7.2 空间向量及其应用

7.2.1 向量的概念

- 既有大小又有方向的量叫做向量 (或矢量). 因此, 从原点到点 (x, y, z) 所确定的有向线段是一个向量, 我们也把形如 (x, y, z) 的有序数组称为$\mathbb{R}^3$ 的向量.
- 为了与点的坐标相区别, 我们常把向量记为 $\{x, y, z\}$, 称为向量的坐标表示, x, y, z 叫做向量的三个分量.
- 同时, 把空间 $\mathbb{R}^3$ 中某向量平移后所得到的有向线段认为是同一个向量, 我们称这种向量为自由向量, 简称向量.

- 空间中起点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 到终点 $B(x_2, y_2, z_2)$ 的有向线段, 当然也可以看成是一个向量.
- 此向量经过平移后将点 A 置于原点, 易得此向量可表示为 $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, 通常记为
$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$
- 特别地, 当 A 为原点 $O(0, 0, 0)$ 时, 即 $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 这个向量叫做点 B 对于点 O 的向径, 常用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

- 一般用黑体字母表示向量, 如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$.
- 向量的大小叫做向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$.
- 模等于 1 的向量叫做单位向量(或幺矢).
- 模等于零的向量叫做零向量, 记为 $\mathbf{0}$, 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看作是任意的.

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反, 则称这两个向量平行, 记为 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 显然, 零向量平行于任何向量.

分别以 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示与 x 轴、y 轴、z 轴正向同方向的单位向量, 并称它们为 $Oxyz$ 坐标系的 基本单位向量. 于是, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 也可以表示为
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}.$$
上式称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 按基本单位向量的分解式, $(x_2 - x_1)\boldsymbol{i}$, $(y_2 - y_1)\boldsymbol{j}$, $(z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x, y, z 轴上的分向量.

- 假设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 对应向量 $\overrightarrow{OA}$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 对应向量 $\overrightarrow{OB}$, 那么向量 $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ 由 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 所决定, 即向量 $\overrightarrow{AB}$ 是向量 $\overrightarrow{OB}$ 与向量 $\overrightarrow{OA}$ 的差向量.
- 对于两个向量的差 $\mathbf{0} - \overrightarrow{OB} = \{-x_2, -y_2, -z_2\}$, 记为 $-\overrightarrow{OB}$, 称为向量 $\overrightarrow{OB}$ 的负向量.

7.2.2 向量的运算

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

由向量及其坐标的相互唯一确定可知, 两个向量相等的充要条件是它们的坐标对应相等, 即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z.$$

由向量的加法与数乘的运算法则有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}.$$

从而有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$

当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$等价于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\lambda$ 为某一常数), 也即等价于

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

加法满足交换律和结合律:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

如果 $\overrightarrow{OA}$ 垂直于 $\overrightarrow{OB}$, 记为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

定理 2.1. 设向量 $\overrightarrow{OA}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\overrightarrow{OB}=\{x_2,y_2,z_2\}$, 则 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 的充分必要条件是 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

例 2.1. 设 $\boldsymbol{a}=\{3,-5,8\}$, $\boldsymbol{b}=\{-1,1,z\}$, 且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 求 z.

解: 因为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{2,-4,8+z\},\quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{4,-6,8-z\},$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=4+16+(8+z)^2=20+(8+z)^2,$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=16+36+(8-z)^2=52+(8-z)^2,$$

所以

$$20+(8+z)^2=52+(8-z)^2,$$

解得 $z=1$.

例 2.2. 已知以向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线向量为 $\overrightarrow{AC} = \{3,4,5\}$, $\overrightarrow{DB} = \{1,2,3\}$, 试求向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

解: 由题意知

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$$

两式相加减得

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}),$$
$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}).$$

代入点的坐标得

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}[\{3,4,5\} + \{1,2,3\}] = \{2,3,4\},$$
$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}[\{3,4,5\} - \{1,2,3\}] = \{1,1,1\}.$$

例 2.3. 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M, 使

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$$

解: 记 A,B,M 的向径分别为 $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B, \boldsymbol{r}_M$, 则

$$\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A, \quad \overrightarrow{MB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_M.$$

因此 $\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A = \lambda(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_M)$, 从而

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}(\boldsymbol{r}_A + \lambda\boldsymbol{r}_B).$$

代入向径 $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$ 的坐标得

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}[\{x_1,y_1,z_1\} + \lambda\{x_2,y_2,z_2\}] = \left\{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right\}.$$

上式右端即为点 M 的坐标. 这样的点叫作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点.

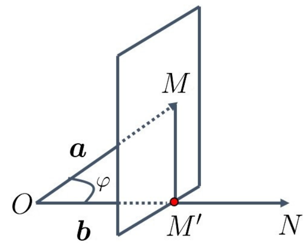
例 2.4. 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$, 求与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量.

解: 易知

$$\overrightarrow{AB} = \{3,1,-2\},$$

故 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}$. 因此所求的单位向量为

$$\boldsymbol{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}\{3,1,-2\} = \left\{\pm\frac{3}{\sqrt{14}}, \pm\frac{1}{\sqrt{14}}, \mp\frac{2}{\sqrt{14}}\right\}.$$



7.2.3 方向角、方向余弦以及向量在轴上的投影

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 规定 $\angle AOB\ (0 \le \angle AOB \le \pi)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 记作 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个零向量, 规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

指定了方向的直线称为轴. 如果轴 u_1 与轴 u_2 不在同一平面内, 则可在空间任取一点 O, 过点 O 分别作与轴 u_1, u_2 平行且指向分别相同的轴 u_1' 与轴 u_2', 将轴 u_1' 与轴 u_2' 的夹角规定为轴 u_1 与轴 u_2 的夹角.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角: 作一轴 u' 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向, 轴 u' 与轴 u 的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角.

设有一轴 u, $\overrightarrow{AB}$ 是轴 u 上的有向线段. 如果数 λ 满足 $|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$, 且当 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴同向时 λ 是正的, 当 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴反向时 λ 是负的, 则称数 λ 为轴 u 上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值, 记作 AB, 即 $\lambda = AB$.

投影

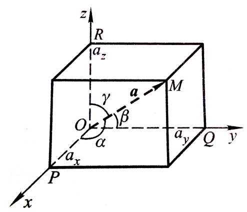
设空间一点 M 和一轴 u, 过 M 作与轴 u 垂直的平面 Π, Π 与轴 u 的交点 M' 称为点 M 在轴 u 上的投影.

- 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B', 在轴 u 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影, 记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$, 即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = A'B'$, 其中轴 u 称为投影轴.
- 向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 a_u.
- 向量在轴上的投影是数而不是向量.
- 向量在轴上投影的坐标表示式: 如果轴 u 是数轴, 点 A' 的坐标是 u_1, 点 B' 的坐标是 u_2, 则 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = u_2 - u_1$.

投影定理

定理 2.2. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘轴与向量的夹角 θ 的余弦, 即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$.

推论 2.3. 两个相等的向量在同一轴上的投影相等.



定理 2.4. 有限个向量的和在轴上的投影等于它们分别在该轴上的投影之和, 即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

数与向量的乘积在轴上的投影满足

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}.$$

设轴 u 与向量 $\boldsymbol{b}$ 同向, 则定义向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影, 记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$. 同样, 向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, 则

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\quad \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

例 2.5. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$, $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角为 $\frac{2}{3}\pi$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影.

解:

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},u)=4\cos\frac{2}{3}\pi=-2.$$

方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向所成的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角($0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi$), 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 方向角完全确定了向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{a_x,a_y,a_z\}$, 则由投影定理得

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$$

其中

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

由此可得与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\left\{\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

故有关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 2.6. 已知点 $M(2,2,\sqrt{2})$ 和 $N(1,3,0)$, 计算向量 $\overrightarrow{MN}$ 的模, 方向余弦与方向角.

解: $\overrightarrow{MN} = \{-1,1,-\sqrt{2}\}$.

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

例 2.7. 设有两点 $M_1(5,0,4)$ 与 $M_2(1,3,7)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦及方向和 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 一致的单位向量.

解: $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-4,3,3\}$.

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-4)^2+3^2+3^2} = \sqrt{34}.$$

于是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{34}}, \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{34}},$$

方向和 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 一致的单位向量为

$$(\overrightarrow{M_1M_2})^0 = \{-\frac{4}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\}.$$

例 2.8. 若点 M 的向径与 x 轴成 $\frac{\pi}{4}$ 角, 与 y 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 模为 6, 在 z 轴上的投影是负值, 求点 M 的坐标.

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}$, 由关系式 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 得

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}.$$

由于在 z 轴上的投影是负值, 故 $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$. 因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= |\overrightarrow{OM}|(\overrightarrow{OM})^0 = |\overrightarrow{OM}|\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} \\ &= 6\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\} = \{3\sqrt{2}, 3, -3\}.\end{aligned}$$

所以点 M 的坐标为 $(3\sqrt{2},3,-3)$.