2016－2017年第二学期

概率论试卷

杨勇制作

一. 填空题（$2' \times 15 = 30'$）

1.设$P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A \cup B)=0.7,$
则$P(A\overline{B})=$ ______________。

解：$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)$

$=0.2,$

$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

$=0.3$。

2.设随机变量X在(1, 6)上服从均匀分布,则关于 y 的方程$y^2 - Xy + 1 = 0$无实根的概率为

________________。

解：$\Delta = (-X)^2 - 4 < 0,$

$-2 < X < 2,$

$P(-2 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5}$。

3.设随机变量的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} Ke^{-3x}, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases},$$

则常数$K=$______________, X的分布函数为

$F(x)=$____________________。

解：

$$1=\int_0^{+\infty} Ke^{-3x}dx=\frac{-K}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty}, K=3,$$

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x 3e^{-3t}dt, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-3x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$ 。

4.设X的密度函数为$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, 0<x<4\\ 0, 其它\end{cases}$,

则$Y=2X+8$的密度函数$p_Y(y)=$__________。

解:

$$y=2x+8=f(x), 严格单调,$$

$$x=\frac{y-8}{2}=h(y),$$

$$p_Y(y) = p_X(h(y))\left|h'(y)\right|$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(y-8)/2}{8} \times \dfrac{1}{2}, 0 < \dfrac{y-8}{2} < 4 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, 8 < y < 16 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$ 。

5.设随机变量X与Y相互独立,且X和Y都服从正态分布$N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,则随机变量$Z=X-Y$的密度函数$p_Z(z)=$______________,

$E(|X-Y|)=$______________。

解: $Z=X-Y\sim N(0,1)$,

$$p_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},$$

$$E\left(\left|X-Y\right|\right)=E\left|Z\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|z\right|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{0}^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\quad。$$

6.设随机变量X_1, X_2, X_3相互独立，其中

$X_1 \sim U[0,6], X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim P(3)$，记

$Y = X_1 - 2X_2 + 4X_3$，

$E(X_1X_2X_3) =$ ____________，$DY =$ ____________。

解：

$$EX_1 = 3, DX_1 = 3, \quad EX_2 = 0, DX_2 = 4,$$

$$EX_3 = 3, DX_3 = 3,$$

$$E(X_1X_2X_3) = EX_1EX_2EX_3 = 0,$$

$$DY = DX_1 + 4DX_2 + 16DX_3 = 67\text{。}$$

7.设二维随机向量(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.4	0.1
1	0.2	0.2	0

则$Z=\max\{X,Y\}$的概率分布为____________,

$P(X=1|Y<2)=$____________。

解:

Z Y X	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2

Z	0	1	2
p	0.1	0.8	0.1

$$P(X=1 \mid Y<2)=\frac{P(X=1, Y<2)}{P(Y<2)}$$

$$=\frac{0.4}{0.9}=\frac{4}{9}\text{。}$$

8.设随机变量X和Y的相关系数为0.5,

$EX = EY = 0, E(X^2) = E(Y^2) = 2,$

则$E(X+Y)^2 =$ ____________。

解： $$DX = DY = 2, \rho_{XY} = 0.5,$$

$$Cov(X,Y) = \rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 1,$$

$$E(X+Y)^2 = D(X+Y) + \left(E(X+Y)\right)^2 = D(X+Y)$$

$$= DX + DY + 2Cov(X,Y) = 6。$$

9.已知随机变量X服从$B(n,p)$, $EX=4$, $DX=3.6$,则$n=$ ________, $p=$ __________。

解: $$EX=np=4, DX=npq=3.6,$$

$$q=1-p=0.9, p=0.1,$$

$$n=40。$$

10.设$EX=-2, EY=2, DX=1, DY=4,$
$\rho_{XY}=-0.5,$则根据切比雪夫不等式有
$P\left(|X+Y|\geq 6\right)\leq$ ________________。

解:　　设$Z=X+Y,$

$$EZ=E(X+Y)=EX+EY=0, Cov(X,Y)=-1,$$

$$DZ=D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)=3,$$

$$P\left(|X+Y|\geq 6\right)=P\left(|Z-EZ|\geq 6\right)\leq \frac{DZ}{6^2}=\frac{1}{12}。$$

二. 选择题（$2' \times 5 = 10'$）

1.设X为连续型随机变量, $p(x)$是其密度函数,a为任意实数,则下列结论错误的是

________________。

$(A)\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1, (B)P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)dx,$

$(C)P(X = a) = 0, (D)0 \leq p(x) \leq 1$。

解:　　(D)

2.设A, B, C是任意三个事件,则下列选项正确的是______________。

(A)若$A \cup C = B \cup C$,则$A = B$,

(B)若$A - C = B - C$,则$A = B$,

(C)若$AB = \varnothing$且$\bar{A}\bar{B} = \varnothing$,则$\bar{A} = B$,

(D)若$AC = BC$,则$A = B$。

解: $\overline{\bar{A}\bar{B}} = \Omega, A \cup B = \Omega$, 又$AB = \varnothing$,则$A + B = \Omega$,

$B = \bar{A}$。 (C)

3.设随机变量X和Y的联合分布函数为$F(x,y)$，而$F_1(x)$和$F_2(x)$分别为X和Y的分布函数，则对任意a,b，概率$P(X>a,Y>b)=$______________。

$(A)1-F(a,b)$，$(B)F(a,b)+1-\left[F_1(a)+F_2(b)\right]$，

$(C)1-F_1(a)+F_2(b)$，$(D)F(a,b)-1+\left[F_1(a)+F_2(b)\right]$。

解：$P(X>a,Y>b)=P(a<X<+\infty,b<Y<+\infty)$

$$=F(+\infty,+\infty)-F(a,+\infty)-F(+\infty,b)+F(a,b)$$

$$=1-F_1(a)-F_2(b)+F(a,b)。$$

(B)

4.设随机变量X和Y独立同分布，记$U = X + Y$, $V = X - Y$，则U与V ______________。

(A)不独立，(B)独立，$(C)\ \rho_{UV} = 0$，$(D)\ \rho_{UV} \neq 0$。

解：

$$Cov(U,V) = Cov(X+Y, X-Y)$$

$$= Cov(X, X-Y) + Cov(Y, X-Y)$$

$$= Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y)$$

$$= DX - DY = 0, \quad \rho_{UV} = 0。$$

(C)

5.设随机变量$X_i(i=1,2,\cdots)$相互独立,具有同一分布,$EX_i=0, DX_i=\sigma^2, i=1,2,\cdots$,则当$n$很大时,$\sum_{i=1}^{n} X_i$的近似分布是____________。

$(A) N(0, n\sigma^2)$, $(B) N(0, \sigma^2)$,

$(C) N\left(0, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, $(D) N\left(0, \dfrac{\sigma^2}{n^2}\right)$。

解: 由中心极限定理知, (A)

三. 分析判断题（$5'\times 2=10'$）

1.设事件A, B, C相互独立，则事件$A-B$与事件C也相互独立。

解：　　正确

$$P((A-B)C)=P(A\overline{B}C)=P(AC\overline{B})$$

$$=P(AC-ABC)=P(AC)-P(ABC)$$

$$=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$= P(C)(P(A) - P(AB))$$

$$= P(C)P(A - AB) = P(A - B)P(C),$$

$A - B$与C独立。

2.设离散型随机变量X的概率分布为

$$P\left(X=(-1)^k\frac{2^k}{k}\right)=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots,$$

则X的数学期望为1。

解: 错。 $\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k\frac{2^k}{k}\right|\times\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$,发散,

数学期望不存在。

四. 计算题（$10' \times 5 = 50'$）

1.设甲口袋有a只黑球和b只白球,乙口袋有n只黑球和m只白球。现从甲口袋任取1只球放入乙口袋,然后再从乙口袋任取1只球。试求:（1）最后从乙口袋取出的是黑球的概率;（2）已知最后从口袋取出的是黑球,先前从甲口袋放入乙口袋的球是黑球的概率。

解:

$A=$ "甲口袋中取出黑球放入乙口袋",

$B=$ "甲口袋中取出白球放入乙口袋",

$C=$ "最后从乙口袋取出的是黑球",

(1) 由全概率公式知,

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$=\frac{a}{a+b}\times\frac{n+1}{m+n+1}+\frac{b}{a+b}\times\frac{n}{m+n+1}$$

$$=\frac{a(n+1)+bn}{(a+b)(m+n+1)},$$

(2) 由贝叶斯公式知,

$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)}$$

$$=\frac{\frac{a}{a+b}\times\frac{n+1}{m+n+1}}{\frac{a}{a+b}\times\frac{n+1}{m+n+1}+\frac{b}{a+b}\times\frac{n}{m+n+1}}$$

$$=\frac{a(n+1)}{a(n+1)+bn}\text{。}$$

2.设随机变量ξ与η相互独立,服从相同分布$N(\mu,\sigma^2)$。令$X=\alpha\xi+\beta\eta, Y=\alpha\xi-\beta\eta$,其中$\alpha,\beta$为常数,求$X$与$Y$的相关系数$\rho_{XY}$。

解:

$$DX=\alpha^2\sigma^2+\beta^2\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,$$

$$DY=\alpha^2\sigma^2+\beta^2\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,$$

$$Cov(X,Y)=Cov(\alpha\xi+\beta\eta,\alpha\xi-\beta\eta)$$

$$=Cov(\alpha\xi,\alpha\xi-\beta\eta)+Cov(\beta\eta,\alpha\xi-\beta\eta)$$

$$= \alpha^2 Cov(\xi, \xi) - \alpha\beta Cov(\xi, \eta) + \alpha\beta Cov(\eta, \xi) - \beta^2 Cov(\eta, \eta)$$

$$= \alpha^2 D\xi - \beta^2 D\eta = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2,$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}。$$

3. 汽车加油站共有两个加油窗口，现有三辆车A, B, C同时进入该加油站，假设A, B首先开始加油，当其中一辆加油结束后立即开始第三辆车C加油。假设各辆车所需时间是相互独立且都服从参数为λ的指数分布。(1) 求第三辆车C在加油站等候加油时间T的密度函数；(2) 求第三辆车C在加油站度过时间S的密度函数。

解:三辆车所需时间分别用X,Y,Z表示。

$X,Y,Z \sim Exp(\lambda), X,Y,Z$相互独立,

(1) $T=\min\{X,Y\},$

$$F_T(t)=P(T\le t)=P(\min\{X,Y\}\le t),$$

$$t\le 0, F_T(t)=0,$$

$$t>0, F_T(t)=1-P(\min\{X,Y\}>t)$$

$$=1-P(X>t,Y>t)$$

$$=1-P(X>t)P(Y>t)$$

$$=1-e^{-2\lambda t},$$

$$t>0,\ p_T(t)=F_T'(t)=2\lambda e^{-2\lambda t},$$

$$p_T(t)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda t}, t>0\\ 0, t\le 0\end{cases};$$

(2) $S = T + Z$,

$s > 0$,

$$p_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t) p_Z(s-t) dt$$

$$= \int_0^s 2\lambda e^{-2\lambda t} \lambda e^{-\lambda(s-t)} dt,$$

其中$t > 0, s - t > 0$,即$0 < t < s$,

所以,

$$p_S(s) = 2\lambda^2 e^{-\lambda s} \int_0^s e^{-\lambda t} dt$$

$$= -2\lambda e^{-\lambda s} \left(e^{-\lambda t} \Big|_0^s \right)$$

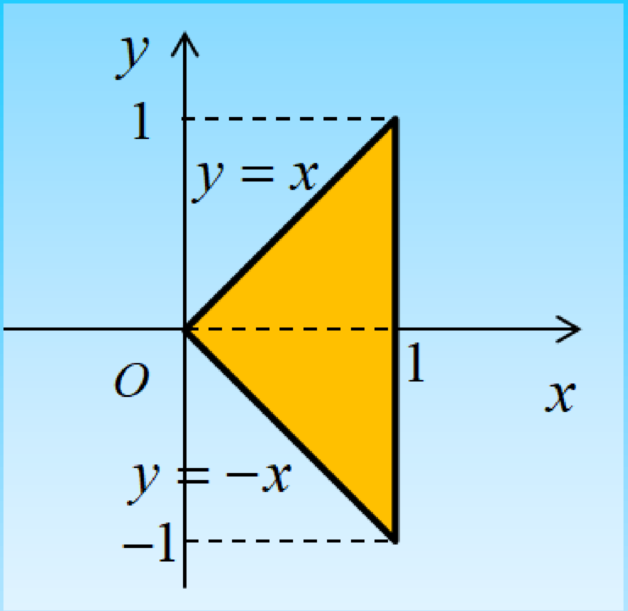
$$= 2\lambda e^{-\lambda s} \left(1 - e^{-\lambda s} \right),$$

$$p_S(s) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda s} \left(1 - e^{-\lambda s} \right), s > 0 \\ 0, s \leq 0 \end{cases}$$ 。

4.设二维随机向量(X,Y)在区域D上服从二维均匀分布,其中D为$y=x, y+x=0, x=1$围成,试求:(1)(X,Y)的联合密度函数;(2)X和Y的边际密度函数,并讨论X和Y是否独立;(3)数学期望$E(XY)$的值。

解:

(1)



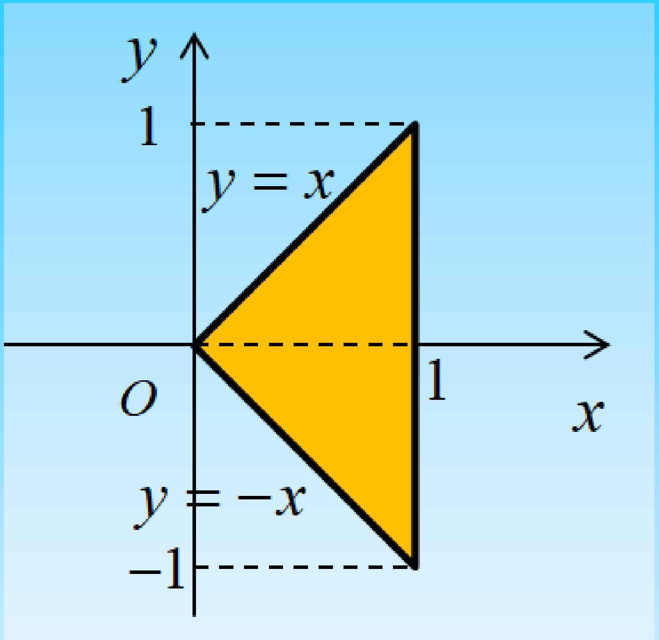
$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, |y|<x\\ 0, & 其它\end{cases},$$

(2)

$0 < x < 1,$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$$

$$= \int_{-x}^{x} 1dy = 2x,$$



$$p_X(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, 其它 \end{cases},$$

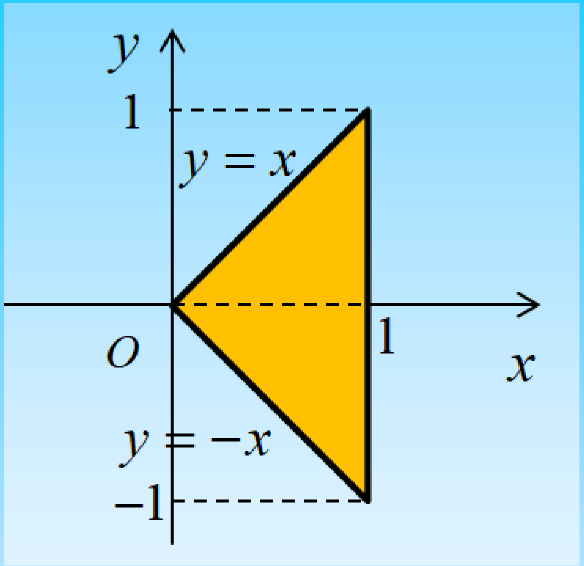
$$-1 < y \leq 0,$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$$

$$= \int_{-y}^{1} dx = 1 + y,$$

$$0 < y < 1,$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx = \int_{y}^{1} dx = 1 - y,$$



$$p_Y(y)=\begin{cases}1+y, -1<y\le 0\\ 1-y, 0<y<1\\ 0, 其它\end{cases},$$

在区域D中,

$$p(x,y)\not\equiv p_X(x)p_Y(y),$$

所以, X和Y不独立;

(3)

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{D} xydxdy$$

$$= \int_{0}^{1} dx \int_{-x}^{x} xydy$$

$$= 0\text{。}$$

5.计算机在进行加法时,对每个加数取整(取为最接近于它的整数)。设所有的取整误差是相互独立的,且它们都在(-0. 5, 0. 5)上服从均匀分布。问:

(1)若将1500个数相加,误差总和的绝对值超过15的概率是多少?

(2)多少个数相加,可使误差总和的绝对值小于10的概率为0.9?

解： (1)

X_k表示第k个数的取整误差,

$k=1,2,\cdots,1500,$

$X_k \sim U(-0.5,0.5)$, 且$X_1,\cdots X_{1500}$独立,

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{1500} X_k\right|>15\right)=1-P\left(\left|\sum_{k=1}^{1500} X_k\right|<15\right)$$

$$=1-P\left(-15<\sum_{k=1}^{1500}X_k<15\right)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{15-1500\times 0}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}}\right)+\Phi\left(\frac{-15-1500\times 0}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}}\right)$$

$$=2-2\Phi\left(1.3416\right)=0.1802;$$

(2)

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < 10\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 = 0.9,$$

$$\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)=0.95,$$

$$\frac{10}{\sqrt{n/12}}=1.645, n=443.45,$$

$$n=443。$$

结束