

12.6 二阶常系数线性微分方程

12.6.1 二阶常系数齐次线性微分方程

考虑二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (12.6.1)$$

其中 p, q 是常数. 只需找到该方程的两个线性无关的解 $y = y_1(x)$ 及 $y = y_2(x)$, 就可以得到方程(12.6.1)的通解 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

当 r 为常数时, 指数函数 $y = e^{rx}$ 及其各阶导数都只相差一个常数. 由此我们考虑方程 (12.6.1) 是否具有这种形式的解.

将函数 $y = e^{rx}$ 代入(12.6.1)得

$$(e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qe^{rx} = (r^2 + pr + q)e^{rx} = 0.$$

由于 $e^{rx} \neq 0$, 因此

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (12.6.2)$$

由此说明只要 r 是(12.6.2)的根, 则函数 $y = e^{rx}$ 就是微分方程(12.6.1)的解. 因此我们称代数方程(12.6.2)是微分方程(12.6.1)的特征方程, 它的根就称为方程 (12.6.1)的特征根. 由一元二次方程的求根公式, 它的两个根为

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

由 $p^2 - 4q$ 不同取值, 可得到方程(12.6.1)的三种不同形式的通解. 现依次讨论如下:

(1) 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, r_1, r_2 为两个不相等的实根:

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

因而方程(12.6.1)有两个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$, 且 $\frac{y_2}{y_1} = e^{(r_2 - r_1)x}$ 不是常数, 故方程(12.6.1)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

(2) 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, r_1, r_2 为两个相等的实根: $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$. 此时只能得到方程(12.6.1)的一个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$. 为了得到方程(12.6.1)的通解, 还需求得另一个特解 y_2 , 且使得 $\frac{y_2}{y_1}$ 不是常数.

为此令 $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$, 对 y_2 求导得

$$y_2' = e^{r_1 x}(u' + r_1 u), \quad y_2'' = e^{r_1 x}(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u).$$

代入方程(12.6.1)得

$$e^{r_1 x}[(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + qu] = 0.$$

从而

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0.$$

因 r_1 是特征方程(12.6.2)的重根, 故

$$r_1^2 + pr_1 + q = 0, 2r_1 + p = 0.$$

于是有 $u'' = 0$. 故取 $u = x$, 即得方程(12.6.1)的另一特解

$$y_2 = xe^{r_1 x}.$$

从而得到方程(12.6.1)的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}.$$

(3) 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, r_1, r_2 为一对共轭复根:

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \text{ 其中 } \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

此时方程(12.6.1)有两个复数形式的解 $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$.

该解为复数形式. 为求实数形式的解, 利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 有

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

取

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

显然 \bar{y}_1 和 \bar{y}_2 也是方程(12.6.1)的解, 且 $\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \tan \beta x$ 不是常数, 故方程(12.6.1)的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

综上所述, 求二阶常系数齐次线性微分方程(12.6.1)

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解的步骤如下:

(1) 写出微分方程(12.6.1)的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$.

(2) 求出特征方程的两个根 r_1, r_2 .

(3) 根据特征方程的两个根的不同形式, 按照下列规则写出微分方程(12.6.1)的通解:

• 若特征方程有两个不同的实根 r_1, r_2 , 则通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x};$$

• 若特征方程有两个相同的实根 $r_1 = r_2$, 则通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x};$$

• 若特征方程有一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

例 6.1. 求解微分方程 $y'' + y' - 6y = 0$.

解: 特征方程为

$$r^2 + r - 6 = 0.$$

方程的两个解为 $r_1 = -3, r_2 = 2$. 因而方程的通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

例 6.2. 求解微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 满足初值条件 $y(0) = 3, y'(0) = -1$ 的特解.

解: 特征方程为

$$r^2 + 4r + 4 = 0.$$

方程有重根 $r_1 = r_2 = -2$. 故方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}.$$

将条件 $y(0) = 3$ 代入得 $C_1 = 3$, 故 $y = (3 + C_2 x) e^{-2x}$. 求导得 $y = (C_2 - 6 - 2C_2 x) e^{-2x}$. 将条件 $y'(0) = -1$ 代入得 $C_2 = 5$. 因此所求特解为

$$y = (3 + 5x) e^{-2x}.$$

例 6.3. 求解微分方程 $y'' + y' + y = 0$.

解: 特征方程为

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

方程的解为一对共轭复根

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

于是方程的通解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

考虑 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad (12.6.3)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 都是常数.

类似地, 令 $y = e^{rx}$, 代入(12.6.3)得

$$e^{rx}(r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_{n-1} r + p_n) = 0.$$

n 次代数方程

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0 \quad (12.6.4)$$

称为方程(12.6.3)的**特征方程**. 如果选取 r 为特征方程(12.6.4)的根, 则函数 $y = e^{rx}$ 就是方程(12.6.3)的一个解.

根据特征方程的根, 可以写出其对应的微分方程的解如下表所示.

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项: Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出两项: $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
k 重实根 r	给出 k 项: $e^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出 $2k$ 项: $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

例 6.4. 求解微分方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$.

解: 特征方程为

$$r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0.$$

解得 $r_1 = r_2 = 0, r_{3,4} = 1 \pm 2i$. 于是原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x + e^x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$$

例 6.5. 求解微分方程 $y^{(4)} + \beta^4 y = 0$.

解: 特征方程为 $r^4 + \beta^4 = 0$. 由于

$$r^4 + \beta^4 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2r^2 \beta^2 = (r^2 - \sqrt{2}r\beta + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}r\beta + \beta^2),$$

所以特征方程可写为

$$(r^2 - \sqrt{2}r\beta + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}r\beta + \beta^2) = 0.$$

解得 $r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i), r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$. 于是原方程的通解为

$$y = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_1 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right) + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_3 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right).$$

12.6.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

考虑二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (12.6.5)$$

的解, 其中 p, q 是常数.

根据解的结构定理, 其通解为

$$y = Y + y^*,$$

其中 Y 为齐次方程通解, y^* 为非齐次方程特解.

求特解的方法: 常数变易法, 待定系数法.

常数变易法

引理 6.1. 设 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解为 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, 其中 $y_1(x), y_2(x)$ 是两个线性无关的特解, C_1, C_2 为任意常数. 如果函数 $C_1(x), C_2(x)$ 满足下列函数方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \quad (12.6.6)$$

则 $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ 就是非齐次方程(12.6.5)的特解.

由于 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关, 函数方程组(12.6.6)有唯一解. 解出 $C_1'(x)$ 和 $C_2'(x)$, 再积分就可确定 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$, 于是得到方程(12.6.5)的特解 y^* .

例 6.6. 求微分方程 $y'' + y = \tan x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) 的通解.

解: 先求对应齐次方程的通解. 对应齐次方程的特征方程是 $r^2 + 1 = 0$, 两个根为 $r_{1,2} = \pm i$, 齐次方程的两个线性无关的解为 $y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$. 所以对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

再求非齐次方程的特解. 设非齐次方程的特解为 $y^* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, 其中 $C_1(x), C_2(x)$ 满足函数方程组

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \tan x. \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\tan x \sin x = \cos x - \sec x, \\ C_2'(x) = \sin x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \sin x - \ln(\sec x + \tan x), \\ C_2(x) = -\cos x. \end{cases}$$

于是原方程得通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln(\sec x + \tan x),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

待定系数法

待定系数法就是先确定方程(12.6.5)

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的特解的形式, 再把形式解代入方程以确定解中包含的待定系数的值.

在这里我们只介绍当(12.6.5)中的 $f(x)$ 取以下两种常见的函数形式时, 特解 y^* 的求法.

- (1) $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式, λ 是常数.
- (2) $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x) \cos \omega x + H_m(x) \sin \omega x]$ 型, 其中 $P_l(x), H_m(x)$ 分别为 l 次多项式及 m 次多项式 (其中一个可为零), λ, ω 是常数.

$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 型

因为多项式与指数函数乘积的导数仍然是多项式与指数函数的乘积, 所以我们推测 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$ (其中 $Q(x)$ 是某个多项式) 可能是方程(12.6.5)的特解. 为此将

$$\begin{aligned} y^* &= Q(x)e^{\lambda x}, & y^{*'} &= e^{\lambda x}[\lambda Q(x) + Q'(x)], \\ y^{*''} &= e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)] \end{aligned}$$

代入方程(12.6.5)并消去 $e^{\lambda x}$, 得到

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_n(x). \quad (12.6.7)$$

比较等式的两端, 得到

(1) 若 λ 不是对应的特征方程的根, 即 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则由式(12.6.7)知 $Q(x)$ 是一个 n 次的多项式, 即令

$$Q(x) = Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n, \quad (12.6.8)$$

其中 b_0, b_1, \dots, b_n 为待定系数. 将(12.6.8)代入(12.6.7)式并比较等式两端的系数, 即可确定 b_0, b_1, \dots, b_n 的值, 从而确定所求的特解

$$y^* = Q(x)e^{\lambda x}.$$

(2) 若 λ 是特征方程所对应的单根, 即 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 但 $2\lambda + p \neq 0$, 则由式(12.6.7)知 $Q'(x)$ 是一个 n 次的多项式, 即令

$$Q(x) = xQ_n(x) = x(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n).$$

用同样的方法可确定 $Q_n(x)$ 中的待定系数 b_0, b_1, \dots, b_n 的值.

(3) 若 λ 是特征方程所对应的重根, 即 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 且 $2\lambda + p = 0$, 则由式(12.6.7)知 $Q''(x)$ 是一个 n 次的多项式, 即令

$$Q(x) = x^2Q_n(x) = x^2(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n).$$

用同样的方法可确定 $Q_n(x)$ 中的待定系数 b_0, b_1, \dots, b_n 的值.

综上所述, 我们有如下结论:

方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}P_n(x)$ 具有形如

$$y^* = x^k Q_n(x)e^{\lambda x} \quad (12.6.9)$$

的特解, 其中 $Q_n(x)$ 为一个与 $P_n(x)$ 同次的多项式, 而

$$k = \begin{cases} 0, & \text{若 } \lambda \text{ 不是特征方程的根,} \\ 1, & \text{若 } \lambda \text{ 是特征方程的单根,} \\ 2, & \text{若 } \lambda \text{ 是特征方程的重根.} \end{cases}$$

令 $Q(x) = x^k Q_n(x)$, 将 Q'', Q' 代入(12.6.7), 即

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_n(x).$$

确定 Q 中的 $n+1$ 个系数, 从而确定方程的一个特解.

上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程, 式(12.6.9)中的 k 是特征方程含根 λ 的重数.

例 6.7. 求方程 $y'' + 3y' + 2y = (x+2)e^{-x}$ 的一个特解.

解: 微分方程对应的特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$. 而此时 $\lambda = -1$ 是特征方程的单根, 故可设

$$y^* = xQ_1(x)e^{-x} = x(ax+b)e^{-x}, Q(x) = ax^2 + bx.$$

从而

$$Q'(x) = 2ax + b, Q''(x) = 2a.$$

代入(12.6.7)得

$$2a + (3-2)(2ax+b) = x+2.$$

比较系数得 $a = \frac{1}{2}, b = 1$. 于是原方程的一个特解为

$$y^* = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{-x}.$$

例 6.8. 求方程 $y'' + 4y' + 4y = (2x+3)e^{-2x}$ 满足初值条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解.

解: 特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$. 故 $r = -2$ 为二重根, 因而原方程对应的齐次方程

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

的通解为

$$Y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}.$$

又 $\lambda = -2$ 为特征方程的重根, 故令

$$y^* = x^2Q_1(x)e^{-2x} = x^2(ax+b)e^{-2x}, Q(x) = ax^3 + bx^2.$$

从而

$$Q'(x) = 3ax^2 + 2bx, Q''(x) = 6ax + 2b.$$

代入(12.6.7)得

$$6ax + 2b = 2x + 3.$$

比较系数得 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{3}{2}$. 于是原方程的一个特解为

$$y^* = x^2\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x}.$$

故方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + x^2\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x}.$$

根据初值条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 1$. 因此所求的特解为

$$y = xe^{-2x} + x^2\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x}.$$

例 6.9. 写出方程 $y'' - y' - 2y = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^{3x} + 3$ 的特解形式.

解: 特征方程为 $r^2 - r - 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = 2, r_2 = -1$. 右端项 $f(x)$ 分成三项: $(x^2 + 1)e^{2x}, xe^{3x}, 3$.

这里第一项 $P_n(x) = x^2 + 1, \lambda = 2$ 为特征单根; 第二项 $P_n(x) = x, \lambda = 3$ 不是特征根; 第三项 $P_n(x) = 1, \lambda = 0$ 不是特征根. 故原方程的特解形式为

$$y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* = x(Ax^2 + Bx + C)e^{2x} + (Dx + E)e^{3x} + F,$$

其中 A, B, C, D, E, F 为待定系数.

例 6.10. 求解方程 $y'' - 6y' + 8y = x^2 + x - 1 + xe^{2x}$.

解: 特征方程为 $r^2 - 6r + 8 = 0$, 特征根为 $r_1 = 2, r_2 = 4$. 因而原方程对应的齐次方程

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

的通解为

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

再求 $y'' - 6y' + 8y = x^2 + x - 1$ 的特解 y_1^* . 因 $\lambda = 0$ 为不是特征根, 故可设 $y_1^* = ax^2 + bx + c$, 求导得

$$y_1^{*'} = 2ax + b, y_1^{*''} = 2a.$$

代入(12.6.7)得

$$2a - 6(2ax + b) + 8(ax^2 + bx + c) = x^2 + x - 1.$$

比较系数得 $a = \frac{1}{8}, b = \frac{5}{16}, c = \frac{5}{64}$. 于是

$$y_1^* = \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{5}{64}.$$

最后求 $y'' - 6y' + 8y = xe^{2x}$ 的特解 y_2^* . 因 $\lambda = 2$ 为特征方程的单根, 故可设

$$y_2^* = x(ax + b)e^{2x}, Q(x) = ax^2 + bx.$$

从而

$$Q'(x) = 2ax + b, Q''(x) = 2a.$$

代入(12.6.7)得

$$2a - 2(2ax + b) = x.$$

比较系数得 $a = b = -\frac{1}{4}$. 于是

$$y_2^* = -\frac{1}{4}x(x + 1)e^{2x}.$$

由此得到原方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}x(x + 1)e^{2x} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{5}{64}.$$

$f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + H_m(x) \sin \omega x]$ 型

考察方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + H_m(x) \sin \omega x] \quad (12.6.10)$$

应用欧拉公式, 把三角函数表示为复变指数函数的形式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} \left(P_l \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + H_m \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \right) \\ &= \left(\frac{P_l}{2} + \frac{H_m}{2i} \right) e^{(\lambda+i\omega)x} + \left(\frac{P_l}{2} - \frac{H_m}{2i} \right) e^{(\lambda-i\omega)x} \\ &= P(x) e^{(\lambda+i\omega)x} + \bar{P}(x) e^{(\lambda-i\omega)x}, \end{aligned}$$

其中 $P(x) = \frac{P_l}{2} + \frac{H_m}{2i} = \frac{P_l}{2} - \frac{H_m}{2}i$, $\bar{P}(x) = \frac{P_l}{2} - \frac{H_m}{2i} = \frac{P_l}{2} + \frac{H_m}{2}i$. $P(x), \bar{P}(x)$ 是相互共轭的 n 次多项式, 其中 $n = \max\{l, m\}$.

将前面的结果应用于右端项 $f(x)$ 中的第一项 $P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$, 则存在一个 n 次多项式 $Q_n(x)$, 使得 $y_1^* = x^k Q_n(x) e^{(\lambda+i\omega)x}$ 为方程

$$y'' + py' + qy = P(x) e^{(\lambda+i\omega)x}$$

的特解, 其中 k 为是特征根 $\lambda + i\omega$ 的重数 (取 0 或 1).

根据右端项 $f(x)$ 中两项的共轭性, 原方程(12.6.10)具有形如

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [Q_n(x) e^{i\omega x} + \bar{Q}_n(x) e^{-i\omega x}]$$

的特解. 上式可写为

$$\begin{aligned} y^* &= x^k e^{\lambda x} [Q_n(x) (\cos \omega x + i \sin \omega x) + \bar{Q}_n(x) (\cos \omega x - i \sin \omega x)] \\ &= x^k e^{\lambda x} [R_n^{(1)}(x) \cos \omega x + R_n^{(2)}(x) \sin \omega x]. \end{aligned}$$

综上所述, 方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + H_m(x) \sin \omega x]$ 具有形如

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_n^{(1)}(x) \cos \omega x + R_n^{(2)}(x) \sin \omega x]$$

的特解, 其中 $R_n^{(1)}(x), R_n^{(2)}(x)$ 是 n 次多项式, $n = \max\{l, m\}$, 而 k 按 $\lambda \pm i\omega$ 不是特征方程的根, 或是特征方程的根依次取 0 或 1.

例 6.11. 求微分方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的一个特解.

解: 微分方程对应的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 特征根为 $r = \pm i$. 而此时 $\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征方程的根, 故可设

$$y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x.$$

从而

$$y^{*'} = (2cx + 2d + a) \cos 2x + (c - 2ax - 2b) \sin 2x,$$

$$y^{*''} = (-4ax - 4b + 4c) \cos 2x - (4cx + 4d + 4a) \sin 2x.$$

代入原方程得

$$(-3ax - 3b + 4c) \cos 2x - (3cx + 3d + 4a) \sin 2x = x \cos 2x.$$

比较系数得 $a = -\frac{1}{3}, b = c = 0, d = \frac{4}{9}$. 于是原方程的一个特解为

$$y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$$

例 6.12. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x} + \cos^2 x$ 的通解.

解: (1) 齐次方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

(2) 求 $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ 的特解 y_1^* . 令

$$y_1^* = x(ax + b)e^{-x},$$

再记 $Q(x) = x(ax + b)$, 则 $Q'(x) = 2ax + b, Q''(x) = 2a$, 代入(12.6.7)得

$$2a + 2ax + b = x.$$

比较系数得 $a = \frac{1}{2}, b = -1$. 于是

$$y_1^* = x \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) e^{-x}.$$

(3) 求 $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2}$ 的特解 y_2^* . 容易得到 $y_2^* = \frac{1}{4}$.

(4) 最后求 $y'' + 3y' + 2y = \frac{\cos 2x}{2}$ 的特解 y_3^* . 令

$$y_3^* = a \cos 2x + b \sin 2x,$$

代入方程得

$$(6b - 2a) \cos 2x + (-6a - 2b) \sin 2x = \frac{1}{2} \cos 2x.$$

比较系数得 $a = -\frac{1}{40}, b = \frac{3}{40}$. 于是

$$y_3^* = -\frac{1}{40} \cos 2x + \frac{3}{40} \sin 2x.$$

所以原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + x \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) e^{-x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} \cos 2x + \frac{3}{40} \sin 2x.$$