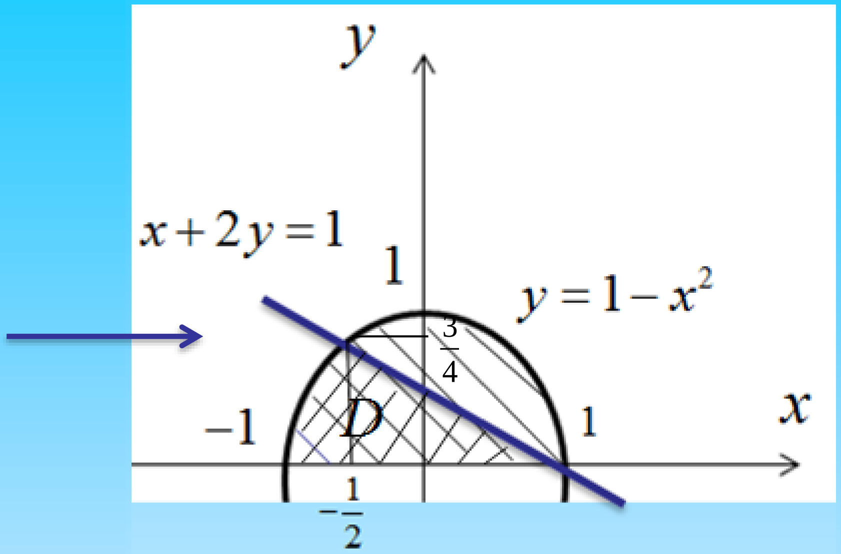


$$P(X+2Y>1)=\iint\limits_{x+2y>1} p(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D'}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1-x}{2}}^{1-x^2}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right)dy$$

或者



$$P(X+2Y\le 1)=\iint\limits_{x+2y\le 1} p(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{1-2y}\frac{5}{4}\left(x^2+y\right)dx$$

概率论试卷

2018-2019学年第1学期

2019年1月3日

三. 分析判断题(6分)

设X,Y独立且同分布于两点分布$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$Z=XY$,则X,Y,Z之间两两独立但不相互独立。

解:　　正确。　　$Z:-1,1,$

$$P(Z=1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)$$

$$=P(X=-1)P(Y=-1)+P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{2},$$

$$Z \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}。$$

$$P(X=-1, Z=-1) = P(X=-1, XY=-1)$$

$$= P(X=-1, Y=1) = P(X=-1)P(Y=1)$$

$$= \frac{1}{4} = P(X=-1)P(Z=-1),$$

$$P(X=-1, Z=1) = P(X=-1, XY=1)$$

$$= P(X=-1, Y=-1) = P(X=-1)P(Y=-1)$$

$$= \frac{1}{4} = P(X=-1)P(Z=1),$$

类似可以证明：

$$P(X=1,Z=-1)=P(X=1)P(Z=-1),$$

$$P(X=1,Z=1)=P(X=1)P(Z=1),$$

这样我们证明了, X和Z独立,　　同理, Y和Z独立,

所以，X,Y,Z两两独立。

因为,

$$P(X=1,Y=1,Z=-1)=0\neq P(X=1)P(Y=1)P(Z=-1)=\frac{1}{8},$$

所以，X,Y,Z不独立。

习题集95页21题

设(X,Y)的联合密度函数为

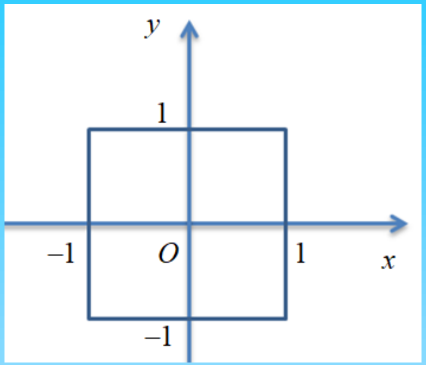
$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4},|x|\le 1,|y|\le 1\\ 0\quad,\quad else\end{cases},$$

证明：(1)X与Y不独立；(2)X^2与Y^2相互独立。

解：　(1)

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy, -1<x<1\\ 0\quad ,\quad else\end{cases}$$



$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, -1<x<1\\ 0\quad ,\quad else\end{cases},$$

即

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, -1<x<1\\ 0\quad ,\quad else\end{cases},$$

同理,

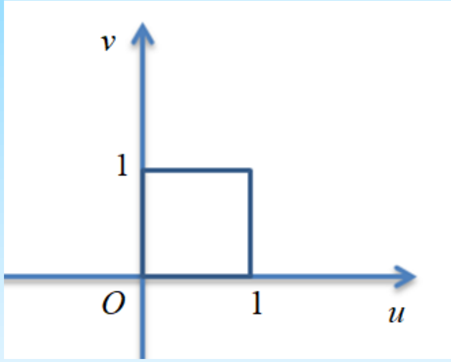
$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, -1<y<1\\ 0\quad ,\quad else\end{cases},$$

在$|x|\le 1, |y|\le 1$中, $p(x,y)\ne p_X(x)p_Y(y)$,

所以, X与Y不独立。

(2)

令$U=X^2, V=Y^2$,

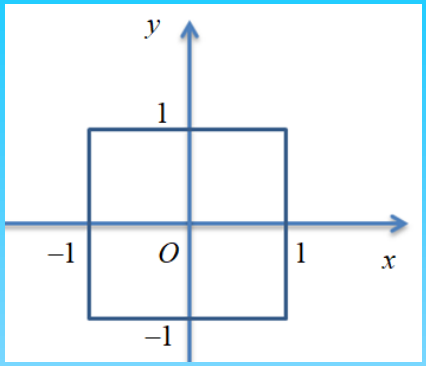


并且记

(X^2,Y^2)(即(U,V))的联合密度函数为$F^*(u,v)$,

当$u<0$或$v<0$时, $F^*(u,v)=0$,

当$0 \le u < 1, 0 \le v < 1$时，



$$F^*(u,v) = P(U \le u, V \le v) = P(X^2 \le u, Y^2 \le v)$$

$$= P(|X| \le \sqrt{u}, |Y| \le \sqrt{v}) = \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \frac{1}{4}(1+xy)dxdy = \sqrt{uv},$$

当$0 \le u < 1, v \ge 1$时，

$$F^*(u,v) = P(U \le u, V \le v) = P(X^2 \le u, Y^2 \le v)$$

$$= P(|X| \le \sqrt{u}, |Y| \le 1) = \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1+xy)dxdy = \sqrt{u},$$

当$u \geq 1, 0 \leq v < 1$时,

$$F^*(u,v) = P(U \leq u, V \leq v) = P(X^2 \leq u, Y^2 \leq v)$$

$$= P(|X| \leq 1, |Y| \leq \sqrt{v}) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \frac{1}{4}(1+xy)dxdy = \sqrt{v},$$

当$u \geq 1, v \geq 1$时, 显然有$F^*(u,v) = 1$,

所以,

$$F^*(u,v) = \begin{cases} 0, u < 0 \ or \ v < 0 \\ \sqrt{uv}, 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1 \\ \sqrt{u}, 0 \leq u < 1, v \geq 1 \\ \sqrt{v}, u \geq 1, 0 \leq v < 1 \\ 1, u \geq 1, v \geq 1 \end{cases}$$ 。

再求$F_{X^2}(u)$(即$F_U(u)$),

当$u<0$时, $F_U(u)=F_{X^2}(u)=0$,

当$0\le u<1$时,

$$F_U(u)=F_{X^2}(u)=P(X^2\le u)=P(X^2\le u,Y^2\le 1)$$

$$=P(|X|\le\sqrt{u},|Y|\le 1)=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)dxdy=\sqrt{u},$$

当$u\ge 1$时,

$$F_U(u)=F_{X^2}(u)=P(X^2\le 1)=1,$$

所以,

$$F_U(u)=F_{X^2}(u)=\begin{cases} 0, u<0 \\ \sqrt{u}, 0\le u<1, \\ 1, u\ge 1 \end{cases}$$

类似可得,

$$F_V(v)=F_{Y^2}(v)=\begin{cases} 0, v<0 \\ \sqrt{v}, 0\le v<1, \\ 1, v\ge 1 \end{cases}$$

易验证:

对任意$u, v, F^*(u, v) = F_U(u)F_V(v)$,

所以, X^2与Y^2相互独立。

或者

$$F^*(u,v)=\begin{cases} 0, u<0 \ or \ v<0 \\ \sqrt{uv}, 0\le u<1, 0\le v<1 \\ \sqrt{u}, 0\le u<1, v\ge 1 \\ \sqrt{v}, u\ge 1, 0\le v<1 \\ 1, u\ge 1, v\ge 1 \end{cases}$$ 。

$$F_U(u)=F^*(u,+\infty)=\begin{cases} 0, u<0 \\ \sqrt{u}, 0\le u<1, \\ 1, u\ge 1 \end{cases}$$

$$F_V(v)=F^*(+\infty,v)=\begin{cases} 0, v<0 \\ \sqrt{v}, 0\le v<1, \\ 1, v\ge 1 \end{cases}$$

又或者

$$F^*(u,v)=\begin{cases} 0, u<0\ or\ v<0 \\ \sqrt{uv}, 0\le u<1, 0\le v<1 \\ \sqrt{u}, 0\le u<1, v\ge 1 \\ \sqrt{v}, u\ge 1, 0\le v<1 \\ 1, u\ge 1, v\ge 1 \end{cases}$$ 。

$$p^*(u,v)=\frac{\partial^2 F^*(u,v)}{\partial u \partial v}=\begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{uv}}, & 0<u<1, 0<v<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$p_U(u)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{u}}, & 0<u<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}，\quad p_V(v)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{v}}, & 0<v<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

第三节 二维随机向量函数的分布

设(X,Y)是一个二维随机向量，$z=f(x,y)$是二元的连续函数或分段连续函数，则$Z=f(X,Y)$仍然是一个一维随机变量。我们需要由(X,Y)的联合分布直接求出$Z=f(X,Y)$的分布。

一. 当(X,Y)为二维离散型随机向量时，

则Z一定是（一维）离散型随机变量。

84页例4-12

例$4-12$:已知(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

求$X+Y$的概率分布。

解：设$Z=X+Y$，Z的取值表

Z X \ Y	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3

Z的概率分布为

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}+\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}+\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$

即

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

二. 当(X,Y)为二维连续型随机向量时，

一般方法就是先求分布函数，再求导数。

86页 例4-13

例$4-13$:设随机变量X与Y相互独立，且均服从$N(0,1)$, 试求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的密度函数$p_Z(z)$。

解：由于X和Y相互独立，且X,Y服从$N(0,1)$，则(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

当 $z<0$ 时,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=0\,,$$

当 $z\ge 0$ 时,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$

$$=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)$$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr$$

$$= \int_0^z r e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

$$= -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^z$$

$$= 1 - e^{-\frac{z^2}{2}},$$

当 $z>0$ 时,

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=ze^{-\frac{z^2}{2}},$$

所以,

$$p_Z(z)=\begin{cases} ze^{-\frac{z^2}{2}}, z>0 \\ 0 \quad\quad , z\le 0 \end{cases}。$$

86页例4-14

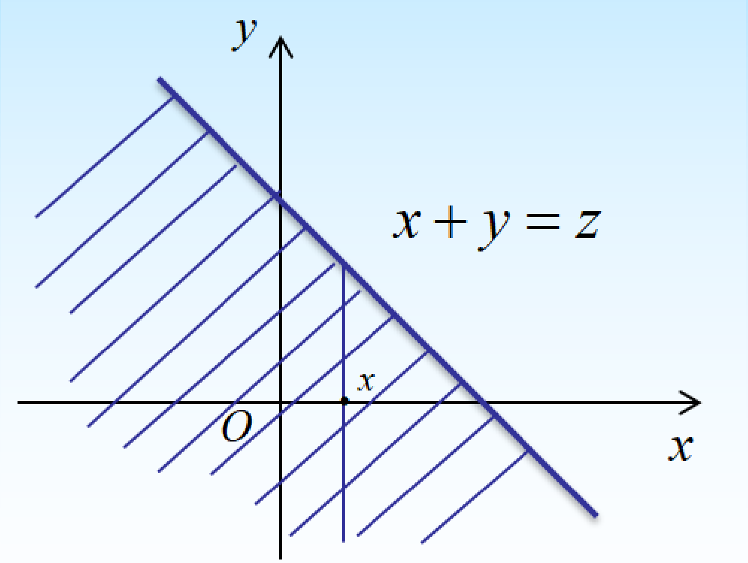
例4 − 14:设(X,Y)的联合密度函数为$p(x,y)$,求$Z=X+Y$的密度函数。

解:为了求Z的密度函数,先求Z的分布函数,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$

$$=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} p(x,y)dxdy$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} p(x, y) dy \right] dx$$

$$\overset{y=t-x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} p(x, t-x) dt \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t-x) dx \right] dt$$

则Z的密度函数$p_Z(z)$为

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x) dx,$$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)dx$$

著名的卷积公式。

卷积公式为求$Z=X+Y$的密度函数的一般公式,可以直接使用。

特别地,当X和Y相互独立时,则$Z=X+Y$的密度函数公式为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

一般情况：$Z = aX + bY$，$b \neq 0$

$$p_Z(z) = \frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \frac{z - ax}{b})dx$$

或：$Z = aX + bY$，$a \neq 0$

$$p_Z(z) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\frac{z - by}{a}, y)dy$$

2017－2018第一学期

2.设随机变量X,Y相互独立，密度函数都为$p(t)$，则随机变量$Z=X-2Y$的密度函数$p_Z(z)$为________________。

$$(A)\ p_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,p\left(\frac{z-x}{2}\right)dx,$$

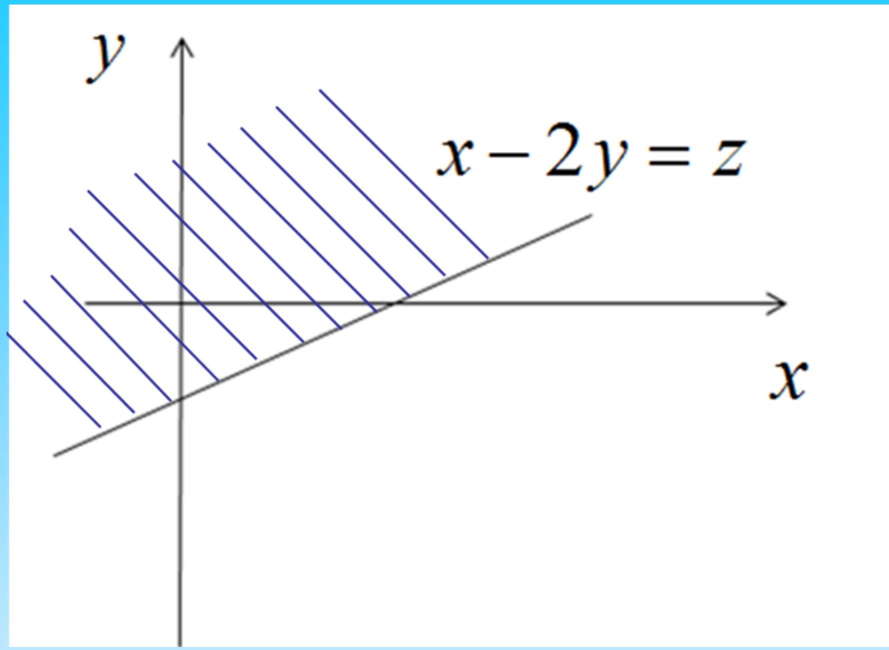
$$(B)\ p_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,p\left(\frac{x-z}{2}\right)dx,$$

$$(C)\, p_Z(z) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, p\big(2(z-x)\big)dx,$$

$$(D)\, p_Z(z) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, p\big(2(x-z)\big)dx$$

利用前面的公式很容易得到(B)

解：$F_Z(Z \le z) = P(X - 2Y \le z)$



在直线的上面

$$F_Z(z)=P(X-2Y\le z)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\frac{x-z}{2}}^{+\infty}p(x,y)dy\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\frac{x-z}{2}}^{+\infty}p(x,y)dy\right)dx$$

做替换 $y=\dfrac{x-t}{2}, dy=-\dfrac{1}{2}dt$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\frac{x-z}{2}}^{+\infty}p(x,y)dy\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{z}^{-\infty}p(x,\frac{x-t}{2})dt\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \frac{x-t}{2})dx\right)dt$$

$$p_Z(z) = F_Z{}'(z)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \frac{x-z}{2})dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, p\left(\frac{x-z}{2}\right)dx$$

$$(B)$$

87页例4-15

例$4-15$:设随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, 0<x<y \\ 0, 其他 \end{cases},$$

求 (1) $Z=X+Y$的密度函数;

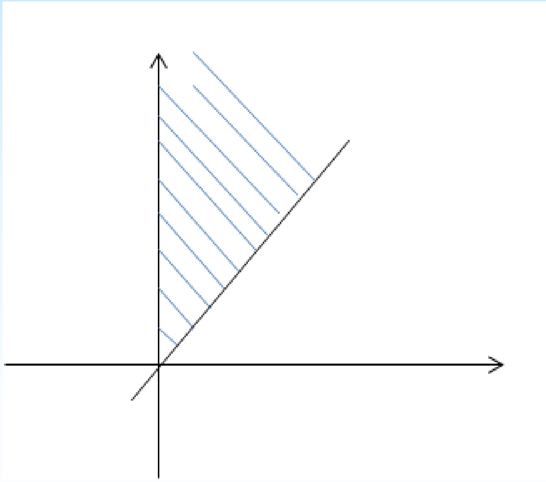
(2)$U=\max\{X,Y\}$和$V=\min\{X,Y\}$的密度函数。

解:(1)　当 $z<0$ 时, 显然 $p_Z(z)=0$,

当 $z\ge 0$ 时, $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,z-x)dx$

当 $p(x,z-x)=xe^{-(z-x)}$ 时,

必须要求 $0<x<z-x$, 即 $0<x<\dfrac{z}{2}$,



$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\frac{z}{2}} xe^{-(z-x)}dx+\int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} 0dx$$

$$=e^{-z}\int_{0}^{\frac{z}{2}} xe^{x}dx=\left(\frac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z},$$

所以,

$$p_Z(z)=\begin{cases}\left(\dfrac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}, z\geq 0\\ 0, z<0\end{cases}。$$

(2) 先求$U=\max\{X,Y\}$的分布函数,

$$F_U(u)=P(U\leq u)$$

$$=P(\max\{X,Y\}\leq u)$$

$$=P(X\leq u, Y\leq u)$$

当$u<0$时，

显然 $F_U(u)=0$，

当$u\geq 0$时，

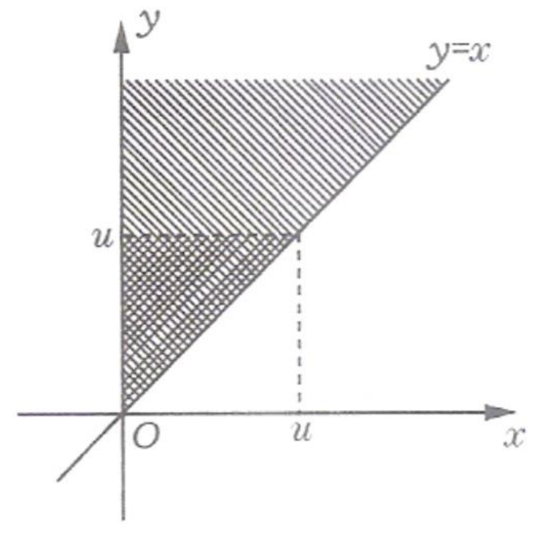


图 4—14

$$F_U(u)=P(X\leq u, Y\leq u)$$

$$=\int_0^u dx\int_x^u xe^{-y}dy$$

$$=\int_0^u x(e^{-x}-e^{-u})dx$$

$$=\int_0^u xe^{-x}dx-e^{-u}\int_0^u xdx$$

$$=(-ue^{-u}-e^{-u}+1)-\frac{u^2}{2}e^{-u}$$

$$=1-\left(\frac{u^2}{2}+u+1\right)e^{-u},$$

所以,

$$F_U(u)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{u^2}{2}+u+1\right)e^{-u}, u\geq 0\\ 0, u<0\end{cases},$$

然后,再对分布函数$F_U(u)$求的导数,

则$U=\max\{X,Y\}$的密度函数为

$$p_U(u)=\begin{cases}\dfrac{u^2}{2}e^{-u}, u>0\\ 0, u\le 0\end{cases}$$ 。

现再求$V=\min\{X,Y\}$的分布函数,

$$F_V(v)=P(V\le v)$$

$$=1-P(V>v)$$

$$=1-P(\min\{X,Y\}>v)$$

$$=1-P(X>v,Y>v),$$

当$v<0$时,

显然 $F_V(v)=0$,

当$v\geq 0$时,

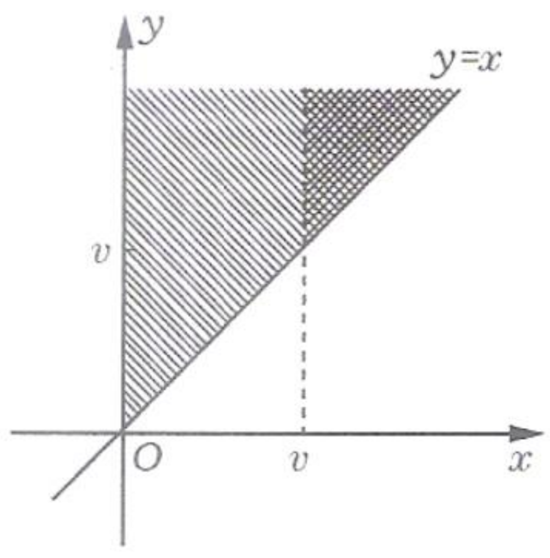


图 4—15

$$F_V(v)=1-P(X>v,Y>v)$$

$$=1-\int_v^{+\infty}dy\int_v^y xe^{-y}dx$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_v^{+\infty}(y^2-v^2)e^{-y}dy$$

$$=1-(v+1)e^{-v},$$

所以,

$$F_V(v)=\begin{cases}1-(v+1)e^{-v}, v\ge 0\\ 0, v<0\end{cases},$$

然后,再对分布函数$F_V(v)$求v的导数,

则$V=\min\{X,Y\}$的密度函数为

$$p_V(v)=\begin{cases}ve^{-v}, v>0\\ 0, v\le 0\end{cases}。$$

注1： $\{\max\{X,Y\}\le a\}=\{X\le a,Y\le a\}$，

$\{\min\{X,Y\}>a\}=\{X>a,Y>a\}$，

注2：$\max\{X,Y\}=\dfrac{X+Y+|X-Y|}{2}$，

$\min\{X,Y\}=\dfrac{X+Y-|X-Y|}{2}$。

习题集第四章$P96$,计算题29， 考研题

29.设随机变量X与Y相互独立,X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,Y服从$[-\pi,\pi]$上的均匀分布,试求$Z=X+Y$的密度函数（计算结果用标准正态分布分布函数$\Phi(x)$来表示）。

解：
$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$$
$$=\int_{z-\pi}^{z+\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\bullet\frac{1}{2\pi}dx$$

其中$-\pi<z-x<\pi$,即$z-\pi<x<z+\pi$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{z-\pi}^{z+\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}P\left(z-\pi<X\leq z+\pi\right)$$

$$p_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\left[F_X(z+\pi)-F_X(z-\pi)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

其中$F_X(x)$为$N(\mu,\sigma^2)$的分布函数。

88页例4-16

例4–16:设系统L由两个相互独立的子系统L_1和L_2连接而成,联接方式分别为(1)串联,(2)并联,(3)备用(当系统L_1损坏时,系统L_2开始工作),如图4–16所示。

设L_1和L_2的寿命分别服从指数分布$Exp(\alpha)$和$Exp(\beta)$,其中$\alpha, \beta > 0$,且$\alpha \neq \beta$。

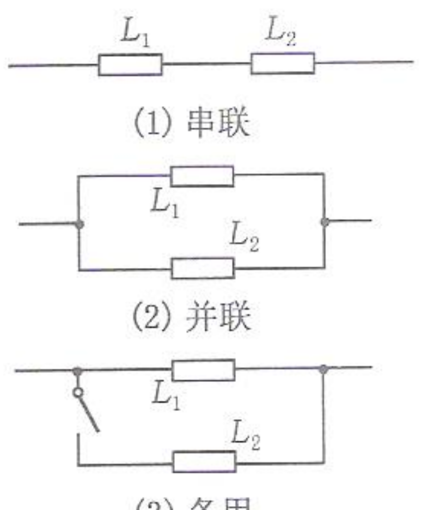


图 4—16

试分别就以上三种联接方式求出L的寿命Z的密度函数。

解：设X, Y分别表示L_1和L_2的寿命。

(1) 当串联时，只要L_1和L_2其中之一损坏时，系统L就停止工作，则L的寿命为

$$Z = \min\{X, Y\},$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\min\{X, Y\} \le z)$$

当 $z<0$ 时, 显然 $F_Z(z)=0$,

当 $z\geq 0$ 时, $F_Z(z)=P(\min\{X,Y\}\leq z)$

$$=1-P(\min\{X,Y\}>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)$$

$$=1-e^{-\alpha z}\bullet e^{-\beta z}$$

$$=1-e^{-(\alpha+\beta)z},$$

当 $z>0$ 时, $p_Z(z)=F_Z'(z)=(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}$,

所以, $Z=\min\{X,Y\}$的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}。$$

(2) 当并联时, 只有L_1和L_2都损坏时, 系统L才停止工作, 则系统L的寿命为

$$Z=\max\{X,Y\},$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\max\{X,Y\}\le z)$$

当 $z<0$ 时, 显然 $F_Z(z)=0$,

当 $z\geq 0$ 时, $F_Z(z)=P(\max\{X,Y\}\leq z)$

$$=P(X\leq z,Y\leq z)$$

$$=P(X\leq z)P(Y\leq z)$$

$$=(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}),$$

当 $z>0$ 时,

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z},$$

所以，$Z=\max\{X,Y\}$的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$$。

(3) 当备用时，L_1损坏时，L_2才开始工作，则系统L的寿命为

$$Z=X+Y,$$

当 $z\le 0$ 时，显然 $p_Z(z)=0$，

由于X与Y相互独立,则由卷积公式得

当$z \geq 0$时,

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z-x) dx$$

$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha x} \cdot \beta e^{-\beta(z-x)} dx$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right),$$

其中,$x > 0, z - x > 0$,即$0 < x < z$,

所以，$Z = X + Y$的密度函数为

$$p_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

。

2017年5月概率论试题

3.汽车加油站共有两个加油窗口，现有三辆车A, B, C同时进入该加油站，假设A, B首先开始加油，当其中一辆加油结束后立即开始第三辆车C加油。假设各辆车所需时间是相互独立且都服从参数为λ的指数分布。（1）求第三辆车C在加油站等候加油时间T的密度函数；（2）求第三辆车C在加油站度过时间S的密度函数。

解： 三辆车所需时间分别用X,Y,Z表示。

$X,Y,Z \sim Exp(\lambda), X,Y,Z$相互独立,

(1) $T=\min\{X,Y\}$,

$$F_T(t)=P(T\le t)=P(\min\{X,Y\}\le t),$$

$$t\le 0, F_T(t)=0,$$

$$t>0, F_T(t)=1-P(\min\{X,Y\}>t)$$

$$= 1 - P(X > t, Y > t)$$

$$= 1 - P(X > t)P(Y > t)$$

$$= 1 - e^{-2\lambda t},$$

$$t > 0, p_T(t) = F_T'(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t},$$

$$p_T(t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda t}, t > 0 \\ 0, t \le 0 \end{cases};$$

$(2) S = T + Z$

$s > 0,$

$$p_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t) p_Z(s-t) dt$$

$$= \int_0^s 2\lambda e^{-2\lambda t} \lambda e^{-\lambda(s-t)} dt,$$

其中$t > 0, s - t > 0,$即$0 < t < s,$

所以,

$$p_S(s) = 2\lambda^2 e^{-\lambda s} \int_0^s e^{-\lambda t} dt$$

$$= -2\lambda e^{-\lambda s} \left(e^{-\lambda t} \Big|_0^s \right)$$

$$= 2\lambda e^{-\lambda s} \left(1 - e^{-\lambda s} \right),$$

$$p_S(s) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda s} \left(1 - e^{-\lambda s} \right), s > 0 \\ 0, s \le 0 \end{cases}$$ 。

2017 – 2018年第二学期

2018年6月5日

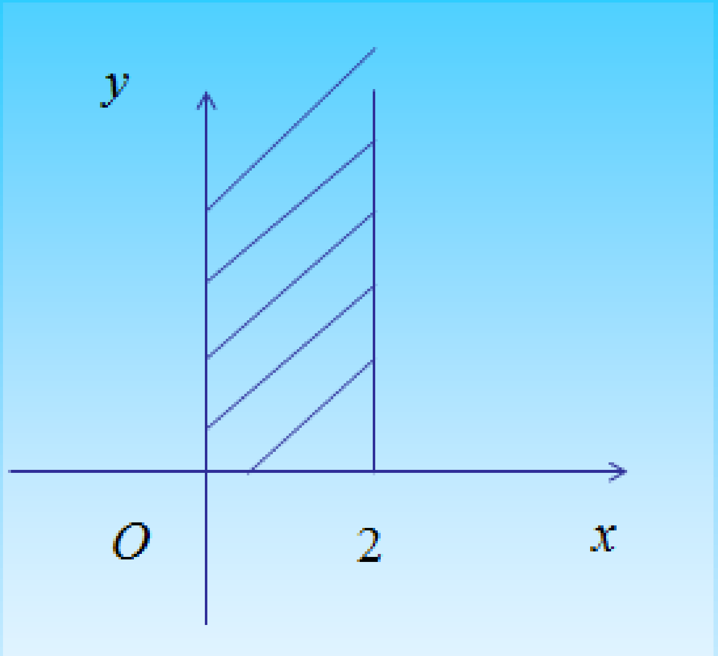
概率论试卷

类似习题集83页典型题例7

4.（12分）设随机变量X服从$(0,2)$上的均匀分布, Y服从参数λ=2的指数分布，且X,Y独立，记随机变量$Z = X + 2Y$。

求Z的密度函数$p_Z(z)$。

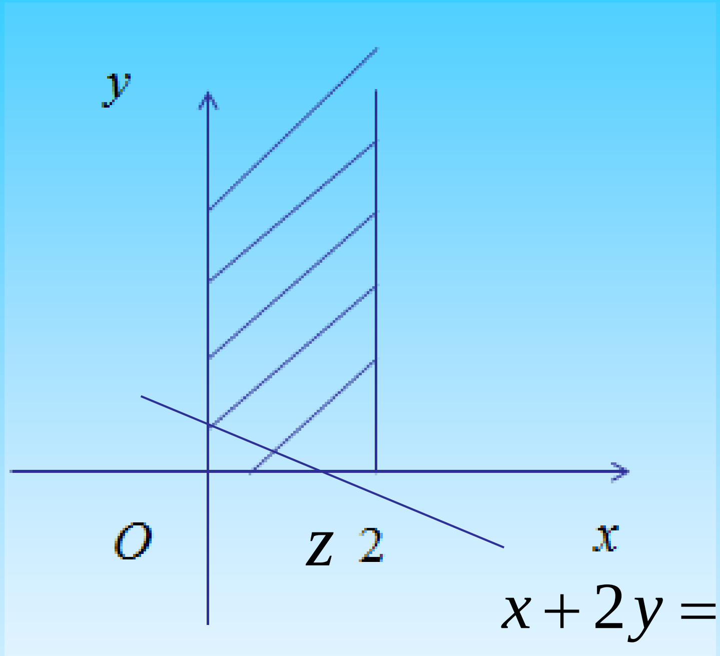
解：



$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)$$

$$z\le 0, F_Z(z)=0,$$

$$0 < z < 2,$$



$$x + 2y = z$$

$$F_Z(z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$= \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} \frac{1}{2} \times 2e^{-2y} dy$$

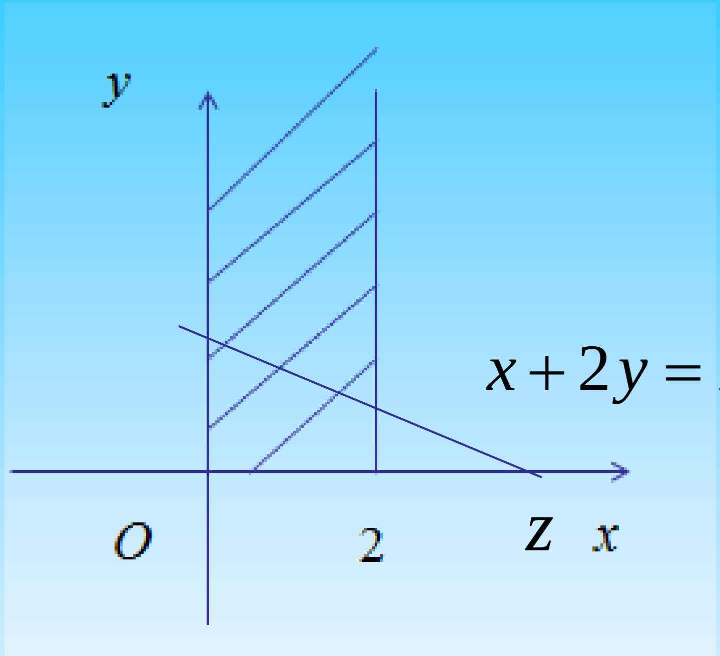
$$=-\frac{1}{2}\int_0^z \left(e^{-2y}\right)\Big|_0^{\frac{z-x}{2}} dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^z (e^{-(z-x)}-1)dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^z e^x dx+\frac{z}{2}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-z}+\frac{z}{2}-\frac{1}{2};$$

$z \geq 2,$



$$F_Z(z) = P(X + 2Y \leq z)$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} \frac{1}{2} \times 2e^{-2y} dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{-2y}\right)\Big|_0^{\frac{z-x}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 (e^{-(z-x)} - 1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^2 e^x dx + 1$$

$$= \frac{1}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{2-z} + 1,$$

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, z<0 \\ \frac{1}{2}e^{-z}+\frac{z}{2}-\frac{1}{2}, 0\le z<2, \\ \frac{1}{2}e^{-z}-\frac{1}{2}e^{2-z}+1, z\ge 2 \end{cases}$$

$p_Z(z)=F_Z'(z)$,所以,

$$p_Z(z)=\begin{cases} 0, z\le 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right), 0<z<2 \\ \frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right), z\ge 2 \end{cases}$$ 。

利用公式：

$z<0, p_Z(z)=0;$

$z\ge 0$时， $p_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,\frac{z-x}{2})dx$

$$p(x,\frac{z-x}{2})=p_x(x)p_y(\frac{z-x}{2}),$$

$$\begin{cases}0<x<2\\ \frac{z-x}{2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<2\\ x<z\end{cases};\quad \text{取交集}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0<x<z,\text{当}0\le z<2\text{时}\\ 0<x<2,\quad \text{当}z\ge 2\text{时}\end{cases}$$

$$\text{当}0\le z<2\text{时},\ p_z(z)=\frac{1}{2}\int_0^z\frac{1}{2}\cdot 2e^{-2\cdot\frac{(z-x)}{2}}dx=\frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right);$$

$$\text{当}z\ge 2\text{时},\ p_z(z)=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2}\cdot 2e^{-2\cdot\frac{(z-x)}{2}}dx=\frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right)\text{。}$$

三. 可加性

定义4−13:设$X \sim F(x;\theta_1), Y \sim F(x;\theta_2)$,且$X$与$Y$相互独立。若$X+Y \sim F(x;\theta_1+\theta_2)$,则称分布$F(x;\theta)$具有可加性(additivity)或再生性(regeneration)。

定义4−13中$F(x;\theta_1)$和$F(x;\theta_2)$表示分布类型相同,只是其中的参数分别为θ_1和θ_2。

90页例4-17

例$4-17$:设$X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$,且$X$与$Y$相互独立,则

$$X+Y \sim B(n_1+n_2, p)。$$

即二项分布具有可加性。

证明: 因为 $X \sim B(n_1, p)$,$Y \sim B(n_2, p)$,且X,Y独立

所以,

$$P(X+Y=k)=P(X=0,Y=k)+P(X=1,Y=k-1)$$

$$+\cdots+P(X=k,Y=0)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}P\left(X=m,Y=k-m\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}P\left(X=m\right)P\left(Y=k-m\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}C_{n_1}^{m}p^{m}q^{n_1-m}C_{n_2}^{k-m}p^{k-m}q^{n_2-(k-m)}$$

$$= C_{n_1+n_2}^{k} p^{k} q^{n_1+n_2-k}$$

即 $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$。

由归纳法也即可得以下推广。

推广：若$X_1,\cdots,X_m$相互独立，且

$X_i \sim B(n_i,p), i=1,2,\cdots,m$，则

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)。$$

90页例4-18

例$4-18$:设$X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2)$, 且$X$与$Y$相互独立,则

$$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)。$$

即普阿松分布具有可加性。

证明： 因为

$$P(X=i)=\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}, i=0,1,\cdots,$$

$$P(Y=j)=\frac{\lambda_2^j}{j!}e^{-\lambda_2}, j=0,1,\cdots,$$

所以,

$$P(X+Y=k)=P(X=0,Y=k)+P(X=1,Y=k-1)$$

$$+\cdots+P(X=k,Y=0)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}P\left(X=m,Y=k-m\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}P\left(X=m\right)P\left(Y=k-m\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-m}}{(k-m)!}e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} \lambda_1^m \lambda_2^{k-m}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} C_k^m \lambda_1^m \lambda_2^{k-m}$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, k = 0,1,\cdots,$$

所以, $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$。

由归纳法应即可得以下推广。

推广：设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，且$X_i \sim P(\lambda_i), i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)。$$

91页例4-19

例$4-19$:设有一批玻璃瓶,瓶上每个气泡看作是一个缺陷。从该批玻璃瓶中随机地抽取30个,规定当其中缺陷总数不超过6个时接收此批产品,否则拒收。根据经验已知此种玻璃瓶的缺陷个数近似服从参数$\lambda=0.1$的泊松分布,求这批产品被拒收的概率。

解：设X_i表示第i个玻璃瓶上的缺陷个数，则$X_i \sim P(0.1), i=1,2,\cdots,30$，且可以认为$X_1,\cdots,X_{30}$相互独立。

记$X=\sum_{i=1}^{30} X_i$，则由可加性知，$X \sim P(3)$。

因此，拒收此批产品的概率为

$$P(X \geq 7)=1-P(X<7)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{6} \frac{3^k}{k!} e^{-3}$$

$$\approx 0.0335,$$

即具有这种质量的一批产品约有3.35%的概率将被拒收。

91页例4-20

例$4-20$：设$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$X$与$Y$相互独立，则

$$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)。$$

即正态分布具有可加性。

证明: 令$Z = X + Y$,

且X, Y独立，由卷积公式

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z - x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[u^2+\frac{(v-\sigma_1 u)^2}{\sigma_2^2}\right]}du$$

其中令 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=z-\left(\mu_1+\mu_2\right), dx=\sigma_1 du$

又

$$u^2+\frac{(v-\sigma_1 u)^2}{\sigma_2^2}=\frac{1}{\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2 u^2+(v-\sigma_1 u)^2\right)$$

$$=\frac{1}{\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2 u^2+v^2-2\sigma_1 vu+\sigma_1^2 u^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_2^2}\left((\sigma_1^2+\sigma_2^2)u^2 - 2\sigma_1 vu + v^2\right)$$

$$= \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sigma_2^2}\left(u^2 - \frac{2\sigma_1 vu}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} + \frac{v^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)$$

$$= \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sigma_2^2}\left(\left(u - \frac{\sigma_1 v}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)^2 - \frac{\sigma_1^2 v^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} + \frac{v^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)$$

$$= \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sigma_2^2}\left(\left(u - \frac{\sigma_1 v}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)^2 + \frac{\sigma_2^2 v^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right)$$

$$p_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[u^2 + \frac{(v-\sigma_1 u)^2}{\sigma_2^2}\right]} du$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_2^2}\left[\left(u-\frac{\sigma_1 v}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{\sigma_2^2 v^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right]} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{v^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_2^2}\left(u-\frac{\sigma_1 v}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2} du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{v^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{\left[z-\left(\mu_1+\mu_2\right)\right]^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}},$$

所以，$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

注：$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}dx$$

$=Ae^{-(az^2+bz+c)}$,密度函数是这种类型就说明Z是正态分布了。

由归纳法立即可得以下推广。

推广：若$X_1,\cdots,X_n$相互独立，且

$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)。$$

推论1 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ ，$i=1,2,\cdots,n$ ，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)。$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$不全为0 。

注： $a_i X_i \sim N\left(a_i\mu_i, a_i^2\sigma_i^2\right), i=1,2,\cdots,n,$

$a_1X_1,\cdots,a_nX_n$独立，再由可加性即得。

在推论1中，令 $a_i = \frac{1}{n}, i = 1,2,\cdots,n,$ 可得以下推论2 。

推论2 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，$i = 1,2,\cdots,n$ ，则

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)。$$

注：独立同分布。

92页例4-21

例$4-21$:水泥厂生产的袋装水泥的重量服从正态分布$N(50,4)$(单位:千克)。

(1) 任取一袋水泥,求重量大于48千克且小于52千克的概率;

(2) 任抽3袋水泥,求至少有一袋的重量大于48千克且小于52千克的概率;

(3) 任抽4袋水泥,其平均重量大于48千克且小于52千克的概率为多少?

解：设X表示袋装水泥的重量，则

$X \sim N(50, 4)$。

(1) 所求的概率为

$$p_1 = P(48 < X < 52)$$

$$= \Phi\left(\frac{52-50}{2}\right) - \Phi\left(\frac{48-50}{2}\right)$$

$$= 2\Phi(1) - 1 \approx 0.683,$$

(2) 设Y表示所抽3袋水泥中重量在

$48 \sim 52$千克之间的袋数,

$Y \sim B(3, p_1)$,则所求概率为

$$p_2 = P(Y \geq 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} C_3^i p_1^i (1 - p_1)^{3-i}$$

$$= 1 - (1 - p_1)^3 \approx 0.968,$$

(3) $\bar{X}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i \sim N(50,1)$，其中$X_1,\cdots,X_4$

相互独立，且$X_i \sim N(50,4), i=1,2,3,4$。

则所求概率为

$$p_3=P(48<\bar{X}<52)$$

$$=\Phi\left(\frac{52-50}{1}\right)-\Phi\left(\frac{48-50}{1}\right)$$

$$=2\Phi(2)-1\approx 0.9546。$$

习题

25.设X和Y为两个随机变量,且$P(X \geq 0, Y \geq 0) = \dfrac{3}{7}$,

$P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \dfrac{4}{7}$,求$P(\max\{X, Y\} \geq 0)$。

解:

$$P(\max\{X, Y\} \geq 0) = 1 - P(\max\{X, Y\} < 0)$$

$$= 1 - P(X < 0, Y < 0)$$

$$= P\left(\overline{X < 0, Y < 0}\right) = P\left(\overline{\{X < 0\}} \cup \overline{\{Y < 0\}}\right)$$

$$=P\left(\{X\geq 0\}\bigcup\{Y\geq 0\}\right)$$

$$=P(X\geq 0)+P(Y\geq 0)-P(X\geq 0,Y\geq 0)$$

$$=\frac{5}{7}。$$

26.设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x\ge 0, y\ge 0 \\ 0, otherwise \end{cases},求$$

(1) $Z=\dfrac{X+Y}{2}$的密度函数;

(2) $U=\max\{X,Y\}$和$V=\min\{X,Y\}$的密度函数。

解: (1) $U=X+Y,$

$$u\le 0, p_U(u)=0,$$

$$u>0, p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,u-x)dx$$

$$x > 0, u - x > 0,$$

$$p_U(u) = \int_0^u e^{-(x+(u-x))} dx = ue^{-u}$$

$$p_U(u) = \begin{cases} ue^{-u}, u > 0 \\ 0, u \le 0 \end{cases},$$

$$Z = \frac{U}{2},$$

$$z = \frac{u}{2} = f(u), u = 2z = h(z),$$

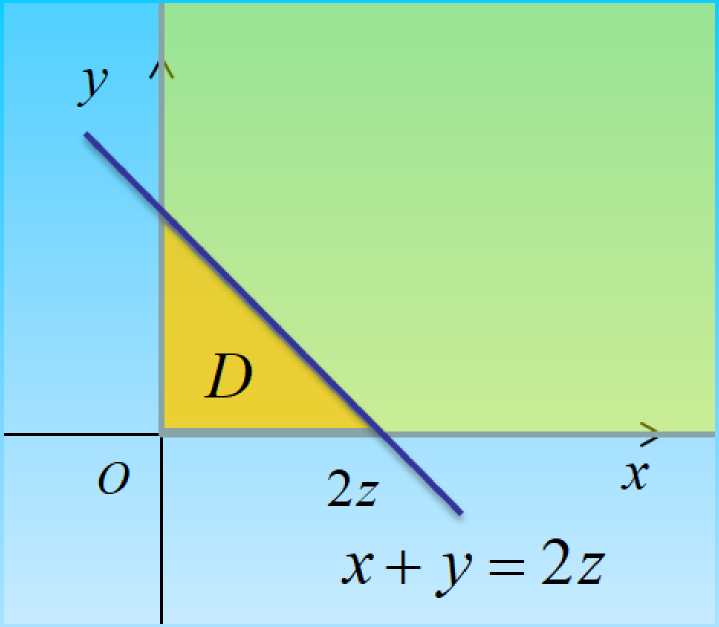
$$p_Z(z) = p_U(h(z))\left|h'(z)\right|$$

$$= \begin{cases} 2ze^{-2z} \times 2, 2z > 0 \\ 0, 2z \le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4ze^{-2z}, z > 0 \\ 0, z \le 0 \end{cases} \text{。}$$

另解:

$$z \le 0, F_Z(z) = 0,$$



$$z > 0, F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(\frac{X+Y}{2} \le z\right)$$

$$= \iint_D e^{-(x+y)} dxdy = \int_0^{2z} dx \int_0^{2z-x} e^{-(x+y)} dy$$

$$= \int_0^{2z} e^{-x} dx \int_0^{2z-x} e^{-y} dy$$

$$= \int_0^{2z} (1 - e^{-2z+x}) e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{2z} e^{-x} dx - 2ze^{-2z}$$

$$= 1 - e^{-2z} - 2ze^{-2z},$$

$$z > 0, \; p_Z(z) = F_Z'(z)$$

$$= -e^{-2z}(-2) - \left(2ze^{-2z}(-2) + 2e^{-2z}\right) = 4ze^{-2z}$$

$$p_Z(z) = \begin{cases} 4ze^{-2z}, z > 0 \\ 0, z \le 0 \end{cases},$$

推荐解: $Z = \dfrac{X+Y}{2}, Y = 2Z - X$

$$z \le 0, p_z(z) = 0,$$

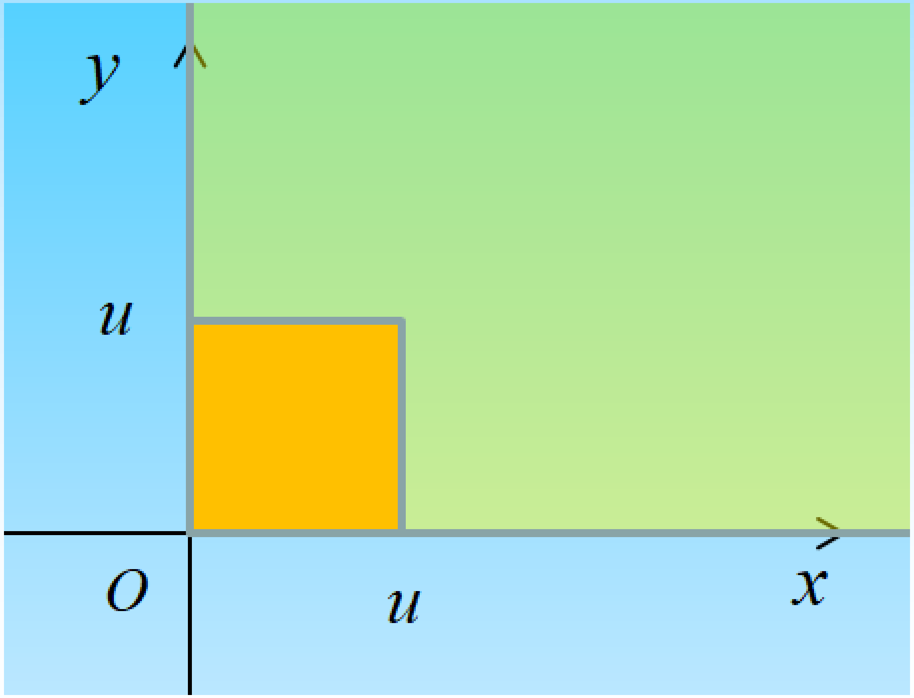
$$z > 0, p_z(z) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, 2z - x)dx = 2\int_0^{2z} e^{-(x+(2z-x))}dx = 4ze^{-2z}$$

这里：$x > 0, 2z - x > 0 \Rightarrow 0 < x < 2z$

(2) $u<0, F_U(u)=0,$

$$u \geq 0, F_U(u)=P(U \leq u)=P(\max\{X, Y\} \leq u)$$

$$=P(X \leq u, Y \leq u)$$



$$= \int_0^u dx \int_0^u e^{-(x+y)} dy$$

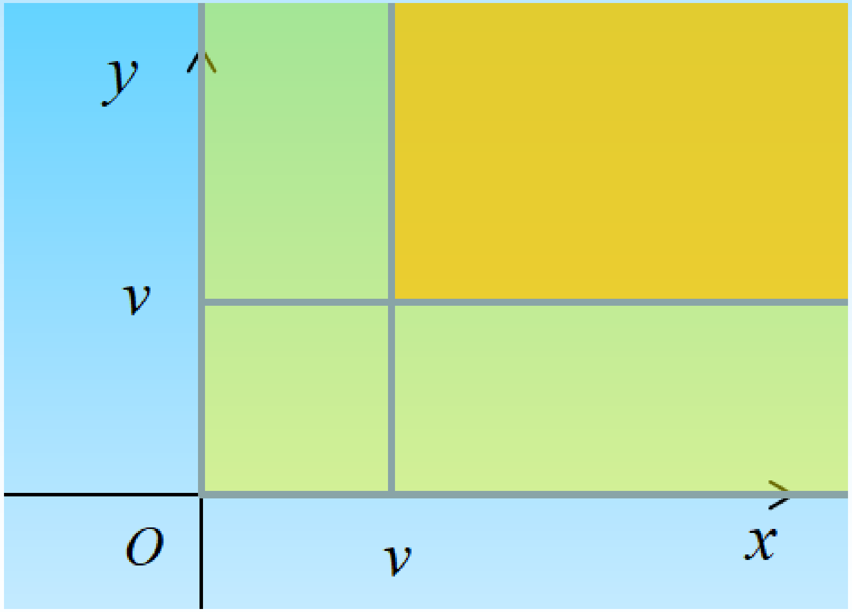
$$= (1 - e^{-u}) \int_0^u e^{-x} dx = (1 - e^{-u})^2$$

$$p_U(u) = F_U'(u) = \begin{cases} 2(e^{-u} - e^{-2u}), u > 0 \\ 0, u \le 0 \end{cases}$$ 。

$$v < 0, F_V(v) = 0,$$

$$v \geq 0, F_V(v) = P(V \leq v) = P(\min\{X, Y\} \leq v)$$

$$= 1 - P(\min\{X, Y\} > v)$$



$$=1-P(X>v,Y>v)$$

$$=1-\int_{v}^{+\infty}dx\int_{v}^{+\infty}e^{-(x+y)}dy$$

$$=1-e^{-v}\int_{v}^{+\infty}e^{-x}dx$$

$$=1-e^{-2v},$$

$$p_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}2e^{-2v},v>0\\0,v\le 0\end{cases}$$ 。

27.设随机变量X和Y相互独立,且

$$p_X(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1\\ 0, 其他\end{cases},$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}2y, 0\le y\le 1\\ 0, 其他\end{cases},$$

求$Z=X+Y$的密度函数$p_Z(z)$。

解： X和Y独立,

$$0<z<2, p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

$$0<x<1, 0<z-x<1,$$

$$0<x<1, z-1<x<z,$$

$$(1)0<z<1, 0<x<z,$$

$$(2)1\le z<2, z-1<x<1,$$

(1)

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

$$=\int_0^z 1\times 2(z-x)dx$$

$$=z^2;$$

(2)

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

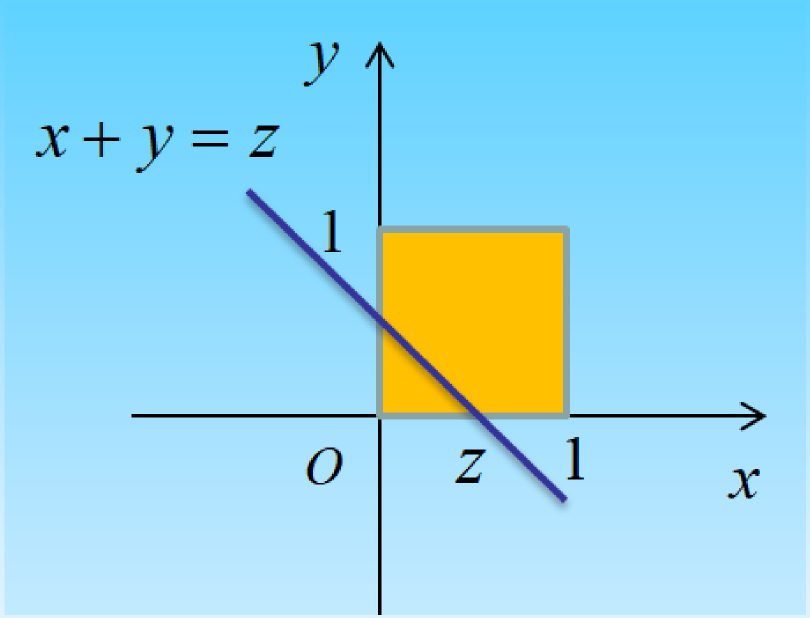
$$=\int_{z-1}^{1}1\times 2(z-x)dx$$

$$= 2z - z^2 \ ;$$

$$p_Z(z) = \begin{cases} z^2, 0 < z < 1 \\ 2z - z^2, 1 \le z < 2 \\ 0, otherwise \end{cases}$$ 。

另解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

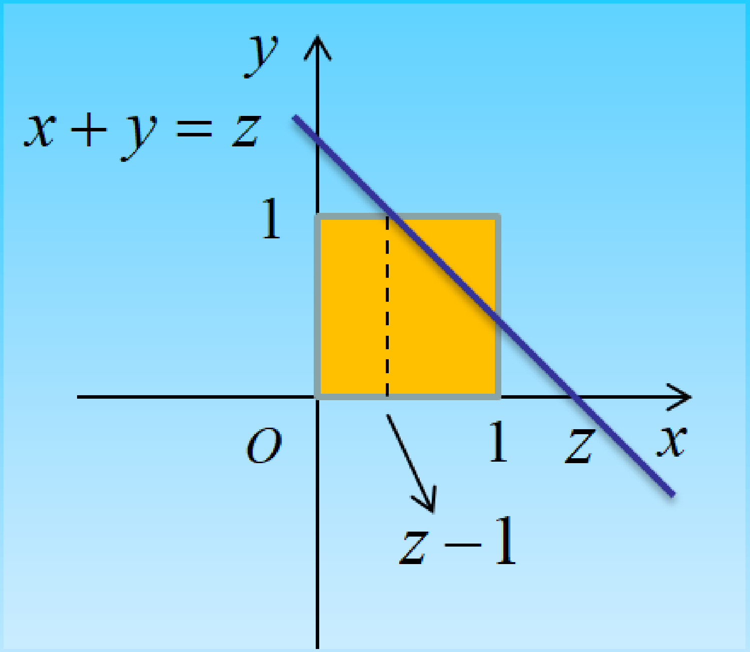
(1)



$$0<z<1, F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x} 1\times 2y dy$$

$$=-\frac{(z-x)^3}{3}\Big|_0^z=\frac{z^3}{3};$$

(2)



$$1 \le z < 2, F_Z(z) = \int_0^{z-1} dx \int_0^1 1 \times 2y dy + \int_{z-1}^1 dx \int_0^{z-x} 1 \times 2y dy$$

$$= (z-1) - \frac{(z-x)^3}{3}\Big|_{z-1}^{1}$$

$$= z - \frac{2}{3} - \frac{(z-1)^3}{3};$$

$$z \le 0, F_Z(z) = 0, z \ge 2, F_Z(z) = 1,$$

$$p_Z(z) = F_Z'(z)$$

$$p_Z(z) = \begin{cases} z^2, 0 < z < 1 \\ 2z - z^2, 1 \le z < 2 \text{。} \\ 0, otherwise \end{cases}$$