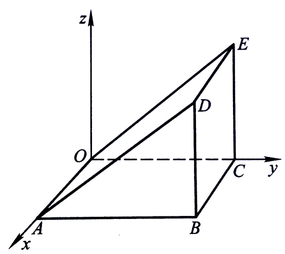
9.4 重积分的应用

9.4.1 曲面的面积

例 4.1. 长方体 Ω 的底面为 xOy 面上的矩形 $OABC$, 其中 OA, OC 分别位于 x 轴和 y 轴上. 如果 Ω 被一过 x 轴的平面所截得一矩形截面, 且截面的法向量为 $\boldsymbol{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ $(\cos\gamma \neq 0)$, 证明截面 $OADE$ 的面积 S 与底面 $OABC$ 的面积 σ 有如下的关系

$$S = \frac{1}{|\cos\gamma|}\sigma.$$



若 Ω 是母线平行于 z 轴的柱体, 底面是 xOy 面上面积为 σ 的任意一个有界闭区域 D, 则以法向量为 $\boldsymbol{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ $(\cos\gamma \neq 0)$ 的平面截该柱体得到的截面面积为

$$S = \frac{1}{|\cos\gamma|}\sigma.$$

曲面的面积

设有界曲面 S 具有显式方程

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy},$$

其中 D_{xy} 是 S 在 xOy 面上的投影区域, $z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有连续的偏导数.

对区域 D_{xy} 进行分划, 在 D_{xy} 上任取一直径很小的矩形区域 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也用 $\mathrm{d}\sigma$ 表示), 在 $\mathrm{d}\sigma$ 上任取一点 $M(x, y)$, 对应地在曲面 S 上有一点 $P(x, y, z(x, y))$. 曲面 S 在点 P 处有切平面 Σ, 切平面 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n} = (z'_x(x, y), z'_y(x, y), -1)$. 切平面 Σ 上与 $\mathrm{d}\sigma$ 所对应的小块切平面的面积

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{|\cos\gamma|}\,\mathrm{d}\sigma.$$

此时由于

$$|\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}},$$

从而得到曲面 S 的面积为

$$A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\,\mathrm{d}\sigma,$$

上式中的被积表达式称作曲面面积微元, 记作 $\mathrm{d}S$, 即

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\,\mathrm{d}\sigma.$$

若曲面 S 的方程为 $x = g(y,z)$, 则曲面面积为

$$A = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + g_y'^2 + g_z'^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 D_{yz} 是曲面 S 在 yOz 面上的投影区域.

若曲面 S 的方程为 $y = h(z,x)$, 则曲面面积为

$$A = \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{1 + h_z'^2 + h_x'^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

其中 D_{zx} 是曲面 S 在 zOx 面上的投影区域.

例 4.2. 求由曲面 $x^2 + y^2 = az$ 和 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$ 所围立体的表面积.

解: 解方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = az, \\ z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ 得两曲面的交线为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = a. \end{cases}$ 故立体在 xOy 平面上的投影域为 $D_{xy} : x^2 + y^2 \le a^2$. 由 $z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$ 得到 $z_x' = \frac{2x}{a}$, $z_y' = \frac{2y}{a}$. 于是

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2}.$$

由 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ 得到 $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{2}$. 故

$$A = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1).$$

例 4.3. 求曲面 $az = xy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内那部分的面积.

解: $z_x' = \frac{y}{a}$, $z_y' = \frac{x}{a}$. 因此所求曲面面积

$$A = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

应用广义极坐标变换得

$$A = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 a^2 r\sqrt{1 + r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)a^2.$$

9.4.2 质心

平面物体的质心

设 D 是密度函数为 $\rho(x,y)$ 的平面物体, $\rho(x,y)$ 在 D 上连续. D 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $M = \iint\limits_{D} \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

空间物体的质心

设 V 是密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 的空间物体, $\rho(x,y,z)$ 在 V 上连续. V 的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{V} x\rho\,\mathrm{d}V,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{V} y\rho\,\mathrm{d}V,\quad \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{V} z\rho\,\mathrm{d}V,$$

其中 $M=\iiint\limits_{V}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$.

例 4.4. 求下列均匀密度物体的质心:

(1) $z\le 1-x^2-y^2$, $z\ge 0$;

(2) 由坐标面及平面 $x+2y-z=1$ 所围成的四面体.

解:

(1) 设物体质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 由对称性知 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$. 应用柱面坐标变换得

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{V} z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{V}\mathrm{d}V}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2} z\,\mathrm{d}z}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}\mathrm{d}z}=\frac{1}{3}.$$

故质心为 $(0,0,\frac{1}{3})$.

(2) 设四面体质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 四面体与坐标轴的截距分别为 $(1,0,0)$, $(0,\frac{1}{2},0)$ 和 $(0,0,-1)$. 显然 $\iiint\limits_{V}\mathrm{d}V=\frac{1}{12}$. 因此

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{V} x\,\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^{0}\mathrm{d}z=\frac{1}{4},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{V} y\,\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}} y\,\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^{0}\mathrm{d}z=\frac{1}{8},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{V} z\,\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^{0} z\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}.$$

故质心为 $(\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{4})$.

9.4.3 转动惯量

平面物体的转动惯量

设 D 是密度函数为 $\rho(x,y)$ 的平面物体, $\rho(x,y)$ 在 D 上连续. 物体 D对于 x,y 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

若转动轴为直线 l, 则物体 D对于 l 的转动惯量为

$$J_l=\iint_D r^2(x,y)\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $r(x,y)$ 为 D 中点 (x,y) 到 l 的距离函数.

例 4.5. 求下列密度为常数 ρ_0 的平面薄板 D 的转动惯量:

(1) 半径为 R 的圆关于其切线的转动惯量;

(2) 边长为 a 和 b, 且夹角为 φ 的平行四边形, 关于底边 b 的转动惯量.

解:

(1) 设圆心在原点, 切线为 $x = R$, 薄板上任一点 (x, y) 到 $x = R$ 的距离为 $R - x$. 从而

$$I = \rho_0 \iint\limits_D (R-x)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R r(R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2\cos^2\theta)\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{5}{4}\pi\rho_0 R^4.$$

(2) 设平行四边形为 $0 \le y \le a\sin\varphi, y\cot\varphi \le x \le b + y\cot\varphi$. 因此

$$I = \rho_0 \iint\limits_D y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho_0 \int_0^{a\sin\varphi} y^2 \,\mathrm{d}y \int_{y\cot\varphi}^{b+y\cot\varphi} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\rho_0 b a^3 \sin^3\varphi.$$

9.4.4 引力

密度为 $\rho(x, y, z)$ 的立体对立体外质量为 1 的质点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 的引力为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},$$

其中

$$F_x = k\iiint\limits_V \frac{x - x_0}{r^3}\rho\,\mathrm{d}V, \quad F_y = k\iiint\limits_V \frac{y - y_0}{r^3}\rho\,\mathrm{d}V, \quad F_z = k\iiint\limits_V \frac{z - z_0}{r^3}\rho\,\mathrm{d}V,$$
$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

k 为引力常量.

例 4.6. 求密度为常数 ρ_0 的正圆锥体 (高为 h, 底半径为 R) 对于在它的顶点处质量为 m 的质点的引力.

解: 设圆锥体为 $\sqrt{x^2+y^2} \le R - \frac{R}{h}z$, 顶点坐标为 $(0, 0, h)$. 显然由对称性有 $F_x = F_y = 0$.

$$F_z = mk\rho_0 \iiint\limits_V \frac{z-h}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}V$$
$$= mk\rho_0 \int_0^h (z-h)\,\mathrm{d}z \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $D = \left\{(x, y) : \sqrt{x^2+y^2} \le R - \frac{R}{h}z\right\}$. 用柱坐标计算可得

$$F_z = mk\rho_0 \int_0^h (z-h)\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R-\frac{R}{h}z} \frac{r}{[r^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi mk\rho_0 \int_0^h \left(\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} - 1\right)\mathrm{d}z = \frac{2\pi mk\rho_0 h(h - \sqrt{R^2+h^2})}{\sqrt{R^2+h^2}}.$$

故所求的引力为 $\left(0, 0, \frac{2\pi mk\rho_0 h(h-\sqrt{R^2+h^2})}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$.

例 4.7. 求密度为常数 ρ_0 的均匀薄片 $x^2+y^2 \le R^2, z = 0$ 对于 z 轴上一点 $(0, 0, c)(c > 0)$ 处单位质量的引力.

解: 由对称性有 $F_x = F_y = 0$.

$$F_z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{-k\rho_0 c}{(r^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} r\,\mathrm{d}r = 2k\pi\rho_0 c\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}} - \frac{1}{c}\right).$$

9.4.5 思考与练习

练习 250. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 夹在 $z=a$ 与 $z=b(0<b<a)$ 之间的表面积.

解: 易知 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 且在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2 \le a^2-b^2$. 由于

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

从而

$$\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

所以表面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_D \sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{2\pi a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi a(a-b). \end{aligned}$$

练习 251. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $x+2z=3$ 所截下的有限部分的面积.

解: 首先求出曲面与平面的交线在 xOy 面上的投影. 将 $z=\frac{1}{2}(3-x)$ 代入锥面方程, 得

$$(3-x)^2 = 4x^2+4y^2.$$

化为标准方程

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

因曲面方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 故

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

从而

$$\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)} = \sqrt{2}.$$

于是曲面面积为

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = 2\sqrt{6}\pi.$$

练习 252. 求圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在圆柱体 $x^2+y^2 \le x$ 内那一部分的面积.

解: 按曲面面积公式,

$$S = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D 是 $x^2+y^2 \le x$. 又

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因此

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2}.$$

故

$$S=\iint_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

练习 253. 求密度均匀的上半椭球体的质心.

解: 设椭球体由不等式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

表示. 由对称性知 $\bar{x}=0, \bar{y}=0$. 又 ρ 为常数, 故

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\rho\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}V}=\frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\frac{2}{3}\pi abc}=\frac{3c}{8}.$$