第十五届全国大学生数学竞赛决赛试题及参考解答

（非数学类，2024 年 04 月 20 日）

一、 填空题(**本题满分 30 分，每小题 6 分**)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2e^{x}(x-\cos x), & x>0\\ x^{2}+3x+a, & x\le 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ ________.

【解】 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左、右极限分别为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+3x+a)=a,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2\lim_{x\to 0^+} e^{x}(x-\cos x)=-2,$$

所以当且仅当 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此 $a=-2$.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{\sin\pi x}=$ ________.

【解】 利用 L'Hospital 法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x+1)}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

(3)设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(2x-\dfrac{z}{y},2y-\dfrac{z}{x})=2024$ 确定的隐函数，其中 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xf_u+yf_v\ne 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

【解】 令 $F(u,v)=f(u,v)-2024$，则 $xF_u+yF_v\ne 0$. 根据隐函数的求偏导数公式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{2F_u+\dfrac{z}{x^2}F_v}{\dfrac{1}{y}F_u+\dfrac{1}{x}F_v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\dfrac{z}{y^2}F_u+2F_v}{\dfrac{1}{y}F_u+\dfrac{1}{x}F_v},$$

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{z}{x}F_v+2xF_u}{\dfrac{1}{y}F_u+\dfrac{1}{x}F_v}+\dfrac{\dfrac{z}{y}F_u+2yF_v}{\dfrac{1}{y}F_u+\dfrac{1}{x}F_v}=z+2xy$.

（4）在平面 $x+y+z=0$ 上，与直线 $\begin{cases}x+y-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 都相交的直线的单位方向向量为________.

【解】 将所给平面的方程分别与这两直线的方程联立求解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+y-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}x+y+z=0\\2x-y+z-1=0,\\x+y-z+1=0\end{cases}$$

得平面与这两直线的交点分别为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1\right)$ 和 $\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，因此过这两点的直线的方向向量为

$$\left(0-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-(-1)\right)=-\frac{1}{2}(1,2,-3).$$

相应的单位方向向量为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3)$.

【注】 对不带正、负号或“±”符号的答案，也给满分.

（5）定积分 $\int_0^1\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的值等于________.

【解】 因为 $(1-x)^4=(1+x^2-2x)^2=(1+x^2)^2-4x(1+x^2)+4x^2$，所以

$$I=\int_0^1x^4(1+x^2)\mathrm{d}x-4\int_0^1x^5\mathrm{d}x+4\int_0^1\frac{(x^6+1)-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+4\int_0^1(x^4-x^2+1)\mathrm{d}x-4\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=\frac{22}{7}-\pi.$$

二、(本题满分 12 分) 已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\y=\cos t,\end{cases}\left(0\le t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$．设当 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(t)>0$，且曲线 L 的切线与 x 轴的交点到

切点的距离恒等于切点与点$(-\sin t,0)$之间的距离，求函数$f(t)$的表达式.

【解】 利用参数方程求导法则，得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\sin t}{f'(t)}$，因此曲线$L$上任意点$(x,y)=(f(t),\cos t)$处的切线方程为

$$Y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}(X-f(t)). \qquad \text{------------ 4 分}$$

令$Y=0$，可得此切线与x轴的交点为$P(f(t)+f'(t)\cot t,0)$．根据题设，切点与交点P的距离恒等于切点与点$(-\sin t,0)$之间的距离，故有

$$\left[f(t)+f'(t)\cot t-f(t)\right]^2+\cos^2 t=(f(t)+\sin t)^2+\cos^2 t.$$

注意到当$0<t<\dfrac{\pi}{2}$时$f'(t)>0$，所以$f(t)>f(0)=0$，故将上式整理可得

$$f'(t)-\tan t\ f(t)=\sec t-\cos t. \qquad \text{------------ 4 分}$$

这是关于$f(t)$的一阶线性微分方程，利用求解公式得

$$f(t)=e^{\int\tan t\mathrm{d}t}\left(\int(\sec t-\cos t)e^{-\int\tan t\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)=\frac{1}{2}(t\sec t-\sin t)+C,$$

由$f(0)=0$得$C=0$，因此

$$f(t)=\frac{1}{2}(t\sec t-\sin t),\quad 0\le t<\frac{\pi}{2}. \qquad \text{------------ 4 分}$$

三、(本题满分 12 分) 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

【解】 令$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$，则$a_0=0$，$a_1=2$，且$n>1$时，有

$$a_n-a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\theta-\sin 2(n-1)\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n-1)\theta\mathrm{d}\theta=(-1)^{n-1}\frac{2}{2n-1},$$

------------ 4 分

所以

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right).$$

------------ 4 分

因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}\right)=2\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$. ------------ 4 分

四、(本题满分 12 分) 设Σ_1是以$(0,4,0)$为顶点且与曲面$\Sigma_2:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{3}=1$ $(y>0)$相切的圆锥面，求Σ_1与Σ_2所围成的空间区域的体积.

【解】 易知，Σ_1与Σ_2的交线位于平面$y_0=1$上. ------------ 2 分

设该平面与Σ_1，Σ_2围成的空间区域分别记为Ω_1与Ω_2，由于Ω_1是底面圆的

半径为$\frac{3}{2}$且高为3的圆锥体，所以它的体积为$V_1=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 3=\frac{9\pi}{4}$.

------------ 4 分

又Ω_2的体积为

$$V_2=\iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}v=\int_1^2\mathrm{d}y\iint\limits_{x^2+z^2\le 3\left(1-\frac{y^2}{4}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\pi\int_1^2 3\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y=\frac{5\pi}{4},$$

------------ 4 分

因此，Σ_1与Σ_2所围成的空间区域的体积为$V=\frac{9\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}=\pi$. ------------ 2 分

五、(本题满分 12 分) 设n阶实矩阵A，B满足$AB=A+B$，且存在n阶可逆实矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵. 证明：$P^{-1}BP$也为对角矩阵.

【证】 设$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，且$P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，则$Ap_i=\lambda_i p_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 所以$P$的列向量$p_i(i=1,2,\cdots,n)$为$A$的对应于特征值$\lambda_i$的特征向量.

------------ 4 分

因为$AB=A+B$，所以$(A-E)(B-E)=E$，可知$|A-E|\ne 0$，由此说明$\lambda_i\ne 1$.

注意到$(A-E)p_i=(\lambda_i-1)p_i$，所以$(A-E)^{-1}p_i=\frac{1}{\lambda_i-1}p_i$. ------------ 4 分

又由于

$$ABp_i=Ap_i+Bp_i=\lambda_i p_i+Bp_i,$$

所以$Bp_i=\lambda_i(A-I)^{-1}p_i=\frac{\lambda_i}{\lambda_i-1}p_i$，即$p_i$是$B$的属于特征值$\frac{\lambda_i}{\lambda_i-1}$的特征向量. 因此

$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1},\frac{\lambda_2}{\lambda_2-1},\cdots,\frac{\lambda_n}{\lambda_n-1}\right).$$ ------------ 4 分

六、(本题满分 12 分) 设数列$\{a_n\}$定义为：$a_0=0$，$a_1=\frac{2}{3}$，当$n\ge 1$时，满足

$$(n+1)a_{n+1}=2a_n+(n-1)a_{n-1},$$

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n$的收敛域.

【解】 利用归纳法易证：$0<a_n<1\ (n\ge 1)$. ------------ 4 分

因为$0 < na_n < n$（$n \ge 1$），所以当$|x| < 1$时，由比较判别法及$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$绝对收敛，可知$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$绝对收敛，即$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$在区间$(-1,1)$内收敛. ------------ 4 分

另一方面，由$(n+1)a_{n+1} > (n-1)a_{n-1}$可知，$\{2na_{2n}\}$是严格递增数列，且$a_2 = \frac{2}{3} \ne 0$，所以$\lim_{n\to\infty} na_n \ne 0$. 故当$x = \pm 1$时，$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$发散. 因此$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$的收敛域为$(-1,1)$ ------------ 4 分

七、(本题满分 10 分) **(1)**证明：对于任意的实数$r > 0$，存在唯一的$t \in (\pi, 2\pi)$，使得$e^{-rt} - \cos t + r\sin t = 0$；

(2) 设 (1) 中的方程所确定的隐函数为$t = t(r)$，证明：当$r > 0$，且$\pi < t < t(r)$时，恒有$r(\sin t - t\cos t) - t\sin t > 0$.

【证】 (1) 记$g(t) = e^{-rt} - \cos t + r\sin t$，则$g(t)$在区间$[\pi, 2\pi]$上连续. 当$r > 0$时，$g(\pi) = e^{-r\pi} + 1 > 0$，$g(2\pi) = e^{-2r\pi} - 1 < 0$，根据介值定理，存在$\xi \in (\pi, 2\pi)$，使得$g(\xi) = 0$. ------------ 3 分

进一步，注意到$\left(e^{rt} g(t)\right)' = e^{rt}(1 + r^2)\sin t < 0$，若存在$t_1, t_2 \in (\pi, 2\pi)$，$t_1 \ne t_2$，使得$g(t_1) = g(t_2) = 0$，则由Rolle 定理，存在$\xi \in (\pi, 2\pi)$，使得$\left(e^{rt} g(t)\right)'\Big|_{t=\xi} = 0$，矛盾. 所以，对任意$r > 0$，$g(t)$在$(\pi, 2\pi)$内仅有惟一实根. ------------ 2 分

（2）令$F(t, r) = rh(t) - t\sin t$，其中$h(t) = \sin t - t\cos t$. 因为$h(\pi) = \pi > 0$，而$h(2\pi) = -2\pi < 0$，所以存在$t_0 \in (\pi, 2\pi)$，使得$h(t_0) = 0$. 又$h'(t) = t\sin t < 0$ $(\pi < t < 2\pi)$，因此t_0是$h(t)$在$(\pi, 2\pi)$内惟一的零点.

(a) 当$\pi < t < t(r) \le t_0$或$\pi < t \le t_0 < t(r)$时，$h(t) \ge 0$，因而$F(r, t) \ge -t\sin t > 0$；

(b) 当$t_0 < t < t(r) < 2\pi$时，$h(t) < 0$. 因为

$$e^{rt}(1 - \cos t + r\sin t) > e^{rt} g(t) \ge e^{rt(r)} g(t(r)) = 0,$$

所以$r < \frac{1 - \cos t}{-\sin t}$. 于是$F(r, t) > \frac{1 - \cos t}{-\sin t} h(t) - t\sin t = \frac{1 - \cos t}{-\sin t}(t + \sin t) > 0$.

------------ 5 分