上海财经大学《高等数学(工科类)II》课程考试卷

学年学期: 2022-2023学年第二学期

一、填空题 (本题共6小题, 每小题2分, 满分12分)

1. 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{x=0}^{y=2}$ ________.
2. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为 ________.
3. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint_D(x^2-y)dxdy=$ ________.
4. 假设L为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，该椭圆的周长为 l，则第一类曲线积分 $\oint_L(b^2x^2+a^2y^2+abxy)ds=$ ________.
5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$ 的收敛区间为 ________.
6. 方程 $y''+y=x\cos 2x+e^{2x}$ 的特解形式可设为 $y^*=$ ________.

二、选择题 (本题共6小题, 每小题2分, 满分12分)

1. 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是 (　)
   A. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于0
   B. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于0
   C. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于0
   D. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在
2. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy=$ (　)
   A. $\int_0^a dy\int_0^y f(x,y)dx$
   B. $\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx$
   C. $\int_0^a dy\int_a^y f(x,y)dx$
   D. $\int_0^a dy\int_0^a f(x,y)dx$
3. 若 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于 (　)
   A. -1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 条件收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 绝对收敛，则 (　)
   A. $0<\alpha\le\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$
   C. $1<\alpha\le\frac{3}{2}$
   D. $\frac{3}{2}<\alpha<2$
5. 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的一阶线性齐次方程的解，则 (　)
   A. $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$
   B. $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$
   C. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$
   D. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

6. 三元函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？（　）
   A. $(0,1,2)$
   B. $-(0,1,2)$
   C. $(0,1,1)$
   D. $(1,1,1)$

三、计算题 (本题共9小题, 每小题7分, 满分63分)

1. 设函数 $z = f(x,y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$，求函数 $z(x,y)$；试问点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的连续点？是否为 $f(x,y)$ 的极值点？如果为极值点，是极大值点还是极小值点？
2. 设函数 $z = f(xy, yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{x=1,y=1}$。
3. 计算三重积分 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的立体。
4. 计算 $I = \int_L \frac{xdy+(1-y)dx}{x^2+(y-1)^2}$，其中L为从点 $M(1,0)$ 沿曲线 $y = k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)(k \neq 1)$ 到点 $N(-1,0)$。
5. 设 Σ 为平面 $x-y+z=1$ 介于三坐标平面间的有限部分，法向量与 z 轴正向夹角为锐角，计算 $I = \iint_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$。
6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$。
7. 求微分方程 $y'' + 2y' + 2y = x(2x + e^x)$ 的通解。
8. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离。
9. 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_n - na_{n+1}]$ 收敛，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性。

四、证明题 (本题满分4分)

1. 证明：函数 $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ 在点 $(0,0)$ 处的全微分不存在。