大学生数学竞赛辅导

内蒙古大学鄂尔多斯学院数学教研组

目　录

第一章　极限与连续

题型一　求数列的极限

数列$\{x_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的计算方法通常有以下六种:

(1)利用数列极限的运算法则和一些常用的结论

• **设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$;**

, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\left(|q|<1\right),\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=\begin{cases}0,|q|<1\\1,|q|=1\\+\infty,|q|>1\end{cases}$;

f $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1(a>0),\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$;

„ $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

例 1.极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^4}+\frac{1^2+2^2}{n^4}+\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^4}\right)=$____________.

解:由于

$$\frac{1^2}{n^4}+\frac{1^2+2^2}{n^4}+\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^4}=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\left(1^2+2^2+\cdots+k^2\right)=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6n^4}\sum_{k=1}^{n}\left(2k^3+3k^2+k\right)=\frac{1}{6n^4}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$=\frac{1}{6n^4}\left[2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{6n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^4}+\frac{1^2+2^2}{n^4}+\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^4}\right)=\frac{1}{12}$.

例 2.极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{n^3\sin\frac{1}{n^2}}-3\right)\sin n^2=$______________.

解:由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{n^3\sin\frac{1}{n^2}}-3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2\sin\frac{1}{n^2}}-\frac{5}{n^3\sin\frac{1}{n^2}}-3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2\sin\frac{1}{n^2}}-\frac{5}{n^3\sin\frac{1}{n^2}}-3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2\sin\frac{1}{n^2}}-\frac{5}{n}\frac{1}{n^2\sin\frac{1}{n^2}}-3\right)=3-3=0,$$

$\{\sin n^2\}$有界,故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{n^3\sin\frac{1}{n^2}}-3\right)\sin n^2=0$.

例 3.已知$a_1\geq 0,\cdots,a_m\geq 0$,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1{}^n+\cdots+a_m{}^n\right)^{\frac{1}{n}}=$____________.

解:由于$\max\{a_1,\cdots,a_m\}\leq\left(a_1{}^n+\cdots+a_m{}^n\right)^{\frac{1}{n}}\leq m^{\frac{1}{n}}\max\{a_1,\cdots,a_m\}$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1{}^n+\cdots+a_m{}^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$.

例 4.使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-a^{2n}}{1+a^{2n}}a\right)=\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx$成立的$a=$_________.

解:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-a^{2n}}{1+a^{2n}}a\right)=\begin{cases}a,|a|<1\\0,|a|=1\\-a,|a|>1\end{cases}$,$\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx=\dfrac{1}{4}$,故$a=\dfrac{1}{4}$.

例 5.$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{2+n}}=$____________.

解:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{2+n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}\right)^{\left(\sqrt{1+n}+\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(2)利用 Heine 定理将抽象数列的极限转化为具体函数的极限

Heine 定理: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ **的充分必要条件是:对于任意满足条件** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ **且** $x_n\neq x_0(n\in N^+)$ **的数列** $\{x_n\}$**,相应的函数值数列** $\{f(x_n)\}$ **成立** $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$**.**

例 6.设数列$\{x_n\}$满足$x_n \neq 0(n\in N^+)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,计算$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解:我们考虑函数极限

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+\frac{\sin x}{x}-1)}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x-x}{x^3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

例 7.求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$,其中$a>0,b>0,c>0$.

解:由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}}=\lim\limits_{t\to 0^+}e^{\frac{\ln\frac{a^t+b^t+c^t}{3}}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(a^t+b^t+c^t)-\ln 3}{t}}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{a^t\ln a+b^t\ln b+c^t\ln c}{a^t+b^t+c^t}}=e^{\frac{\ln abc}{3}}=\sqrt[3]{abc}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n=\sqrt[3]{abc}$.

(3)利用夹逼准则

例 8.求$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+p}+\frac{1}{n^2+2p}+\cdots+\frac{1}{n^2+np})$.

解:由于$\frac{n^2}{n^2+np}\leq n(\frac{1}{n^2+p}+\frac{1}{n^2+2p}+\cdots+\frac{1}{n^2+np})\leq\frac{n^2}{n^2+p}$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+p}+\frac{1}{n^2+2p}+\cdots+\frac{1}{n^2+np})=1$.

(4)利用单调有界准则

适用题型:(I)由递推关系$x_{n+1}=f(x_n)$定义的数列$\{x_n\}$极限问题,一般先用单调有界准则证明极限存在,然后等式两边取极限求出极限。

(II)有些题目直接给出了数列$\{x_n\}$的通项公式,要求我们证明数列

$\{x_n\}$**的极限存在,这时优先考虑用单调有界准则证明其极限存在。**

例 9.设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} \, (n \in N^+)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限。

解:先证明数列$\{x_n\}$是单调减少的。

由于 $x_{n+1} - x_n = \sqrt{6 + x_n} - x_n = \dfrac{(3 - x_n)(2 + x_n)}{\sqrt{6 + x_n} + x_n} \le 0 (\forall n \in N^+)$,所以数列$\{x_n\}$是单调减少的。

注意到$0 \le x_n \le x_1 (\forall n \in N^+)$,于是数列$\{x_n\}$有界,故数列$\{x_n\}$极限存在。设$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$， 等式 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 两边取极限得 $a = \sqrt{6 + a}$,即 $a = 3$ 或 $a = -2$,又 $0 \le a \le x_1 = 10$,所以 $a = 3$,亦即 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$.

例 10.设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < p$, $x_{n+1} = \sin x_n (n \in N^+)$.

(I)证明$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$存在,并求该极限;

(II)计算$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解:(I)用数学归纳法证明数列$\{x_n\}$是单调减少的且有界。

由$0 < x_1 < p$ 得 $0 < x_2 = \sin x_1 \le x_1 < p$;

设$0 < x_n < p$,则 $0 < x_{n+1} = \sin x_n \le x_n < p$,所以数列$\{x_n\}$是单调减少的且有界,故$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$存在。

记 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, 于 是 $0 \le a \le p$. 由 $x_{n+1} = \sin x_n$ 得 $a = \sin a$, 注 意 到 函 数 $f(x) = x - \sin x$在$[0, p]$上是单调增加的,所以$a = 0$,即$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

(II) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

例 11.证明: (1)对任意正整数n,都有$\dfrac{1}{n+1} < \ln(1 + \dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$;

(2)设 $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \mathrm{L\ L} + \dfrac{1}{n} - \ln n (n \in N^+)$,证明数列$\{x_n\}$收敛。

证明: (1)由于 $f(x) = x - \ln(1 + x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加,从而当 $x > 0$ 时

$f(x)>f(0)=0$,所以对任意正整数n,都有$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$.

由于$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$在$[0,+\infty)$上单调增加,从而当$x>0$时$g(x)>g(0)=0$,所以对任意正整数$n$,都有$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$.

故对任意正整数n,都有$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$.

(2)先证明数列$\{x_n\}$是单调减少的。

我们考虑 $x_{n+1}-x_n=[1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)]-(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$

$=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0(\forall n\in N^+)$,这表明数列$\{x_n\}$是单调减少的。

注意到

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0(\forall n\in N^+)$$

从而数列$\{x_n\}$有界,故数列$\{x_n\}$收敛。

(5)利用定积分的定义

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=\int_a^b f(x)dx$**,其中**

$x_i\in\left[a+\frac{i-1}{n}(b-a),a+\frac{i}{n}(b-a)\right](1\le i\le n)$.

例 12.计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})$.

解:$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+1})=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$.

例 13.计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)})$.

解:$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n-1)})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\bullet\frac{2}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n-1}{n}}\right]=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 3.$$

例 14.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{p}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2p}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\mathrm{L\ L}+\dfrac{\sin p}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解:注意到

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{ip}{n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{ip}{n}}{n+\frac{1}{i}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{ip}{n}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{ip}{n}=\int_0^1\sin p\,xdx=\dfrac{2}{p}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{ip}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\bullet\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{ip}{n}\right)=\int_0^1\sin p\,xdx=\frac{2}{p}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{p}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2p}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\mathrm{L\ L}+\dfrac{\sin p}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{p}$.

(6)利用 *Taylor* 展开式

要熟记常用函数 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^a$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\mathrm{L}+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\mathrm{L}+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\mathrm{L}+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{L}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^a=1+a\,x+\frac{a\,(a-1)}{2}x^2+\mathrm{L}+\frac{a\,(a-1)\mathrm{L}\,(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

例 15.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2p\,en!)$.

解:由于 $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\mathrm{L}+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}+o\left(\dfrac{1}{(n+1)!}\right)$,故

$2p\,en!=2p\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\mathrm{L}+\dfrac{1}{n!}\right)n!+\dfrac{2p}{n+1}+o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$,从而

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2p\, en!) = \lim_{n\to\infty} n\sin(\frac{2p}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)) = \lim_{n\to\infty} n\frac{2p}{n+1} = 2p\ .$$

题型二　求函数的极限

函数极限的计算方法通常有以下五种:

(1)利用左、右极限

由于$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$,鉴于此,如果我们要考查函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限是否存在,我们可以去考查函数$f(x)$在$x_0$处的左、右极限是否存在并相等。

适用题型:多用于判别一个分段函数$f(x)$在分段点x_0处的极限是否存在。

例 16.当$x\to 1$时,函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限 (　　)

(A)等于 2.　　(B)等于 0.　　(C)为∞.　　(D)不存在但不为∞.

解:由于

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

则当$x\to 1$时,函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限不存在但不为$\infty$.

注: 这里特别应注意的是$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

例 17.求$\lim_{x\to 0}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}]$.

解:由于$\lim_{x\to 0^+}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}] = 1, \lim_{x\to 0^-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}] = 1$,故$\lim_{x\to 0}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}] = 1$.

(2)利用两个重要极限

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ **(或者** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ **)**，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

在处理1^∞型极限时,经常将所求极限"凑"成基本极限$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$的形式,然后求出极限。

例 18.求$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{p}{x}}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{p}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\bullet\frac{(\cos\sqrt{x}-1)p}{x}}=e^{-\frac{p}{2}}$.

例 19.求极限$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+\frac{\ln(1+x)}{x}-1]^{\frac{1}{e^x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}[1+\frac{\ln(1+x)}{x}-1]^{\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}\bullet[\frac{\ln(1+x)}{x}-1]\bullet\frac{1}{e^x-1}}$

而$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}-1]\bullet\frac{1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\bullet(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

故$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(3)利用等价无穷小代换

在处理函数极限的过程中,如果我们能恰当地利用等价无穷小代换,可以使计算简化。我们把常用的等价无穷小代换列举如下:

$$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x$$

当$x\to 0$**时,**$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

$$\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x$$

例 20.设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中$a^2+c^2\neq 0$,则必有(　　)

(A) $b=4d$ (B) $b=-4d$ (C) $a=4c$ (D) $a=-4c$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\dfrac{\tan x}{x}+b\dfrac{1-\cos x}{x}}{c\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+d\dfrac{1-e^{-x^2}}{x}}=\dfrac{a}{-2c}=2$,

从而 $a=-4c$.

例 21.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{(\sin x)^4}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t-\sin t)t}{t^4}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}=\dfrac{1}{6}$.

例 22.设当 $x\to 0$ 时, $\arcsin\left(\sin^2 x\right)\ln\left(1+x^2\right)$ 是比 $\left(e^x-1\right)\sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $\sin\left(\sqrt{1-x^{n+1}}-1\right)$ 是比 $\ln^2\left(e^{\sin^2 x}+\sqrt{1-\cos x}\right)$ 高阶的无穷小,则正整数 $n=$_______.

解:由于当 $x\to 0$ 时, $\arcsin\left(\sin^2 x\right)\ln\left(1+x^2\right)\sim x^4$, $\left(e^x-1\right)\sin x^n\sim x^{n+1}$,故 $n+1<4$.

当 $x\to 0$ 时, $\sin\left(\sqrt{1-x^{n+1}}-1\right)\sim -\dfrac{1}{2}x^{n+1}$, $\ln^2\left(e^{\sin^2 x}+\sqrt{1-\cos x}\right)\sim 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,故 $2<n+1$,于是 $n+1=3$,故 $n=2$.

例 23.已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=4$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

解:由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=4$,故 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]=0$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=0$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{1-\cos x}}{x\ln 2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}}{x\ln 2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\ln 2}\bullet\dfrac{f(x)}{x^3}=4$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=2\ln 2$.

(4)利用洛必达法则求不定式极限

适用题型:

(I)求$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限;

(II)求$\infty-\infty$型不定式极限,此时$\infty-\infty$型可化成$\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$型,再通分变成$\frac{0-0}{0}$型,即$\frac{0}{0}$型;

(III)求$0\bullet\infty$型不定式极限,此时$0\bullet\infty$型可化成$\frac{1}{\infty}\bullet\infty$型或$0\bullet\frac{1}{0}$型,即$\frac{\infty}{\infty}$型或$\frac{0}{0}$型;

(IV)求∞^0型、1^∞型、0^0型不定式极限,此时∞^0型、1^∞型、0^0型极限$\lim f(x)^{g(x)}$可以通过对数恒等式统一化成$\lim e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$,这里的$\lim g(x)\ln f(x)$已成为$0\bullet\infty$型.

例 24.设函数$F(x)=\int_0^x t\sin\left(x^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt$,则$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x^3}=$__________.

解:因为$F(x)=\int_0^x t\sin\left(x^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\int_0^x\sin\left(x^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}d(x^2-t^2)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{u}du$

所以$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{u}du}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

例 25.设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)dt}{e^{2x^2}-2e^{x^2}+1},x\neq0\\ a,x=0\end{cases}$在点$x=0$处连续,则常数$a=$__________.

解:$a=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)dt}{e^{2x^2}-2e^{x^2}+1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)dt}{\left(e^{x^2}-1\right)^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)dt}{x^4}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\sin^2x\right)\sin2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\bullet2x}{4x^3}=\frac{1}{2}$.

对洛必达法则的延伸:洛必达法则其实也适用于求$\frac{*}{\infty}$型不定式极限。

例 26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx$.

解: $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xd\left(\int_0^x f(t)dt\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\left[y\int_0^y f(t)dt-\int_0^y\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx\right]$

$$=\int_0^{+\infty} f(x)dx-\lim_{y\to+\infty}\frac{\int_0^y\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx}{y}=\int_0^{+\infty} f(x)dx-\lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)dt=0.$$

(5)利用 *Taylor* **展开式**

例 27.设 $x\to 0$ 时, $e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o(x^3)$,求常数 A,B,C 的值。

解:由于 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

故 $\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o(x^3)$

即 $1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3+o(x^3)=1+Ax+o(x^3)$

于是 $\begin{cases}1+B=A\\ \frac{1}{2}+B+C=0\\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0\end{cases}$ 解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.

例 28.求 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=\tan(\tan x)-\sin(\sin x)$ 的等价无穷小。

解:由于

$$\sin x=x+o(x^2),\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$
$$\tan x=x+o(x^2),\tan x=x+\frac{2}{3!}x^3+o(x^4)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

于是

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o\left(\sin^4 x\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)-\frac{1}{6}\left(x+o(x^2)\right)^3+o\left(x^4\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)-\frac{1}{6}\left(x^3+o(x^4)\right)+o\left(x^4\right)$$
$$=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$
$$\tan(\tan x)=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+o(\tan^4 x)$$
$$=\left(x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^4\right)\right)+\frac{1}{3}\left(x+o(x^2)\right)^3+o(x^4)$$
$$=\left(x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^4\right)\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+o(x^4)\right)+o(x^4)$$
$$=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^4)$$

由此得到 $\tan(\tan x)-\sin(\sin x)=x^3+o(x^4)\sim x^3(x\to 0)$

即 $x\to 0$ 时, $\tan(\tan x)-\sin(\sin x)$ 的等价无穷小为 x^3.

例 29.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}dt-\frac{x^2}{2}}{x^3\left(\sqrt[3]{1+x}-e^x\right)}$.

解:由于

$$x^3\left(\sqrt[3]{1+x}-e^x\right)=x^3\left[\left(1+\frac{1}{3}x+o(x)\right)-\left(1+x+o(x)\right)\right]=-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\sim-\frac{2}{3}x^4(x\to 0)$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}dt-\frac{x^2}{2}}{x^3\left(\sqrt[3]{1+x}-e^x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}dt-\frac{x^2}{2}}{-\frac{2}{3}x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-x}{-\frac{8}{3}x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-1}{-8x^2}=\frac{1}{32}.$$

题型三　连续函数零点定理和介值定理的应用

连续函数的零点定理是:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)=0$.

因此,对 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$,如果要证明存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)=0$,需在 (a,b) 内找到两点 $c,d\,(c<d)$ 使得 $f(c)f(d)<0$.

如果要证明存在 $x\in(a,b)$ 使得 $G(x,f(x))=0$(其中 $G(x,f(x))$ 是关于 x 与 $f(x)$ 的某个代数式),则需作辅助函数 $F(x)=G(x,f(x))$(这里 $G(x,f(x))$ 是将欲证等式左边的 x 改为 x 所得),并在 (a,b) 内寻找满足 $F(c)F(d)<0$ 的两个不同点 c 与 d.

连续函数零点定理有各种形式的推广,例如:

(1)设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $f(a)f(+\infty)<0$,则存在 $x\in(a,+\infty)$ 使得 $f(x)=0$(其中 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 可为常数,或 $+\infty$,或 $-\infty$);

(2)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $f(-\infty)f(+\infty)<0$,则存在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f(x)=0$(其中 $f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$).

连续函数的介值定理是:

在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值。

例 30.设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $\int_0^1 f(x)dx<-\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$,证明:存在 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x)+x=0$.

证明:作辅助函数 $F(x)=f(x)+x$,于是只要证明存在 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $F(x)=0$ 即可。显然 $F(x)=f(x)+x$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,并且

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}+1\right]=+\infty>0$$

此外由 $\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1[f(x)+x]dx=\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2}<0$ 知存在 $h\in[0,1]$ 使得 $F(h)=\int_0^1 F(x)dx<0$，于是由连续函数的零点定理知存在 $x\in(h,+\infty)\subset(0,+\infty)$ 使得 $F(x)=0$，即 $f(x)+x=0$.

例 31.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=0$ (n 是正整数),证明:

(1)当 n 是奇数时,存在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $x^n+f(x)=0$;

(2)当 n 是偶数时,存在 $h\in(-\infty,+\infty)$ 使得对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$h^n+f(h)\le x^n+f(x).$$

证明:(1)作辅助函数 $F(x)=x^n+f(x)$,于是只要证明存在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $F(x)=0$ 即可。显然 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,并且

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^n+f(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}x^n\left[1+\frac{f(x)}{x^n}\right]=+\infty>0$$

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^n+f(x)\right]=\lim_{x\to-\infty}x^n\left[1+\frac{f(x)}{x^n}\right]=-\infty<0$$

于是由连续函数的零点定理知存在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $F(x)=0$,亦即 $x^n+f(x)=0$.

(2)当 n 是偶数时,由 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$ 知存在 $N>0$ 使得当 $|x|>N$ 时有 $F(x)>|F(0)|+1$.此外,存在 $h\in[-N,N]$ 使得 $F(h)$ 是 $F(x)$ 在 $[-N,N]$ 上的最小值,于是在 $[-N,N]$ 上 $F(x)\ge F(h)$,所以对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $F(h)\le F(x)$,即 $h^n+f(h)\le x^n+f(x)$.

例 32.设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$a<c<d<b$,证明:对任意正数 p 和 q,存在 $x\in[c,d]$ 使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(x)$.

证明:记 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上的最小值为 m ,最大值为 M ,则

$$\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q} \geq \frac{pm+qm}{p+q}=m$$

$$\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q} \leq \frac{pM+qM}{p+q}=M$$

于是由连续函数的介值定理知存在 $x\in[c,d]$ 使得 $f(x)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$,

即 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(x)$.

第一章习题

1.设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$,求出函数 $f(x)$ 的解析表达式,并画出它的图形。

2.利用夹逼准则计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.(提示:应用不等式 $2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$)

3.设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n\,(n=2,3,\cdots)$,证明:

(1)方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 内有惟一的实根 x_n;

(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4.设 $x_1=1,x_{n+1}=\sin x_n\,(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$__________.

5.设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上递减的连续函数,且 $f(x)>0$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛,其中 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=$____________ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\ln n}{n-\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}=$____________

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sin\dfrac{\pi}{n}\right)^{n}=$___________.

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)\right]=$______________.

8.求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_m^{\frac{1}{n}}}{m}\right)^n$,其中 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\dfrac{1}{k}}=$______________

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$________________

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{p}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2p}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin p}{n+\frac{1}{n}}\right)=$_________________

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)=$_______________

10.应用 *Stolz* 定理考虑下述问题:

(1)证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

(2)设 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$;

(3)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$;

(4)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}$;

(5)设 $0<l<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+l\,a_{n-1}+l^2a_{n-2}+\cdots+l^na_0\right)=\dfrac{a}{1-l}$.(提示:令 $l=\dfrac{1}{t}$)

注:(*Stolz* 定理) 设 $\{y_n\}$ 是单调增加的正无穷大量,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$ (a 可以为有限量, $+\infty$ 与 $-\infty$),则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a$.

11.计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arctan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{\ln(1+x)}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

(8) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\mathrm{L}\ +e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}(n\in Z_+)$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}dt-\frac{x^2}{2}}{-\frac{2}{3}x^4}$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(\sin^2 x)\ln(1+x^2)}{(e^x-1)\sin x^2}$

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$

(17) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\int_2^x\left[\int_t^2 e^{-u^2}du\right]dt}{(x-2)^2}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

(19)设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f(1)=0,\ f'(1)=1$,则

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x\left(t\int_t^1 f(u)\,du\right)dt}{(x-1)^3}=\underline{\qquad\qquad}.$$

12.已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=4$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

13.已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{x}=6$,求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

14.已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^2$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

15.设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 附近有定义,且在点 $x=1$ 处可导, $f(1)=0, f'(1)=2$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{x^2+x\tan x}$.

16.已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{3^x-1}=5$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

17.设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$,求 $f'(0)$.

18.设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义, $f(0)=1$,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x\bullet f(x)}{e^{x^2}-1}=0$.

证明:函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

19.设 $f'(1)=1$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left[\ln\left(1+x^2\right)+e^x-x\right]-f(1)}{\tan x\bullet\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.

20.设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$, A 为常数,求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

21.设函数 $f(x)$ 在 $a\le x\le b$ 上连续,且 $f(x)>0$,又设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}dt$,证明 $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内恰有一实根。

22.设对任意 $x,y\in[a,b]$ 有 $a\le f(x)\le b,|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$ (其中常数 $k\in(0,1)$).证明存在唯一的 $x\in[a,b]$ 使得 $x=f(x)$.

23.设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a<c<d<b$,证明:对任意正数 p 和 q ,存在 $x\in[c,d]$ 使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(x)$.

24.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b(n\ge 3)$,则在 $[x_1,x_n]$ 中至少有一点 x 使 $f(x)=\dfrac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

第二章　一元函数微分学

题型一 利用导数定义讨论函数 $f(x)$ 在一点 $x=x_0$ 处的可导性

例 1. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2$，则 $f'(0)=$__________.

解:由于 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=2$,所以有 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}+f(x)\right]=0$,

由此得到 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-1$,从而

$$2=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x}\right)+\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

故 $f'(0)=2$.

例 2.设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 都是收敛于零的正项数列,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0-b_n)}{a_n+b_n}=$____________.

解:由 $f(x)$ 在点 x_0 处可导知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}=f'(x_0),\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0-b_n)-f(x_0)}{-b_n}=f'(x_0)$$

于是 $f(x_0+a_n)=f(x_0)+f'(x_0)a_n+o(a_n)$, $f(x_0-b_n)=f(x_0)-f'(x_0)b_n+o(b_n)$

所以 $\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0-b_n)}{a_n+b_n}=f'(x_0)+\frac{o(a_n)-o(b_n)}{a_n+b_n}$.

由于 $\left|\frac{o(a_n)-o(b_n)}{a_n+b_n}\right|\le\frac{|o(a_n)|}{a_n+b_n}+\frac{|o(b_n)|}{a_n+b_n}\le\frac{|o(a_n)|}{a_n}+\frac{|o(b_n)|}{b_n}\to0\,(n\to\infty)$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0-b_n)}{a_n+b_n}=f'(x_0)$.

题型二 求给定函数的导数与微分,包括高阶导数、复合函数的求导、隐函数和参数方程所确定的函数求导

例 3.求下列函数的导数:

(1) $y=x^x(x>0)$;　　(2) $y=x^{x^x}(x>0)$.

解: (1) $y'=(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

(2) $y'=(x^{x^x})'=(e^{x^x\ln x})'=e^{x^x\ln x}[(x^x)'\ln x+x^{x-1}]$

$=e^{x^x\ln x}[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}]$

$=x^{x^x}[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}]$.

注:在处理函数 $u(x)^{v(x)}$ (其中 $u(x)>0$, $u(x),v(x)$ 均可导)的导数时,我们经常先把函数 $u(x)^{v(x)}$ 变形为 $e^{v(x)\ln[u(x)]}$,再对函数 $e^{v(x)\ln[u(x)]}$ 运用复合函数的求导法则。

例 4.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{f(y)}x=e^y\ln 29$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq 1$,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ______________.

解: $e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'(y)\dfrac{dy}{dx}=e^y\bullet\dfrac{dy}{dx}\bullet\ln 29$

于是 $e^{f(y)}+e^y\ln 29 f'(y)\dfrac{dy}{dx}=e^y\ln 29\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow e^{f(y)}=e^y\ln 29\left[1-f'(y)\right]\dfrac{dy}{dx}$

从而 $e^y\ln 29=xe^y\ln 29\left[1-f'(y)\right]\dfrac{dy}{dx}$,故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\left[1-f'(y)\right]}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left[1-f'(y)\right]-xf''(y)\dfrac{dy}{dx}}{x^2\left[1-f'(y)\right]^2}=-\frac{\left[1-f'(y)\right]^2-f''(y)}{x^2\left[1-f'(y)\right]^3}.$$

例 5.已知 $\begin{cases}x=\ln\left(1+e^{2t}\right)\\ y=t-\arctan e^t\end{cases}$,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{e^t}{1+e^{2t}}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{1+e^{2t}-e^t}{2e^{2t}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}(-2e^{-2t}+e^{-t})}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{-2e^{-2t}+e^{-t}-2+e^t}{4e^{2t}}$$

例 6. $y=x^2e^{2x}$,求 $y^{(20)}$.

解: $y^{(20)}=(x^2e^{2x})^{(20)}=2^{20}e^{2x}\bullet x^2+20\bullet 2^{19}e^{2x}\bullet 2x+\frac{20\bullet 19}{2!}2^{18}e^{2x}\bullet 2$

$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$.

注 1: *Leibniz* 公式 $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}(n\in N)$ 是一种常用的计算高阶导数的方法。

注 2:以下是一些常用的结论

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\bullet\frac{p}{2})(n\in N)$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\bullet\frac{p}{2})(n\in N)$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(n\in N^+)$$

题型三 求函数 $f(x)$ 的极值、单调区间、最值

在判别一个函数 $f(x)$ 的单调性时,我们经常用到下面两个熟知的结论。

(1)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,若 (a,b) 中除至多有限个点有 $f'(x)=0$ 之外都有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加。

(2)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,若 (a,b) 中除至多有限个点有 $f'(x)=0$ 之外都有 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。

例 7.求 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值。

解: $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$,于是

$f^{'}(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt=2x(x^2-1)e^{-q^2(x)}=2x(x-1)(x+1)e^{-q^2(x)}$,其中 $q(x)$ 介于 1 与 x^2 之间。令 $f^{'}(x)=0$ 得 $x=-1,0,1$,从而 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 及 $[1,+\infty)$ 上单调增加,在 $(-\infty,-1]$ 及 $[0,1]$ 上单调减少,所以 $x=-1,x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点,极小值为 $f(-1)=f(1)=0$, $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,极大值为 $f(0)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$.

例 8.现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体容器。已知上下两底的材料费为单位面积 a 元,而侧面的材料费为单位面积 b 元。试给出最节省的设计方案:即高和上下底的直径之比为何值时所需费用最少?

解:设圆柱体容器的高与底的直径分别为 h 与 d,则所需费用为

$$L=2a\bullet p\left(\frac{d}{2}\right)^2+b\bullet 2p\bullet\frac{d}{2}\bullet h=\frac{1}{2}p\,ad^2+p\,bdh$$

由 $V=p\left(\frac{d}{2}\right)^2h$ 得 $h=\frac{4V}{p\,d^2}$,于是 $L=\frac{1}{2}p\,ad^2+\frac{4bV}{d}(d>0)$.

$L=\frac{1}{2}p\,ad^2+\frac{2bV}{d}+\frac{2bV}{d}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}p\,ad^2\bullet\frac{2bV}{d}\bullet\frac{2bV}{d}}=3\sqrt[3]{2p\,ab^2V^2}$,其中等号成立当且仅当 $\frac{1}{2}p\,ad^2=\frac{2bV}{d}$,即 $d=\sqrt[3]{\frac{4bV}{p\,a}}$.所以,高与底的直径之比为

$\frac{h}{d}=\frac{\frac{4V}{p\,d^2}}{d}=\frac{4V}{p}\frac{1}{d^3}=\frac{4V}{p}\bullet\frac{p\,a}{4bV}=\frac{a}{b}$ 时所需费用最少。

题型四 讨论方程实根个数

如果函数 $f(x)$ 在其定义域内连续,那么我们就可以按下列步骤来讨论方程 $f(x)=0$ 实根的个数:

(1)确定函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)在每一段单调区间上借助零点定理去确定方程 $f(x)=0$ 有无实根;

(3)统计方程 $f(x)=0$ 实根的个数。

例 9.求方程$k\arctan x-x=0$不同实根的个数,其中k为参数。

解:令 $f(x)=k\arctan x-x(x\in R)$,显然 $f(0)=0$.

情形(1):当 $k\le 1$ 时,$f(x)=k\arctan x-x$ 是单调减少的,故方程 $k\arctan x-x=0$ 只有一个实根。

情形(2):当$k>1$时,我们先确定 $f(x)=k\arctan x-x$的单调区间。

$f(x)=k\arctan x-x$ 在 $(-\infty,-\sqrt{k-1}]$ 上单调减少,在$[-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1}]$上单调增加,在$[\sqrt{k-1},+\infty)$ 上单调减少。注意到 $f(0)=0$,从而方程$k\arctan x-x=0$在$[-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1}]$上只有一个实根。

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,如果我们还能够证明 $f(-\sqrt{k-1})<0, f(\sqrt{k-1})>0$,那末方程$k\arctan x-x=0$在$(-\infty,-\sqrt{k-1}]$上只有一个实根,在$[\sqrt{k-1},+\infty)$上也只有一个实根。

下面我们证明 $f(-\sqrt{k-1})<0, f(\sqrt{k-1})>0$.我们先证明 $f(-\sqrt{k-1})<0$,亦即 $k\arctan(-\sqrt{k-1})+\sqrt{k-1}<0$.令 $t=-\sqrt{k-1}(t<0), g(t)=(t^2+1)\arctan t-t$,我们只需证明$\forall t<0, g(t)<0$.因为$g'(t)=2t\arctan t$,于是$\forall t<0, g'(t)>0$,这表明 $g(t)$ 在$(-\infty,0]$上单调增加,故$\forall t<0, g(t)<0$.同理可证 $f(\sqrt{k-1})>0$.

所以当$k>1$时方程$k\arctan x-x=0$有三个实根。

综合情形(1)与情形(2),当$k\le 1$时,方程$k\arctan x-x=0$有一个实根;当$k>1$时,方程$k\arctan x-x=0$有三个实根。

例 10.讨论方程$\ln x = ax$有几个实根?

解:令 $f(x)=\ln x - ax(x>0)$.

情形(1):当$a=0$时,方程 $f(x)=0$ 只有一个实根。

情形 (2) : 当 $a<0$ 时 , $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加 , 又由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,这表明方程 $f(x)=0$ 也只有一个实根。

情形(3):当$a>0$时, $f(x)$ 在$(0,\frac{1}{a}]$上单调增加,在$[\frac{1}{a},+\infty)$上单调减少,此外 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.我们现在考虑 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1$.

(I) 当$0<a<\frac{1}{e}$时, $f(\frac{1}{a})>0$,从而方程 $f(x)=0$ 在$(0,\frac{1}{a}]$上只有一个实根, 在$[\frac{1}{a},+\infty)$上也只有一个实根,亦即方程 $f(x)=0$ 有两个实根。

(II) 当$a=\frac{1}{e}$时, $f(\frac{1}{a})=0$,方程 $f(x)=0$ 只有一个实根。

(II) 当$a>\frac{1}{e}$时, $f(\frac{1}{a})<0$,方程 $f(x)=0$ 无实根。

综合情形(1)、情形(2)与情形(3),当$a\le 0$时方程 $f(x)=0$ 有一个实根,当$0<a<\frac{1}{e}$时方程 $f(x)=0$ 有两个实根,当$a=\frac{1}{e}$时方程 $f(x)=0$ 有一个实根,当$a>\frac{1}{e}$时方程 $f(x)=0$ 无实根。

题型五 证明函数不等式

证明函数不等式的方法通常有以下四种:

(1)利用拉格朗日中值定理证明函数不等式

若恒等变形后可使不等式一端形如$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,则写出$f(x)$的拉格朗日中值公式,再估计其值。

若恒等变形后可使不等式一端形如$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$,则写出$f(x)$与$g(x)$的柯西中值公式,再估计其值。

例 11. 证明下列不等式:

(1) $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$;

(2) 当 $x>0$ 时, $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明: (1)当 $a=b$ 时,不等式显然成立。

下证当 $a\ne b$ 时, $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$.

不妨设 $a<b$,对函数 $f(t)=\arctan t$ 在闭区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理即得

$$存在x\in(a,b)使得\arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+x^2}(b-a)$$

从而 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$.

(2)当 $x>0$ 时,对函数 $f(t)=\ln(1+t)$ 在闭区间 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理即得

$$存在x\in(0,x)使得\ln(1+x)=\frac{x}{1+x}$$

从而 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

例 12. 证明 $a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a(a>e,0<x<y<\frac{p}{2})$.

证明:原不等式等价于 $\frac{a^y-a^x}{\cos x-\cos y}>a^x\ln a(a>e,0<x<y<\frac{p}{2})$,对函数

$f(t)=a^t,g(t)=\cos t$ 在闭区间 $[x,y]$ 上应用拉格朗日中值定理即得

$$存在x\in(x,y)使得\frac{a^y-a^x}{\cos y-\cos x}=\frac{a^x\ln a}{-\sin x}$$

从而 $\frac{a^y-a^x}{\cos x-\cos y}=\frac{a^x\ln a}{\sin x}>a^x\ln a$,亦即

$$a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a(a>e,0<x<y<\frac{p}{2}).$$

(2)利用单调性证明函数不等式

例 13.设$b>a>e$,证明$a^b>b^a$.

证明:我们只需证明函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$内是单调减少的。

由于$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0(x>e)$,从而当$b>a>e$时$\dfrac{\ln b}{b}<\dfrac{\ln a}{a}$,亦即$a^b>b^a$.

例 14.试证:当$x>0$时,$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

证明:当$x=1$时$(x^2-1)\ln x=(x-1)^2=0$,从而我们只需证明当$x>0$且$x\neq1$时,$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$.

情形(1)当$x>1$时,我们只需证明$\ln x>\dfrac{x-1}{x+1}$.

令$f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$,显然$\forall x\in(1,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$,从而$f(x)$在$[1,+\infty)$上是单调增加的,故当$x>1$时,$f(x)>f(1)=0$,亦即当$x>1$时 $\ln x>\dfrac{x-1}{x+1}$.

情形(2)当$0<x<1$时,我们只需证明$\ln x<\dfrac{x-1}{x+1}$.

令$f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$,显然$\forall x\in(0,1)$, $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$,从而$f(x)$在$(0,1]$上也是单调增加的,故当$0<x<1$时,$f(x)<f(1)=0$,亦即当$0<x<1$时,$\ln x<\dfrac{x-1}{x+1}$.

故当$x>0$时,$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

例 15.设$e<a<b<e^2$,证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

证明:令$f(x)=\ln^2 x-\dfrac{4}{e^2}x$,我们只需证明$f(x)$在$(e,e^2)$内是单调增加的。

由于$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{4}{e^2}$, $f''(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$,对任意的$x\in(e,e^2)$, $f''(x)<0$,从而$f'(x)$在$[e,e^2]$上是单调减少的,于是$\forall x\in(e,e^2)$, $f'(x)>f'(e^2)=0$,这表明$f(x)$在(e,e^2)内是单调增加的,故当$e<a<b<e^2$时有$f(b)>f(a)$,亦即$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

(3)利用*Taylor*中值定理证明函数不等式

***Taylor*中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数,且在 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数。设 $x_0\in[a,b]$ 为一定点,则对于任意 $x\in[a,b]$,成立**

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 x 在 x 和 x_0 之间。

当问题的条件或结论中出现高阶导数,要证明存在 x,使得某个表达式成立时,往往需利用函数在某些特殊点处的*Taylor*公式。

例 16.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\le a,\left|f^{''}(x)\right|\le b$,其中 a,b 都是非负常数,c 是 $(0,1)$ 内任一点,证明 $\left|f^{'}(c)\right|\le 2a+\frac{b}{2}$.

证明:由*Taylor*中值定理可知

$$f(0)=f(c)-cf^{'}(c)+\frac{f^{''}(x_1)}{2}c^2$$

$$f(1)=f(c)+f^{'}(c)(1-c)+\frac{f^{''}(x_2)}{2}(1-c)^2$$

其中 $0<x_1<c,c<x_2<1$.

于是 $f^{'}(c)=f(1)-f(0)+\frac{1}{2}[f^{''}(x_1)c^2-f^{''}(x_2)(1-c)^2]$,故

$$\left|f^{'}(c)\right|\le|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}[\left|f^{''}(x_1)\right|c^2+\left|f^{''}(x_2)\right|(1-c)^2]\le 2a+\frac{1}{2}b[c^2+(1-c)^2]\le 2a+\frac{1}{2}b$$

例 17.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数,且

$$f(0)=f(1)=0,\min_{0\le x\le 1}f(x)=-1.$$

证明: $\max\limits_{0\le x\le 1}f^{''}(x)\ge 8$.

证明:设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得最小值 -1.显然 $x_0\in(0,1)$,且 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点,依费马引理知 $f^{'}(x_0)=0$.

由*Taylor*中值定理可得

$$f(0)=-1+\frac{f''(x_1)}{2}x_0{}^2$$
$$f(1)=-1+\frac{f''(x_2)}{2}(1-x_0)^2$$

其中$0<x_1<x_0, x_0<x_2<1$.

故 $f''(x_1)+f''(x_2)=2[\frac{1}{x_0{}^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}]\geq 16$，而 $2\max\limits_{0\leq x\leq 1} f''(x)\geq f''(x_1)+f''(x_2)$，于是 $\max\limits_{0\leq x\leq 1} f''(x)\geq 8$.

例 18.设函数$f(x)$在$[0,a]$上有连续的导数且$f(0)=0$,证明:至少存在一点$x\in[0,a]$使$f'(x)=\frac{2}{a^2}\int_0^a f(x)dx$.

证明:记$F(x)=\int_0^x f(t)dt$,则$F(x)$在$[0,a]$上二阶连续可导,故

$F(a)=F(0)+F'(0)a+\frac{F''(x)}{2!}a^2$,其中$0<x<a$,于是$\int_0^a f(x)dx=\frac{f'(x)}{2}a^2$,亦即 $f'(x)=\frac{2}{a^2}\int_0^a f(x)dx$.

例 19. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数,且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为零。证明:存在唯一一组实数k_1,k_2,k_3使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

证明: $f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(x_1)}{2}h^2$ (x_1介于0与h之间)

$f(2h)=f(0)+f'(0)2h+\frac{f''(x_2)}{2}(2h)^2$ (x_2介于0与$2h$之间)

$f(3h)=f(0)+f'(0)3h+\frac{f''(x_3)}{2}(3h)^2$ (x_3介于0与$3h$之间)

因此,使得$\lim\limits_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0$的$k_1,k_2,k_3$应满足

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=1 \\ k_1+2k_2+3k_3=0 \\ k_1+4k_2+9k_3=0 \end{cases}$$

由于$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=2\neq 0$,故上述方程有唯一解。

(4)利用曲线的凹凸性证明函数不等式

例 20.证明不等式$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2](a,b>0)$.

证明:令 $f(x)=x\ln x(x>0)$,则 $f^{'}(x)=\ln x+1, f^{''}(x)=\dfrac{1}{x}>0(x>0)$,故 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上是凹的,因而对任意的$a,b>0$且$a\neq b$,都成立

$$f(\frac{a+b}{2})<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

即$\dfrac{a\ln a+b\ln b}{2}>\dfrac{a+b}{2}\ln\dfrac{a+b}{2}$,化简得$a\ln a+b\ln b>(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$.

显然,如果$a=b>0$,那末$a\ln a+b\ln b=(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$.

故$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2](a,b>0)$.

题型六 利用微分中值定理确定方程$G(x,f(x),f^{'}(x))=0$解的存在性

当函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上或(a,b)内满足某些条件时,证明存在$x\in(a,b)$使得$G(x,f(x),f^{'}(x))=0$的方法是:

(1)当$G(x,f(x),f^{'}(x))=0$可以改写成

$$j^{'}(x)=\frac{j(b)-j(a)}{b-a}\text{或}\frac{j^{'}(x)}{y^{'}(x)}=\frac{j(b)-j(a)}{y(b)-y(a)}$$

时,考虑应用拉格朗日中值定理或柯西中值定理。

(2)当$G(x,f(x),f^{'}(x))=0$不可改写成形如

$$j^{'}(x)=\frac{j(b)-j(a)}{b-a}\text{或}\frac{j^{'}(x)}{y^{'}(x)}=\frac{j(b)-j(a)}{y(b)-y(a)}$$

的表达式时,先把$G(x,f(x),f^{'}(x))$中的x改为x,并求以$f(x)$为未知函数

的微分方程$G(x,f(x),f^{'}(x))=0$,得其通解为$F(x)=C$(C是任意常数),取辅助函数为$F(x)$,然后在$[a,b]$上找到满足$F(x_1)=F(x_2)$的两点$x_1,x_2(x_1<x_2)$,则由拉格朗日中值定理可证明存在$x\in(a,b)$使得$F^{'}(x)=0$,即$G(x,f(x),f^{'}(x))=0$.

例 21.设不恒为常数的函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)$.证明在(a,b)内至少存在一点x使得$f^{'}(x)>0$.

证明:由于$f(x)$在闭区间$[a,b]$上不恒为常数,从而存在$c\in(a,b)$使得$f(a)\neq f(c)$.

情形(1):$f(a)<f(c)$

对函数$f(x)$在闭区间$[a,c]$上应用拉格朗日中值定理即得

在(a,c)内至少存在一点x使得$f(c)-f(a)=f^{'}(x)(c-a)$

故$f^{'}(x)>0$.

情形(2):$f(a)>f(c)$

对函数$f(x)$在闭区间$[c,b]$上应用拉格朗日中值定理即得

在(c,b)内至少存在一点x使得$f(b)-f(c)=f^{'}(x)(b-c)$

而$f(a)=f(b)$,于是$f(a)-f(c)=f^{'}(x)(b-c)$,故$f^{'}(x)>0$.

综合情形(1)与情形(2)可知,在(a,b)内至少存在一点x使得$f^{'}(x)>0$.

例 22.假设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数,并且$g^{''}(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$,试证:

(1)在开区间(a,b)内$g(x)\neq 0$;

(2)在开区间(a,b)内至少存在一点x,使$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f^{''}(x)}{g^{''}(x)}$.

证明:(1)用反证法,假设存在$x_0\in(a,b)$使得$g(x_0)=0$,对函数$g(x)$分别在

闭区间$[a,x_0]$和$[x_0,b]$上应用拉格朗日中值定理即得

$$存在x_1\in(a,x_0),x_2\in(x_0,b)使得g'(x_1)=0,g'(x_2)=0$$

再对函数$g'(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上应用拉格朗日中值定理

$$存在x_3\in(x_1,x_2)使得g''(x_3)=0$$

这与$g''(x)\neq 0$相矛盾,故假设不成立,从而在开区间(a,b)内$g(x)\neq 0$.

(2)分析:要证明在开区间(a,b)内存在一点x使$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(x)}{g''(x)}$,我们只需要证明在开区间$(a,b)$内存在一点$x$使$f(x)g''(x)-g(x)f''(x)=0$,而要证明在开区间$(a,b)$内存在一点$x$使$f(x)g''(x)-g(x)f''(x)=0$,我们只需构造一个在$[a,b]$上连续、$(a,b)$内可导的函数$F(x)$满足

$$F(a)=F(b),F'(x)=f(x)g''(x)-g(x)f''(x)$$

上式两边同时积分即得

$$F(x)=\int[f(x)g''(x)-g(x)f''(x)]dx=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)+C$$

由此我们令$F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$,可以验证$F(x)$满足在$[a,b]$上连续、在(a,b)内可导、$F(a)=F(b)=0$,最后我们对$F(x)$在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理即得结论。

令$F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$,显然$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导且$F(a)=F(b)=0$,依拉格朗日中值定理可得

$$存在一点x\in(a,b)使得F'(x)=0$$

从而$f(x)g''(x)-g(x)f''(x)=0$,亦即$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

例 23.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$,

证明: (1)存在$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$f(x)=x$;

(2)存在$h\in(0,x)$使得$f'(h)=f(h)-h+1$.

证明:(1)令$g(x)=f(x)-x$,显然$g(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续且

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,g(1)=-1<0$$

由零点定理知存在$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$g(x)=0$,亦即$f(x)=x$.

(2)分析:将欲证等式中h改为x得$f'(x)=f(x)-x+1$,于是

$$[f(x)-x]'=f(x)-x$$

所以$e^{-x}[f(x)-x]=C$.因此作辅助函数$F(x)=e^{-x}[f(x)-x]$.

令$F(x)=e^{-x}[f(x)-x]$,显然$F(x)$在$[0,x]$上连续,在$(0,x)$内可导且$F(0)=F(x)=0$,由拉格朗日中值定理得存在$h\in(0,x)$使得$F'(h)=0$,亦即$f'(h)=f(h)-h+1$.

例 24.设函数$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数,在$(0,1)$内二阶可导,且$f(0)=f(1)$.证明:存在$x\in(0,1)$使得$f''(x)=\frac{2f'(x)}{1-x}$.

分析:将欲证等式中x改为x得$f''(x)=\frac{2f'(x)}{1-x}$,于是$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2}{1-x}$,所以$(1-x)^2f'(x)=C$,因此作辅助函数$F(x)=(1-x)^2f'(x)$.

证明:记$F(x)=(1-x)^2f'(x)$,则$F(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导且$F(1)=0$.此外由$f(0)=f(1)$知存在$x_1\in(0,1)$使得$f'(x_1)=0$,从而$F(x_1)=0$.由拉格朗日中值定理得存在$x\in(x_1,1)\subset(0,1)$使得$F'(x)=0$,即$f''(x)=\frac{2f'(x)}{1-x}$.

例 25.设$0<a<b$,函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,证明存在一点

$x\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=xf'(x)\ln\frac{b}{a}$.

分析:将欲证等式 $f(b)-f(a)=xf'(x)\ln\frac{b}{a}$ **改写为** $\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}$**,再作辅助函数** $g(x)=\ln x$ **即可。**

证明:记 $g(x)=\ln x$,显然 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导且 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$,由柯西中值定理知存在 $x\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$,亦即 $f(b)-f(a)=xf'(x)\ln\frac{b}{a}$.

例 26.设 $0<a<b$,证明存在 $x\in(a,b)$ 使得 $ae^b-be^a=(1-x)e^x(a-b)$.

分析:将欲证等式 $ae^b-be^a=(1-x)e^x(a-b)$ **改写为**

$$\frac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-x)e^x$$

再作辅助函数 $f(x)=\frac{e^x}{x},g(x)=\frac{1}{x}$ **即可。**

证明:记 $f(x)=\frac{e^x}{x},g(x)=\frac{1}{x}$,显然 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导且 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0$,由柯西中值定理知存在 $x\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=(1-x)e^x$$

亦即 $ae^b-be^a=(1-x)e^x(a-b)$.

题型七 求曲线的渐近线

如果存在直线 $L:y=kx+b$**,使得当** $x\to\infty$ **(或** $x\to+\infty,x\to-\infty$ **)时,曲线** $y=f(x)$ **上的动点** $M(x,y)$ **到直线** L **的距离** $d(M,L)\to 0$**,则称** L **为曲线**

$y=f(x)$ 的渐近线。当直线 L 的斜率 $k\neq 0$ 时,称 L 为斜渐近线。当直线 L 的斜率 $k=0$ 时,称 L 为水平渐近线。如果存在 $x_0\in R$ 使得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$),则称 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线。

直线 $L: y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[f(x)-kx].$$

在求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线方程时,我们建议遵循“先抓大后抓小”的原则。

例 27.曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为___________.

解:由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(2x+1)}=\dfrac{1}{2},\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{2x+1}-\dfrac{1}{2}x)=-\dfrac{1}{4}$,从而曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$.

例 28.曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为(　　)

(A) 0　　　(B) 1　　　(C) 2　　　(D) 3

解:由于 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=\infty$,从而 $x=0$ 为曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的一条铅直渐近线。

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\bullet[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0$,则 $y=0$ 为曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的一条水平渐近线。

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\bullet[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x\ln(1+e^x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)+\dfrac{xe^x}{1+e^x}}{2x}=1$,而 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\dfrac{1}{e^x})]=0$,则 $y=x$ 为曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的一条斜渐近线。

第二章习题

1.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\sin x, x>0\\ 1, x=0\\ \dfrac{\tan x}{x}+e^{\frac{x}{2}}-1, x<0\end{cases}$,求 $f'(0)$.

2.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________.

3.已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{y}+6xy+x^{2}-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$__________.

4.曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是______________.

5.设 $y=y(x)$ 是由 $x-\int_{1}^{y+x}e^{-t^{2}}dt=0$ 所确定的隐函数,则 $y'(0), y''(0)$ 分别为

__________________.

6.设 $\begin{cases}x=1+t^{2}\\ y=\cos t\end{cases}$,则 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}=$_______________.

7.设 $x=e^{-t}, y=\int_{0}^{t}\ln(1+u^{2})du$,则 $\left.\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{t=0}=$____________.

8.设 $f(x)$ 是由 $x-x^{3}+x^{5}-\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-1}+\cdots$ 所确定的函数。

(1)判定函数 $f(x)$ 的单调性及函数 $f(x)$ 的图形的凹凸性;

(2)求函数 $f(x)$ 的极值及函数 $f(x)$ 的图形的拐点。

9.设函数 $f(x)$ 满足方程 $3f(x)+4x^{2}f\left(-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{7}{x}=0$,求函数 $f(x)$ 的极大值和极小值。

10.试求抛物线 $x^{2}=4y$ 上的动点 $P(x,y)$ 与 y 轴上的定点 $Q(0,b)$ 间的最短距离。

11.由直线 $y=0, x=8$ 及抛物线 $y=x^{2}$ 围成一个曲边三角形,在曲边 $y=x^{2}$ 上求一点,使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形

面积最大。

12.设抛物线$y=ax^2+bx+c$满足:

(1)通过两点$(0,0)$和$(1,2)$;

(2)与抛物线$y=-x^2+2x$所围成图形的面积最小,求a,b,c的值。

13.在第一象限从曲线$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上找一点,使通过该点的切线与该曲线以及x轴和y轴所围成的图形面积最小,并求此最小面积。

14.设抛物线$y=ax^2+2bx+c$通过原点,且当$0\le x\le 1$时$y\ge 0$.如果它与x轴、直线$x=1$所围成图形的面积为$\frac{1}{3}$,试确定a,b,c,使这个图形绕x轴旋转所成的立体体积最小。

15.设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,在开区间$(0,1)$内大于零,并且满足$xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$($a$为常数),又曲线$y=f(x)$与$x=1,y=0$所围的图形$S$的面积值为$2$,求函数$y=f(x)$,并问$a$为何值时,图形$S$绕$x$轴旋转一周所得的旋转体的体积最小。

16.设曲线$y=ax^2\ (a>0,x\ge 0)$与$y=1-x^2$交于点A,过坐标原点O和点A的直线与曲线$y=ax^2$围成一平面图形。问a为何值时,该图形绕x轴旋转一周所得的旋转体体积最大?最大体积是多少?

17.设当$x>0$时,方程$kx+\frac{1}{x^2}=1$有且仅有一个解,试求k的取值范围。

18.讨论方程$\ln x-\frac{x}{e}+k=0$有几个实根?

19.证明下列不等式:

(1) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x, x>0$;

(2) $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3, x\in\left(0,\frac{p}{2}\right)$;

(3) $\frac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1, x \in [0,1], p > 1$;

(4)当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{p}{2}$ 时, $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$;

(5)当 $0 < a < b < p$ 时, $b\sin b + 2\cos b + pb > a\sin a + 2\cos a + pa$.

20.利用 *Taylor* 中值定理考虑下述问题:

(1)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且满足 $\left|f''(x)\right| \le 1$, $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内取到最大值 $\frac{1}{4}$.证明: $|f(0)| + |f(1)| \le 1$.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导,且 $f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$,证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 x 使得 $f'''(x) \ge 24$.

(3)设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数,且 $f(-1)=0, f(1)=1$, $f'(0)=0$.求证:在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0,使得 $f'''(x_0)=3$.

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内三阶可导,且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

(提示: $\begin{matrix} f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{3!}f'''(x) \\ f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{3!}f'''(h) \end{matrix}$)

(5)设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上三次连续可微,证明存在实数 $x \in (-1,1)$,使得

$$\frac{f'''(x)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0)$$

21.利用微分中值定理考虑下述问题:

(1)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$,

证明: (i) 存在 $x \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(x)=x$;

(ii) 对于任意实数 l,必存在 $h \in (0,x)$ 使得 $f'(h) = l[f(h)-h]+1$.

(2)已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$,证明:(i) 存在 $x\in(0,1)$ 使得 $f(x)=1-x$;

(ii) 存在两个不同的点 $a,b\in(0,1)$ 使得 $f'(a)f'(b)=1$.(提示:对函数 $f(x)$ 分别在 $[0,x],[x,1]$ 上应用 *Lagrange* 中值定理)

(3)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=1$,试证存在 $x\in(a,b),h\in(a,b)$ 使得 $e^{h-x}\left[f'(h)+f(h)\right]=1$.

(4)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)f(b)>0$, $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$,证明:至少存在一点 $x\in(a,b)$ 使得 $f'(x)=f(x)$.

(5)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$.证明:

(i) 存在 $x\in(0,1)$ 使得 $f(x)=\frac{1}{2}$;

(ii) 存在两个不同的点 $a,b\in(0,1)$ 使得 $\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}=2$.(提示:对函数 $f(x)$ 分别在 $[0,x],[x,1]$ 上应用 *Lagrange* 中值定理)

(6)设 $ab>0,a<b$,函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,试证明存在 $x\in(a,b)$ 使得 $\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=xf'(x)-f(x)$.(提示:对 $\frac{f(x)}{x}$ 和 $\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上应用 *Cauchy* 中值定理)

(7)设 $0<a<b$,函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,试证明存在 $x\in(a,b),h\in(a,b)$ 使得 $f'(x)=\frac{a+b}{2h}f'(h)$.(提示:对 $f(x),x^2$ 在 $[a,b]$ 上应用 *Cauchy* 中值定理)

(8)设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数,且在 $(0,a)$ 内达到最小值,又 $\left|f''(x)\right|\le M\left(x\in[0,a]\right)$,证明:$\left|f'(0)\right|+\left|f'(a)\right|\le Ma$.(提示:依费马引理知可导函数的极值点必为稳定点)

22.求下列曲线的渐近线方程:

(1) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;　　(2) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$;　　(3) $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$.

第三章　一元函数积分学

题型一 计算不定积分

计算不定积分通常有以下三种方法:

(1)应用第一类换元积分法计算不定积分

例 1.求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

解:由于 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$,我们令 $t=\sqrt{e^x-1}$,从而

$$\int \frac{x}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1) = \int \frac{\ln(1+t^2)}{t}dt^2 = 2\int \ln(1+t^2)dt = 2[t\ln(1+t^2) - \int td\ln(1+t^2)]$$

$$= 2[t\ln(1+t^2) - 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt] = 2[t\ln(1+t^2) - 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt] = 2[t\ln(1+t^2) - 2(t-\arctan t)] + C$$

$$= 2t\ln(1+t^2) - 4t + 4\arctan t + C = 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$$

例 2.求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

解:我们令 $t=e^x$,则

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = \int \frac{\arctan t}{t^2}d\ln t = \int \frac{\arctan t}{t^3}dt = -\frac{1}{2}\int \arctan t dt^{-2} = -\frac{1}{2}(\frac{\arctan t}{t^2} - \int \frac{1}{t^2}d\arctan t)$$

$$= -\frac{1}{2}(\frac{\arctan t}{t^2} - \int \frac{1}{t^2}\frac{1}{1+t^2}dt) = -\frac{1}{2}[\frac{\arctan t}{t^2} - \int (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2})dt] = -\frac{\arctan t}{2t^2} - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\arctan t + C$$

$$= -\frac{\arctan e^x}{2e^{2x}} - \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2}\arctan e^x + C.$$

在用第一类换元积分法计算不定积分时,我们经常会用到以下的四种技巧。

技巧一:对于形如 $\int \sin^{2k+1}x\cos^n xdx(k,n\in N)$ **和** $\int \sin^n x\cos^{2k+1}xdx(k,n\in N)$ **之类的不定积分,可依次作变换** $u=\cos x$ **或** $u=\sin x$**,求得结果。**

对于形如 $\int \sin^{2k}x\cos^{2l}xdx(k,l\in N)$ **之类的不定积分,先利用二倍角公式:**

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

然后求得结果。

对于形如 $\int \tan^n x\sec^{2k}xdx(n\in N,k\in N^+)$ 和 $\int \tan^{2k-1}x\sec^n xdx(n\in N,k\in N^+)$ 之类的不定积分,可依次作变换 $u=\tan x$ 或 $u=\sec x$,求得结果。

对于形如 $\int\cos a\,x\cos b\,xdx$、$\int\sin a\,x\cos b\,xdx$ 和 $\int\sin a\,x\sin b\,xdx$ 之类的不定积分,先利用积化和差公式:

$$\cos a\,x\cos b\,x=\frac{1}{2}[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x]$$
$$\sin a\,x\sin b\,x=\frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]$$
$$\sin a\,x\cos b\,x=\frac{1}{2}[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]$$

然后求得结果。

例 3.求 $\int\sin^2 x\cos^5 xdx$.

解: $\int\sin^2x\cos^5 xdx=\int\sin^2x\cos^4 x\cos xdx=\int\sin^2x(1-\sin^2 x)^2d(\sin x)$

$=\int(\sin^2x-2\sin^4 x+\sin^6 x)d(\sin x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$.

例 4.求 $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$.

解: $\int\sin^2x\cos^4 xdx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2dx$

$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx=\frac{1}{8}\int(\cos 2x-\cos^3 2x)dx+\frac{1}{8}\int(1-\cos^2 2x)dx$

$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\bullet\frac{1}{2}d(\sin 2x)+\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+C$.

例 5.求 $\int\tan^5 x\sec^3 xdx$.

解: $\int\tan^5x\sec^3 xdx=\int\tan^4x\sec^2 x\sec x\tan xdx=\int(\sec^2x-1)^2\sec^2 xd(\sec x)$

$=\int(\sec^6 x-2\sec^4x+\sec^2 x)d(\sec x)=\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C$.

例 6.求$\int \cos 3x \cos 2x dx$.

解:$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$.

技巧二:对于形如$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$(其中$P(x), Q(x)$均为多项式)之类的不定积分,首先观察$\frac{P(x)}{Q(x)}$是不是真分式,如果$\frac{P(x)}{Q(x)}$是真分式,我们先用待定系数法把真分式化成部分分式之和,再进行计算;如果$\frac{P(x)}{Q(x)}$不是真分式,我们先把$\frac{P(x)}{Q(x)}$化成真分式,然后按照真分式的情况进行处理。

例 7.求$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$.

解:设$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$,故$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B=-1 \end{cases}$,从而解得$A=4, B=-3$.

于是$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = \int (\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}) dx = 4\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C$.

例 8.求$\int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} dx$.

解:设$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$,故$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C=1 \\ B+C=-3 \end{cases}$,

从而解得$A=1, B=-2, C=-1$,于是

$$\int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} dx = \int [\frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}] dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + C.$$

例 9.求$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx$.

解:$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} = \frac{x^4(x+1)-8}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x^3}{x-1} - \frac{8}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x^3-1+1}{x-1} - \frac{8}{x(x+1)(x-1)}$

$$= x^2+x+1+\frac{1}{x-1} - \frac{8}{x(x+1)(x-1)} = x^2+x+1+\frac{1}{x-1} - 8(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x})\frac{1}{x+1}$$

$$=x^2+x+1+\frac{1}{x-1}-4(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})+8(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})=x^2+x+1-\frac{3}{x-1}+\frac{8}{x}-\frac{4}{x+1}$$

于是$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-3\ln|x-1|+8\ln|x|-4\ln|x+1|+C$.

技巧三:如果被积函数中含有简单根式$\sqrt[n]{ax+b}$或$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$,可以令这个简单根式为$u$,然后再计算。

例 10.求$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

解:设$u=\sqrt{x-1}$,从而

$$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\int\frac{u}{u^2+1}\bullet 2udu=2\int(1-\frac{1}{1+u^2})du=2(u-\arctan u)+C$$

$$=2(\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1})+C.$$

例 11.求$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$.

解:设$t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,从而

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\int(t^2-1)t\bullet\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1)+\ln|x|+C.$$

技巧四:如果被积函数是三角函数的有理函数,我们先用三角函数的万能公式$\tan\frac{x}{2}=t$作代换,然后再计算。

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

例 12.求$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

解:作变换$u=\tan\frac{x}{2}(-p<x<p)$,从而$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int\frac{(1+\frac{2u}{1+u^2})\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})}$

$=\frac{1}{2}\int(u+2+\frac{1}{u})du=\frac{1}{2}(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|)+C=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$.

(2)应用第二类换元积分法计算不定积分

在用第二类换元积分法计算不定积分时,我们经常会用到以下的三种技巧。

如果被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$,可以作代换$x=a\sin t$化去根式;如果被积函数含有$\sqrt{x^2+a^2}$,可以作代换$x=a\tan t$化去根式;如果被积函数含有$\sqrt{x^2-a^2}$,可以作代换$x=a\sec t$化去根式。

例 13.求$\int\sqrt{a^2-x^2}dx(a>0)$.

解:设$x=a\sin t(-\frac{p}{2}\le t\le\frac{p}{2})$,那么

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int\cos^2 tdt=a^2(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$.

例 14.求$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$.

解:设$x=a\tan t(-\frac{p}{2}<t<\frac{p}{2})$,那么

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\sec tdt=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{1}{1-\sin^2 t}d(\sin t)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C$

$=\ln(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a})+C$.

例 15.求$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$.

解:设 $x=a\sec t$ ($0<t<p$ 且 $t\neq\frac{p}{2}$),那么 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{\sec t\bullet\tan t}{|\tan t|}dt$.

当 $0<t<\frac{p}{2}$ 时(亦即 $x>a$)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\sec tdt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C=\ln(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a})+C.$$

当 $\frac{p}{2}<t<p$ 时(亦即 $x<-a$)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=-\int\sec tdt=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C=-\ln(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}-\frac{x}{a})+C.$$

(3)应用分部积分法计算不定积分

分部积分公式 $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$ 的正确使用大致有下述几种模式:

(1)记 $p_n(x)$ 为 n 次多项式,则对于形如 $\int p_n(x)\sin a\,xdx$、$\int p_n(x)\cos b\,xdx$ 和 $\int p_n(x)e^{lx}dx$ 之类的不定积分,总是取 $p_n(x)$ 为 $u(x)$,而将另一个函数看成 $v'(x)$,这时 $v(x)$ 是很容易求的。通过分部积分,$p_n(x)$ 的次数随着求导而逐次降低,直至最后成为常数。

(2)记 $p_n(x)$ 为 n 次多项式,则对于形如 $\int p_n(x)\arcsin xdx$、$\int p_n(x)\arccos xdx$、$\int p_n(x)\arctan xdx$、$\int p_n(x)\mathrm{arc}\cot xdx$ 和 $\int p_n(x)\ln xdx$ 之类的不定积分,总是取 $p_n(x)$ 为 $v'(x)$,而将另一个函数看成 $u(x)$,这时关于 $u'(x)v(x)$ 的不定积分就比较容易求出。

(3)对于形如 $\int e^{lx}\sin a\,xdx$ 和 $\int e^{lx}\cos b\,xdx$ 之类的不定积分,可以取 e^{lx} 与 $\sin a\,x$ (或 $\cos b\,x$)中任一个为 $u(x)$,而另一个为 $v'(x)$;对于 $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx$ 之类的不定积分,则可将 $u(x)$ 取作 $\sqrt{x^2\pm a^2}$,而将 $v'(x)$ 视为1.

(4)对于形如$\int f^n(x)dx$之类的不定积分,利用分部积分法降低幂指数,导出递推公式。

例 16.求$\int x^2e^xdx$.

解:$\int x^2e^xdx=\int x^2d(e^x)=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2\int xd(e^x)=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C$

$=e^x(x^2-2x+2)+C$.

例 17.求$\int x\arctan xdx$.

解:$\int x\arctan xdx=\frac{1}{2}\int \arctan xd(x^2)=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$

$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C$.

例 18.求$\int e^x\sin xdx$.

解:$\int e^x\sin xdx=\int\sin xd(e^x)=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int\cos xd(e^x)$

$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin xdx$

故$\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

例 19.求$I_n=\int\sin^n xdx(n\in N^+)$.

解:$I_1=\int\sin xdx=-\cos x+C$.

对于$n\geq 2$,有

$I_n=\int\sin^n xdx=-\int\sin^{n-1}xd(\cos x)=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$

$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int\sin^n xdx$

$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

故$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}(\forall n\geq 2)$.

题型二 计算定积分

例 20.证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{p}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根。

证明:由于 $\int_0^{p}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{p}\sin xdx=2\sqrt{2}$,原方程转化为 $\ln x=\frac{x}{e}-2\sqrt{2}$,我们令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+2\sqrt{2}(x>0)$.容易知道 $f^{'}(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}(x>0)$,从而 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调增加,在 $[e,+\infty)$ 上单调减少。注意到 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\ f(e)=2\sqrt{2}$,故 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 内只有一个实根,在 $[e,+\infty)$ 内也只有一个实根,亦即 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根。

例 21.求 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

解: $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=-\int_0^1\ln(x+1)d(\frac{1}{x-2})=\ln 2+\int_0^1\frac{1}{x-2}\frac{1}{x+1}dx$

$=\ln 2+\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1})dx=\ln 2+\frac{1}{3}[\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|]_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$.

例 22. $\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$__________.

解: $\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=\int_1^{\frac{1}{2}}t^3e^t(-\frac{1}{t^2})dt=\int_{\frac{1}{2}}^1te^tdt=\int_{\frac{1}{2}}^1td(e^t)=\frac{1}{2}\sqrt{e}$.

例 23. $\int_0^{p^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$__________.

解: $\int_0^{p^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=2\int_0^{p}t^2\cos tdt=2\int_0^{p}t^2d(\sin t)=-4\int_0^{p}t\sin tdt=4\int_0^{p}td(\cos t)=-4p$.

在用换元积分法和分部积分法计算定积分时,我们会用到以下几个常用的结论。

(1)若 $f(x)$ **在** $[-a,a](a>0)$ **上连续且为偶函数,则** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ **;若** $f(x)$ **在** $[-a,a](a>0)$ **上连续且为奇函数,则** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$**.**

(2)设 $f(x)$ **是连续的周期函数,周期为** T **,则**

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx,\ \int_{a}^{a+nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx(\forall n\in N^{+}).$$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n} xdx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\bullet\frac{n-3}{n-2}\bullet\cdots\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}, n=2k(k\in N^{+}) \\ \frac{n-1}{n}\bullet\frac{n-3}{n-2}\bullet\cdots\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{2}{3}, n=2k+1(k\in N^{+}) \end{cases}$**.**

(4)若 $f(x)$ **是连续的奇函数,则** $\int_{0}^{x} f(t)dt$ **是偶函数;若** $f(x)$ **是连续的偶函数,则** $\int_{0}^{x} f(t)dt$ **是奇函数.**

(5)若 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续,则**

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx,\ \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx.$$

(6)设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续,** $f(x)\geq 0$ **但不恒为** 0 **,则** $\int_{a}^{b} f(x)dx > 0$**.**

例 24.求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{x^{3}\sin^{2} x}{x^{4}+2x^{2}+1}dx$;　　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^{2}}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$;

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^{4}\theta d\theta$;　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\sin x| dx$;

(5) $\int_0^{p}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解:(1)由于 $\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}$ 在 $[-5,5]$ 上连续且为奇函数,故 $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx=0$.

(2)由于 $\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上连续且为偶函数,故

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^2 d(\arcsin x)=\frac{p^3}{324}.$$

(3) $\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}4\cos^4 q\,dq=8\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^4 q\,dq=8\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{p}{2}=\frac{3p}{2}$.

(4) $\int_0^{2p}|\sin x|dx=\int_0^{p}|\sin x|dx+\int_p^{2p}|\sin x|dx=2\int_0^{p}|\sin x|dx=2\int_0^{p}\sin xdx=4$.

(5) $\int_0^{p}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{p}{2}\int_0^{p}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{p}{2}\int_0^{p}\frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)=\frac{p^2}{4}$.

例 25.设 $M=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx, N=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx,$

$P=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$,则有(　　)

(A) $N<P<M$　　　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　　　(D) $P<M<N$

解:显然 $M=0, N=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos^4 xdx>0, P=-\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos^4 xdx<0$,故选(D).

例 26.设 $F(x)=\int_x^{x+2p}e^{\sin t}\sin tdt$,则 $F(x)$(　　)

(A)为正常数　　　　(B)为负常数

(C)恒为零 (D)不为常数

解:$F(x)=\int_0^{2p} e^{\sin t}\sin t dt=-\int_0^{2p} e^{\sin t}d(\cos t)=\int_0^{2p} e^{\sin t}\cos^2 t dt>0$,故选(A).

题型三 变上限积分及其导数

我们在对变上限积分求导或者求极限时,经常用到下面一个定理。

定理:如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $f(x),j(x)$ 分别在 $[a,b]$ 上可导,则 $\Phi(x)=\int_{j(x)}^{f(x)} f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导,并且它的导数

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}=f'(x)f[f(x)]-j'(x)f[j(x)]\text{.}$$

例 27.求正的常数 a 与 b,使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立。

解:由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}$,从而 $b=1$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{1-\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{\sqrt{a}}=1$$

则 $a=4$.

例 28.设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)dt$,则 $F'(x)$ 等于( )

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ (B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ (D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

解:$F'(x)=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$,故选(A).

例 29.设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt, g(x)=x^3+x^4$,则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的( )

(A)等价无穷小 (B)同阶但非等价的无穷小

(C)高阶无穷小　　　　　　　　　　(D)低阶无穷小

解:因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2dt}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2+4x^3}=\dfrac{1}{3}$

所以当$x\to 0$时,$f(x)$是$g(x)$的同阶但非等价的无穷小,故选(B).

题型四 有关积分中值定理和积分性质的证明题

在一些有关积分性质的证明题中,积分中值定理、$Cauchy-Schwarz$不等式、$Minkowsky$不等式扮演着非常重要的角色。

(积分中值定理) 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在开区间(a,b)内至少存在一点x使得$\int_a^b f(x)dx=f(x)(b-a)(a<x<b)$.

($Cauchy-Schwarz$不等式) 设$f(x)$、$g(x)$在闭区间$[a,b]$上均连续,则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\bullet\int_a^b g^2(x)dx.$$

($Minkowsky$不等式) 设$f(x)$、$g(x)$在闭区间$[a,b]$上均连续,则

$$\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

例 30.设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$f(x)>0$.证明

$$\int_a^b f(x)dx\bullet\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2.$$

证明:由$Cauchy-Schwarz$不等式知

$$\int_a^b f(x)dx\bullet\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\bullet\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2=(b-a)^2$$

例 31.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$.证明在$(0,1)$内存在一点$c$,使$f^{'}(c)=0$.

证明:由积分中值定理可知,存在$x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(x)(1-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}f(x)$$

又$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$,即 $f(x)=f(0)$.显然 $f(x)$ 在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件,从而可知存在$c\in(0,x)$使得 $f^{'}(c)=0$.

例 32.设函数 $f(x)$ 在$[0,p]$上连续,且$\int_0^p f(x)dx=0,\int_0^p f(x)\cos xdx=0$.试证:在$(0,p)$内至少存在两个不同的点$x_1$和$x_2$使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

分析:构造函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt$,显然$F^{'}(x)=f(x)$.若能证明$F(x)$在$[0,p]$上有三个零点,由拉格朗日中值定理可知在$(0,p)$内至少存在两个不同的点x_1,x_2,使$F^{'}(x_1)=F^{'}(x_2)=0$,即 $f(x_1)=f(x_2)=0$.而$F(0)=0,F(p)=0$,所以只要证在$(0,p)$内至少还有$F(x)$的一个零点即可。

证明:令$F(x)=\int_0^x f(t)dt(0\le x\le p)$,则$F(0)=F(p)=0$.

又 $0=\int_0^p f(x)\cos xdx=\int_0^p \cos xdF(x)=\int_0^p \sin xF(x)dx$,所以存在 $x\in(0,p)$ 使得 $F(x)\sin x=0$,于是 $F(x)=0$.由此证得 $F(0)=F(x)=F(p)=0$.再对 $F(x)$ 在 $[0,x]$ 和 $[x,p]$ 上分别应用拉格朗日中值定理知至少存在 $x_1\in(0,x),x_2\in(x,p)$使得$F^{'}(x_1)=F^{'}(x_2)=0$,即 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

题型五 定积分在几何学上的应用

重要应用之一 计算平面图形面积

(1)设平面图形 D 是由直线 $x=a,x=b(a<b)$ 及曲线 $y=f_1(x),y=f_2(x)$ (其

中 $f_1(x), f_2(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续)围成,则它的面积 $S=\int_a^b \left| f_1(x)-f_2(x) \right| dx$.

(2)设平面图形 D **是由直线** $y=c, y=d(c<d)$ **及曲线** $x=j_1(y), x=j_2(y)$ **(其中** $j_1(y), j_2(y)$ **都在** $[c,d]$ **上连续)围成,则它的面积** $S=\int_c^d \left| j_1(y)-j_2(y) \right| dy$.

(3)设平面图形 D **是由射线** $q=a, q=b (0 \le a < b \le 2p)$ **及曲线** $r=r_1(q), r=r_2(q)$ **(其中** $r_1(q), r_2(q)$ **都在** $[a,b]$ **上连续)围成,则它的面积** $S=\frac{1}{2}\int_a^b \left| r_1^2(q)-r_2^2(q) \right| dq$.

重要应用之二　计算旋转体体积

(1)设平面图形 $D=\{(x,y) \mid a \le x \le b, 0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$**,则它绕** x **轴旋转一周而成的旋转体体积** $V=p\int_a^b \left[f_2^2(x)-f_1^2(x) \right] dx$ **;设平面图形** $D=\{(x,y) \mid 0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$**,则它绕** y **轴旋转一周而成的旋转体体积** $V=2p\int_a^b xf(x)dx$.

(2)设平面图形 $D=\{(x,y) \mid c \le y \le d, 0 \le j_1(y) \le x \le j_2(y)\}$**,则它绕** y **轴旋转一周而成的旋转体体积** $V=p\int_c^d \left[j_2^2(y)-j_1^2(y) \right] dy$ **;设平面图形** $D=\{(x,y) \mid 0 \le c \le y \le d, 0 \le x \le j(y)\}$**,则它绕** x **轴旋转一周而成的旋转体体积** $V=2p\int_c^d yj(y)dy$.

例 33.由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是__________.

解:所求的面积为 $S=\int_1^e \ln x dx+\int_e^{e+1}(e+1-x)dx=\frac{3}{2}$.

例 34.求心形线 $r = a(1+\cos q)$ 的全长,其中 $a>0$ 是常数。

解: $ds = a\sqrt{(1+\cos q)^2 + (-\sin q)^2}dq = 2a\left|\cos\frac{q}{2}\right|dq$,由对称性可知,所求心形线全长为 $s = 2\int_0^p 2a\cos\frac{q}{2}dq = 8a$.

例 35.过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1)求 D 的面积 A;

(2)求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

解:(1)设切点横坐标为 x_0 ,则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程为 $y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$,从而 $x_0=e$,所以该切线方程为 $y=\frac{1}{e}x$,所求图形 D 的面积为 $A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{1}{2}e-1$.

(2)切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的圆锥体体积为 $V_1=\frac{1}{3}pe^2$,曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成图形绕直线 $x=e$ 旋转所得旋转体体积为 $V_2=\int_0^1 p(e-e^y)^2dy$,从而所求旋转体体积为 $V=V_1-V_2=\frac{p}{6}(5e^2-12e+3)$.

题型六 反常积分的概念及其计算

(1)无穷限反常积分的审敛法

(比较审敛法)设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续且 $f(x)\ge 0$.如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$,使得 $f(x)\le\frac{M}{x^p}(a\le x<+\infty)$,则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛;如果存在常数 $N>0$,使得 $f(x)\ge\frac{N}{x}(a\le x<+\infty)$,则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

(极限审敛法)设函数 $f(x)$ **在区间** $[a,+\infty)$ **上连续且** $f(x)\ge 0$**.如果存在常数** $p>1$**,使得** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ **存在,则反常积分** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛;如果** $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$ **(或** $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$ **),则反常积分** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **发散。**

(2)无界函数的反常积分的审敛法

(比较审敛法)设函数 $f(x)$ **在区间** $(a,b]$ **上连续且** $f(x)\ge 0$**,** $x=a$ **为** $f(x)$ **的瑕点。如果存在常数** $M>0$ **及** $q<1$**,使得** $f(x)\le \dfrac{M}{(x-a)^q}(a<x\le b)$**,则反常积分** $\int_a^b f(x)dx$ **收敛;如果存在常数** $N>0$**,使得** $f(x)\ge \dfrac{N}{x-a}(a<x\le b)$**,则反常积分** $\int_a^b f(x)dx$ **发散。**

(极限审敛法)设函数 $f(x)$ **在区间** $(a,b]$ **上连续且** $f(x)\ge 0$**,** $x=a$ **为** $f(x)$ **的瑕点。如果存在常数** $0<q<1$**,使得** $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$ **存在,则反常积分** $\int_a^b f(x)dx$ **收敛;如果** $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0$ **(或** $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=+\infty$ **),则反常积分** $\int_a^b f(x)dx$ **发散。**

例 36. (I) 比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$.

(II) 记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解:首先说明反常积分 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$ 均收敛。

由于 $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}}\bullet|\ln t|[\ln(1+t)]^n=0,\lim\limits_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}}\bullet t^n|\ln t|=0$,故反常积分 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$

与$\int_0^1 t^n |\ln t| dt (n=1,2,\cdots)$均收敛。

(I)因为当$0 \le t \le 1$时，$\ln(1+t) \le t$，于是$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \le \int_0^1 t^n |\ln t| dt (n=1,2,\cdots)$.

(II)因为$0 \le u_n \le \int_0^1 t^n |\ln t| dt (n=1,2,\cdots)$，而

$$\int_0^1 t^n |\ln t| dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t d(t^{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

第三章习题

1.计算下列不定积分:

(1) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}})dx (a \neq 0, b \neq 0)$;　　(2) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$;

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$;　　(4) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$;

(5) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$;　　(6) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx$;

(7) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx$;　　(8) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$;

(9) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;　　(10) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(11) $\int \tan\sqrt{1+x^2} \bullet \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;　　(12) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

(13) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$;　　(14) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;

(15) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$;　　(16) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

(17) $\int \tan^{10} x \bullet \sec^2 x dx$;　　(18) $\int \cos^3 x dx$;

(19) $\int \cos^2(wt+j)dt (w \neq 0)$;　　(20) $\int \sin 2x\cos 3x dx$;

(21) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}dx$;　　(22) $\int \sin 5x\sin 7x dx$;

(23) $\int \tan^3 x\sec x dx$;　　(24) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx$;

(25) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx$;　　(26) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$;

(27) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;　　(28) $\int \frac{x}{x^2-x-2}dx$;

(29) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$;　　(30) $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx$;

(31) $\int\frac{x^3}{x+3}dx$; (32) $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$;

(33) $\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$; (34) $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$;

(35) $\int\frac{3}{x^3+1}dx$; (36) $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

(37) $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; (38) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

(39) $\int\frac{1}{x^4-1}dx$; (40) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

(41) $\int\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx$; (42) $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx$;

(43) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$; (44) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

(45) $\int\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}dx$; (46) $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$;

(47) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; (48) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$;

(49) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx(a>0)$; (50) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

(51) $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$; (52) $\int\frac{dx}{3+\cos x}$;

(53) $\int\frac{dx}{2+\sin x}$; (54) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

(55) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$; (56) $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$;

(57) $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$; (58) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

(59) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$; (60) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(61) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

(62) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$;

(63) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

(64) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(65) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;

(66) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

(67) $\int x\sin xdx$;

(68) $\int \ln xdx$;

(69) $\int \arcsin xdx$;

(70) $\int xe^{-x}dx$;

(71) $\int x^2\ln xdx$;

(72) $\int e^{-x}\cos xdx$;

(73) $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$;

(74) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$;

(75) $\int x^2\arctan xdx$;

(76) $\int x\tan^2 xdx$;

(77) $\int x^2\cos xdx$;

(78) $\int te^{-2t}dt$;

(79) $\int \ln^2 xdx$;

(80) $\int x\sin x\cos xdx$;

(81) $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$;

(82) $\int x\ln(x-1)dx$;

(83) $\int (x^2-1)\sin 2xdx$;

(84) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$;

(85) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$;

(86) $\int \cos(\ln x)dx$;

(87) $\int (\arcsin x)^2dx$;

(88) $\int e^x\sin^2 xdx$;

(89) $\int x\ln^2 xdx$;

(90) $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$;

(91) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$;

(92) $\int x\cos^2 xdx$;

(93) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$;

(94) $\int \ln(1+x^2)dx$;

(95) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$;

(96) $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$;

(97) $\int \frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$.

2.计算下列定积分:

(1) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;　　(2) $\int_{0}^{\frac{p}{2}}\sin j\ \cos^3 j\,dj$;

(3) $\int_{0}^{p}(1-\sin^3 q)dq$;　　(4) $\int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}}\cos^2 u du$;

(5) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$;　　(6) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}dy$;

(7) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;　　(8) $\int_{0}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx(a>0)$;

(9) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;　　(10) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$;

(11) $\int_{1}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;　　(12) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$;

(13) $\int_{0}^{1}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$;　　(14) $\int_{1}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(15) $\int_{-2}^{0}\frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}$;　　(16) $\int_{0}^{2}\frac{xdx}{(x^2-2x+2)^2}$;

(17) $\int_{-p}^{p}x^4\sin xdx$;　　(18) $\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos x\cos 2xdx$;

(19) $\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$;　　(20) $\int_{-1}^{1}x(x^{1113}+1)\left(e^x-e^{-x}\right)dx$;

(21) $\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{1+e^x}dx\left(n\in N\right)$;(提示:应用 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$)

(22) $\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$;　　(23) $\int_{0}^{p}\sqrt{1+\cos 2x}dx$;

(24) $\int_0^1 xe^{-x}dx$; (25) $\int_1^e x\ln xdx$;

(26) $\int_0^{\frac{2p}{w}} t\sin wtdt(w\neq 0)$; (27) $\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$;

(28) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; (29) $\int_0^1 x\arctan xdx$;

(30) $\int_0^{\frac{p}{2}} e^{2x}\cos xdx$; (31) $\int_1^2 x\log_2 xdx$;

(32) $\int_0^p (x\sin x)^2dx$; (33) $\int_1^e \sin(\ln x)dx$;

(34) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx$; (35) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx(m\in N^+)$;

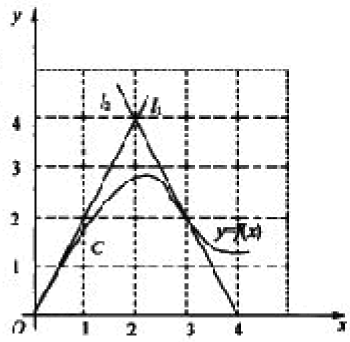
(36) $\int_0^{np} x|\sin x|dx(n\in Z_+)$; (37) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$;

(38) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$; (39) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx$;

(40) $\int_0^{p^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$; (41) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$;

(42) $\int_0^x \min\{4,t^4\}dt$; (43) $\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}dt$.

3.如图,曲线C的方程为$y=f(x)$,点$(3,2)$是它的一个拐点,直线l_1与l_2分别是曲线C在点$(0,0)$与$(3,2)$处的切线,其交点为$(2,4)$.设函数$f(x)$具有三阶连续导数,计算定积分$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx$.



4.设函数$j(x)=\int_0^{\sin x} f(tx^2)dt$,其中$f(x)$是连续函数,且$f(0)=2$.

(1)求$j'(x)$;

(2)讨论$j'(x)$的连续性。

5.设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,证明$g(x)=\int_a^b f(x+t)\cos tdt$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导数,并求$g'(x)$.

6.设xoy平面上有正方形$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$及直线$l:x+y=t(t\ge 0)$.若$S(t)$表示正方形$D$位于直线$l$左下方部分的面积,试求$\int_0^x S(t)dt(x\ge 0)$.

7.设$f(x)=\begin{cases} 2x+\dfrac{3}{2}x^2, -1\le x<0 \\ \dfrac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}, 0\le x\le 1 \end{cases}$,求函数$F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$的表达式。

8.设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且在(a,b)内有$f'(x)>0$.证明:在(a,b)内存在惟一的x,使曲线$y=f(x)$与两直线$y=f(x),x=a$所围平面图形面积S_1是曲线$y=f(x)$与两直线$y=f(x),x=b$所围平面图形面积S_2的3倍.

9.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=f(0)$,证明在$(0,1)$内存在一点$c$使$f'(c)=0$.

10.设$f'(x)$在$[0,a]$上连续,且$f(0)=0$,证明:$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\dfrac{Ma^2}{2}$,其中$M=\max\limits_{0\le x\le a}\left|f'(x)\right|$.(提示: $f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt$)

11.设$f(x)$在$[0,1]$上连续且递减,证明:当$0<l<1$时,$\int_0^l f(x)dx\ge l\int_0^1 f(x)dx$.

12.设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数,且 $f(a)=0$,证明

$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx$.(提示: $f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$,再运用

$Cauchy-Schwarz$ 不等式即可)

注:($Cauchy-Schwarz$ 不等式) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

13.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$0 \le f'(x) \le 1$ 且 $f(0)=0$,证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx.$$

14.过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线,该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形,求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

15.过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1)求 D 的面积 A;

(2)求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

16.椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成。

(1)求 S_1 及 S_2 的方程;

(2)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积。

17.在平面上,有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线,其线密度为 r .在点 $(0,h)$ 处(其中 $h>0$)有一质量为 m 的质点。求射线对该质点的引力。

18.设有一长度为 l,线密度为 m 的均匀细直棒,在与棒的一端垂直距离

为a单位处有一质量为m的质点M,试求这细棒对质点M的引力。

19.判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx(a>0)$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$;

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin wtdt(p>0,w>0)$;　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

(7) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(8) $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$;

(9) $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;　　(10) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

20.判定下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$;　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\bullet\sqrt[3]{x^2+1}}$;

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$;

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$;　　(6) $\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$.

21.当k为何值时,反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$收敛?当$k$为何值时,这反常积分发散?又当$k$为何值时,这反常积分取得最小值?

第四章　多元函数微分学

题型一 判定一个二元函数在一点上是否连续,偏导数是否存在,偏导数是否连续,是否可微

例 1.二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的(　　)

(A)充分条件而非必要条件　　(B)必要条件而非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

解:多元函数在一点上连续性与偏导数存在之间没有直接关系,即“连续”未必“偏导数存在”,“偏导数存在”亦未必“连续”,所以应选(D).

反例如下:

(I) 考虑二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

容易知道 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续,这是因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$,显然它是随着 k 的值的不同而改变的,从而极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在,故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。

此外 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处两个偏导数 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在。根据偏导数的定义知 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\ f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$.

(II) 考虑二元函数 $f(x,y)=|x-y|$,显然 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处两个偏导数 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 不存在,这是由于极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

与

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

均不存在。

例 2.考虑二元函数的下面 4 条性质：

(I) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

(II) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

(III) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

(IV) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在。

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则有(　　)

(A)$(II)\Rightarrow(III)\Rightarrow(I)$　　　　(B)$(III)\Rightarrow(II)\Rightarrow(I)$

(C)$(III)\Rightarrow(IV)\Rightarrow(I)$　　　　(D)$(III)\Rightarrow(I)\Rightarrow(IV)$

解:由于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的充分条件,而 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的充分条件,故应选(A).

题型二 求多元函数(特别是含有抽象函数)的一阶、二阶偏导数;求隐函数的一阶、二阶偏导数

例 3.设 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导,且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$.

解:由于 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,所以 $g'(1)=0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'[xy,yg(x)]+yg'(x)f_2'[xy,yg(x)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'[xy,yg(x)]+y\left[xf_{11}''(xy,yg(x))+g(x)f_{12}''(xy,yg(x))\right]$$

$$+g'(x)f_2'[xy,yg(x)]+yg'(x)\left[xf_{21}''(xy,yg(x))+g(x)f_{22}''(xy,yg(x))\right]$$

故 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$.

例 4.设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求 $\frac{dz}{dx}$.

解:等式 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 两端对 x 求导得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f+x(1+\frac{dy}{dx})f' \\ F_x+F_y\frac{dy}{dx}+F_z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

以上两式消去 $\frac{dy}{dx}$ 解得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{(f+xf')F_y-xf'F_x}{F_y+xf'F_z}.$$

题型三 求二元、三元函数的方向导数和梯度

例 5.设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数。

解:曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量为 $\vec{n}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$,从而函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P\times\frac{2}{\sqrt{14}}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P\times\frac{3}{\sqrt{14}}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P\times\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{14}}\times\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\times\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\times\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{11}{7}$$

例 6.函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　　)

(A) $\vec{i}$　　　　(B) $-\vec{i}$　　　　(C) $\vec{j}$　　　　(D) $-\vec{j}$

解:由于 $f_x(x,y)=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$, $f_y(x,y)=\dfrac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$,

则 $f_x(0,1)=1, f_y(0,1)=0$,所以 $gradf(0,1)=\vec{i}$.

题型四 求曲面的切平面和法线;求空间曲线的切线与法平面

(I) 设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=j(t) \\ y=f(t), t\in[a,b] \\ z=w(t) \end{cases}$$

$M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲线 Γ 上的一点,记 $\begin{cases} x_0=j(t_0) \\ y_0=f(t_0), t_0\in[a,b] \\ z_0=w(t_0) \end{cases}$,则曲线 Γ 在点 M 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{j'(t_0)}=\frac{y-y_0}{f'(t_0)}=\frac{z-z_0}{w'(t_0)}$$

曲线 Γ 在点 M 处的法平面方程为

$$j'(t_0)(x-x_0)+f'(t_0)(y-y_0)+w'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(II) 设曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$, $M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 Σ 上的一点,则曲面 Σ 在点 M 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

曲面 Σ 在点 M 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

例 7.在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　　)

(A)只有1条　　(B)只有2条　　(C)至少有3条　　(D)不存在

解:曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的切线向量为 $\vec{t}=\{1,-2t,3t^2\}$,而平面 $x+2y+z=4$ 的法线向量为 $\vec{n}=\{1,2,1\}$,由题设知 $\vec{t}\perp\vec{n}$,则 $\vec{t}\bullet\vec{n}=1-4t+3t^2=0$,此方程只有两个实根,所以所求切线只有两条。

例 8.设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 p 上,而平面 p 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$,求 a,b 之值。

解:曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-2,5)$ 处的切平面方程为 $2x-4y-z-5=0(*)$,

由直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 的方程得 $\begin{matrix}y=-x-b\\z=x-3+a(-x-b)\end{matrix}$

代入 $(*)$ 式得 $(5+a)x+4b+ab-2\equiv 0$,因而有 $\begin{cases}5+a=0\\4b+ab-2=0\end{cases}$,由此解得 $a=-5, b=-2$.

题型五　求二元、三元函数的极值或条件极值;求一个二元连续函数在一个有界平面域上的最大值和最小值

(I) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数,又 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$,令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下:

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值,且当 $A<0$ 时有极大值,当 $A>0$ 时有极小值;

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值;

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值,也可能没有极值,还需另作讨论。

(II) 如果 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上必定能取得最大值和最小值。这种使函数 $f(x,y)$ 取得最大值或最小值的点既可能在 D 的内部,也可能在 D 的边界上。我们假定函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续、在 D 内可微分且只有有限个驻点,这时求函数 $f(x,y)$ 的最大值和最小值的一般方法是：将函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值相互比较,其中最大的就是最大值,最小的就是最小值。

(III) 要找函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $j(x,y)=0$ 下的可能极值点,可以先作拉格朗日函数 $L(x,y)=f(x,y)+l\,j(x,y)$,其中 l 为参数。再建立方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)+l\,j_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+l\,j_y(x,y)=0 \\ j(x,y)=0 \end{cases}$,由这方程组解出 x,y 及 l,这样得到的 (x,y) 就是函数 $f(x,y)$ 在附加条件 $j(x,y)=0$ 下的可能极值点。

例 9.求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值。

解:(1)先求 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点,由 $\begin{cases} f_x=2x-2xy^2=0 \\ f_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$ 得 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点为 $(\pm\sqrt{2},1)$, $f(\pm\sqrt{2},1)=2$.

(2)再考察边界 $y=0\,(-2\le x\le 2)$

$$f(x,0)=x^2\,(-2\le x\le 2)$$

最大值 $f(\pm 2,0)=4$,最小值 $f(0,0)=0$.

(3)最后考察边界 $x^2+y^2=4, y>0$

$$f(x,y)=x^4-5x^2+8(-2<x<2)$$

令 $j(x)=x^4-5x^2+8(-2<x<2)$, $j'(x)=4x^3-10x=0$ 得

$$x=0, x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, j\left(0\right)=8, j\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\frac{7}{4}.$$

比较可知, $f\left(x,y\right)$ 在 D 上的最大值为 8 ,最小值为 0 .

例 10.已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$,求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点。

解:点 (x,y,z) 到 xOy 面的距离为 $|z|$,故求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点的坐标,等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点。

令 $L\left(x,y,z,l,m\right)=z^2+l\left(x^2+y^2-2z^2\right)+m\left(x+y+3z-5\right)$

由 $\begin{cases}L_x=2lx+m=0\\L_y=2ly+m=0\\L_z=2z-4lz+3m=0\\x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-5\\y=-5\\z=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$

根据几何意义,曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点,故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$.

例 11.求二元函数 $f\left(x,y\right)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。

解:由 $\begin{cases}f_x=2x\left(2+y^2\right)=0\\f_y=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$ 得 $x=0, y=\frac{1}{e}$.

$$A=f_{xx}(0,\frac{1}{e})=2(2+\frac{1}{e^2}), B=f_{xy}(0,\frac{1}{e})=0, C=f_{yy}(0,\frac{1}{e})=e$$

显然, $AC-B^2>0, A>0$,故二元函数 $f\left(x,y\right)$ 有极小值 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

第四章习题

1.设 $z=f\left(u,x,y\right),u=xe^{y}$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2.设 $u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中函数 f,g 具有二阶连续导数,求 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

3.设 $z=f\left(2x-y\right)+g\left(x,xy\right)$,其中函数 $f\left(t\right)$ 二阶可导,$g\left(u,v\right)$ 具有连续二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4.设 $z=f\left(2x-y,y\sin x\right)$,其中 $f\left(u,v\right)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5.设 $z=f\left(e^{x}\sin y,x^2+y^2\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6.设 $z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$, f 具有连续二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7.设 $u=f\left(x,y,z\right),j\left(x^2,e^{y},z\right)=0,y=\sin x$,其中 f,j 都具有一阶连续偏导数,且 $\dfrac{\partial j}{\partial z}\neq 0$,求 $\dfrac{du}{dx}$.

8.设 $y=y\left(x\right),z=z\left(x\right)$ 是由方程 $z=xf\left(x+y\right)$ 和 $F\left(x,y,z\right)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求 $\dfrac{dz}{dx}$.

9.设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有二阶连续导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10.设函数 $f\left(u\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内具有二阶导数,且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1)验证 $f''\left(u\right)+\dfrac{f'\left(u\right)}{u}=0$;

(2)若 $f(1)=0, f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式。

11.设 $z=f(x+y,x-y,xy)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$ 所确定,其中 f 为可微分函数,试计算 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 并化成最简形式。

13.设 $u=u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 具有连续二阶偏导数,且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$$

试求函数 u 的表达式。

14.若 $u=f(xyz), f(0)=0, f'(1)=1$,且 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$,求 u.

15.设二元函数 $f(x,y)=|x-y|j(x,y)$,其中 $j(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个邻域内连续.试证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是 $j(0,0)=0$.

16.设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, x^2+y^2=0 \end{cases}$ 求

(1) $a=f_{xy}(0,0)$ 和 $b=f_{yx}(0,0)$ 的值;

(2)满足 $y'(x)+x^2y'(-x)=k$ (待定常数)及 $y(0)=a, \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=b$ 的函数 $y=y(x)$ 的表达式。

17.求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 p 的方程,使 p 过已知直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

18.求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程。

19.设直线$l:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面$p$上,而平面$p$与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$,求$a,b$之值。

20. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$的极值点和极值。

21.求二元函数$f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$的极值。

22.已知函数$z=f(x,y)$的全微分$dz=2xdx-2ydy$,并且$f(1,1)=2$.求$f(x,y)$在椭圆域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\right\}$上的最大值和最小值。

23.求函数$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 4,y\geq 0\right\}$上的最大值和最小值。

24.在椭圆$x^2+4y^2=4$上求一点,使其到直线$2x+3y-6=0$的距离最短。

25.已知曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$,求$C$上距离$xoy$面最远的点和最近的点。

26.求函数$u=x^2+y^2+z^2$在约束条件$z=x^2+y^2$和$x+y+z=4$下的最大值与最小值。

27.设$\Sigma_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,其中$a>b>\sqrt{1+\sqrt{2}}c$,$\Sigma_2:z^2=x^2+y^2$,$\Gamma$为$\Sigma_1$和$\Sigma_2$的交线。求椭球面$\Sigma_1$在$\Gamma$上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值。

第五章　多元函数积分学

题型一　二重积分计算

设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数,则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)ds$ 可按以下方法计算:

(1)按 D 的对称性,化简 $\iint\limits_D f(x,y)ds$.

当 D 具有某种对称性时,如果 $f(x,y)$ 在对称点处的值互为相反数,则 $\iint\limits_D f(x,y)ds=0$;如果 $f(x,y)$ 在对称点处的值彼此相等,则 $\iint\limits_D f(x,y)ds=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)ds$,其中 D_1 是 D 按它所具有的对称性划分成的两部分之一。

当 D 具有某种对称性,但 $f(x,y)$ 在对称点处的值既不互为相反数,也不彼此相等时,可将 $f(x,y)$ 适当地表示为若干个函数之和,然后分别考虑各个函数在对称点处值的相互关系。

在二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)ds$ 计算中,常见的 D 的对称性有以下三种:

• **D 关于 x 轴(或关于 y 轴)对称。它指的是对任意 $(x,y)\in D$ 都有 $(x,-y)\in D$ (或 $(-x,y)\in D$),此时点 (x,y) 与点 $(x,-y)$ (或点 $(-x,y)$)为对称点。**

, D 关于原点对称。它指的是对任意 $(x,y)\in D$ 都有 $(-x,-y)\in D$,此时点 (x,y) 与点 $(-x,-y)$ 为对称点。

f **D 关于直线 $y=x$ (或直线 $y=-x$)对称。它指的是对任意 $(x,y)\in D$ 都有 $(y,x)\in D$ (或 $(-y,-x)\in D$),此时点 (x,y) 与点 (y,x) (或点 $(-y,-x)$)为对称点。**

(2)对 D 作适当的划分,化简 $\iint\limits_D f(x,y)ds$.

当D比较复杂时,可将它适当地划分成若干块,例如D_1与D_2两块。如果$\iint\limits_{D_1} f(x,y)ds$, $\iint\limits_{D_2} f(x,y)ds$ 都较易计算,则可由

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds$$

算出$\iint\limits_D f(x,y)ds$.

二重积分常用的计算公式现列举如下:

• 当$D=\{(x,y)|y_1(x)\le y\le y_2(x), a\le x\le b\}$ (X型区域)时,

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

, 当$D=\{(x,y)|x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$ (Y型区域)时,

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

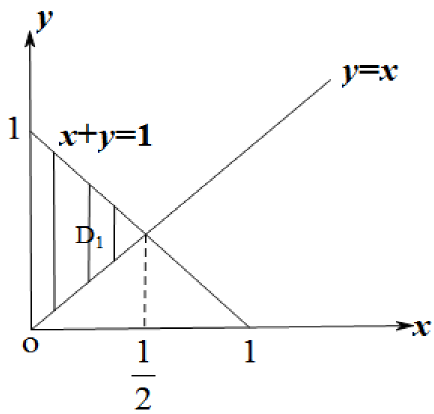
f 当$D=\{(r,q)|r_1(q)\le r\le r_2(q), 0\le a\le q\le b\le 2p\}$ (角域)时,

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int_a^b dq \int_{r_1(q)}^{r_2(q)} f(r\cos q, r\sin q) rdr$$

例 1.设$D=\{(x,y)|x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$,则二重积分$\iint\limits_D \min\{x,y\}ds =$______.

分析:根据D的对称性化简被积函数与积分区域,然后计算所给的二重积分。

解:显然D关于直线$y=x$对称,且在对称点处$\min\{x,y\}$的值彼此相等,于是$\iint\limits_D \min\{x,y\}ds = 2\iint\limits_{D_1}\min\{x,y\}ds = 2\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} xdy = 2\int_0^{\frac{1}{2}}(x-2x^2)dx = \frac{1}{12}$, 其中区域$D_1$如下图阴影部分所示。



例 2.设 $f(u)$ 是连续的奇函数, D 是由直线 $x=1, y=1$ 及曲线 $y=-x^3$ 围成的平面区域,则 $\iint\limits_D [x^3+f(xy)]ds =$ ____________.

分析:画出 D 的图形,利用对称性计算所给的二重积分。

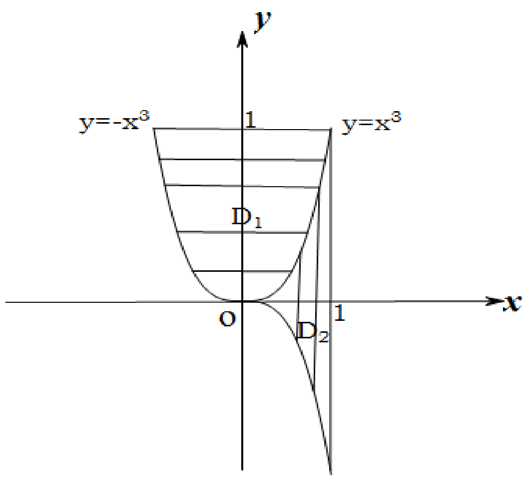
解:用曲线 $y=x^3$ 将 D 分成 D_1 与 D_2.

由于 D_1 关于 y 轴对称,而 $x^3+f(xy)$ 在对称点处的值互为相反数,所以 $\iint\limits_{D_1}[x^3+f(xy)]ds=0$.

由于 D_2 关于 x 轴对称,而 $f(xy)$ 在对称点处的值互为相反数,所以

$$\iint\limits_{D_2}[x^3+f(xy)]ds=\iint\limits_{D_2}x^3ds+\iint\limits_{D_2}f(xy)ds=\iint\limits_{D_2}x^3ds=\int_0^1dx\int_{-x^3}^{x^3}x^3dy=2\int_0^1x^6dx=\frac{2}{7}.$$

从而 $\iint\limits_D[x^3+f(xy)]ds=\iint\limits_{D_1}[x^3+f(xy)]ds+\iint\limits_{D_2}[x^3+f(xy)]ds=\frac{2}{7}$,其中区域 D_1 与 D_2 分别如下图阴影部分所示。



例 3.设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, |x|+|y|<1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\le|x|+|y|\le 2 \end{cases}$

求二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)ds$,其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 2\}$.

分析:先利用积分区域的对称性化简二重积分,然后再根据函数 $f(x,y)$

表达式将 D 适当分块,逐块计算 $f(x,y)$ 的二重积分并相加即得 $\iint\limits_{D} f(x,y)ds$.

解:由于 D 既关于 x 轴对称,又关于 y 轴对称,且在对称点处 $f(x,y)$ 的值彼此相等,所以 $\iint\limits_{D} f(x,y)ds=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)ds$ (D_1 是 D 的第一象限部分).

由于 $D_1=D_1^{'}\cup D_2^{'}$,其中

$$D_1^{'}=\{(x,y)|x+y<1,x\geq 0,y\geq 0\},D_2^{'}=\{(x,y)|1\leq x+y\leq 2,x\geq 0,y\geq 0\}$$

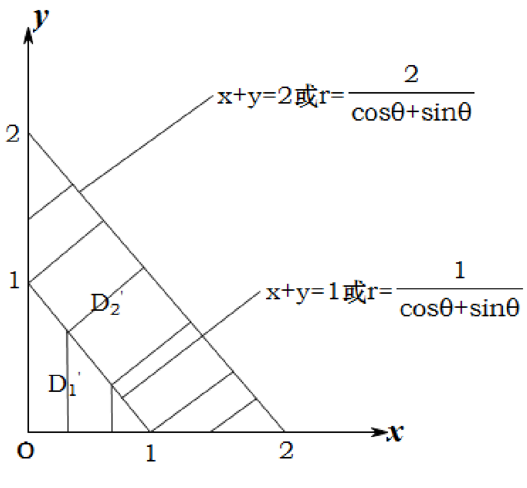
所以 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)ds=\iint\limits_{D_1^{'}} x^2ds+\iint\limits_{D_2^{'}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}ds$.

$$\iint\limits_{D_1^{'}} x^2ds=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2dy=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=\frac{1}{12}$$

$$\iint\limits_{D_2^{'}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{p}{2}}dq\int_{\frac{1}{\cos q+\sin q}}^{\frac{2}{\cos q+\sin q}}\frac{1}{r}rdr=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1}{\cos q+\sin q}dq=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(q-\frac{p}{4}\right)}dq$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sec\left(q-\frac{p}{4}\right)+\tan\left(q-\frac{p}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]=\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

故 $\iint\limits_{D} f(x,y)ds=4\left[\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.



题型二　三重积分计算

设 $f(x,y,z)$ 是有界闭区域 Ω 上的连续函数,则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$ 可按以下方法计算:

(1)按 Ω 的对称性,化简 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$.

当 Ω 具有某种对称性时,如果 $f(x,y,z)$ 在对称点处的值互为相反数,则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=0$;如果 $f(x,y,z)$ 在对称点处的值彼此相等,则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dv$,其中 Ω_1 是 Ω 按它所具有的对称性划分成的两部分之一。

当 Ω 具有某种对称性,但 $f(x,y,z)$ 在对称点处的值既不互为相反数,也不彼此相等时,可将 $f(x,y,z)$ 适当地表示为若干个函数之和,然后分别考虑各个函数在对称点处值的相互关系。

在三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$ 计算中,常见的 Ω 的对称性有以下三种:

• Ω 关于坐标平面对称。例如,关于 xoy 平面对称,它指的是对任意 $(x,y,z)\in\Omega$ 都有 $(x,y,-z)\in\Omega$,此时点 (x,y,z) 与点 $(x,y,-z)$ 为对称点。

, Ω 关于原点对称。它指的是对任意 $(x,y,z)\in\Omega$ 都有 $(-x,-y,-z)\in\Omega$,此时点 (x,y,z) 与点 $(-x,-y,-z)$ 为对称点。

f Ω 关于某个非坐标平面对称。例如,关于平面 $y=x$ 时,它指的是对任意 $(x,y,z)\in\Omega$ 都有 $(y,x,z)\in\Omega$,此时点 (x,y,z) 与点 (y,x,z) 为对称点。

(2)对 Ω 作适当的划分,化简 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$.

当 Ω 比较复杂时,可将它适当地划分成若干块,例如 Ω_1 与 Ω_2 两块。如果 $\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv$, $\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$ 都比较容易计算,则可由

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$

算出 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$.

三重积分常用的计算公式现列举如下:

- **当 $\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\}$ (其中 D_{xy} 是 Ω 在 xoy 平面上的投影)时, $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \iint\limits_{D_{xy}} ds \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.**

当 $\Omega = \{(x,y,z) | y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z), (x,z) \in D_{xz}\}$ (其中 D_{xz} 是 Ω 在 xoz 平面上的投影)或者 $\Omega = \{(x,y,z) | x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z), (y,z) \in D_{yz}\}$ (其中 D_{yz} 是 Ω 在 yoz 平面上的投影)时,也有类似的计算公式。

,当在球面坐标系下,

$$\Omega = \{(r,q,j) | r_1(q,j) \le r \le r_2(q,j), q_1(j) \le q \le q_2(j), 0 \le a \le j \le b \le p\}$$ **时**

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \int_a^b dj \int\limits_{q_1(j)}^{q_2(j)} dq \int\limits_{r_1(q,j)}^{r_2(q,j)} f(r\cos q \sin j, r \sin q \sin j, r\cos j)\, r^2 \sin j\, dr.$$

当 $\Omega = \{(r,q,j) | r_1(q,j) \le r \le r_2(q,j), j_1(q) \le j \le j_2(q), 0 \le a \le q \le b \le 2p\}$ 时,也有类似的计算公式。

例 4.设 $\Omega = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$, a,b,c 都是大于零的常数,则

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dv = \underline{\qquad\qquad}.$$

分析:利用 Ω 的对称性计算所给的三重积分。

解:由于 Ω 关于平面 $y = x$ 对称,所以 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 - y^2)\,dv = 0$,即 $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dv$.

同样可得 $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv = \iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$.

因此 $\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dv = \frac{1}{a^2} \iiint\limits_{\Omega} x^2 dv + \frac{1}{b^2} \iiint\limits_{\Omega} y^2 dv + \frac{1}{c^2} \iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \iiint\limits_{\Omega} x^2 dv$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{4}{15}\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

题型三　曲线积分计算

(I)关于弧长的曲线积分计算方法

设 $f(x,y)$ 是连续函数,C 是平面上的光滑或分段光滑的简单曲线,则 $\int_C f(x,y)ds$ 可按以下方法计算:

(1)利用 C 的方程化简 $f(x,y)$,从而化简 $\int_C f(x,y)ds$.

设 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[t_0,t_1]$,则

$$\int_C f(x,y)ds=\int_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t))\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt.$$

(2)利用 C 的对称性化简 $\int_C f(x,y)ds$.

当 C 具有某种对称性时,如果 $f(x,y)$ 在对称点处的值互为相反数,则 $\int_C f(x,y)ds=0$;如果 $f(x,y)$ 在对称点处的值彼此相等,则

$$\int_C f(x,y)ds=2\int_{C_1} f(x,y)ds$$

其中 C_1 是 C 按其所具有的对称性被划分成的两部分之一。

如果 $f(x,y)$ 在对称点处的值既不互为相反数,也不彼此相等,则可考虑将 $f(x,y)$ 适当地表示成若干个函数之和,然后分别考虑各个函数在对称点处值的相互关系。

在曲线积分 $\int_C f(x,y)ds$ 的计算中,常见的 C 的对称性有与平面区域 D

的对称性相同的三种。

(II)关于坐标的曲线积分计算方法

设$P(x,y),Q(x,y)$是连续函数,C是光滑或分段光滑的简单有向曲线,则$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$可以按以下方法计算:

如果C是正向闭曲线,其围成的闭区域为D,且$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有连续偏导数,则考虑应用格林公式计算,即可由

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)ds$$

计算$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

如果C不是闭曲线,有时适当添加上一段曲线C_1,使得$C+C_1$成为闭曲线(不妨设其为正向),则可由

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{C+C_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy-\int_{C_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)ds-\int_{C_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

计算$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,其中D是由$C+C_1$围成的闭区域。

如果不易用格林公式计算$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,则考虑按“关于坐标的曲线积分计算公式”计算。

例 5.设L是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,其周长为l,则曲线积分$\oint_L(2x^2y+x^2+4y^2)ds=$

______________.

分析:利用L的对称性化简所给曲线积分后再进行计算。

解:由于L关于x轴对称,而$2x^2y$在对称点处的值互为相反数,所以

$\oint_L 2x^2yds=0$,因此$\oint_L(2x^2y+x^2+4y^2)ds=\int_L(x^2+4y^2)ds=4\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)ds$

$=4\oint_L ds=4l$.

例 6.设C是正向椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$,则曲线积分$\oint_C \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}=$__________.

分析:写出C的参数方程,代入曲线积分,将其转换成定积分。

解:C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=3\sin t,\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$,于是

$$\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_0^{2\pi}\frac{-2\sin t+3\cos t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt=-2\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt+3\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt+\int_0^{\pi}\frac{\sin(\pi+t)}{|2\cos(\pi+t)|+|3\sin(\pi+t)|}dt$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt+\int_0^{\pi}\frac{-\sin t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt$$
$$=0$$

同理$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{|2\cos t|+|3\sin t|}dt=0$.

故$\displaystyle\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=0$.

例 7.设$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$,记其正向边界曲线为$L$,证明

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\int_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx\ge 2.$$

证明:

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)d\sigma$$
$$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)d\sigma$$

由于D关于直线$y=x$对称,所以有

$$\iint_D e^{\sin y}d\sigma=\iint_D e^{\sin x}d\sigma,\ \iint_D e^{-\sin y}d\sigma=\iint_D e^{-\sin x}d\sigma$$

故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\int_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)ds\ \geq\iint_D 2\sqrt{e^{\sin x}\bullet e^{-\sin x}}ds\ =2$$

例 8.设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数,L 是上半平面($y>0$)内的有向分段光滑曲线,其起点为(a,b),终点为(c,d),记

$$I=\int_L\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy.$$

(1)证明 I 与 L 无关;

(2)当 $ab=cd$ 时,求 I 的值。

解:(1)记 $P(x,y)=\dfrac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right],Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]$

由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy),\dfrac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)-\dfrac{1}{y^2}$

从而在上半平面($y>0$)内 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,故 I 与 L 无关。

(2)由(1)知 I 与 L 无关,于是

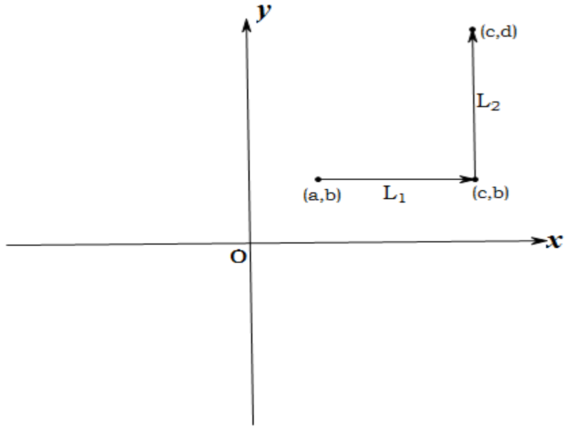
$$I=\int_{L_1}\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy+\int_{L_2}\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy$$

$$=\int_a^c\frac{1}{b}\left[1+b^2f(bx)\right]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}\left[y^2f(cy)-1\right]dy$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(x)dx+\int_{bc}^{cd}f(x)dx+c\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

其中积分路径 L_1,L_2 如下图所示。



注:设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通域 G 上具有一阶连续的偏导数,则曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与位于 G 内的路径 L 无关的命题与以下**(1)(2)(3)**都是等价的:

(1)对 G 内的任意光滑或分段光滑有向闭曲线 C 都有

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

(2)在 G 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$;

(3)存在二元可微函数 $\varphi(x,y)$,使得 $d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 G 内成立。

题型四　曲面积分计算

(I)关于面积的曲面积分计算方法

设 $f(x,y,z)$ 是连续函数,Σ 是光滑或分片光滑曲面,则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 可以按以下方法计算:

(1)利用 Σ 的方程化简 $f(x,y,z)$,从而化简 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$.

设 $\Sigma: z=z(x,y)$ 是光滑或分片光滑曲面,$f(x,y,z)$ 连续,则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}ds$$

其中 D_{xy} 是 Σ 在 xoy 平面上的投影。

(2)利用 Σ 的对称性化简 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$.

当 Σ 具有某种对称性时,如果 $f(x,y,z)$ 在对称点处的值互为相反数,则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=0$;如果 $f(x,y,z)$ 在对称点处的值彼此相等,则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS$$

其中 Σ_1 是 Σ 按其所具有的对称性被划分成的两部分之一。

如果 $f(x,y,z)$ 在对称点处既不互为相反数,也不彼此相等,则可考虑将 $f(x,y,z)$ 适当地表示成若干个函数之和,然后分别考虑各个函数在对称点处值的相互关系。

在曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ 的计算中,常见的 Σ 的对称性有与空间区域 Ω 的对称性相同的三种。

(II)关于坐标的曲面积分计算方法

设 $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 都是连续函数,Σ 是光滑或分片光滑有向曲面,则 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 可以按以下方法计算:

如果 Σ 是外侧闭曲面,Ω 是由 Σ 围成的闭区域,$P(x,y,z),Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续的偏导数,则可考虑应用高斯公式,即可由

$$\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

计算 $\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$.

如果 Σ 不是闭曲面,有时适当添上一块曲面 Σ_1,使得 $\Sigma+\Sigma_1$ 是闭曲面(不妨设其是外侧闭曲面),则可由

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

计算 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$,其中对 $\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 应用高斯公式。

如果不易应用高斯公式计算 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$,则考虑按“关于坐标的曲面积分计算公式”计算。

例 9.设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2y$,求曲面积分 $\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)dS$.

分析:将欲求的曲面积分转换成对坐标的曲面积分,然后用高斯公式计算。

解:设Σ取外侧,记它围成的区域为Ω,则Σ在点(x,y,z)处的外法向量为

$\{2x,2y-2,2z\}$,从而外法向量的方向余弦$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 分别为

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}}=x,\cos\beta=\frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}}=y-1,\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}}=z$$

因此 $\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+2y^2+3z^2\right)dS=\iint\limits_{\Sigma}\left[x\cdot x+2(y+1)(y-1)+3z\cdot z+2\right]dS$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}\left[x\cos\alpha+2(y+1)\cos\beta+3z\cos\gamma\right]dS+2\iint\limits_{\Sigma}dS$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}xdydz+2(y+1)dzdx+3zdxdy+2\cdot4\pi\cdot1^2$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)dv+8\pi$$

$$=6\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot1^3+8\pi$$

$$=16\pi$$

注:设Σ是有向曲面,$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$连续,则

$$\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是Σ在点(x,y,z)处的法向量方向余弦,法向量与Σ的侧符合右手规则。

例 10.设Σ为上半椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1(z\geq0)$,点$P(x,y,z)\in\Sigma$,$\Pi$是$\Sigma$在点$P(x,y,z)$处的切平面,$d(x,y,z)$为原点到$\Pi$的距离,求

(1) $I_1=\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{d(x,y,z)}dS$;

(2) $I_2=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{d^2(x,y,z)}(dydz+dzdx+dxdy)$,这里$\Sigma$取上侧。

解:Σ在点$P(x,y,z)$处的切平面Π的方程为

$$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$$

即 $xX+yY+2zZ-2=0$,由此得到原点到Π的距离$d(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$

$$(1)\ I_1=\iint_{\Sigma}\frac{z}{d(x,y,z)}dS=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}dS$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}ds$$ （$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$ 是 Σ 在 xoy 平面上的投影)

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}ds$$

$$=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)ds$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2p}dq\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr$$

$$=\frac{3}{2}p$$

(2)由于 Σ 在点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为 $\{x,y,2z\}$,所以它的上侧的方向余弦为 $\cos a=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}},\cos b=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}},\cos g=\dfrac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$

因此

$$dydz=\cos a\,dS=\frac{x}{2}d(x,y,z)dS,\ dzdx=\cos b\,dS=\frac{y}{2}d(x,y,z)dS,\ dxdy=\cos g\,dS=zd(x,y,z)dS$$

从而 $I_2=\iint_{\Sigma}\dfrac{1}{d^2(x,y,z)}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+z\right)d(x,y,z)dS=\dfrac{1}{2}\iint_{\Sigma}\dfrac{1}{d(x,y,z)}(x+y+2z)dS$

$=\iint_{\Sigma}\dfrac{z}{d(x,y,z)}dS$ (由于 Σ 关于平面 $x=0$ 对称,在对称点处 $\dfrac{x}{d(x,y,z)}$ 的值互为相反数,所以 $\iint_{\Sigma}\dfrac{x}{d(x,y,z)}dS=0$,同样 $\iint_{\Sigma}\dfrac{y}{d(x,y,z)}dS=0$.)

$$=\frac{3}{2}p$$

例 11.计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(y^2-2y)dzdx+(z+1)^2dxdy$,其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 夹于平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的那部分的外侧。

解:分别记Σ_1,Σ_2为平面$z=1,z=2$被Σ截下部分,且取Σ_1为下侧,Σ_2为上侧,则$\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$是一个外侧闭曲面,记它围成的区域为Ω,则

$$I=\iint_{\Sigma}\left(y^2-2y\right)dzdx+\left(z+1\right)^2dxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(y^2-2y\right)dzdx+\left(z+1\right)^2dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1}\left(y^2-2y\right)dzdx+\left(z+1\right)^2dxdy-\iint_{\Sigma_2}\left(y^2-2y\right)dzdx+\left(z+1\right)^2dxdy\,.$$

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(y^2-2y\right)dzdx+\left(z+1\right)^2dxdy=\iiint_{\Omega}2\left(y+z\right)dv=2\iiint_{\Omega}zdv$ (由于Ω关于平面$y=0$对称且$2y$在对称点处的值互为相反数,所以$\iiint_{\Omega}2ydv=0$)

$$=2\left(\iint_{1\le x^2+y^2\le 2}ds\int_{x^2+y^2}^{2}zdz+\iint_{x^2+y^2\le 1}ds\int_{1}^{2}zdz\right)$$

$$=2\left(\int_0^{2p}dq\int_1^{\sqrt{2}}rdr\int_{r^2}^{2}zdz+\frac{3}{2}p\right)$$

$$=2\left(\frac{5}{6}p+\frac{3}{2}p\right)=\frac{14}{3}p\ .$$

$$\iint_{\Sigma_1}\left(y^2-2y\right)dzdx+\left(z+1\right)^2dxdy=\iint_{\Sigma_1}4dxdy=-4\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-4p$$

$$\iint_{\Sigma_2}\left(y^2-2y\right)dzdx+\left(z+1\right)^2dxdy=\iint_{\Sigma_2}9dxdy=9\iint_{x^2+y^2\le 2}dxdy=18p$$

故$I=\frac{14}{3}p+4p-18p=-\frac{28}{3}p$.

第五章习题

1.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,并设 $\int_0^1 f(x)dx = A$,求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

2.计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 ydxdy$,其中 D 是由双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 及直线 $y = 0, y = 1$ 所围成的平面区域。

3.计算积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,其中 $D = \{(x,y)|0 \le y \le x, x^2+y^2 \le 2x\}$.

4.计 算 三 重 积 分 $\iiint\limits_\Omega (x+z)dv$, 其 中 Ω 是 由 曲 面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域。

5.求 $\iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2+z\right)dv$,其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体。

6.计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$,其中 $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

7.设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零

$$F(t) = \frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dv}{\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)ds}, G(t) = \frac{\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)ds}{\int_{-t}^{t} f\left(x^2\right)dx}$$

其中 $\Omega(t) = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le t^2\}, D(t) = \{(x,y)|x^2+y^2 \le t^2\}$.

(1)讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2)证明当 $t>0$ 时, $F(t) > \frac{2}{p}G(t)$.

8.设 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le \sqrt{2}, x \ge 0, y \ge 0\}$, $\left[1+x^2+y^2\right]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数,计算二重积分 $\iint\limits_D xy\left[1+x^2+y^2\right]dxdy$.

9.计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right|ds$,其中 $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

10.设区域 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, x \ge 0\}$,计算二重积分 $I = \iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

11.设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, |x|+|y|\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$$

计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)ds$,其中$D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 2\}$.

12.计算$\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$,其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

13.求$\iint\limits_D \mathrm{sgn}(xy-1)dxdy$,其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

14.求$I=\int_L (e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$,其中$a,b$为正的常数,$L$为从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$O(0,0)$的弧。

15.计算曲线积分$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$,其中$L$是曲线$y=\sin x$上从点$(0,0)$到点$(p,0)$的一段。

16.设曲线积分$\int_C xy^2dx+yj(x)dy$与路径无关,其中$j(x)$具有连续的导数,且$j(0)=0$.计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yj(x)dy$的值。

17.设函数$Q(x,y)$在xoy平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关,并且对任意t恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy$$

求$Q(x,y)$.

18.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数,L是上半平面($y>0$)内的有向分段光滑曲线,其起点为(a,b),终点为(c,d),记

$$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy$$

(1)证明曲线积分I与路径L无关;

(2)当$ab=cd$时,求I的值。

19.设在上半平面$D=\{(x,y)|y>0\}$内,函数$f(x,y)$具有连续偏导数,且对任意的$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$.证明:对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L,都有$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

20.计算曲线积分$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中$L$是以点$(1,0)$为中心,$R$为半径的圆周($R>1$),取逆时针方向。

21.计算曲面积分$I=\iint_\Sigma (8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$,其中$\Sigma$是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}(1\le y\le 3)$绕$y$轴旋转一周所成的曲面,它的法向量与$y$轴正向的夹角恒大于$\frac{\pi}{2}$.(答案:$34\pi$)

(提示:取圆片$\Sigma_1:\begin{cases} x^2+z^2\le 2 \\ y=3 \end{cases}$其法线方向与$y$轴正向相同,设$\Sigma$和$\Sigma_1$所围成区域为$\Omega$,再利用高斯公式)

22.设Σ为曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧,计算曲面积分

$$I=\oiint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

(答案:$\frac{12}{5}\pi$)

23.求曲面积分$I=\iint_\Sigma yzdzdx+2dxdy$,其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=4$外侧在$z\ge 0$的部分.(答案:$12\pi$)

(提示:取曲面片$\Sigma_1:\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z=0 \end{cases}$其法向量与$z$轴负向相同,设$\Sigma$和$\Sigma_1$所围成区域为$\Omega$,再利用高斯公式)

24.计算曲面积分$I=\iint_\Sigma (x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$,其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧.(答案:$\frac{29}{20}\pi a^5$)

25.计算曲面积分$I=\oiint_\Sigma 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$,其中$\Sigma$是由曲面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.(答案:$\frac{p}{2}$)

26.计算曲面积分 $\iint\limits_{S}(2x+z)dydz+zdxdy$,其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2\,(0\le z\le 1)$,其法向量与 z 轴正向夹角为锐角.(答案:$-\frac{1}{2}p$)

27.计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.(答案:$-\frac{p}{2}a^3$)

28.计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$,其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\,(z\ge 0)$ 的上侧.(答案:$-p$)

29.计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$,其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 的上侧.(答案:p)

30.计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.(答案:$4p$)

31.计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}zdS$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分.(答案:$\frac{32}{9}\sqrt{2}$)

32.设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in S$,p 为 S 在点 P 处的切平面, $r(x,y,z)$ 为点 $(0,0,0)$ 到平面 p 的距离,求 $\iint\limits_{S}\frac{z}{r(x,y,z)}dS$.(答案:$\frac{3}{2}p$)

33.设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分($z>0$),点 $P(x,y,z)\in S$,p 为 S 在点 P 处的切平面, $r(x,y,z)$ 为点 $(0,0,0)$ 到平面 p 的距离,求 $\iint\limits_{S}z^3r(x,y,z)dS$.(答案:p)

34.设曲面$\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上的点$(x,y,z)$处的切平面为$p$,计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{l}dS$,其中$l$是坐标原点到$p$的距离.(答案:$\frac{4p}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$)

35.已知S是空间曲线$\begin{cases}x^2+3y^2=1\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转形成的椭球面的上半部分$(z\geq 0)$(取上侧),$II$是$S$在点$P(x,y,z)$处的切平面,$r(x,y,z)$是原点到切平面$II$的距离,$l,m,v$表示$S$的正法向的方向余弦。计算

(1)$\iint\limits_{S}\frac{z}{r(x,y,z)}dS$;(答案:$\frac{\sqrt{3}}{2}p$)

(2)$\iint\limits_{S}z(lx+3my+vz)dS$.(答案:$\frac{\sqrt{3}}{2}p$)

36.设有一半径为R的球体,P_0是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到P_0距离的平方成正比(比例常数$k>0$),求球体的重心位置.(答案:$\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$)

37.设l是过原点、方向为(a,b,g)(其中$a^2+b^2+g^2=1$)的直线,均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$(其中$0<c<b<a$,密度为1)绕$l$旋转。

(1)求其转动惯量;(答案:$\frac{4abcp}{15}\left[(1-a^2)a^2+(1-b^2)b^2+(1-g^2)c^2\right]$)

(2)求其转动惯量关于方向(a,b,g)的最大值和最小值.

(答案:$J_{\max}=\frac{4abcp}{15}\left(a^2+b^2\right)$,$J_{\min}=\frac{4abcp}{15}\left(b^2+c^2\right)$)

38.给定面宽度为1的平面薄板$D: x^2\leq y\leq 1$,求该薄板关于过D的重心和点$(1,1)$的直线的转动惯量.(答案:$\frac{352}{3045}$)

39.设密度为1的立体Ω由不等式$\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$表示,试求$\Omega$绕直线$x=y=z$的转动惯量.

第六章　无穷级数

题型一　判别级数收敛性

(I)正项级数收敛性判别法

正项级数收敛性有以下三个判别法:

(1)比较法

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ **是两个正项级数,若** $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$**,则**

(i)当 $0<l<+\infty$ **时,级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ **同时收敛或同时发散;**

(ii)当 $l=0$ **且级数** $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ **收敛时,级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **也收敛;**

(iii)当 $l=+\infty$ **且级数** $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ **发散时,级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **也发散。**

常用的比较级数有

$\sum_{n=1}^{\infty}aq^n\left(a>0,q>0\right)$**.当** $0<q<1$ **时,** $\sum_{n=1}^{\infty}aq^n$ **收敛;当** $q\geq1$ **时,** $\sum_{n=1}^{\infty}aq^n$ **发散。**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$**(** p **是常数).当** $p>1$ **时,** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ **收敛;当** $p\leq1$ **时,** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ **发散。**

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^a\ln^b n}$**(** a,b **是常数).当** $a>1$ **或** $a=1$ **而** $b>1$ **时** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^a\ln^b n}$ **收敛,其他情况时** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^a\ln^b n}$ **发散。**

(2)比值法

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **为正项级数,且** $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$**,则**

(i)当 $q<1$ **时,级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛;**

(ii)当$q>1$或$q=+\infty$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散;

(iii)当$q=1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛,也可能发散,需用其他方法判别。

(3)根值法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数,且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,则

(i)当$l<1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(ii)当$l>1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散;

(iii)当$l=1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛,也可能发散,需用其他方法判别。

(II)交错级数收敛性判别法

($Leibniz$判别法)若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\,(u_n>0,n=1,2,\cdots)$满足下述两个条件:

(i)数列$\{u_n\}$单调递减;

(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛。

例 1.下列级数的收敛性结论为____________.

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$;　　(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;　　(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{1}{n}-\ln\sin\dfrac{1}{n}\right)$.

解:(1)由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}$,而

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[1+(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1)\right]}{\frac{1}{n}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{1}{n}}=-\frac{1}{2}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=e^{-\frac{1}{2}}<1$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$收敛。

(2)由于$n\to\infty$时,$u_n=\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}:\frac{1}{\sqrt{n}}g\frac{1}{\sqrt{n+1}}:\frac{1}{n}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$发散。

(3)将$u_n=\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}$中的$\frac{1}{n}$改写成$x$得

$$\ln x-\ln\sin x=-\ln\frac{\sin x}{x}=-\ln\frac{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x}=-\ln\left[1-x^2\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)\right]:x^2\left(\frac{1}{6}+o(1)\right):\frac{x^2}{6}$$

$(x\to0^+)$,由此可知当$n\to\infty$时,$u_n=\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}:\frac{1}{6n^2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2}$收敛,所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}\right)$收敛。

例 2.已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+2n+3)^a}$发散,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^a$收敛,则正数$a$取值范围为__________.

解:$n\to\infty$时,$\frac{1}{(n^2+2n+3)^a}:\frac{1}{n^{2a}}$,由此可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+2n+3)^a}$发散时,$0<2a\le1$

即$0<a\le\frac{1}{2}$.

$n\to\infty$时,$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}:\frac{1}{6n^3}$,即$\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^a:\frac{1}{6^a n^{3a}}$,由此可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^a$收敛时,$3a>1$,即$a>\frac{1}{3}$.

故正数a的取值范围为$(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$.

例 3.下列级数的收敛性结论为__________.

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{n^2\ln^2 n}$;　　　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\frac{e^2}{\sqrt[3]{n^3+2}\ln n}$.

解:(1) $n\to\infty$ 时, $\frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{n^2\ln^2 n}$: $\frac{\ln e^n}{n^2\ln^2 n}=\frac{1}{n\ln^2 n}$,而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛,所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{n^2\ln^2 n}$ 收敛。

(2) $n\to\infty$ 时, $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\frac{e^2}{\sqrt[3]{n^3+2}\ln n}$: $\frac{1}{e^2}$g$\frac{e^2}{\sqrt[3]{n^3}\ln n}=\frac{1}{n\ln n}$,而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散,所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\frac{e^2}{\sqrt[3]{n^3+2}\ln n}$ 发散。

例 4.设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,记 $s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$,则下列级数的收敛性结论为______________.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n}$;　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n^2}$.

分析:(1)设 $u_n=1(n=1,2,\mathrm{L}\ )$ **,则** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ **发散。由此特例可以推测对一般的正项级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **,** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n}$ **应是发散。用反证法可证明这一结论。**

(2)只要证明正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n^2}$ **的部分和数列是有界的即可推出该级数收敛。**

解:(1)假设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n}$ 是收敛的,则由 *Cauchy* 审敛原理知,存在正整数 N ,使得当 $n>N$ 时,对任意正整数 p 都有

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{s_{n+2}}+\mathrm{L}\ +\frac{u_{n+p}}{s_{n+p}}<\frac{1}{2}(*)$$

但另一方面,由$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数知$\{s_n\}$单调增加,所以有

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{s_{n+2}}+\cdots+\frac{u_{n+p}}{s_{n+p}}>\frac{1}{s_{n+p}}\left(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right)=\frac{1}{s_{n+p}}\left(s_{n+p}-s_n\right)=1-\frac{s_n}{s_{n+p}}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$,所以对每个大于$N$的$n$和充分大的$p$,$\frac{s_n}{s_{n+p}}<\frac{1}{2}$,所以

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{s_{n+2}}+\cdots+\frac{u_{n+p}}{s_{n+p}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(**)$$

式$(*)$、式$(**)$矛盾表明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n}$是发散的。

(2)由于对任意$n=2,3,\cdots$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{u_k}{s_k^2}\le\sum_{k=2}^{n}\frac{u_k}{s_ks_{k-1}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{s_k-s_{k-1}}{s_ks_{k-1}}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{s_{k-1}}-\frac{1}{s_k}\right)=\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_n}<\frac{1}{s_1}=\frac{1}{u_1}$$

即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n^2}$的部分和数列有上界,因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{s_n^2}$收敛。

注:级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的$Cauchy$审敛原理是:

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件为:对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数N,

当$n>N$时,对于任意正整数p,都有$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$.

例 5.设$u_1>0$,$\{u_n\}$是单调增加数列,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛的充分必要条件是$\{u_n\}$有上界。

证明: 充分性:由$\{u_n\}$有上界知存在$M>0$,使得$u_n\le M\,(n=1,2,\cdots)$.于是,由$\{u_n\}$单调增加知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$是正项级数,并且

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}-u_k}{u_{k+1}}\le\frac{1}{u_2}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=\frac{1}{u_2}(u_{n+1}-u_1)\le\frac{2M}{u_2}(n=1,2,\cdots)$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛。

必要性:设$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛,则由$Cauchy$审敛原理知,存在正整数$N$,对于任意$n>N$有$\sum_{k=N}^{n}\left(1-\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)<\frac{1}{2}$.如果$\{u_n\}$无上界,则对于$u_N$,存在$m>N$,使得$u_m\geq 2u_N$,于是有

$$\sum_{k=N}^{m-1}\left(1-\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)=\sum_{k=N}^{m-1}\frac{u_{k+1}-u_k}{u_{k+1}}\geq\frac{1}{u_m}\sum_{k=N}^{m-1}(u_{k+1}-u_k)=\frac{1}{u_m}(u_m-u_N)=1-\frac{u_N}{u_m}\geq\frac{1}{2}$$

显然这是一个矛盾,由此可知$\{u_n\}$有上界。

题型二　求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间和收敛域

(1)用以下方法算出$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间:

如果$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$存在为$r$,则当$r\neq 0$时$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间为$\left(-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right)$;当$r=0$时$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

(2)由收敛区间计算收敛域:

当收敛区间为$(-\infty,+\infty)$时,收敛域也为$(-\infty,+\infty)$;当收敛区间为$(-R,R)(R>0)$时,考虑$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=-R,R$的收敛性,将其中的收敛点并入收敛区间即得收敛域。

例 6.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n+n^2\cdot 2^n}x^n$的收敛区间。

解:记$a_n=\frac{1}{n\cdot 3^n+n^2\cdot 2^n}$,则由

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)3^{n+1}+(n+1)^2 2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n3^n+n^2 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n3^n+n^2 2^n}{(n+1)3^{n+1}+(n+1)^2 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}$$

知收敛半径$R=3$,从而所给幂级数的收敛区间为$(-3,3)$.

例 7.幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]x^n$的收敛域为____________.

解:记$a_n=1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,则当$n\to\infty$时

$$a_n=1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right]=\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\sim\frac{1}{2n},a_{n+1}\sim\frac{1}{2(n+1)}$$

所以$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2(n+1)}}{\dfrac{1}{2n}}=1$.

因此所给幂级数的收敛半径$R=1$,从而收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=1$时,所给幂级数成为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$,由于

$1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$发散,从而点$x=1$不在收敛域上。

当$x=-1$时,所给幂级数成为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.由于

$\lim_{n\to\infty}\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=0$,且由$f(x)=1-\frac{\ln(1+x)}{x}(x>0)$的导数

$$f'(x)=\frac{\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}{x^2}>0$$

知$\left\{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$单调减少,所以由交错级数 ***Leibniz*** 定理知

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$收敛,从而点$x=-1$在收敛域上。

综上所述,所给幂级数的收敛域为$[-1,1)$.

题型三　把函数$f(x)$展开成x的幂级数

将函数$f(x)$展开为x的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的方法是:

利用一些已知的函数展开式,通过幂级数的运算(如四则运算,逐项求导,逐项积分)以及变量代换等,将所给函数展开成幂级数。

常用函数的幂级数展开式为:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\left(-\infty<x<+\infty\right)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\left(-\infty<x<+\infty\right)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\left(-\infty<x<+\infty\right)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\left(-1<x<1\right)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\left(-1<x\le 1\right)$$

例 8.将函数$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x$展开成$x$的幂级数。

解:由于$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{1-x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}\left(-1<x<1\right)$

$\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{4n}dt$,由此将$f(x)$展开成$x$的幂级数:

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{4n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\left(-1<x<1\right).$$

题型四　求幂级数的和函数

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$的方法是:

(1)对$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$进行适当的代数运算,或作适当的变量代换,使其成为常用函数或它们的线性组合的麦克劳林展开式,从而求得$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$.

(2)如果$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数比较复杂,可通过对$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在其收敛区间内逐项求导或积分,使右边的幂级数成为常用函数或它们的线性组合的麦克劳林级数,由此求得$S'(x)$或$\int_0^x S(t)dt$,然后用积分或求导得到$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$.

(3)当用上述方法不易求得$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$时,可通过对$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$求导建立它的和函数$S(x)$应满足的微分方程,然后解此微分方程得到$S(x)$.

例 9.求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$的和函数$S(x)$.

解:$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$的收敛域为$(-\infty,+\infty)$,所以

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)+3n+1}{n!} x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$=x^2e^x+3xe^x+e^x=(x^2+3x+1)e^x\left(-\infty<x<+\infty\right).$$

例 10.求下列幂级数的和函数:

(1)$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-n+1}{2^n} x^n$; (2)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(3n+1)} x^{3n+1}$.

解:(1)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-n+1}{2^n} x^n$的收敛域为$(-2,2)$,记其和函数为$S(x)$,

则在$(-2,2)$内, $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(n^2-n+1\right)\left(\frac{x}{2}\right)^n$,令 $t=\frac{x}{2}$,从

而 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(n^2-n+1\right)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(n-1\right)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$

$$=t^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n\left(n-1\right)t^{n-2}+\frac{1}{1+t}=t^2\left[\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n t^n\right]''+\frac{1}{1+t}$$

$$=t^2\left(\frac{t^2}{1+t}\right)''+\frac{1}{1+t}=\frac{2t^2}{(1+t)^3}+\frac{1}{1+t}=\frac{4x^2}{(2+x)^3}+\frac{2}{2+x}$$

于是 $S(x)=\frac{4x^2}{(2+x)^3}+\frac{2}{2+x}(-2<x<2)$.

(2)幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\left(3n+1\right)}x^{3n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1]$,记其和函数为 $S(x)$,则

对 $x\in(-1,1)$ 有 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^{3n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x^3)^n=-\ln(1+x^3)(-1<x<1)$

所以 $S(x)=S(0)-\int_0^x\ln(1+t^3)dt=-\int_0^x\ln(1+t^3)dt=-\left[x\ln(1+x^3)-\int_0^x t g\frac{3t^2}{1+t^3}dt\right]$

$$=-x\ln\left(1+x^3\right)+3\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t^3}\right)dt=-x\ln\left(1+x^3\right)+3x-3\int_0^x\frac{1}{1+t^3}dt$$

$$=-x\ln\left(1+x^3\right)+3x-\int_0^x\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t-2}{t^2-t+1}\right)dt=-x\ln\left(1+x^3\right)+3x-\ln\left(1+x\right)+\int_0^x\frac{t-2}{t^2-t+1}dt$$

$$=-x\ln\left(1+x^3\right)+3x-\ln\left(1+x\right)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt-\frac{3}{2}\int_0^x\frac{1}{t^2-t+1}dt$$

$$=-x\ln\left(1+x^3\right)+3x-\ln\left(1+x\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{p}{6}\right](-1<x<1)$$

由于 $S(x)$ 在其收敛域上连续,从而 $S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=-2\ln2+3-\frac{p}{\sqrt{3}}$

$$S(-1)=\lim_{x\to -1^+}S(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[-x\ln\left(1+x^3\right)-\ln(1+x)\right]-3+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}p$$
$$=-\lim_{x\to -1^+}\left[x\ln\left(1+x^3\right)+\ln(1+x)\right]-3+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}p$$
$$=-\lim_{x\to -1^+}\left[x\ln\left(1+x\right)+x\ln(x^2-x+1)+\ln(1+x)\right]-3+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}p$$
$$=-\lim_{x\to -1^+}\left(x+1\right)\ln\left(1+x\right)-3+\frac{3}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}p$$
$$=-3+\frac{3}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}p$$

故

$$S(x)=\begin{cases}-3+\frac{3}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}p,x=-1\\ -x\ln\left(1+x^3\right)+3x-\ln\left(1+x\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{p}{6}\right],-1<x<1\\ -2\ln 2+3-\frac{p}{\sqrt{3}},x=1\end{cases}$$

题型五　求收敛级数的和

求收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和 S 的方法是:

(1)计算 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限,如果 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$.

(2)如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列通项 S_n 不易计算,则构造相应的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$,并求出它的和函数 $S(x)$.当 $x=1$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛区间内的点时,$S=S(1)$;当 $x=1$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛区间的边界点时,$S=\lim_{x\to 1^-}S(x)$.

例 11.分别记 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{8n^2-4n-1}$ 的和为 S_1 与 S_2,则 S_1 与 S_2 的大小关系为____________.

分析:利用 $\arctan\dfrac{a-b}{1+ab}=\arctan a-\arctan b$ 将各个级数的通项都表示为两项之差,由此通过计算部分和数列的极限算出 S_1 与 S_2.

解:先计算 S_1,由于对 $i=1,2,L$ 有

$$\arctan\frac{1}{i^2+i+1}=\arctan\frac{(i+1)-i}{1+i(i+1)}=\arctan(i+1)-\arctan i$$

所以 $S_1=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\arctan(i+1)-\arctan i\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\arctan(n+1)-\arctan 1\right]=\dfrac{p}{2}-\dfrac{p}{4}=\dfrac{p}{4}$

其次计算 S_2,由于对 $i=1,2,L$ 有

$$\arctan\frac{2}{8i^2-4i-1}=\arctan\frac{4}{16i^2-8i-2}=\arctan\frac{(4i+1)-(4i-3)}{1+(4i+1)(4i-3)}=\arctan(4i+1)-\arctan(4i-3)$$

所以

$$S_2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\arctan(4i+1)-\arctan(4i-3)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\arctan(4n+1)-\arctan 1\right]=\frac{p}{2}-\frac{p}{4}=\frac{p}{4}$$

因此 $S_1=S_2$.

例 12.求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}$;　　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n(3n+1)}$.

分析:用幂级数方法计算所给的两个级数之和。

解:(1)构造幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}x^n$,则它的收敛域为 $(-2,2)$,记其和函数为 $S(x)$.由例 10 知 $S(1)=\dfrac{4}{27}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{22}{27}$,故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}=\dfrac{22}{27}$.

(2)构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n(3n+1)}x^{3n+1}$,则它的收敛域为 $[-1,1]$,记其和函数为 $S(x)$.由例 10 知 $S(1)=-2\ln 2+3-\dfrac{p}{\sqrt{3}}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n(3n+1)}=-2\ln 2+3-\dfrac{p}{\sqrt{3}}$.

第六章习题

1.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\bullet 2^n}x^{n-1}$的收敛域,并求其和函数。

2.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\bullet 3^n}$的收敛域。

3.求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域,并求其和函数。

4.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数,并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和。

5.求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$的和.(答案:$\frac{22}{27}$)

6.求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)\bullet 2^n}$的和.(答案:$\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$)

7.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性。

8.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n\bullet(2n-1)}\right)x^{2n}$的收敛区间与和函数$f(x)$.

9.设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ $(n=1,2,L)$ 所围成区域的面积,记

$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求$S_1$与$S_2$的值。

10.将函数$f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.(答案:$\frac{p^2}{6}$)

11.将$f(x)=x-1(0\le x\le 2)$展开成周期为4的余弦级数。

12.将函数$f(x)=1-x^2(0\le x\le p)$展开成余弦级数,并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.(答案:$\frac{p^2}{12}$)

13.将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

(提示:由 $f^{'}(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$ 及 $f(x)-f(0)=\int\limits_0^x f^{'}(t)dt$ 可得 $f(x)$ 的幂级数展开式)

14.将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

(提示:仿照第 13 题的思维)

15.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.(答案:$\dfrac{p}{4}-\dfrac{1}{2}$)

(提示:仿照第 13 题的思维把 $\arctan x$ 展开成 x 的幂级数)

16.将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

(答案:$\dfrac{p}{4}-1$)

(提示:仿照第 13 题的思维)

17.将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

(提示:$\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x}\right)$,再把 $\dfrac{1}{1+x}$ 及 $\dfrac{1}{2-x}$ 分别展开成 x 的幂级数)

18.设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导函数,且 $\left|f^{'}(x)\right|<mf(x)$,其中 $0<m<1$,任取实数 a_0,定义 $a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\text{L}$.证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

(提示:$\left|a_n-a_{n-1}\right|=\left|\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})\right|=\left|\dfrac{f^{'}(x)}{f(x)}\right|\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|\leq m\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|$)

19.设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,且和为 s .试求:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$.

20.设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$.

(1)求证:当 $l>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{a_n}}$ 收敛;

(2)求证:当 $l<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{a_n}}$ 发散.

第七章　微分方程

题型一　求解一阶微分方程

在高等数学范畴里,一阶微分方程指的是以下五类:

(1)可分离变量的微分方程

它是可以写成 $g(y)dy = f(x)dx$ (其中 f, g 分别是 x 与 y 的已知函数)的微分方程。

两边分别对 y 和 x 积分即得该微分方程的通解。

(2)齐次微分方程

它是形如 $\frac{dy}{dx} = j\left(\frac{y}{x}\right)$(其中 j 是已知函数)的微分方程。

令 $u = \frac{y}{x}$,转换成可分离变量的微分方程后求解。

(3)一阶线性微分方程

它是形如 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ (其中 $p(x), q(x)$ 是已知函数)的微分方程,其通解为 $y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$.

(4)伯努利方程

它是形如 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ (其中 $p(x), q(x)$ 是已知函数,$n \neq 0,1$)的微分方程。

令 $z = y^{1-n}$,转换成一阶线性微分方程后求解。

(5)全微分方程

它是形如 $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ (其中 $p(x,y), q(x,y)$ 是已知函数,且 $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$)的微分方程。

求出满足 $du(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ 的 $u(x,y)$ 即得全微分方程的通解

$u(x, y)=C$.

例 1.微分方程 $y^{'}=e^{y}-\frac{2}{x}$ 的通解为____________.

分析:所给的一阶微分方程不是上述的五类一阶微分方程之一,但作适当变量代换可转换成这五类之一。

解:所给微分方程可以写成 $e^{-y}y^{'}=1-\frac{2}{x}e^{-y}$,记 $u=e^{-y}$,则所给微分方程成为

$$u^{'}-\frac{2}{x}u=-1(\text{一阶线性微分方程})$$

微分方程 $u^{'}-\frac{2}{x}u=-1$ 的通解为

$$u=e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(C+\int(-1)e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx\right)=x^{2}\left(C+\frac{1}{x}\right)=Cx^{2}+x$$

所以原微分方程的通解为 $e^{-y}=Cx^{2}+x$.

例 2.微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^{2}}{4}+\frac{1}{x^{2}}$ 的通解为____________.

解:所给微分方程两边同除 y^{2} 得 $\frac{1}{y^{2}}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}+\frac{1}{x^{2}y^{2}}$,记 $u=\frac{1}{y}$,则所给微分方程成为

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{4}-\left(\frac{u}{x}\right)^{2}(\text{齐次方程})$$

再令 $v=\frac{u}{x}$,则微分方程 $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{4}-\left(\frac{u}{x}\right)^{2}$ 成为 $v+x\frac{dv}{dx}=-\left(\frac{1}{4}+v^{2}\right)$,即

$$\frac{dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^{2}}=-\frac{dx}{x}$$

所以 $x=Ce^{\left(v+\frac{1}{2}\right)^{-1}}$,即 $x=Ce^{\left(\frac{u}{x}+\frac{1}{2}\right)^{-1}}$.

因此所给微分方程的通解为 $x=Ce^{\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{2}\right)^{-1}}=Ce^{\frac{2xy}{2+xy}}$.

例 3.微分方程 $y^{'}\cos y=(1+\cos x\sin y)\sin y$ 的通解为____________.

分析:由于$y'\cos y=(\sin y)'$,所以可作变量代换$u=\sin y$.

解:令$u=\sin y$,则所给微分方程成为

$$u'-u=\cos x\cdot u^2\text{(伯努利方程)}$$

令$z=\dfrac{1}{u}$,微分方程$u'-u=\cos x\cdot u^2$成为

$$z'+z=-\cos x\text{(一阶线性微分方程)}$$

它的通解为

$$z=e^{-\int dx}\left(C+\int-\cos xe^{\int dx}dx\right)=e^{-x}\left[C-\frac{1}{2}e^{x}(\cos x+\sin x)\right]=Ce^{-x}-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$$

因此原微分方程的通解为$\csc y=Ce^{-x}-\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

例 4.微分方程$y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0$的通解为______________.

解:所给微分方程可以改写成

$$(2xy^2dx+2x^2ydy)+(ydx+xdy)-x^4y^3dy=0$$

即$d(x^2y^2)+d(xy)-x^4y^3dy=0$

上式两边同除以x^4y^4得$\dfrac{d(x^2y^2)}{x^4y^4}+\dfrac{d(xy)}{x^4y^4}-\dfrac{dy}{y}=0$

从而$d\left(-\dfrac{1}{x^2y^2}-\dfrac{1}{3x^3y^3}-\ln y\right)=0$

所以所给微分方程的通解为$\dfrac{1}{x^2y^2}+\dfrac{1}{3x^3y^3}+\ln y=C$.

题型二　求解二阶微分方程

在高等数学范畴里,二阶微分方程指的是以下三类:

(1)可降阶的二阶微分方程

它们有三种类型:

$y''=f(x)$**.二次积分后即可得到通解。**

$y'' = f(x, y')$.令 $p = y'$ 降为一阶微分方程 $p' = f(x, p)$ 后求解。

$y'' = f(y, y')$.令 $p = y'$ 降为一阶微分方程 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$ 后求解。

(2)二阶常系数齐次线性微分方程

它是形如 $y'' + py' + qy = 0$ **(**其中 p, q 是已知常数**)**的微分方程。

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = a \pm ib$	$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

(3)二阶常系数非齐次线性微分方程

它是形如 $y'' + py' + qy = f(x)$ **(**其中 p, q 是已知常数**,** $f(x)$ 是已知函数**)**的微分方程。

求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的通解**,**归结为求对应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解和非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 本身的一个特解。

如果 $f(x) = e^{lx} P_m(x)$ **(**其中 l 是常数**,** $P_m(x)$ 是 x 的一个 m 次多项式**),**则 $y'' + py' + qy = f(x)$ 具有形如 $y^* = x^k Q_m(x) e^{lx}$ 的特解**,**其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次**(** m 次**)**的多项式**,**而 k 按 l 不是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根、是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的单根或是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的重根依次取为 **0**、**1** 或 **2.**

如果 $f(x) = e^{lx}[P_l(x)\cos wx + P_n(x)\sin wx]$ **(**其中 l, w 是常数**,** $P_l(x), P_n(x)$ 分别是 x 的 l 次、n 次多项式**,**且有一个可为零**),**则 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的特解

可设为 $y^{*}=x^{k}e^{lx}\left[R_m^{(1)}(x)\cos wx+R_m^{(2)}(x)\sin wx\right]$,其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式,$m=\max\{l,n\}$,而 k 按 $l+iw$ (或 $l-iw$)不是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根、是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的单根依次取为 0 或 1.

例 5.设曲线 $y=y(x)$ 经过原点和点 $M(1,2)$,且满足二阶微分方程

$y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$,则 $y(2),y'(2)$ 的值分别为____________.

解:令 $p=y'$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,于是所给微分方程成为一阶微分方程

$$p\frac{dp}{dy}+\frac{2}{1-y}p^2=0$$

从而 $\frac{1}{p}dp=\frac{2}{y-1}dy$,它的通解为 $p=C_1(y-1)^2$,即 $\frac{dy}{dx}=C_1(y-1)^2$.

微分方程 $\frac{dy}{dx}=C_1(y-1)^2$ 的通解为 $-\frac{1}{y-1}=C_1x+C_2$.

将 $y(0)=0$ 和 $y(1)=2$ 代入上式得 $\begin{cases}1=C_2\\-1=C_1+C_2\end{cases}$,即 $C_1=-2,C_2=1$.

于是 $y(x)=\frac{1}{2x-1}+1$,因此 $y(2)=\frac{4}{3},y'(2)=-\frac{2}{9}$.

例 6.(1)设 $y_1=1,y_2=e^x,y_3=2e^x,y_4=e^x+\frac{1}{p}$ 都是某个二阶常系数齐次线性微分方程的特解,则该微分方程为____________.

(2)设 $y_1=e^x,y_2=e^x+e^{\frac{1}{2}x},y_3=e^x+e^{-x}$ 都是某个二阶常系数非齐次线性微分方程的特解,则该微分方程为____________.

解:(1)显然所求的二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程有根 $l=0,1$,因此特征方程为 $r(r-1)=0$,即 $r^2-r=0$,故所求的二阶常系数齐次线性微分方程为 $y''-y'=0$.

(2)显然所求的二阶常系数非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分

方程的特征方程有根 $l=\frac{1}{2},-1$,因此特征方程为$\left(r-\frac{1}{2}\right)(r+1)=0$,即 $r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$,故所求的二阶常系数非齐次线性微分方程为

$$y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=f(x)$$

将特解 $y_1=e^x$ 代入得 $f(x)=e^x+\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^x=e^x$,从而所求的二阶常系数非齐次线性微分方程为 $y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=e^x$.

例 7.微分方程 $y^{(4)}+3y''-4y=e^x$ 的通解为____________.

分析:所给微分方程是 4 阶常系数非齐次线性微分方程,所以先算出 $y^{(4)}+3y''-4y=0$ 的通解,然后计算 $y^{(4)}+3y''-4y=e^x$ 的一个特解,由此即可算出所给微分方程的通解。

解: $y^{(4)}+3y''-4y=0$ 的特征方程 $r^4+3r^2-4=0$ 有根 $r=-1,1,2i,-2i$,所以 $y^{(4)}+3y''-4y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

此外,所给的微分方程有形如 $y^*=Axe^x$ 的特解,将它代入所给的微分方程得 $A(x+4)e^x+3A(x+2)e^x-4Axe^x=e^x$,即 $A=\frac{1}{10}$,将它代入 $y^*=Axe^x$ 得 $y^*=\frac{1}{10}xe^x$.

因此,所给微分方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x+\frac{1}{10}xe^x$.

第七章习题

1.求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=x-y$ 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}}=0$ 之解。

2.求微分方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解。

3.求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}\,(0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的解。

4.求微分方程 $x\ln xdy+(y-\ln x)dx=0$ 满足条件 $y|_{x=e}=1$ 的特解。

5.求微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解。

6.求微分方程 $(y-x^3)dx=2xdy$ 的通解。

7.已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ (n 为正整数),且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$,求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和。

8.已知 $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=0$ 且函数 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\iint_{s^2+t^2\le x^2+y^2}\frac{1}{1+s^2+t^2}dsdt$$

(1)求函数 $f'(x)$ 的表达式;

(2)若 $f(0)=0$,求 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}$.

9.求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解。

10.求微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解。

11.设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解,求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解。

12.求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解,其中常数 $a>0$.

13.求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解。

14.设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.(提示:在方程两边求导得到一微分方程)

15.求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 的通解。

16.求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解,其中 a 为实数。

17.求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

(提示:先寻求 $y''+y=x$ 的特解与 $y''+y=\cos x$ 的特解)

18.求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解。

19.求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{x}$ 的通解。

20.设二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ge^{x}$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$.试确定常数 a,b,g,并求该方程的通解。

21.已知 $y_1=xe^{x}+e^{2x}, y_2=xe^{x}+e^{-x}, y_3=xe^{x}+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解,求此微分方程。

22.设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0)=0, f'(0)=1$,且

$$\left[xy(x+y)-f(x)y\right]dx+\left[f'(x)+x^2y\right]dy=0$$

为一全微分方程,求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解。

23.求微分方程 $\left(3x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy\right)dy=0$ 的通解。

24.求微分方程 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ 的通解。

25.求微分方程 $y''\left[x+\left(y'\right)^2\right]=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

(提示:令 $y'=p$,则 $y''=p'$)

26.设非负函数 $y=y(x)(x\geq 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$.当曲线 $y=y(x)$ 过原点时,其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2,求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.(提示:令 $y'=p$,则 $y''=p'$)

27.设函数$j(x)$在$[0,1]$上可导,并有$\int_0^1 j(tx)\,dt = aj(x)$,其中$a$为实常数,试求$j(x)$.

28.设$f(x)$为可微函数,解方程$f(x)=e^x+e^x\int_0^x [f(t)]^2\,dt$.

大学生数学竞赛模拟试题 1

一、求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

2. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$.

二、证明不等式: $\ln(1+x)\geq\frac{\arctan x}{1+x}, x\geq0$.

三、问 a,b 为何值时,点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

四、求导与微分:

1.设 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, x\neq0\\ 0, x=0\end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=3$,求 $f'(0)$;

2.设 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$,试求 $f^{(n)}(0)$,其中 $n\geq1$ 为自然数;

3.设 f 为具有二阶连续偏导数的二元函数, $z=f\left(x,\frac{y}{x}\right)$,求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、求下列积分:

1. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$;

2. $\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy$;

3. $\iiint\limits_V zdxdydz$,其中 V 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq1$ 与 $z\geq0$ 所围的区域;

4. $\int_C \left(x^2+y^2\right)ds$,其中$C$是以$(0,0),(2,0),(0,1)$为顶点的三角形。

六、讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点$(0,0)$的连续性与可微性。

七、设$f(x)$为连续可导函数,若曲线积分$\int_L\left[e^x+2f(x)\right]ydx-f(x)dy$与路径无关,且$f(0)=0$,试求:

(1) $f(x)$;

(2) $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[e^x+2f(x)\right]ydx-f(x)dy$.

大学生数学竞赛模拟试题 2

一、计算题:

1.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$;

2.求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{2}{x-1}}}+\frac{\ln\left[1+\sin(x-1)\right]}{|x-1|}\right)$;

3.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{p}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2p}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\text{L}+\frac{\sin p}{n+1}\right)$;

4.令 $F(x)=\int_a^x t(x-t)\sin t^2 dt$,求 $F^{'}(x)$;

5.设 $\int_x^{2\ln 2}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{p}{6}$,求 x;

6.设区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,|y|\le 1\}$,计算 $\iint\limits_D\sqrt{\left|x-|y|\right|}dxdy$;

7.方程 $x^2+2y^2+3z^3+2xy-z=7$ 在 $(1,-2,1)$ 附近决定了隐函数 $z=z(x,y)$,求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,-2)}$ 的值;

8.求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$.

二、设 $x_1\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $n=1,2,\text{L}$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求其极限。

三、计算由函数 $f_1(x)=\frac{1}{2}x^2$ 和 $f_2(x)=-x^2+1$ 的图像在平面 R^2 上所围成区域的面积。

四、讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\ne 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性与可微性。

五、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^{\sin x}-1}=0$,

试证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

六、计算积分$\iint\limits_{R^2} e^{-\left(2x^2+2xy+y^2\right)}dxdy$.

七、求函数$f\left(x,y,z\right)=x^3+y^3+z^3$在约束条件$x+y+z=2,x^2+y^2+z^2=12$下的极值,并判断极值的类型。

大学生数学竞赛模拟试题 3

一、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=c$，$f_{+}^{'}(a)>0, f_{-}^{'}(b)>0$，证明至少存在一点 $x\in(a,b)$，使得 $f(x)=c$.

二、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

三、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b |f(x)|dx=0$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为零。

四、设 $f(t)$ 与 $g(t)$ 是任意的二阶可导函数，$u=xf\left(\frac{y}{x}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，计算

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

五、计算 $\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$，其中 D 由 $y=x, y=0, x=\frac{p}{2}$ 围成。

六、计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x+x^2\right)dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$，其中 Σ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面 $(a,b,c>0)$.

七、求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数。

大学生数学竞赛模拟试题 4

一、计算题:

1.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$;

2.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}$;

3.设 $f(0)=0,\ f'(x)=\begin{cases}1,0\le x\le 1\\ x,x>1\end{cases}$,求 $f(x)$;

4.求积分 $\int_{-2}^{2}x^2\left(\dfrac{\sin^3 x}{1+x^6}+\sqrt{4-x^2}\right)dx$;

5.求 $f(x)=\begin{cases}1,x\in[-\pi,0)\\ 0,x\in[0,\pi)\end{cases}$ 的 *Fourier* 展式;

6.求曲线积分 $\oint_L\dfrac{-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx+xdy}{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$,其中 L 从 $A(1,0)$ 经上半单位圆周到 $B(-1,0)$,再经过直线段 BA 回到 A 点。

二、设 $x_1=1,x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n},n=1,2,\cdots$,证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限。

三、设 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可微,且 $g'(x)\ne 0$,求证存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

四、设 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2},(x,y)\ne(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$, 证明 $f(x,y)$ 在原点可微但偏导数不连续。

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,证明 $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_0^1\dfrac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\dfrac{\pi}{2}f(0)$.

六、设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

七、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

八、计算积分 $I=\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy$,其中 D 是由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1, x=0, y=0$ 所围成的区域。

九、计算积分 $I=\oiint\limits_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,其中 S 为任意光滑外侧闭曲面。

大学生数学竞赛模拟试题 5

一、计算题:

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

2.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+2n+k}$;

3.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{2\left(2+\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{4}{n}\right)\cdots\left(2+\dfrac{2(n-1)}{n}\right)}$;

4.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$;

5.求积分 $\displaystyle\int\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$;

6.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1},x\ge 0\\ \dfrac{e^x}{1+e^x},x<0\end{cases}$,求 $\displaystyle\int_0^2 f(x-1)dx$.

二、设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$,试求 $f(0),f'(0)$ 及 $f''(0)$ 的值。

三、设 $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}t|t|dt\,(x\ge -1)$,求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点,并求 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积。

四、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $b>a>0$,证明存在 $x,h\in(a,b)$ 使得 $f'(x)=\dfrac{a^2+ab+b^2}{3h^2}f'(h)$.

五、若 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2},x^2+y^2\ne 0\\ 0,x^2+y^2=0\end{cases}$, 证明 $f_{xy}(0,0)\ne f_{yx}(0,0)$.

六、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定,证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

七、在曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且 $x_0>0,y_0>0,z_0>0$，使该点处曲面的切平面与三坐标面围成的四面体的体积最小。

八、计算 $I=\oint_L y\cos x dx+(xy^2+\sin x)dy$，其中 L 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 顺时针一周。

九、计算积分 $I=\iint\limits_D \frac{(x+y)\left[\ln(x+y)-\ln y\right]}{\sqrt{2-x-y}}dxdy$，其中区域 D 为 $x=0,x+y=1,y=x$ 所围成的三角形区域。

十、求函数

$$f(x)=\arctan\frac{2x}{2-x^2}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2-2x+2\right)-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\frac{1}{2}\arctan(x-1)-\frac{1}{2}\arctan(x+1)$$

关于 x 的幂级数展开式和收敛半径。

大学生数学竞赛模拟试题 6

一、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}$.

二、设 $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\,(n=1,2,3,\cdots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限。

三、设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导且满足 $|f''(x)|\le 1(0\le x\le 1)$,又设 $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内取到极值 $\dfrac{1}{4}$,证明 $|f(0)|+|f(1)|\le 1$.

四、设曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 由方程组 $\begin{cases} x+y+2t(1-t)=1 \\ te^y+2x-y=2 \end{cases}$ 确定,求该曲线在 $t=0$ 处的切线方程和法线方程。

五、求积分 $\oint_C \dfrac{x^3dy-y^3dx}{x^4+y^4}$,其中 C 是圆周 $x^2+y^2=1$,逆时针为正向。

六、设 $f(x)$ 是偶函数,在 $x=0$ 的某个邻域中有连续的二阶导数,$f(0)=1, f''(0)=2$,试证明无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛。

七、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(n^2+n+1\right)x^n$ 的收敛域,并求该级数的和。

八、求第二型曲面积分 $\iint\limits_S xdydz-ydxdz+zdxdy$, S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分,其定向为下侧。

大学生数学竞赛模拟试题 7

一、计算题:

1.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$;

2.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$;

3.求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+3x\right)^{\frac{1}{3}}-\left(x^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\right]$;

4.求积分 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$;

5.求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(\cos\frac{y}{x}\right)^{\frac{x^3}{x+y^3}}$;

6.求积分 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中 L 是不过原点的简单封闭曲线。

二、(1) 求函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ (其中 $x,y,z>0$) 在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 的最大值;

(2)设 a,b,c 为正数,证明不等式 $ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$.

三、设 $G(s,t)$ 是二元可微函数满足 $a\frac{\partial G}{\partial s}+b\frac{\partial G}{\partial t}\ne 0$,又设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $G(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数,其中 a,b,c 为非零常数,求 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}$.

四、计算曲线积分 $I=\oint_C\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$,其中积分路径 C 为单位圆周 $x^2+y^2=1$(逆时针方向)。

五、计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$,其中

$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x+y-z\le 1,0\le x-y+z\le 1,0\le y+z-x\le 1\}$.

六、设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，记 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，证明 $F'(1)=4p$.

七、计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$，方向取为外侧。

大学生数学竞赛模拟试题 8

一、设$a_1=1,a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}\,(n=1,2,\cdots)$,说明$\{a_n\}$的收敛性并求极限。

二、设 $f(x)$ 在点 a 的一个邻域中有定义，$f(a)\neq 0, f'(a)=0$，求

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x-a}}.$$

三、设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有二阶连续导数，$f(0)=0$，令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x\neq 0), g(0)=f'(0)$.证明:

(1) $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导,并计算 $g'(0)$;

(2) $g'(x)$ 在 $x=0$ 处也连续。

四、证明不等式 $2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<1+\dfrac{x}{x+1}(x>0)$.

五、设 $a\in(0,1)$, $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,在 $(0,a)$ 内可导及在 $(0,a)$ 内取最值,且满足 $f(0)=0, f(a)=a$.证明:

(1) $\exists h\in(0,a)$,使得 $f(h)=ah$;

(2) $\exists x\in(0,a)$,使得 $f'(x)=a$.

六、设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续导数, $f(0)=0, 0<f'(x)\leq 1, \forall x\in[0,1]$,试证明对一切 $t\in[0,1]$ 成立 $\left[\int_0^t f(x)dx\right]^2\geq\int_0^t[f(x)]^3dx$.

七、设 $f(u,v)$ 所有二阶偏导数都连续, $z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

八、计算二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$.

九、计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 为锥面 $z^2=\dfrac{h^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right), 0\leq z\leq h$ 那部分的外侧。

十、求 $f\left(x\right)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式,并计算 $S=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{2n+1}$ 之值。

大学生数学竞赛模拟试题 9

一、求下列极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n+1)}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^{\frac{3}{2}}tdt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$.

二、计算下列积分:

1. $\int\max(|x|,1)dx$;

2. $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx$;

3. $\int_L yzds$,其中曲线 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线;

4.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导函数,求积分

$$\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy$$

其中 L 是从点 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段;

5. $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续封闭曲线,L 的方向为逆时针方向;

6. $\iint\limits_\Sigma(x^2+y^2)dS$,其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围几何体的表面;

7. $\iint\limits_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$,其中 Σ 为曲面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=h(h>0)$ 之间的部分取下侧。

三、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f'(x)>0, f(0)=0$,证明 $\exists x,h\in(0,1)$,使得 $x+h=1$ 且 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(h)}{f(h)}$.

四、设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶可导,$f''(x)\le 0, f(1)=2, f'(1)=-3$,证明 $f(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 内有且仅有一个实根。

五、单位圆盘中切去圆心角为 q 的扇形,余下部分粘合成一锥面,问 q 为多少时,该锥面加上底面所围的锥体体积最大?

六、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

七、设 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^p\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\ne 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 其中 p 为正数。试分别确定 p 的值,使得如下结论分别成立:

(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续;

(2) $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 都存在;

(3) $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

八、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!2^n}x^n$ 的收敛域,并求其和函数。

大学生数学竞赛模拟试题 10

一、计算题:

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$;

2.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\cos\frac{1}{x}}\right)^{x^2}$;

3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x+e^{-x}}\left(e^x-1\right)^4}{\sin x\left(x-\sin x\right)}$;

4.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(\sqrt{1+\sin t}-1\right)^2\left(1+\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1+t}{2t}}dt}{x^2\left(e^{x^2}-1\right)}$;

5.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t\left(e^t-1\right)dt}{x^4\sin^2 x}$;

6.求积分 $\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$;

7.求积分 $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$;

8.求积分 $\int_1^e\frac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$;

9.求积分 $\int_1^{\frac{p}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$;

10.求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+\left(e^{-x}\right)^2}dx$;

11.方程 $z=f\left(x,xy\right)+j\left(y+z\right)$ 确定函数 $z=z\left(x,y\right)$,求全微分 dz;

12.求二重积分 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$,其中 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$.

二、将区间 $[1,2]$ 作 n 等分,分点为 $1=x_0<x_1<\text{L}<x_n=2$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\text{L }x_n}$.

三、求函数 $f\left(x\right)=\left|x\right|e^{-\left|x-1\right|}$ 的导函数以及函数 $f\left(x\right)$ 的极值。

四、设 $y=a\sin x\left(x>0\right)$,试确定参数 a,使得曲线 $y=a\sin x$ 和它在点 $\left(p,0\right)$

的法线方程,以及 y 轴所围成区域的面积最小。

五、设在 $[a,+\infty)$ 上 $g(x)>0$,且 $g(x)$ 和 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积,

而 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt}=0$.

六、求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限部分的切平面与三坐标平面围成的四面体的最小体积。

七、设函数 $f(x,y)=\begin{cases} x-y+\dfrac{(xy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},(x,y)\neq(0,0) \\ 0,(x,y)=(0,0) \end{cases}$, 证明:

(1) $f(x,y)$ 在原点处连续;

(2) $f(x,y)$ 在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 存在;

(3) $f(x,y)$ 在原点不可微。

八、计算三重积分 $I=\iiint\limits_V (x+y+z)^2\,dxdydz$,其中 V 为椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1(a,b,c>0)$$

九、设 $\vec{F}=\frac{y\vec{i}-x\vec{j}}{x^2+y^2}$,曲线 L 由圆 $x^2+y^2=1$ 和椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 组成,方向均为逆时针方向,求 $\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s}$.

十、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$,其中 Σ 是曲线 $x=e^y\,(0\leq y\leq a)$ 绕 x 轴旋转而成的曲面的外侧。

十一、对幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$

(1)求收敛域;

(2)求和函数。