7.3 数量积、向量积、混合积

7.3.1 向量的数量积

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 称数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积, 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 M_0 移动到点 M, 若用 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_0M}$, 则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角. 用数量积表示即为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

- 当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$;
- 当 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$.

数量积的基本性质

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

例 3.1. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=3$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\times 3\times\cos\frac{\pi}{3}=3.$$

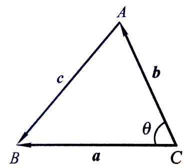
数量积的运算规律

(1) **交换律** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(3) **数乘结合律** $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

(2) **分配律** $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

例 3.2. 试用向量方法证明三角形的余弦定理.



证明: 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $\theta = \angle BCA, a = |\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{CB}|, b = |\boldsymbol{b}| = |\overrightarrow{CA}|, c = |\boldsymbol{c}| = |\overrightarrow{AB}|$, 要证明

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

由于 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, 故

$$|\boldsymbol{c}|^2 = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

即有

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

例 3.3. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, |\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 2, |\boldsymbol{c}| = 3$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

解:

$$0 = |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}),$$

故

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = -\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2) = -7.$$

向量数量积的坐标表达式

设向量 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, 即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

则有向量数量积的坐标表示

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为非零向量时, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 满足公式

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$, 即

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

例 3.4. 已知点 $M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.

解: $\angle AMB$ 可以看作向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角, 而

$$\overrightarrow{MA} = \{1,1,0\}, \quad \overrightarrow{MB} = \{1,0,1\},$$

故

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1\times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1, |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{2}.$$

从而

$$\cos\angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\angle AMB = \frac{\pi}{3}.$$

例 3.5. 已知向量 $\boldsymbol{a} = \{1,1,1\}, \boldsymbol{b} = \{1,2,-2\}, \boldsymbol{c} = \{3,-5,4\}$, 求向量 $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{d}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

解:

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (5,-1,0).$$

又

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} = 4,$$

故

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

7.3.2 向量的向量积

设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 规定 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的 向量积是一个向量, 记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 它的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 满足

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

它的方向由以下方法确定: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 并且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则.

注 3.1. (1) 向量积是一个向量而不是数.

(2) 向量积不满足交换律.

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$.

(4) 向量积的几何意义: 向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

向量积的基本性质

(1) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ 等价于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$.

(3) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$.

向量积的运算规律

(1) **反交换律** $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(2) **数乘结合律** $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

(3) **分配律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$.

向量积分配律的证明

Step 1. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，不妨设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 则由数乘结合律可得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\lambda+1)\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

Step 2. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，但 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 先用定义和几何意义证明 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. 再结合数乘结合律可得 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. 设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\mu-\lambda)\boldsymbol{b})=(\mu-\lambda)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}\\&=(\mu-\lambda)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

Step 3. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面. 先用几何意义证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$. 从而

$$((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}.$$

类似可证 $((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$. 显然有 $((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}$. 由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的线性无关性可知结论成立.

注 3.2. 向量积不满足结合律, 即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

一般不成立.

例如

$$(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

向量积的坐标表达式

设向量

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

则有向量积的坐标表示

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}.$$

为方便记忆,引入行列式记号,则有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

例 3.6. 设向量 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

解:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}.$$

例 3.7. 利用向量积证明正弦定理.

解: 设三角形 ABC 的三个内角为 α, β, γ, 三边长为 a, b, c. 因为

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB},$$

所以

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \times \overrightarrow{AB},$$

即 $\boldsymbol{0} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AB}$, 故

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AB},$$

两边取模得 $|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AB}|$, 于是 $bc\sin\alpha = ac\sin\beta$, 故得

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

同理可证 $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. 证毕.

例 3.8. 设 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 3$, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直, 求 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ 及 $|(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})|$.

解:

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\times 3\times\sin\frac{\pi}{2} = 6,$$

$$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})| = |-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}| = 3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 18.$$

例 3.9. 已知三角形 ABC 的顶点 $A(1,-1,2), B(5,-6,2)$ 和 $C(1,3-1)$. 求由顶点 B 到 AC 边高的长 h.

解:

$$h = |\overrightarrow{AB}|\sin(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = |\overrightarrow{AB}|\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|},$$

而 $\overrightarrow{AB} = \{4,-5,0\}, \overrightarrow{AC} = \{0,4,-3\}$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \{15,12,16\},$$

故

$$h = \frac{\sqrt{15^2+12^2+16^2}}{\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}} = 5.$$

例 3.10. 计算 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, 并解释它的几何意义.

解:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = -2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

从而 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})| = 2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

上式表明, 已知一平行四边形两邻边为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 则以它的两条对角线为邻边的平行四边形的面积等于原平行四边形面积的两倍.

7.3.3 向量的混合积

设三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积, 记为 $[\boldsymbol{abc}]$.

混合积的坐标表达式

设向量 $\boldsymbol{a} = \{a_x,a_y,a_z\}, \boldsymbol{b} = \{b_x,b_y,b_z\}, \boldsymbol{c} = \{c_x,c_y,c_z\}$, 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

所以

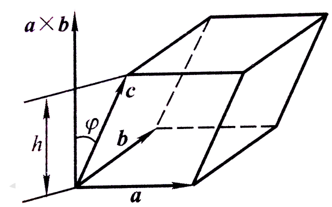
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

由行列式的性质易知混合积的轮换对称性:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b},$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}.$$

混合积的几何意义



将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 看作一个平行六面体的相邻三棱, 则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是该平行六面体的底面积. 又 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的底面, 若以 φ 表示向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角, 则 当 $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ 时, $|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$ 就是该平行六面体的高 h, 于是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\varphi=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|h=V,$$

其中 V 表示平行六面体的体积. 当 $\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$ 时, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-V$.

混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的绝对值是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻三棱的平行六面体的体积.

三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$, 也即

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

例 3.11. 求以点 $A(1,1,1), B(3,4,4), C(3,5,5)$ 和 $D(2,4,7)$ 为顶点的四面体 $ABCD$ 的体积.

解: 由混合积的几何意义知

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|.$$

又 $\overrightarrow{AB}=\{2,3,3\}, \overrightarrow{AC}=\{2,4,4\}, \overrightarrow{AD}=\{1,3,6\}$, 故

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=6.$$

于是

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

例 3.12. 问四个点 $A(1,1,1), B(4,5,6), C(2,3,3)$ 和 $D(10,15,17)$ 是否在同一平面上？

解: 四点共面等价于三向量共面. 现 $\overrightarrow{AB} = \{3,4,5\}, \overrightarrow{AC} = \{1,2,2\}, \overrightarrow{AD} = \{9,14,16\}$, 故

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

因此 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 共面, 即 A, B, C, D 四点在同一平面上.

例 3.13. 证明向量 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ 共面.

证明: 易知 $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$, 从而

$$(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{p} = -(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{m} - (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

因此三向量共面.

例 3.14. 设向量 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}$ 两两垂直, 符合右手法则, 且 $|\boldsymbol{m}| = 4, |\boldsymbol{n}| = 2, |\boldsymbol{p}| = 3$, 计算 $(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{p}$.

证明:

$$|\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}| = |\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}| \sin(\widehat{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}}) = 4 \times 2 \times 1 = 8,$$

所以

$$(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{p} = |\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}| \cos 0 = 8 \times 3 = 24.$$

7.3.4 思考与练习

练习 192. 设 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ 为相互垂直的单位向量, 求 $\boldsymbol{a} = 10\boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}$ 在 $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{m} - 12\boldsymbol{n}$ 上的投影.

解:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (10\boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}) \cdot (5\boldsymbol{m} - 12\boldsymbol{n}) = 50 - 24 = 26,$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{169} = 13,$$

所以

$$\mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{26}{13} = 2.$$

练习 193. 设 $a_i, b_i \in \boldsymbol{R} (i = 1,2,3)$, 证明不等式

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

证明: 设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$. 由于

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

故

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标代入上式即得所要求证的不等式

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

练习 194. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 向量 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 问 λ 为何值时, $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 共线.

解: $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 共线等价于 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$. 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}=&(\lambda\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\=&3\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+15\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\=&-\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\lambda+15)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

所以 $\lambda=-15$.

练习 195. 已知三角形 $\triangle ABC$ 的顶点分别是 $A(1,2,3),B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: 所求 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$, 因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

练习 196. 设 $\boldsymbol{l}$ 是过空间 $A(1,1,1),B(1,-1,2)$ 的直线, $C(2,1,1)$ 为直线外的一点, 求点 C 到直线的距离.

解: 由平行四边形的面积公式知所求距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

由于 $\overrightarrow{AB} = (0,-2,1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,0,0)$, 因此

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

故 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$. 又 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, 所以 $d = 1$.

练习 197. 设向量 $\boldsymbol{a} = (3,2,2)$, $\boldsymbol{b} = (18,-22,-5)$. 已知 $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{c}| = 14$, 且 $\boldsymbol{c}$ 与 y 轴正向的夹角为钝角, 求 $\boldsymbol{c}$.

解: 由题意知 $\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, 又

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 18 & -22 & -5 \end{vmatrix} = 34\boldsymbol{i} + 51\boldsymbol{j} - 102\boldsymbol{k},$$

故可取 $\boldsymbol{c} = \lambda(2,3,-6)$. 因为 $|\boldsymbol{c}| = 7|\lambda| = 14$, 所以 $\lambda = \pm 2$. 又由 $\cos\beta < 0$ 知 $\lambda = -2$, 于是

$$\boldsymbol{c} = (-4,-6,12).$$