习题课

级数的收敛、求和与展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \underset{\text{展开}}{\overset{\text{求和}}{\rightleftarrows}} S(x) \quad \text{(在收敛域内进行)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \begin{cases} \text{当 } x = x_0 \text{ 时为数项级数;} \\ \text{当 } u_n(x) = a_n x^n \text{ 时为幂级数;} \end{cases}$$

基本问题：判别敛散；　　求收敛域；

求和函数；　　级数展开.

一、数项级数的敛散法判别法

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 正项级数敛散性判别法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

满足 $\downarrow$

比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow[\text{其他方法}]{\rho = 1}$ 不定 $\begin{cases} \text{部分和极限} \\ \text{比较判别法} \\ \text{积分判别法} \end{cases}$

$\rho < 1$ $\downarrow$ 收 敛

$\rho > 1$ $\downarrow$ 发 散

3. 任意项级数敛散性判别法

概念: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛，称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \\ \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 发散，称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛} \end{cases}$$

Leibniz判别法: 若 $u_n \geq u_{n+1} > 0$，且 $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$，

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛，且 $|S| \leq |u_1|$, $|r_n| \leq |u_{n+1}|$.

任意项级数推广的敛散性判别法

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个任意项级数，则有

(1) 不等式形式的比较判别法：若存在某自然数 N，与常数 $k > 0$，当 $n > N$ 时，$|u_n| \le k|v_n|$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不绝对收敛。

(2) 极限形式的比较判别法：$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = k$，$0 \le k < +\infty$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。$0 < k \le +\infty$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不绝对收敛。

(3) 比值判别法：设 $n \geq 1$ 时，$u_n \neq 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = r$,

当 $r < 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；当 $r > 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

当 $r = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性无法判定。

(4) 根值判别法：设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = r$, 当 $r < 1$ 时，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；当 $r > 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

当 $r = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性无法判定。

例 $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\ (n = 2, 3, \cdots)$，若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 在收敛区间内的和函数为 $S(x)$, 则 $S(x)=\underline{\dfrac{1}{1-x-x^2}}$

解： 用 $1\text{-}x\text{-}x^2$ 乘幂级数，并展开得

$$(1-x-x^2)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

$$=(1-x-x^2)\cdot(a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+\cdots)$$

$$=a_1+(a_2-a_1)x+(\underbrace{a_3-a_2-a_1}_{\to 0})x^2+(\underbrace{a_4-a_3-a_2}_{\to 0})x^3+\cdots$$

$$=a_1+(a_2-a_1)x\ =1$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \frac{1}{1-x-x^2}$$

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=$ $\underline{\qquad\frac{\pi}{4}\qquad}$

解：$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$

$$\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan(\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n})$$

$$=\arctan(n+1)-\arctan n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}(\arctan(n+1)-\arctan 1)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

例 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

解： $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 .

注意： 反之不成立. 例如，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 .

例 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

解： 不能！ 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 收敛, 能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛？

解： $\because |u_n v_n| \le \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$, 由条件知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$ 收敛,

由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛。

例 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛, 证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 也绝对收敛 .

解： 由前两例知结论成立.

例 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛 .

解： 由题设 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛， $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(u_n+v_n)^2}{u_n+v_n} = \lim_{n\to\infty}(u_n+v_n) = 0$$

根据比较判别法的极限形式知结论正确.

例 若对任意的 n, 都有 $u_n > 0, v_n > 0$, 且 $u_n v_n \le u_{n+1} v_{n+1}$, 证明若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n}$ 收敛。若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。 **(07-08, 六)**

解: $\because u_n v_n \le u_{n+1} v_{n+1}$, $\therefore \frac{v_n}{v_{n+1}} \le \frac{u_{n+1}}{u_n}$,

所以 $\frac{v_1}{v_2} \cdots \frac{v_{n-1}}{v_n} \cdot \frac{v_n}{v_{n+1}} \le \frac{u_2}{u_1} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\therefore \frac{v_1}{v_{n+1}} \le \frac{u_{n+1}}{u_1}$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n}$ 收敛，

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

例 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，且 $a_n \le c_n \le b_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛 .

证: $\because 0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n \quad (n=1, 2, \cdots)$，则由题设

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) \text{ 收敛}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(c_n - a_n) + a_n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

例 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛？说明理由.

解: 对正项级数,由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,但对任意项级数却不一定收敛．例如,取

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 1$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散．

例 下列选项中一定正确的是 (***B***).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$
$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散;

B. 若 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1\,(n=1,2,\cdots)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必发散;

C. 若 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1\,(n=1,2,\cdots)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛;

D. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$.

例 设 $0 \le a_n < \dfrac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$,下列级数一定收敛的是 ($\boldsymbol{D}$).

$A.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad B.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad C.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \quad D.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$

$A.\ a_n = \dfrac{1}{n+1}$ $\qquad B.\ a_n = \dfrac{1}{3n} + \dfrac{(-1)^n}{3n}$

$C.\ a_n = \dfrac{1}{n+1}$ $\qquad D.\ {a_n}^2 < \dfrac{1}{n^2}$

级数绝对收敛 .

例 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下面命题正确的是（ A ）

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛 $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$

解： 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， 则加括号后仍收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛

例 设 a 为正常数，$a \neq 1, \lim n^{\rho}(\sqrt[n]{a}-1)a_n = 1,$

且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 ρ 为 $\underline{\quad \rho > 2 \quad}$

解： $\because \sqrt[n]{a}-1 \sim \ln a \cdot \dfrac{1}{n}, \quad n \to \infty$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n^{\rho}(\sqrt[n]{a}-1)a_n = \lim_{n\to\infty} \ln a \cdot \frac{a_n}{\dfrac{1}{n^{\rho-1}}} = 1$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由比较判别法知，

需要 $\rho - 1 > 1$，即 $\rho > 2$.

例 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10} n}$ 的敛散性.

用洛必达法则

解: $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^{10} n}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10} n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln^{10} x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10\ln^{9} x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10\cdot 9\cdot 8\cdot\cdots\cdot 2}=\infty$$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, ∴原级数发散

例 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$;

解: $\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})>0$, 且 $\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}\quad(n\to\infty)$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 发散;

因 $u_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})$ 单调递减, 且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

由Leibniz判别法知级数收敛;

所以原级数条件收敛.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$;

解: 令 $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n-1}>0$, 且 $\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\quad(n\to\infty)$

故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$发散; 令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\frac{-(x+1)}{(x-1)^2 2\sqrt{x}}<0\qquad(x\geq 2)$$

所以 u_n 单调递减趋于0，由Leibniz判别法知级数收敛。

所以原级数条件收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

解：

因 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{\dfrac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}}$

$$= \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1$$

所以原级数绝对收敛 .

例 对 α,β 的值，讨论一般项为 $u_n=\sin\dfrac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$ 的级数的敛散性。

解： $$u_n=\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi=\sin[n\pi+(\alpha+\tfrac{\beta}{n})\pi]$$
$$=(-1)^n\sin(\alpha+\tfrac{\beta}{n})\pi$$

当n充分大时，$\sin(\alpha+\frac{\beta}{n})\pi$ 定号，

级数在某项以后可视为交错级数。

当α不为整数时，

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}|\sin(\alpha+\tfrac{\beta}{n})\pi|=|\sin\alpha\pi|\neq 0$$

所以级数发散。

当α为整数时，$u_n = (-1)^{n+\alpha}\sin\frac{\beta}{n}\pi$,

当$\beta > 0$时，$\sin\frac{\beta}{n}\pi$ 单调递减趋于0, 由Leibniz判别法知

级数收敛，又$\sin\frac{\beta}{n}\pi \sim \frac{\beta}{n}\pi, n \to \infty$，所以级数条件收敛。

当$\beta < 0$时，一般项与$\beta > 0$时只相差一个符号，

所以级数也条件收敛。

当$\beta = 0$时，$u_n = 0$，级数(绝对)收敛。

例 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}})$ 敛散性。若收敛是绝对收敛还是条件收敛 **(10-11, 三.8)**

解:

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1)x^{-\frac{3}{2}}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{-\frac{3}{2}}}{-x^{-2}}=\frac{1}{2}$$

由比较判别法极限形式知，级数不绝对收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛

$\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)=0$ 且 $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1$ 单调递减

则由Leibniz判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)$ 收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}})$ 收敛

故级数条件收敛

例 下列级数中收敛的是 (C) **(10-11, 一.5)**

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{n+1})^n$ $\lim_{n\to\infty}(-1)^n(\frac{n}{n+1})^n \neq 0$ 级数发散

(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sqrt{n}}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛, 则级数发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1$ 级数收敛

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}})$ $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}) \bigg/ \frac{1}{n} = 1$ 级数发散

例 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，且极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 存在，求 r 的值

(10-11, 三.6)

解: 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，

则级数非正项或者负项级数，

由 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |r|$

当 $|r|<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，

当 $|r|>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，

当 $r=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 级数为同号级数。则 $r=-1$

二、求幂级数收敛域的方法

- 标准形式幂级数: 先求收敛半径 R :

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ 或 } \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

再讨论 $x = \pm R$ 处的敛散性 .

- 非标准形式幂级数 $\begin{cases} \text{通过换元转化为标准形式} \\ \text{直接用比值法或根值法} \end{cases}$

例 求下列级数的敛散域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$

解: $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$

$\therefore R=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 故 $-\frac{1}{\mathrm{e}}<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时原级数收敛.

当 $x=\pm\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $|u_n|=\left[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\mathrm{e}}\right]^n$ $\boxed{e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$ (P33)

$$>\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0 \quad (n\to\infty)$$

因此级数在端点发散，故收敛域为$(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}})$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$

解: 因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}|x|^{2(n+1)}}{\frac{n}{2^n}|x|^{2n}} = \frac{x^2}{2}$

当 $\frac{x^2}{2}<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数收敛;

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，一般项 $u_n=n$ 不趋于0，级数发散;

故收敛域为 $(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$.

例 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛半径.

解: 分别考虑偶次幂与奇次幂组成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}x^{2k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_{k+1}(x)}{\alpha_k(x)}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{4^{2(k+1)}x^{2(k+1)}}{2(k+1)}\Big/\frac{4^{2k}x^{2k}}{2k}=(4x)^2,\quad \therefore R_1=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\beta_{k+1}(x)}{\beta_k(x)}\right|=(2x)^2,\quad \therefore R_2=\frac{1}{2}$$

注意: 此题 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 极限不存在

$\because$ 原级数 $=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k(x)$

$\therefore$ 其收敛半径 $R=\min\{R_1,R_2\}=\frac{1}{4}$

例 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径。

(10-11, 二.3)

解: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2)^n$

则由题级数当 $|x^2| < R$ 收敛，$|x^2| > R$ 发散，

即级数当 $|x| < \sqrt{R}$ 收敛，$|x| > \sqrt{R}$ 发散，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$

三、幂级数和函数的求法

- 求部分和式极限
- 初等变换法: 分解、套用公式
- 映射变换法 (在收敛区间内)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} \arrow[rr, "\text{逐项求导或求积分}"'] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & & \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n} \arrow[d, "\text{求和}"] \\
\boxed{S(x)} & & \boxed{S^*(x)} \arrow[ll, "\text{对和函数求积或求导}"]
\end{tikzcd}$$

- 数项级数求和
  - 直接求和: 直接变换, 求部分和等
  - 间接求和: 转化成幂级数求和, 再代值

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)\,!} x^{2n+1}$ 的和函数.

解： 易求出级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}(x^{2n+2})' = \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \right)'$$

$$= \frac{1}{2}(x\sin x)' = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

例 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和 .

解： 原式 $= \frac{1}{2}[\cos 1 + \sin 1]$

可利用上例取 $x=1$ 求和.

例 求下列幂级数的和函数：

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)};$$

解： 收敛域为 $(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$.

$$原式=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^{2n-1})' =\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)'=\left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 收敛域为 $[-1,1]$.

$x\neq 0$

原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=(1-\frac{1}{x})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n+1$$

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$, 则 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

两边同时积分得 $\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt$

则 $f(x)-f(0)=f(x)=-\ln(1-x)$

则原式 $=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)\qquad(0<|x|<1)$

即得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)$， $0<|x|<1$

在 $x=0$， $x=\pm 1$ 时, 级数也收敛。

又 $\lim_{x\to 0}\left[1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)\right]=1+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=0$

$\lim_{x\to 1}\left[1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)\right]=1+\lim_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x)=1$

根据和函数的连续性 , 有

$$S(x)=\begin{cases}1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x), & 0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$$

例 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n})$

解： 考虑幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$， $(-1,1)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=xf(x)$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt+f(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad S(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

则原极限为 $S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

四、函数的幂级数展开

- 直接展开法 — 利用泰勒公式
- 间接展开法 — 利用已知展式的函数及幂级数性质

例 将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数. **(07-08, 一(6))**

解:

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{2^n},\quad x\in(-2\,,2)$$

例 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成麦克劳林级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解: $\because\quad \dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$

$$\therefore\quad \arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

于是 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] x^{2n}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, \qquad x \in [-1,1]$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1)-1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}}$$

作业

高等数学习题集

P219　　3 (3)(4)(8)(10),

4 (1)(2)(3)(5),

5 (1)(2)

备用题 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足 $y''-2xy'-4y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$

(1) 证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\quad n=1,2,\cdots$

(2) 求 $y(x)$ 的表达式.　　　(2007考研)

解: 设 $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,则由 $y(0)=0, y'(0)=1$ 得 $a_0=0, a_1=1$

$$\therefore\quad y=x+\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n,\qquad y'=1+\sum_{n=2}^{\infty} n\,a_n x^{n-1},$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2}$$

代入微分方程得

$$2a_2+(6a_3-6)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n]x^n=0$$

可见 $a_2=0,\ a_3=1,\quad a_{n+2}=\dfrac{2n+4}{(n+2)(n+1)}a_n=\dfrac{2}{n+1}a_n$

$\because\ a_1=1,\ \therefore\ a_3=\dfrac{2}{1+1}a_1$，故得 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n\quad(n=1,2,\cdots)$

(2) 由(1) 知 $a_{2m}=0$

$$a_{2m+1}=\frac{2}{2m}a_{2m-1}=\frac{1}{m}a_{2m-1}=\frac{1}{m(m-1)}a_{2(m-1)-1}$$

$$=\frac{1}{m(m-1)\cdots 2}a_{2\times 2-1}=\frac{1}{m!}\quad(m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\quad y(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\,!}x^{2m+1}=x\,e^{x^2}$$

例　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}$ 的和函数.

法2 先求出收敛区间 $(-\infty,+\infty)$，设和函数为 $S(x)$，则

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}$$

$$= \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \frac{x}{2}\sin x$$

$$\therefore \quad S(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$的和 .

解: 原式= $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[(2n+1)+1\right]}{(2n+1)!}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 1+\sin 1]$$

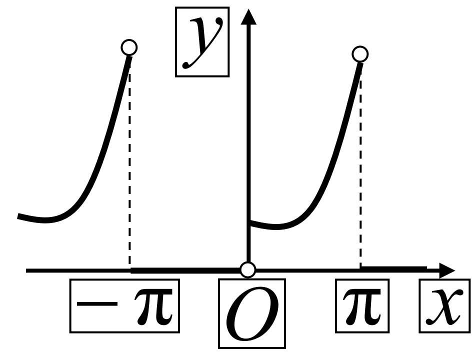
注: 本题也可利用上例取 $x=1$求和.

五、 函数的傅式级数展开法

系数公式及计算技巧; 收敛定理; 延拓方法

例 设 $f(x)$是周期为2π的函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[-\pi,0) \\ e^x, & x\in[0,\pi) \end{cases}$

将其展为傅氏级数 .



解:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{1+n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\ \frac{e^x(\sin nx - n\cos nx)}{1+n^2}\ \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{n}{\pi}\frac{1-e^{\pi}(-1)^n}{1+n^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)$$

$$(\ x \neq k\pi\,, k = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \cdots)$$

思考： 如何利用本题结果求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}$ 的和？

提示： 根据傅式级数收敛定理 , 当 $x = 0$ 时, 有

$$\frac{e^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2} = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{1}{2}$$