第五章 数字特征(上)

第一节 数学期望

一. 数学期望（均值）的定义

我们先通过一个例子,引出离散型随机变量数学期望值的定义。

假设X是只取有限个值的离散型随机变量,它的概率分布为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

现在对X进行N次观测,得到N个观测值$a_1, a_2, \cdots, a_N$,其中每个a_i只能取$x_1, x_2, \cdots, x_n$中的某个数。

以$v_N(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$表示在N次观测中x_i出现的次数。

算术平均值$\overline{a}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}a_k$反映了$X$取值的平均值,又

$$\bar{a} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i v_N(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{v_N(x_i)}{N},$$

由频率具有稳定性,

$$\frac{v_N(x_i)}{N} \overset{N充分大}{\approx} p_i,$$

则 $$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{v_N(x_i)}{N} \overset{N充分大}{\approx} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i。$$

由此可知，$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 反映了随机变量 X 取值的平均值。

注：(1) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 是个常数，而 $\bar{a}$ 是波动的。

(2) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 就是加权平均。

,

由上述讨论的启发，我们引出离散型随机变量数学期望的定义。

定义5−1:设X是离散型随机变量,其概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots, n, \cdots,$$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛,

则称该级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$为随机变量$X$的数学期望(mathematical expectation)(或均值(mean value)),

记作EX,即$EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$。

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$不是绝对收敛,即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k = \infty,$$

则称X的数学期望不存在。

随机变量X的数学期望反映了X 取值的平均值,它由分布完全决定。

注1: 当分布给定时,数学期望为一数值(常数)。

注2: 我们假定级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛,因而保证了级数的和与求和的次序无关。

注3: 级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$发散或者条件收敛,数学期望不存在。

例5−1:若随机变量X服从0—1分布,试求它的数学期望EX。

例5−2:设随机变量X服从参数为λ的普阿松分布,即$X \sim P(\lambda)$,试求X的数学期望EX。

例$5-3$:设随机变量X服从参数为p几何分布,即$X \sim G(p)$,求X的数学期望EX。

例5－4:有一游戏,在一袋中有形状大小完全一样的20个球,其中红、白球各10个,记红球为10分,白球为5分。游戏的规则为:某人从袋中随机地抽取10个球,并且将10个球的分值相加,根据相加的分值由以下的表进行奖罚:

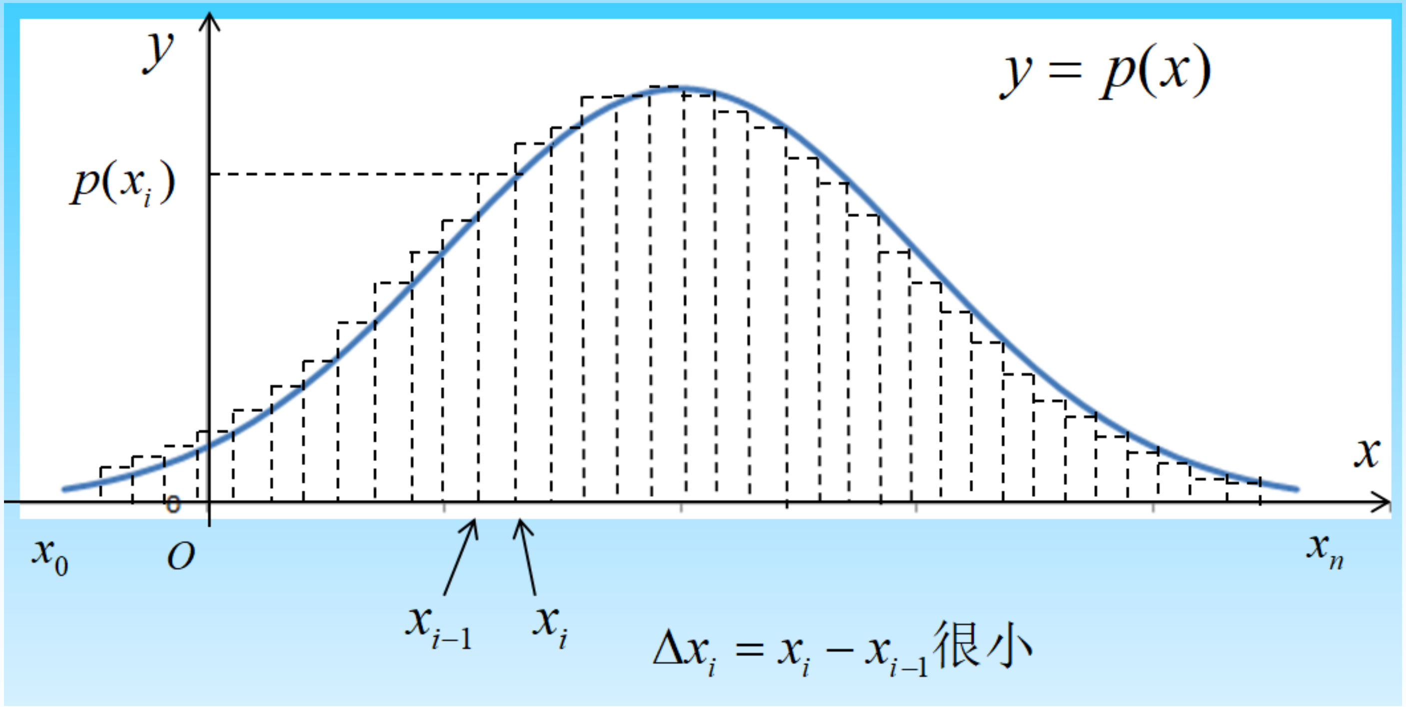
分值	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50
奖(元)	50	30	20	10	–3	–5	–3	10	20	30	50

下面我们将通过简单的讨论,引出连续型随机变量数学期望的定义。

假设X是一个连续型随机变量,其密度函数为$p(x)$。

$$P(X \in (x_{i-1}, x_i]) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx$$

$$\overset{\Delta x_i\text{很小}}{\approx} \quad p(x_i)\Delta x_i, i = 1, 2, \cdots, n,$$



此时,概率分布为

X'	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	$p(x_1)\Delta x_1$	$p(x_2)\Delta x_2$	$\cdots$	$p(x_n)\Delta x_n$

的离散型随机变量X'可以看作是X的一种近似,而这个离散型随机量X'的数学期望为

$$EX' = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\Delta x_i \ ,$$

EX' 近似地表达了连续型随机变量 X 取值的平均值 。

当分点愈密时,即 $\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$,这种近似也就愈好,由定积分的理论可知,

$$EX = \lim_{\substack{\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\Delta x_i = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \text{ ,}$$

这个直观的讨论启发我们引出如下定义。

定义5－2:设X为连续型随机变量,其密度函数为$p(x)$。若积分$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$绝对收敛,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)dx < \infty,$$

则称$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$为随机变量$X$的数学期望(或均值),仍记作$EX$,即

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx。$$

若积分$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$不是绝对收敛,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,p(x)dx = \infty,$$

则称X的数学期望不存在。

同离散型情形一样,连续型随机变量X的数学期望EX仍反映X取值的平均值。

当分布给定时,数学期望为一数值(常数)。

注: 若$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$发散或者条件收敛,数学期望不存在。

例5－5:设X服从均匀分布,即$X \sim U[a,b]$,
试求X的数学期望。

例5－6:设X服从参数为λ的指数分布,
即$X \sim Exp(\lambda)$,试求X的数学期望。

例5－7:设X服从正态分布,即
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,试求X的数学期望。

二. 随机变量函数的数学期望

对于随机变量X的函数$Y=f(X)$,由于$Y=f(X)$也是随机变量,则也可利用数学期望的定义来求$EY=Ef(X)$。

当已知随机变量X的概率分布或密度函数时,可先求出$Y=f(X)$的概率分布或密度函数,再由数学期望的定义的求EY,但是,这样做往往比较烦锁。

定理5−1:设$Y = f(X)$为随机变量X的函数,且$f(X)$的数学期望存在。

(1)若X为离散型随机变量,其概率分布为$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots, m, \cdots$,

则 $$EY = Ef(X) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) p_k \text{。}$$

(2) 设X为连续型随机变量,其密度函数为$p(x)$,若$f(X)$也是连续型随机变量,则

$$EY = Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx \text{。}$$

定理5−2:设$Z=f(X,Y)$为随机向量(X,Y)的函数,且$EZ=Ef(X,Y)$存在。

(1)若(X,Y)为离散型随机向量,其联合概率分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\begin{matrix} i=1,2,\cdots,m,\cdots \\ j=1,2,\cdots,n,\cdots \end{matrix},$$

则 $$EZ=E[f(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(x_i,y_j)p_{ij}\text{。}$$

(2) 设(X,Y)为连续型随机向量,其联合密度函数为$p(x,y)$,若$Z=f(X,Y)$为连续性随机变量,则

$$EZ=E[f(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)p(x,y)dxdy。$$

例如，已知(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

求$X+Y$的概率分布，以及$E(X+Y)$。

设$Z = X + Y$, Z 的取值表

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3

Z 的概率分布为

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}+\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}+\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$

$$EZ=E(X+Y)=0\times\frac{1}{4}+1\times\left(\frac{3}{20}+\frac{1}{10}\right)+2\times\left(\frac{3}{20}+\frac{3}{10}\right)+3\times\frac{1}{20}$$

$$=(0+0)\times\frac{1}{4}+(0+1)\times\frac{1}{10}+(0+2)\times\frac{3}{10}$$

$$+(1+0)\times\frac{3}{20}+(1+1)\times\frac{3}{20}+(1+2)\times\frac{1}{20},$$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Z; $X \backslash Y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3

$$EZ=E(X+Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(x_i+y_j)p_{ij}\ 。$$

四个重要公式:

$$EY = Ef(X) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) p_k, X\text{离散} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx, X\text{连续} \end{cases}。$$

$$EZ = E[f(X,Y)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) p_{ij}, (X,Y)\text{离散} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) p(x,y) dxdy, (X,Y)\text{连续} \end{cases}。$$

例5−8:设随机变量X服从参数为λ的泊松分布,即$X\sim P(\lambda)$,试求X^2的数学期望$E(X^2)$。

例$5-9$:设随机变量X服从参数为p几何分布,即$X\sim G(p)$,求X^2的数学期望。

例$5-10$:设X服从均匀分布,即$X\sim U[a,b]$,试求X^2的数学期望。

例$5-11$:设X服从参数为λ的指数分布,即$X\sim Exp(\lambda)$,试求X^2的数学期望。

131页习题9

9. 设随机变量X的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty,$$

求 $E\left[\min\{|X|,1\}\right]$。

解：

$$E\left[\min\{|X|,1\}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{|x|,1\}p(x)dx$$

$$=\int_{|x|<1}|x|\,p(x)dx+\int_{|x|\geq 1}p(x)dx$$

例$5-12$:设随机变量X,Y相互独立,且均服从$N(0,1)$分布,试求

$$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)。$$

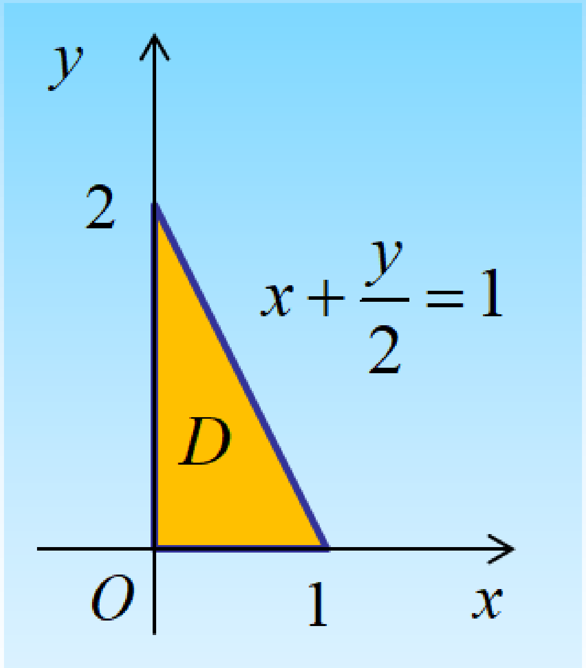
解:因为$X \sim N(0,1)$,$Y \sim N(0,1)$,且X,Y独立,则(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\bullet\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

教材$P131$,习题五

13.设(X,Y)服从在D上的二维均匀分布,其中D为x轴,y轴及直线$x+\frac{y}{2}=1$所围成的三角形区域,求$E(X^2Y^2)$。



解:

$$p(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in D\\ 0,其他\end{cases},$$

$$E(X^2Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y^2p(x,y)dxdy$$

$$=\iint_D x^2y^2\bullet 1dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}x^2y^2dy=\int_0^1 x^2\frac{(2-2x)^3}{3}dx$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3dx=\frac{2}{45}$$

例5－13:设某种商品每周的需求量X是服从区间[10,30]上均匀分布的随机变量,而经销商店的进货数量为[10,30]中的某一整数,商店每销售一单位商品可获利500元;若供大于求则削价处理,每处理一单位商品亏损100元;若供不应求,则可从外部调剂供应,此时每一单位商品仅获利300元。为使商店所获利润期望值达到最大,试确定进货量。

解:设进货量为a, $10 \le a \le 30$, 且

用Y表示利润,则

$$Y = \begin{cases} 500a + (X-a)300, & a < X \le 30 \\ 500X - (a-X)100, & 10 \le X \le a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 300X + 200a, & a < X \le 30 \\ 600X - 100a, & 10 \le X \le a \end{cases} = f(X),$$

$$EY = Ef(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx = \int_{10}^{30} f(x)\frac{1}{20}dx$$

$$= \frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x - 100a)dx + \frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x + 200a)dx$$

$$=\frac{1}{20}(600\frac{x^2}{2}-100ax)\Big|_{10}^{a}+\frac{1}{20}(300\frac{x^2}{2}+200ax)\Big|_{a}^{30}$$

$$=-7.5a^2+350a+5250,$$

$$\left(EY\right)'=-15a+350=0,\quad a=23.33,$$

故为使利润期望值达最大,最佳进货量为23单位。

考试试题

一个小型工程需要使用水泥，第一批水泥采购价每吨400元。如果不够使用，紧急采购第二批水泥，采购价每吨500元；如果第一批水泥用不完，则作报废处理。根据经验该工程水泥的使用量 $X \sim U[1000, 2000]$。为节约使用水泥的开支，试求第一批水泥的最佳采购量。

解：设第一批水泥的采购量为a吨，用Y表示使用水泥的成本，

$$Y = f(X) = \begin{cases} 400a, X < a \\ 400a + 500(X - a), X \geq a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 400a, X < a \\ 500X - 100a, X \geq a \end{cases},$$

$$EY = Ef(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx$$

$$= \int_{1000}^{2000} f(x) \frac{1}{1000} dx$$

$$=\frac{1}{1000}\int_{1000}^{a} 400a\,dx+\frac{1}{1000}\int_{a}^{2000}(500x-100a)\,dx$$

$$=\frac{1}{1000}\left[250a^2-600000a+250\times 2000^2\right],$$

$\left(EY\right)_y'=0$， 则 $a=1200$(吨)，

此时$EY=640000$元达最小。

2017－2018年第一学期

2017年12月5日

概率论试卷

4.某公司计划开发一种新产品,并试图确定该产品的产量,他们计划出售一件产品可获得收入100元,而积压一件产品导致损失20元。同时预测销售Y服从指数分布,即密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases},$$

为了获得利润的数学期望最大,应生产多少件产品？（已知ln6=1.7918）

解:a表示生产的件数, X表示利润,

$$X = f(Y) = \begin{cases} 100Y - 20(a - Y), Y < a \\ 100a, Y \geq a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 120Y - 20a, Y < a \\ 100a, Y \geq a \end{cases},$$

$$EX = Ef(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p_Y(y) dy$$

$$= \int_0^a (120y - 20a) \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy + \int_a^{+\infty} 100a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy$$

$$= 120 \int_0^a y \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy - 20a \int_0^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy - 100a \int_{+\infty}^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy,$$

$$(EX)'_a = 120a \frac{1}{5} e^{-\frac{a}{5}} - \left[20a \frac{1}{5} e^{-\frac{a}{5}} + 20 \int_0^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy \right]$$

$$- \left[100a \frac{1}{5} e^{-\frac{a}{5}} + 100 \int_{+\infty}^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy \right]$$

$$=-20\int_0^a \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy+100\int_a^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy$$

$$=-20\left[-e^{-\frac{y}{5}}\Big|_0^a\right]+100\left[-e^{-\frac{y}{5}}\Big|_a^{+\infty}\right]$$

$$=-20\left[1-e^{-\frac{a}{5}}\right]+100e^{-\frac{a}{5}}$$

$$=-20+120e^{-\frac{a}{5}}=0,$$

$$e^{-\frac{a}{5}}=\frac{1}{6},$$

$$-\frac{a}{5}=-\ln 6=-1.7918,$$

$$a=8.959\approx 9,$$

应生产9件产品。

教材$P110$

例5-14: 某商店按照合同每月可从某工厂得到数量为X的商品。由于各种因素的随机影响, X服从在$[10, 20]$(单位:箱)上的均匀分布, 而该商店每月实际卖出的商品数量Y服从在$[10,15]$上的均匀分布。若商店能从这工厂得到足够的商品供应, 则每卖出一箱商品可获利2千元; 若商店不能从这工厂得到足够的商

品供应,则要通过其他途径进货时,每卖出一箱商品只能获利1千元。求该商店每月的平均利润。

解： 设商店每月的利润为Z,由题设条件知,

$$Z = f(X,Y) = \begin{cases} 2Y, Y \le X \\ 2X + (Y - X), Y > X \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2Y, Y \le X \\ X + Y, Y > X \end{cases},$$

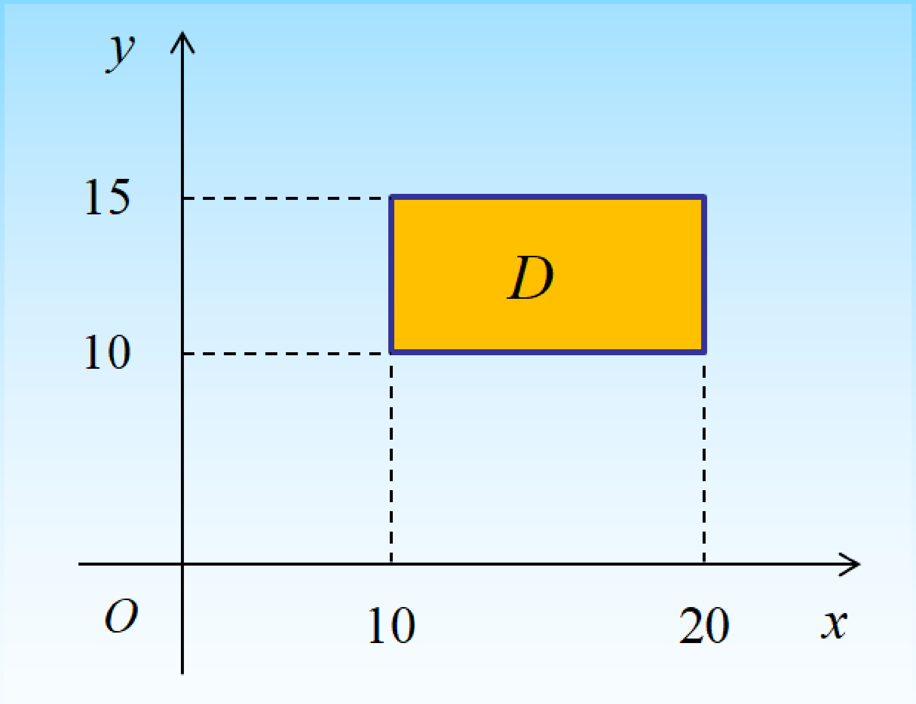
X和Y相互独立,(X,Y)的联合密度函数为

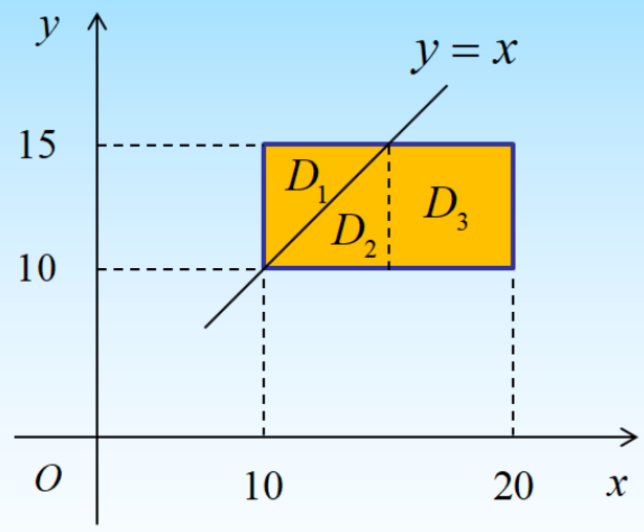
$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{50},10\le x\le 20,10\le y\le 15\\ 0 \quad , \quad otherwise\end{cases},$$

则期望利润为

$$EZ=Ef(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)dxdy$$

$$= \iint_D f(x, y) \frac{1}{50} dx dy$$





$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

$$= \iint_{D_1} (x+y)\frac{1}{50}dxdy + \iint_{D_2} 2y\frac{1}{50}dxdy + \iint_{D_3} 2y\frac{1}{50}dxdy$$

$$= \frac{1}{50}\int_{10}^{15} dx \int_{x}^{15} (x+y)dy + \frac{1}{50}\int_{10}^{15} dx \int_{10}^{x} 2ydy + \frac{1}{50}\int_{15}^{20} dx \int_{10}^{15} 2ydy$$

$$=\frac{1}{50}\left[\int_{10}^{15}\left(-\frac{3}{2}x^2+15x-\frac{225}{2}\right)dx+\int_{10}^{15}(x^2-100)dx+\int_{15}^{20}125dx\right]$$

$$=\frac{1}{50}\left(312.5+291.667+625\right)=24.58(\text{千元})。$$

三. 数学期望的性质

随机变量的数学期望具有下述基本性质,其中假设性质中的数学期望均存在。

(1) $Ec = c$;

(2) $E(cX) = cEX$ 。

(3) $E(X+Y) = EX + EY$;

(4)当X, Y独立时, $E(XY) = EX \cdot EY$

注：$EX^2=0$的充分必要条件是X取0的概率为1，即有$P(X=0)=1$。

定理5-3:(柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式)

$$\left(E(XY)\right)^2 \le E(X^2)\cdot E(Y^2)。$$

等号成立的充分必要条件是X,Y之间有线性关系的概率为1。

证明:对任意的实数t,考虑

$$E(tX+Y)^2 = E(t^2X^2+2tXY+Y^2)$$

$$=t^2E(X^2)+2tE(XY)+E(Y^2)$$

由于对于任意的实数t恒有

$$E(tX+Y)^2 \geq 0,$$

即 $$t^2E(X^2)+2tE(XY)+E(Y^2) \geq 0,$$

故判别式$\Delta \leq 0$, 即

$$\Delta = 4\left(E(XY)\right)^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0,$$

从而 $$\left(E(XY)\right)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)。$$

注:概率论形式的柯西不等式。

中学学的柯西不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

类似可以构造: $\sum_{k=1}^{n}(a_k t + b_k)^2 \geq 0,$

也可以构造:

$$
\begin{array}{c|cccc}
X \backslash Y & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\
\hline
a_1 & \frac{1}{n} & & \text{\huge 0} & \\
a_2 & & \frac{1}{n} & & \\
\vdots & & \text{\huge 0} & \ddots & \\
a_n & & & & \frac{1}{n}
\end{array}
$$

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i b_j p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_i b_i \frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i b_i,$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2, \quad E(Y^2)=\sum_{i=1}^{n}b_i^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i^2,$$

代入柯西不等式即可。

积分形式柯西不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

构造： $\int_a^b (tf(x)+g(x))^2 dx \ge 0$。

也可以构造：

设$Z \sim U[a,b]$，令$X = f(Z), Y = g(Z)$.

例5－16:设X服从二项分布,即
$X \sim B(n, p)$,试求EX。

解:由第三章二项分布可知,X可看作n次独立重复试验中事件A发生的次数,且$P(A) = p$,令

$$X_i = \begin{cases} 1, & 第i次试验A发生 \\ 0, & 第i次试验A没发生 \end{cases}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

则$X_1, \cdots, X_n$相互独立且都服从参数为p的$0-1$分布。易知有

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

$$EX = EX_1 + \cdots + EX_n$$

$$= np。$$

例:设X和Y都服从$N(\mu,\sigma^2)$,且X和Y独立,

求$E(\max\{X,Y\})$。

解: $X+Y \sim N(2\mu, 2\sigma^2), Z = X-Y \sim N(0, 2\sigma^2),$

$$\max\{X,Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2},$$

$$E(X+Y) = 2\mu,$$

$$E\left(|X-Y|\right) = E\left(|Z|\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz$$

$$= 2\int_0^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} d\left(\frac{z^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{2\times 2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} d\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right)$$

$$= -\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$

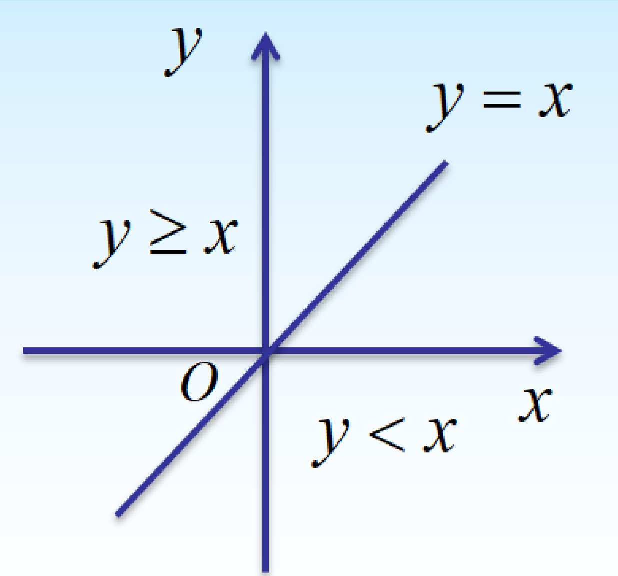
$$E(\max\{X,Y\}) = \frac{E(X+Y)+E(|X-Y|)}{2}$$

$$= \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}。$$

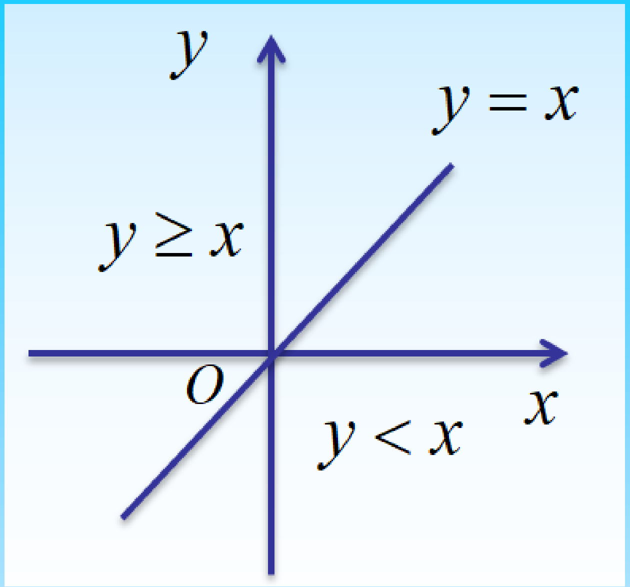
另解:

$$E(\max\{X,Y\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}p(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{y\geq x} yp_X(x)p_Y(y)dxdy+\iint\limits_{y<x} xp_X(x)p_Y(y)dxdy$$



$$\iint_{y \geq x} y p_X(x) p_Y(y) dxdy$$



$$= \iint_{y \geq x} y \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dxdy$$

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}, v = \frac{y-\mu}{\sigma}, dx = \sigma du, dy = \sigma dv,$$

$$\iint_{y \geq x} y p_X(x) p_Y(y) dxdy = \iint_{v \geq u} (\mu + \sigma v) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv$$

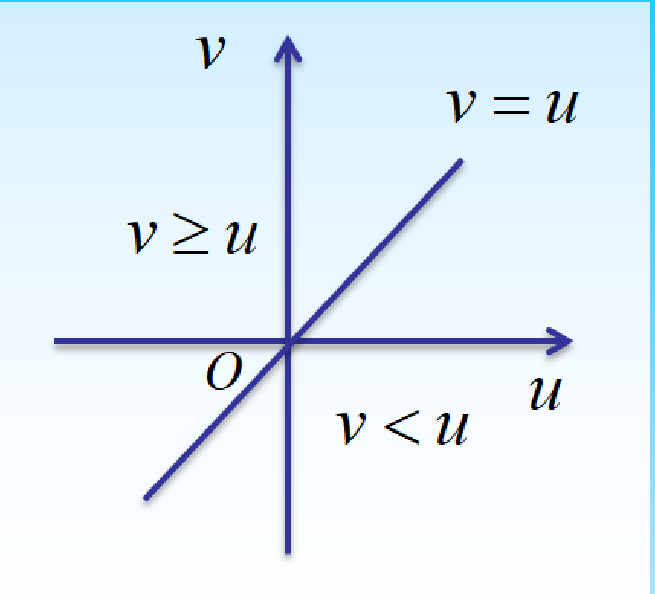
$$= \mu \iint_{v \geq u} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv + \sigma \iint_{v \geq u} v \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv$$

同理,

$$\iint_{y<x} x p_X(x) p_Y(y) dxdy$$

$$= \mu \iint_{v<u} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv + \sigma \iint_{v<u} u \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv$$

$$\iint_{v \ge u} v \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv$$



$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_{u}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_{u}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} d\left(-\frac{v^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(e^{-\frac{v^2}{2}} \right)_{u}^{+\infty} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{u^2}{2\times\frac{1}{2}}}du=\frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

同理,

$$\iint\limits_{v<u}u\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}dudv=\frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

$$\iint_{y\geq x} y p_X(x) p_Y(y) dxdy + \iint_{y<x} x p_X(x) p_Y(y) dxdy$$

$$= \mu \iint_{v\geq u} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv + \sigma \iint_{v\geq u} v \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv$$

$$+ \mu \iint_{v<u} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv + \sigma \iint_{v<u} u \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv$$

$$= \mu + \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\text{。}$$