11.3 条件收敛与绝对收敛

11.3.1 交错级数

交错级数

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots$ 满足 $u_n u_{n+1} < 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则称此级数为交错级数. 显然交错级数可写成如下形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + \cdots + (-1)^{n}u_n + \cdots,$$

其中 $u_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$.

例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

是一个交错级数.

定理 3.1 (莱布尼茨定理). 如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足

(1) $u_{n+1} \le u_n (n = 1, 2, \cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛, 且其和 $s \le u_1$, 余项 $r_n = s - s_n$ 的绝对值 $|r_n| \le u_{n+1}$.

- 交错级数 $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 收敛
- 交错级数 $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$ 收敛
- 交错级数 $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{10^n}$ 收敛

例 3.1. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 的收敛性.

解: 令 $u_n = \frac{\ln n}{n}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. 由于

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0, \quad x > e,$$

从而当 $n \ge 3$ 时, 数列 $\{u_n\}$ 是单调递减的. 又

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

故由莱布尼茨定理知该级数收敛.

11.3.2 条件收敛与绝对收敛

绝对收敛

对于任意的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果级数的每一项取绝对值后组成的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

条件收敛

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 是绝对收敛的 , 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛的.

定理 3.2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛.

例 3.2. 讨论下列级数的收敛性, 若收敛则指出是绝对收敛还是条件收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$.

解:

(1) 因为对任意 x, $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由正项级数的比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|$ 收敛, 从而原级数绝对收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 即级数的一般项不趋于零, 故原级数发散.

例 3.3. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 条件收敛.

例 3.4. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 绝对收敛.

例 3.5. 讨论下列级数的收敛性, 若收敛则指出是绝对收敛还是条件收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{n!}$.

解:

(1) 条件收敛.

(2) 发散.

例 3.6. 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 的敛散性, 若收敛, 指明是条件收敛还是绝对收敛.

解: 由于

$$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}} \le \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2+\lambda}\right),$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\lambda}$ 都收敛, 所以由正项级数的比较判别法知原级数绝对收敛.

11.3.3 练习与思考

练习 284. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 (　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散　　(D) 以上均不正确

C

练习 285. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^{3-p}} + \frac{1}{n^p}\right)$, 下列结论正确的是 (　　)

(A) 当 $p > 0$ 时, 级数收敛

(B) 当 $p > 1$ 时, 级数收敛

(C) 当 $0 < p < 2$ 时, 级数绝对收敛

(D) 当 $1 < p < 2$ 时, 级数绝对收敛

D

练习 286. 证明下列级数绝对收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$.

练习 287. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛性.

解: 令 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, 易知 $\{u_n\}$ 是单调递减数列, 且

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

故由莱布尼茨定理知级数收敛, 且条件收敛.

练习 288. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ 的收敛性, 若收敛, 指明条件收敛还是绝对收敛.

解: 令 $u_n = \frac{1}{n-\ln n}$. 对函数 $f(x) = \frac{1}{x-\ln x}$, 有

$$f'(x) = -\frac{x-1}{x(x-\ln x)^2} < 0 \ (x > 1),$$

即 $f(x)$ 是单调下降的, 从而 u_n 是单调递减的. 同时

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n} = 0,$$

故由莱布尼茨定理知该级数收敛. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n-\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}\ln n} = 1,$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$ 发散. 于是原级数条件收敛.