第十章 曲线积分与曲面积分

10.1 对弧长的曲线积分

10.1.1 对弧长的曲线积分定义

曲线形构件的质量

设某曲线形构件所占的位置为 xOy 面上的一段曲线弧 L, 它的两个端点是 A, B, 并设构件的线密度为 $\rho(x,y)$ $((x,y) \in L)$, 求此构件的质量.

该构件的质量为

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

定义 1.1 (对弧长的曲线积分的定义). 设 L 是 xOy 面上以 A, B 为端点的光滑 (或逐段光滑) 曲线, 函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界. 在 L 上任意插入一个点列 $A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n = B$, 把 L 分成 n 个小弧段. 设第 i 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的长度为 Δs_i, (ξ_i, η_i) 为在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的一点 $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

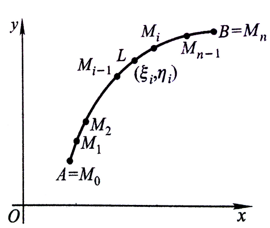
记 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta s_i\}$, 若当 $\lambda \to 0$ 时, 这和的极限存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分, 记作 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$, 即

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 称为被积表达式, L 称为积分弧, $\mathrm{d}s$ 称为弧长微元. 当 L 是光滑 (或逐段光滑) 封闭曲线时, 记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$. 对弧长的曲线积分也常称为第一类曲线积分.

曲线形构件的质量可表示为

$$M = \int_L \rho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$



当被积函数为常数 1 时, $\int_L \mathrm{d}s$ 等于L 的长度.

若函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上连续, 则对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在. 以后我们总是假设 $f(x,y)$ 在 L 上连续.

若三元函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 L 上光滑 (或逐段光滑), 也可类似定义 $f(x,y,z)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$.

10.1.2 对弧长曲线积分的性质

以二元函数为例给出对弧长曲线积分的性质.

性质 1.1 (线性性). 对任意的常数 α,β, 有

$$\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,\mathrm{d}s = \alpha\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s + \beta\int_L g(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

性质 1.2 (可加性). 若 L_1 和 L_2 是两段相连接的光滑曲线, 则

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

性质 1.3. 设在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$, 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \le \int_L g(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

特别地, 有

$$\left|\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s.$$

10.1.3 对弧长曲线积分的计算

定理 1.4. 设有光滑曲线

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad t\in[\alpha,\beta],$$

函数 $f(x,y)$ 为定义在 L 上的连续函数, 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

当曲线 L 由方程

$$y=\psi(x), \quad x\in[a,b]$$

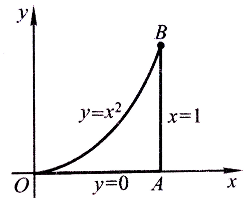
表示, 且 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数时,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

当曲线 L 由方程

$$x=\varphi(y), \quad y\in[c,d]$$

上海财经大学数学学院



表示，且 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上有连续的导函数时，

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_c^d f(\varphi(y),y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y.$$

例 1.1. 设 L 是半圆周

$$L:\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi,$$

试计算曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$.

解:

$$\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi a^2\sqrt{a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,\mathrm{d}t = a^3\pi.$$

例 1.2. 计算 $\oint_L (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为圆周: $x = a\sin t, y = a\cos t, 0 \le t \le 2\pi$.

解:

$$\oint_L (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s = a\int_0^{2\pi}[(a\sin t)^2+(a\cos t)^2]^n\,\mathrm{d}t = a\int_0^{2\pi} a^{2n}\,\mathrm{d}t = 2\pi a^{2n+1}.$$

例 1.3. 计算 $\oint_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: L 由线段 $\overline{OA}, \overline{AB}$ 和抛物线弧段 $\overset{\frown}{OB}$ 组成, 记作 $L = \overline{OA}+\overline{AB}+\overset{\frown}{OB}$, 方程分别为

$$\overline{OA}: y = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\overline{AB}: x = 1, \quad 0 \le y \le 1,$$

$$\overset{\frown}{OB}: y = x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

$$\int_{\overline{OA}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_{\overline{OA}} 0\,\mathrm{d}s = 0,$$

$$\int_{\overline{AB}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+0}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3},$$

$$\int_{\overset{\frown}{OB}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{x^2}\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

因此

$$\oint_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = 0+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1) = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}+7).$$

上海财经大学数学院

对弧长的空间曲线积分的计算法

设空间光滑曲线 L 由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)\quad(\alpha\le t\le\beta)$$

给出, 且 $f(x,y,z)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

例 1.4. 计算 $\int_L(x+2y+3z)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为连接 $A(1,1,0)$ 与 $B(3,3,4)$ 的线段.

解: 直线段的方向向量为$(2,2,4)$, 故该线段的参数方程为

$$x=1+2t,\quad y=1+2t,\quad z=4t,\quad 0\le t\le 1.$$

由此得到曲线积分为

$$\int_L(x+2y+3z)\,\mathrm{d}s=\int_0^1(3+18t)\sqrt{24}\,\mathrm{d}t=24\sqrt{6}.$$

例 1.5. 计算 $\int_L\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$,$z=e^t$ 上相应于 $0\le t\le 2$ 的一段弧.

解:

$$\begin{aligned}\int_L\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s&=\int_0^2\frac{1}{e^{2t}(\cos^2t+\sin^2t+1)}\sqrt{3e^{2t}}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^2\frac{\sqrt3}{2}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt3}{2}(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

利用对称性简化对弧长曲线积分的计算

设平面曲线 L 关于 x 轴对称, 且位于上半平面的部分曲线为 L_0,

(1) 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数, 则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=0$;

(2) 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数, 则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=2\int_{L_0}f(x,y)\,\mathrm{d}s$.

设空间曲线 L 关于 xOy 平面对称, 且位于 xOy 面上半部分曲线为 L_0,

(1) 若被积函数 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数, 则 $\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=0$;

(2) 若被积函数 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数, 则 $\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=2\int_{L_0}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$.

例 1.6. 计算曲线积分 $\int_L(x^3+y^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 $L:x^2+y^2=R^2$.

解: 因为 L 关于 y 轴对称, 而 x^3 是 x 的奇函数, 故

$$\int_L (x^3+y^2)\,\mathrm{d}s = \int_L y^2\,\mathrm{d}s.$$

因为 L 关于变量 x 和 y 具有轮换对称性, 则有 $\int_L y^2\,\mathrm{d}s = \int_L x^2\,\mathrm{d}s$. 从而

$$\int_L (x^3+y^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L R^2\,\mathrm{d}s = \pi R^3.$$

例 1.7. 计算 $\int_L x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周.

解: 由对称性知,

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \int_L y^2\,\mathrm{d}s = \int_L z^2\,\mathrm{d}s,$$

所以

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_L \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

10.1.4 思考与练习

练习 254. 计算 $\int_L \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$, 其中

$$L:\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

解:

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t, \quad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,$$
$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = 3a\sin t\cos t.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_L \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s =& 3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t+\sin^4 t)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \\ =& 6a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos t\,\mathrm{d}t = a^{\frac{7}{3}}.\end{aligned}$$

练习 255. 计算 $\int_L \sqrt{a^2-x^2-y^2}ds$, 其中 L 为上半圆弧 $x^2+y^2=ax, y\ge 0$.

解: L 的极坐标方程为 $\rho = a\cos\varphi\left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$, 从而以 φ 为参数可得 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^2\varphi, \\ y = a\cos\varphi\sin\varphi \end{cases} \quad (0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}).$$

于是

$$\begin{aligned}\int_L \sqrt{a^2-x^2-y^2}ds =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\sin\varphi|\sqrt{(-a\sin 2\varphi)^2+(a\cos 2\varphi)^2}d\varphi \\ =& a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = a^2.\end{aligned}$$

练习 256. 设 L 是 $y^2 = 4x$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,2)$ 的一段, 试计算第一型曲线积分 $\int_L y\,\mathrm{d}s$.

解:

$$\int_L y\,\mathrm{d}s = \int_0^2 y\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

黄学海
上海财经大学数学学院