10.2 对坐标的曲线积分

10.2.1 对坐标的曲线积分的概念

有向曲线

一条曲线通常有两个相反的走向, 如果指定了其中的一个走向作为曲线的“方向”, 则此曲线称为有向曲线.

对单位圆 $C: x = \cos t, y = \sin t$, 若规定其方向为逆时针方向, 则 C 就成为一条有向曲线.

对非封闭曲线弧 L, 如果规定它的两个端点中的一个 (记作 A) 为起点, 另一个 (记作 B) 为终点, 此时有向曲线 L 为 $\widehat{AB}$.

在讨论有向曲线时, $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{BA}$ 是两条不同的有向曲线.

对有向光滑曲线弧 L, 规定 L 上任一点 (x,y) 处的切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的指向与 L 的方向相一致.

变力沿曲线的做功问题

设在 xOy 面上一个质点在变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 的作用下, 从点 A 沿光滑曲线 L 移动到 B, 已知

$$\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j},$$

其中函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 L 上连续. 计算质点在移动过程中变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 所做的功.

如果力$\boldsymbol{F}$ 是常力, 且质点沿直线从 A 移动到 B, 则常力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功等于向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的数量积, 即

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

变力 $\boldsymbol{F}$ 沿有向曲线 L 所做的功为

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

定义 2.1 (对坐标的平面曲线积分的定义). 设 L 是 xOy 面上从点 A 到点 B 的一条光滑的有向曲线弧, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 L 上有界. 沿 L 的方向依次取分点 $A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B$, 把 L 分成 n 个有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}(i = 1,2,\cdots,n)$, 设 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i\boldsymbol{i} + \Delta y_i\boldsymbol{j}$, 并记 λ 为所有小弧段长度的最大值. 在 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取一点 (ξ_i,η_i), 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

存在, 则称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向弧段 L 上对坐标 x 的曲线积分, 记作 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x$.

类似地, 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

存在, 则称此极限为函数 $Q(x,y)$ 在有向弧段 L 上对坐标 y 的曲线积分, 记作 $\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y$.

即

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

其中 $P(x,y), Q(x,y)$ 称为被积函数, $P(x,y)\,\mathrm{d}x$ 及 $Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 称为被积表达式, L 称为 (有向) 积分弧.

在应用上经常出现

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

这种合并起来的形式. 为简单起见, 记为

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

由此, 变力沿曲线做的功可写成

$$W = \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

对坐标的曲线积分也常称为 第二类曲线积分.

如果 L 是分段光滑的, 则规定函数在 L 上对坐标的曲线积分等于在光滑的各弧段上对坐标的曲线积分之和.

当 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 L 上连续时, 对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 均存在.

定义 2.2 (对坐标的空间曲线积分的定义). 设 L 是空间中的一条光滑的有向曲线弧, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在曲线 L 上有界. 沿 L 的方向依次取分点 $A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B$, 把 L 分成 n 个有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}(i = 1,2,\cdots,n)$, 设 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i\boldsymbol{i} + \Delta y_i\boldsymbol{j} + \Delta z_i\boldsymbol{k}$, 并记 λ 为所有小弧段长度的最大值. 在 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i), 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

存在, 则称此极限为函数 $P(x,y,z)$ 在有向弧段 L 上对坐标 x 的曲线积分, 记作 $\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x$, 即

$$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i.$$

类似地, 定义函数 $Q(x,y,z)$ 在有向弧段 L 上对坐标 y 的曲线积分

$$\int_L Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

函数 $R(x,y,z)$ 在有向弧段 L 上对坐标 z 的曲线积分

$$\int_L R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

10.2.2 对坐标的曲线积分的性质

性质 2.1 (线性性质). 若 $\int_L P_i\,\mathrm{d}x + Q_i\,\mathrm{d}y$ $(i = 1,2,\cdots,k)$ 存在, 则 $\int_L (\sum\limits_{i=1}^{k} c_iP_i)\,\mathrm{d}x + (\sum\limits_{i=1}^{k} c_iQ_i)\,\mathrm{d}y$ 也存在, 且

$$\int_L (\sum_{i=1}^{k} c_iP_i)\,\mathrm{d}x + (\sum_{i=1}^{k} c_iQ_i)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k} c_i\left(\int_L P_i\,\mathrm{d}x + Q_i\,\mathrm{d}y\right),$$

其中 c_i $(i = 1,2,\cdots,k)$ 为常数.

性质 2.2 (对于有向曲线的可加性). 若有向平面曲线 L 分成 L_1 和 L_2, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

上式可推广到 L 由 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 组成的情形.

若有向空间曲线 L 分成 L_1 和 L_2, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z + \int_{L_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

上式可推广到 L 由 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 组成的情形.

性质 2.3 (方向性). 设 L 为有向平面曲线, $-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线, 则

$$\int_{-L} P(x,y)\,\mathrm{d}x = -\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-L} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

设 L 为有向空间曲线, $-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线, 则

$$\int_{-L} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x = -\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-L} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y = -\int_L Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y,$$

$$\int_{-L} R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = -\int_L R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

10.2.3 对坐标的曲线积分的计算

设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向光滑曲线弧 L 上连续, L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时, 点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 移动到终点 B, 则有

$$\begin{aligned} &\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\ =& \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

在上式右端的定积分中, 下限 α 对应于 L 的起点, 上限 β 对应于 L 的终点, α 未必小于 β.

若 L 由 $y = \varphi(x)$ 给出, 其中 x 由 a 变到 b, 则

$$\begin{aligned} &\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\ =& \int_a^b \{P[x,\varphi(x)] + Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

若 L 由 $x=\psi(y)$ 给出,其中 y 由 c 变到 d,则

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\\=&\int_c^d\{P[\psi(y),y]\psi'(y)+Q[\psi(y),y]\}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对于定义在空间的有向曲线弧 L 上的三元函数,可以类似定义下列三个对坐标的曲线积分

$$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x,\quad \int_L Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y,\quad \int_L R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

并且若空间曲线 L 由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t),\quad t\text{从}\alpha\text{变到}\beta$$

给出,则有

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\\=&\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)\\&\quad+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中下限 α 对应曲线的起点,上限 β 对应曲线终点.

例 2.1. 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$,其中 L 为抛物线 $y^2=x$ 上从点 $A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧.

解: 法一. 将所给曲线积分化为对 x 的定积分来计算. 为此把 L 分为 $\overset{\frown}{AO}$ 和 $\overset{\frown}{OB}$ 两部分,其中

$$\overset{\frown}{AO}: y=-\sqrt{x},\quad x\text{从}1\text{变到}0;$$

$$\overset{\frown}{OB}: y=\sqrt{x},\quad x\text{从}0\text{变到}1.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L xy\,\mathrm{d}x&=\int_{\overset{\frown}{AO}}xy\,\mathrm{d}x+\int_{\overset{\frown}{OB}}xy\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^0 x(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

法二. 将所给曲线积分化为对 y 的定积分来计算. 由于

$$L: x=y^2,\quad y\text{从}-1\text{变到}1,$$

因此

$$\int_L xy\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y^3(y^2)'\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1 y^4\,\mathrm{d}y=\frac{4}{5}.$$

例 2.2. 计算 $\int_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$,其中 L 为

(1) 按逆时针方向绕行的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上半部分;

(2) 从点 $A(a,0)$ 到点 $B(-a,0)$ 的线段.

解:

(1) 取 L 的参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ t从0变到π, 则

$$\int_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}[a\cos t\cdot b\cos t-a\sin t\cdot(-b\sin t)]\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\pi}ab\,\mathrm{d}t=\pi ab.$$

(2) 由于 L 是有向线段 $\overline{AB}: y=0$, x 从 a 变到 $-a$, 因此

$$\int_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\int_a^{-a}(x\cdot 0-0)\,\mathrm{d}x=0.$$

例 2.3. 计算 $\int_L x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x$, 其中 L 为

(1) 抛物线 $y^2=x$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧;

(2) 直线 $y=x$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的线段;

(3) 从点 $O(0,0)$ 沿 x 轴到点 $B(1,0)$, 再由点 $B(1,0)$ 垂直向上到点 $A(1,1)$.

解:

(1)

$$\int_L x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}(y^2)=\int_0^1 3y^2\,\mathrm{d}y=1.$$

(2)

$$\int_L x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x=1.$$

(3)

$$\int_L x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=\int_{OB}x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x+\int_{BA}x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}(0)+0\,\mathrm{d}x+\int_0^1 1\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}(1)=1.$$

尽管积分路径不同, 积分的值仍然有可能相等.

例 2.4. 计算 $\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$ 逆时针方向.

解: L 的参数方程 $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \end{cases}$ t从0变到2π, 则

$$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}[R\cos t\cdot R\cos t-R\sin t\cdot(-R\sin t)]\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=2\pi.$$

例 2.5. 计算 $\int_L 2x\,\mathrm{d}x + 3y\,\mathrm{d}y + 4z\,\mathrm{d}z$, 其中 L 为从点 $A(1,1,2)$ 到点 $B(3,-1,4)$ 的有向线段.

解: 有向线段 $\overline{AB}$ 的参数方程为

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 2 + 2t,$$

t 从 0 变到 1, 因此

$$\begin{aligned}\int_L 2x\,\mathrm{d}x + 3y\,\mathrm{d}y + 4z\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (4 + 8t - 6 + 12t + 16 + 16t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (14 + 36t)\,\mathrm{d}t = 32.\end{aligned}$$

例 2.6. 设一个质点在 $M(x,y)$ 处受到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用, $\boldsymbol{F}$ 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比, $\boldsymbol{F}$ 的方向恒指向原点, 此质点由点 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针方向移动到点 $B(0,b)$, 求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W.

解: $\overrightarrow{OM} = (x,y)$, $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2}$. 由假设有 $\boldsymbol{F} = (-kx,-ky)$, 其中 $k > 0$ 是比例系数. 于是

$$\begin{aligned}W &= \int_{\widehat{AB}} -kx\,\mathrm{d}x - ky\,\mathrm{d}y = -k\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2\cos t\sin t + b^2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{k}{2}(a^2 - b^2).\end{aligned}$$

10.2.4 两类曲线积分的联系

设有向光滑曲线弧 $L = \widehat{AB}$ 上任一点 (x,y) 处的单位切向量 $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (\cos\beta)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{t}$ 的指向与有向曲线 L 的方向相一致, 则有

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s.$$

两类空间曲线积分之间也有类似的关系式:

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 L 上任一点 (x,y,z) 处的切向量的方向余弦. 其向量形式为

$$\int_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{A} = (P,Q,R)$, $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ 称为有向曲线元.

例 2.7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的曲线积分, 其中 L 为曲线 $y = x^2$ 上从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段.

解: 与 L 曲线方向一致的切线向量为 $(1,2x)$, 故

$$(\cos\alpha,\cos\beta)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(1,2x).$$

所以

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s=\int_L\frac{P+2xQ}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}s.$$

10.2.5 思考与练习

练习 257. 计算 $\int_L\left(1+\frac{1}{x}e^y\right)dx+e^y\ln x dy$, 其中 L 为从点 $A(1,0)$ 到点 $B(2,1)$ 的直线段.

解: 由于 L 是有向线段 $\overline{AB}: y=x-1$, x 从 1 变到 2, 因此

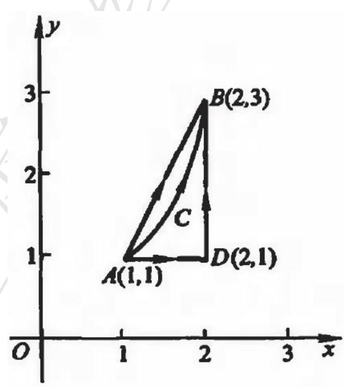
$$\int_L\left(1+\frac{1}{x}e^y\right)\mathrm{d}x+e^y\ln x\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left(1+\frac{1}{x}e^{x-1}+e^{x-1}\ln x\right)\mathrm{d}x=1+e\ln 2.$$

练习 258. 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 分别沿图中路线:

(i) 直线 AB;

(ii) ACB(抛物线: $y=2(x-1)^2+1$);

(iii) $ADBA$(三角形周界).



解: (i) 直线 AB 的方程为 $y=2x-1, x\in[1,2]$, 故

$$\int_{AB}xydx+(y-x)dy=\int_1^2[x(2x-1)+2(x-1)]dx=\frac{25}{6}.$$

(ii)

$$\int_{ACB}xydx+(y-x)dy=\int_1^2(10x^3-32x^2+35x-12)dx=\frac{10}{3}.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
&\int_{ADBA} xydx + (y-x)dy = \left(\int_{AD} + \int_{DB} + \int_{BA}\right) xydx + (y-x)dy \\
=&\int_{AD} xydx + \int_{DB} (y-x)dy - \int_{AB} xydx + (y-x)dy \\
=&\int_1^2 xdx + \int_1^3 (y-2)dy - \frac{25}{6} = \frac{3}{2} + 0 - \frac{25}{6} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

练习 259. 计算 $\int_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + xdz$, 其中 L 为从点 $A(2,0,0)$ 到点 $B(3,4,5)$ 再到 $C(3,4,0)$ 的一条有向折线.

解: 有向线段 $\overline{AB}$ 的参数方程为

$$x = 2 + t, \quad y = 4t, \quad z = 5t,$$

t 从 0 变到 1, 于是

$$\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (4t + 20t + 5(2+t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (10 + 29t)\,\mathrm{d}t = \frac{49}{2}.$$

类似可得有向线段 $\overline{BC}$ 的参数方程为

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5t,$$

t 从 1 变到 0, 于是

$$\int_{\overline{BC}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \int_1^0 15\,\mathrm{d}t = -15.$$

因此

$$\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \frac{49}{2} - 15 = \frac{19}{2}.$$

练习 260. 计算第二型曲线积分

$$I = \int_L xy\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z,$$

L 是螺旋线: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ 从 $t = 0$ 到 $t = \pi$ 上的一段.

解:

$$\begin{aligned}
I =& \int_0^\pi (-a^3\cos t\sin^2 t + a^2\cos^2 t - a^2\sin t\cos t + a^2 b\cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\
=& \left[-\frac{1}{3}a^3\sin^3 t - \frac{1}{2}a^2\sin^2 t + \frac{1}{2}a^2(1+b)\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]\Bigg|_0^\pi \\
=& \frac{1}{2}a^2(1+b)\pi.
\end{aligned}$$

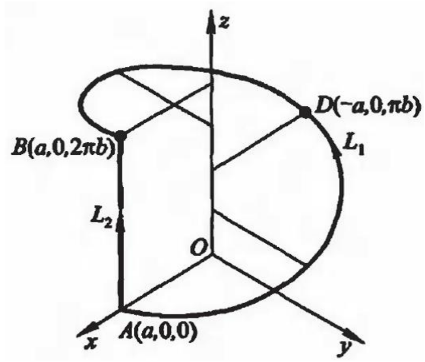
练习 261. 求在力 $\boldsymbol{F}(y, -x, x+y+z)$ 作用下,

(i) 质点由 A 沿螺旋线 L_1 到 B 所作的功, 其中 $L_1 : x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi$;

(ii) 质点由 A 沿直线 L_2 到 B 所作的功.

解: 在空间曲线 L 上力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W = \int_L \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + (x+y+z)\,\mathrm{d}z.$$



(i)

$$W=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t-a^2\cos^2 t+ab\cos t+ab\sin t+b^2 t)\,\mathrm{d}t$$
$$=2\pi(\pi b^2-a^2).$$

(ii)

$$W=\int_0^{2\pi b}(a+t)\,\mathrm{d}t=2\pi b(a+\pi b).$$