

离散数学模拟试题 A

一、选择题(每题 1 分, 共 12 分), 下列每题只有一个正确答案, 选择正确答案并将序号填写在括号内。

1. 若 $P - Q = P$, 下列条件为真的是 ()

A. $P \cap Q = \phi$

B. $Q = P$

C. $P \subseteq Q$

D. $Q \subseteq P$

2. 下列命题为真的是 ()

A. $a \in \{\{a\}\}$

B. $A - B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$

C. $A \oplus A = A$

D. $A = \{x\} \cup x$, 则 $x \in A$ 且 $x \subseteq A$

3. 设 R 是集合 A 上的二元关系, 下述论断不正确的是 ()

A. 若 R 是自反的, 则 $s(R), t(R)$ 是自反的;

B. 若 R 是对称的, 则 $r(R), t(R)$ 是对称的;

C. 若 R 是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的;

D. 若 R 是反对称的, 则 $t(R)$ 是反对称的。

4. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 下面关系 R 不是等价关系的是 ()

A. $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

B. $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$

C. $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$

D. $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$

5. 下列是两个命题变元 p, q 的小项是 ()

A. $p \wedge \neg p \wedge q$

B. $\neg p \vee q$

C. $\neg p \wedge q$

D. $\neg p \vee p \vee q$

6. 设 $P: 2 \times 2 = 5$, Q : 雪是黑的, $R: 2 \times 4 = 8$, S : 太阳从东方升起, 下列命题的值为 T 的是 ()

A. $P \rightarrow Q \wedge R$

B. $R \rightarrow P \wedge S$

C. $S \rightarrow Q \wedge R$

D. $(P \wedge R) \vee (Q \wedge S)$

7. 下面哪个公式是永真式 ()

A. $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

- B. $\exists x(F(x) \wedge G(x))$
 C. $\forall x F(x) \rightarrow (\exists x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall x F(x))$
 D. $\neg(\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y)$

8. 谓词公式 $(\forall x)(P(x) \vee (\exists y)R(y)) \rightarrow P(z)$ 中的 z 是 ()

- A. 自由变元
 B. 约束变元
 C. 既是自由变元又是约束变元
 D. 既不是自由变元又不是约束变元

9. 下列公式中正确的等价式是 ()

- A. $(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x)$
 B. $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x)$
 C. $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)A(x, y)$
 D. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

10. 给定无向图如图 a, 图 b 所示, 下面说法正确的是 ()

- A. a 是 b 的真子图
 B. a 和 b 是同构的
 C. a 是 b 的补图
 D. a 和 b 不同构

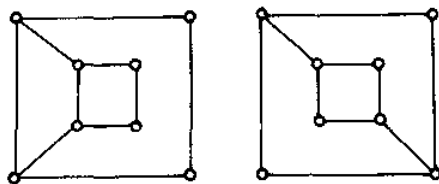


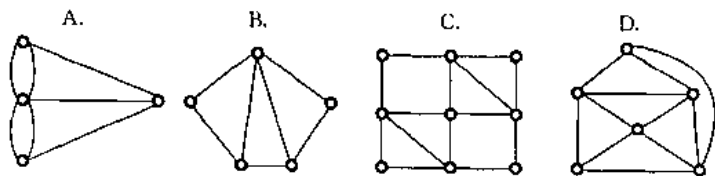
图 a

图 b

11. n 个结点的无向完全图 K_n , 则 K_n 的边数为 ()

- A. $n(n+1)$
 B. $n(n+1)/2$
 C. $n(n-1)$
 D. $n(n-1)/2$

12. 下图中是欧拉图的是 ()



二、填空题(每空 1 分, 共 13 分), 请将正确的答案填在横线内。

1. 设 $A = \{0, \{0\}\}$, 则 $P(A) - \{0\} = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(A) \oplus A = \underline{\hspace{2cm}}$.
 2. 令 $S = \{100, 101, \dots, 999\}$, 则 S 中至少含有数字 3 或 7 的数有 个。

3. 已知集合 $|A|=2$, 则 A 上可以定义____个不同的二元关系 ; ____个不同的偏序关系。

4. 设 $S = \{1, 2\}$, R 是 S 上的二元关系 , 且 xRy , 如果 R 是数的小于等于关系 , 则 $x = \underline{\quad} y = \underline{\quad}$ 或者 $x = \underline{\quad} y = \underline{\quad}$ 。

5 . 设解释 I 为 : 个体域 $D = \{1, 2\}$, $f(1) = 2, f(2) = 1$, $F(x, y) : x \leq y$ 。在 I 下 , 公式 $\forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow F(f(x), f(y)))$ 的真值是____。

6. 令 p : 经一事 , q : 长一智。则命题“不经一事 , 不长一智”的符号化形式为 :
 7. 无向图 G 有 12 条边 , 6 个 3 度结点 , 其余结点度数都小于 3 , 则 G 中结点数至少是____。

8. $G = (V, E), V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 的邻接矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 v_2 的入度=____ ,

v_1 到 v_4 长度为 2 的路有____条。

9. 一个连通的 (n, m) 平面图的面数为 k , 则 m, n, k 满足的 Euler 公式为____。

三、计算题(要求写出计算过程, 每题 5 分, 共 35 分)

1. 某电路上有一个灯泡和三个开关 A,B,C。已知在且仅在下述四种情况下灯亮 :

- a. C 的搬键向上, A,B 的搬键向下 ;
- b. A 的搬键向上, B,C 的搬键向下 ;
- c. B,C 的搬键向上, A 的搬键向下 ;
- d. A,B 的搬键向上, C 的搬键向下 ;

设 F 表示灯亮, p, q, r 分别表示 A,B,C 的搬键向上, 则求命题公式 F 的主合取范式。

2. 找出下列集合等式成立的充分必要条件, 并简单说明理由

$$(A - C) \cup B = A \cup B$$

3. 求下面公式的前束范式

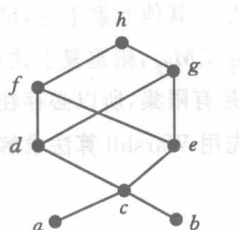
$$(\neg \exists x F(x) \vee \forall y G(y)) \wedge (F(x) \rightarrow \forall z H(z))$$

4. 设 N 是自然数集合, $R = \{(x, y) | x \in N, y \in N, x + y \text{ 是偶数}\}$ 。

(1) R 是不是等价关系, 为什么? ; (2) 求 R 的等价类

5. 图 G 是 n 阶无向简单图, 令 $\delta(G)$ 表示最小度, 且有 $\delta(G) = n - 1$, 令 $\Delta(G)$ 表示最大度, 计算(1) $\Delta(G)$, (2) G 的各顶点度数。

6. 集合 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, 给定偏序集的哈斯图如下图所示, 设 $B = \{c, d, e\}$ 试求 A 和 B 的最大元, 极大元, 最小元, 极小元。



7. 设 $X = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\}$, 求 $r(R), s(R), t(R)$
 四、证明题(每题 4 分, 共 16 分)

1. A, B, C 为三个集合, 证明: 若 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $B = C$ 。

2. 设 A 是正整数集合, 在 $A \times A$ 上定义二元关系 R 如下:

$((x, y), (u, v)) \in R$ 当且仅当 $xv = yu$, 证明: R 为等价关系。

3. 若无向简单图 G 有 $2n$ 个顶点, 每个顶点的度数至少为 n , 证明此图是连通图。(提示: 可考虑采用反证法)

4. 利用推理规则证明, 前提 $q \rightarrow p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$; 结论 $p \wedge q \wedge s \wedge t$

五、综合题(每题 8 分, 共 24 分)

1. 75 位学生去书店买《语文》、《数学》、《英语》课外书, 每种书每位学生至多可以买 1 本。已知有 20 位学生每人买 3 本书, 55 位学生每人至少买两本书。设每本书的价格都是 1 元, 所有的学生共花费 140 元。求 (1) 至少买两本书的学生花费多少元? (2) 恰好买 1 本书的学生有多少位? (3) 没买书的学生有多少位?

2. 令 $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ 分别为语句“ x 是偶数”, “ x 是有理数”, “ x 是分数”, “ x 是素数”用量词、逻辑联结符和 $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ 表示下列语句。假定个体域是实数集合。

(1) 如果存在偶数, 则所有有理数都可以表示成分数。

(2) 如果存在素数, 则存在有理数。

(3) 如果存在偶素数, 则存在分数。

(4) 能从(1)和(2)推出(3)吗? 为什么?

3. 某单位拟招聘 7 人分别完成 7 项工作 w_1, w_2, \dots, w_7 , 现有 10 位申请者 p_1, p_2, \dots, p_{10} , 申请者能胜任的工作如表 1 所示, 如何安排工作使无工作的人最少?

表 1 申请者胜任的工作

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
w_1	√			√				√	√	
w_2		√					√			
w_3			√			√	√	√		
w_4			√							
w_5	√			√						√
w_6	√	√			√					
w_7		√			√					