《数理统计》模拟试卷四答案

一、单项选择题（总共 5 题，每题 3 分）：

1. C
2. A
3. A
4. D
5. C

二、填空题（总共 5 题，每题 2 分）：

1. $\le \alpha$

2.点估计，区间估计，假设检验

3. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$

4. $\frac{\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right)^2}{\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2/n-1}$

5. $\frac{\frac{X_1-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}{n-1}}}$

三、计算题（共 5 题，每题 15 分，共计 75 分）：

1. （1）由于$\left(\bar{x}\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=(34.02，35.98)$

所以$\bar{x}=\dfrac{34.02+35.98}{2}=35$

$$s=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-34.02)}{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}=\frac{35-34.02}{1.96/\sqrt{64}}=4$$

（2）$H_0:\mu\ge 34.5\ vs\ H_1:\mu<34.5$

检验的拒绝域为$W=\{T<t_\alpha(n-1)\}$，其中 $T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$.

$t_\alpha(n-1)=-t_{0.99}(63)=-2.387$，

$t=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/s=\sqrt{64}(35-34.5)/4=1>t_\alpha(n-1)=-2.387$

所以不能拒绝原假设，即给定显著水平 0.01 认为总体均值不小于 34.5 克。

2. (1) $H_0:\ \sigma_1^2=\ \sigma_2^2\ \ vs\ \ H_1:\ \sigma_1^2\ne\ \sigma_2^2$

拒绝域为$W=\left\{F\le F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)或F\ge F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\right\}$，其中 $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$

$$F_{0.025}(7,8)=\frac{1}{F_{0.975}(8,7)}=0.2041<F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{0.0279}{0.03}=0.9286<F_{0.975}(7,8)=4.5286$$

不拒绝原假设，即 $\sigma_1^2=\ \sigma_2^2$

(2) $H_0:\mu_1=\mu_2\ \ vs\ \ H_1:\mu_1\ne\mu_2$

检验的拒绝域为$W=\left\{\left|T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\}$，$S_w=\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$

$$S_w=\sqrt{\frac{(8-1)\times 0.0279+(9-1)\times 0.03}{8+9-2}}=0.1704$$

$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}=\frac{14.975-15}{0.1704\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}}=-\frac{0.025}{0.0828}=-0.3019$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)=t_{0.975}(15)=2.1314$

由于$|t|=0.3019<2.1314$，所以不能拒绝原假设，
即在 0.05 的显著性水平下认为 A、B 两个工人加工的零件重量的均值无显著差异。

3、（1）p 的点估计为$\bar{x}=10/40=0.25$

估计标准差=$\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}=\sqrt{\frac{0.25\times 0.75}{40}}=0.0685$

（2）p 的 90% 置信区间：

$$\left(\bar{x}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}},\bar{x}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right)$$
$$=(0.25-1.645\times 0.0685, 0.25+1.645\times 0.0685)$$
$$=(0.1374, 0.3626)$$

（3）不拒绝，因为 90% 置信区间包含 p=0.25。

4、（1）$\mathrm{H}_0:\mu_1=\mu_2\ vs\ \mathrm{H}_1:\mu_1\neq\mu_2$

检验的拒绝域为$W=\left\{\left|T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\}$，$S_w=\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$

$s_x^2=(10733.39-251.9^2/6)/5=31.55767$
$s_y^2=(10444.59-245.9^2/6)/5=73.35767$
$s_w=\sqrt{(31.55767+73.35767)/2}=7.242767$

$$T=\frac{\bar{\mathrm{x}}-\bar{\mathrm{y}}}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}=\frac{41.98-40.98}{7.242767\times\sqrt{1/3}}=0.2391$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)=\mathrm{t}_{0.975}(10)=2.2281$

由于$|\mathrm{T}|=0.2391<2.2281$，所以不能拒绝原假设，
即面料在两种条件下的破断载荷能力相同。

（2）在正态假定下，$d=x-y\sim N(\mu,\sigma_d^2)$，其中$\mu=\mu_X-\mu_Y,\sigma_d^2=\sigma_X^2+\sigma_Y^2$
假设检验问题转化为 $H_0:\mu=0\ vs\ H_1:\mu\neq 0$

检验的拒绝域为$W=\left\{\left|T=\frac{\bar{d}}{s_d\sqrt{\frac{1}{n}}}\right|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$，

其中$\bar{d}=\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}d_i=1$, $s_d=\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\bar{d}\right)^2\right)^{1/2}=\sqrt{39.6}=6.2929$

$$T=\frac{\bar{d}}{s_d\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{39.6}\times\sqrt{1/6}}=0.3892$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\mathrm{t}_{0.975}(5)=2.5706$

由于$|\mathrm{T}|=0.3892<2.5706$，所以不能拒绝原假设，
即面料在两种条件下的破断载荷能力相同。

5、（1）$E\hat{\theta}_1=E(X_1/n)=\frac{np}{n}=p$, $E\hat{\theta}_2=E(\bar{X}/n)=\frac{np}{n}=p$，

所以$\hat{\theta}_1=X_1/n$和$\hat{\theta}_2=\bar{X}/n$（其中$\bar{X}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i$）为$p$的两个无偏估计

（2）$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)=p(1-p)/n, \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)=p(1-p)/(kn)$，当$k\geq 2$时，$\hat{\theta}_2$更有效。