

8.7 空间曲线的切线与空间曲面的切平面方程

8.7.1 空间曲线的切线与法平面

空间曲线的切线

设空间曲线 C 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

若 $t_0, t_1 \in (\alpha, \beta)$, $A(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 与 $B(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ 为曲线 C 上两点, A, B 的连线 AB 称为曲线 C 的割线. 当 $B \rightarrow A$ 时, 若割线 AB 趋于一条直线, 则此直线称为曲线 C 在点 A 的切线.

若 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 对于 t 的导数都连续且不全为零, 称空间曲线 C 为光滑曲线. 若空间曲线 C 为光滑曲线, 则曲线 C 在点 A 处必存在切线.

当光滑曲线 C 由参数方程 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 给出时, 由于 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 连续且不同时为零, 因此从几何上看曲线上的每点处都有切线, 且切线随着切点的移动而连续转动, 此即为光滑曲线的几何特征.

设空间曲线 C 为光滑曲线, 割线 AB 的方程为

$$\frac{x - x(t_0)}{x(t_1) - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y(t_1) - y(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z(t_1) - z(t_0)},$$

可改写为

$$\frac{\frac{x - x(t_0)}{x(t_1) - x(t_0)}}{t_1 - t_0} = \frac{\frac{y - y(t_0)}{y(t_1) - y(t_0)}}{t_1 - t_0} = \frac{\frac{z - z(t_0)}{z(t_1) - z(t_0)}}{t_1 - t_0}.$$

当 $B \rightarrow A$ 时, 有 $t \rightarrow t_0$, 可得切线的方向向量为 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, 切线方程为

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

过点 $A(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 且与切线垂直的平面称为空间曲线 C 在点 $A(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 的法平面, 其法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

设空间曲线 C 的方程为

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

且 $y'(x_0), z'(x_0)$ 存在, 则曲线 C 在点 $A(x_0, y(x_0), z(x_0))$ 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y(x_0)}{y'(x_0)} = \frac{z - z(x_0)}{z'(x_0)}.$$

法平面方程为

$$x - x_0 + y'(x_0)(y - y(x_0)) + z'(x_0)(z - z(x_0)) = 0.$$

设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

假设 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$, 则上述方程组在点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 的某个邻域内能确定隐函数

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

满足 $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x_0)$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}$. 于是空间曲线 C 在点 $A(x_0, y(x_0), z(x_0))$ 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dx} \Big|_A} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dx} \Big|_A}, \quad \text{即} \quad \frac{x - x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_A} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_A} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_A}.$$

法平面方程为

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_A (x - x_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_A (y - y_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_A (z - z_0) = 0.$$

例 7.1. 求曲线 $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = b\theta$ 在点 $(-a, 0, b\pi)$ 处的切线.

解: 点 $(-a, 0, b\pi)$ 对应 $\theta = \pi$. 切线的方向向量为

$$(-a \sin \theta, a \cos \theta, b) \Big|_{\theta=\pi} = (0, -a, b).$$

于是切线方程为

$$\frac{x - (-a)}{0} = \frac{y - 0}{-a} = \frac{z - b\pi}{b},$$

即

$$\begin{cases} x = -a, \\ -\frac{y}{a} = \frac{z}{b} - \pi. \end{cases}$$

例 7.2. 求曲线 $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$ 的切线方程, 使之平行于平面 $x + 3y + 2z = 0$.

解: 设曲线上的点对应的参数为 t_0 , 则切向量为

$$\tau = (t_0^3, t_0^2, t_0).$$

因切线和平面平行, 故切向量与平面的法向垂直, 所以

$$t_0^3 + 3t_0^2 + 2t_0 = 0,$$

解得 $t_0 = -1$ 或 $t_0 = -2$, 因而切点为 $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $(4, -\frac{8}{3}, 2)$, 切线方程为

$$\frac{4x - 1}{-4} = \frac{3y + 1}{3} = \frac{2z - 1}{-2},$$

$$\frac{x - 4}{-8} = \frac{3y + 8}{12} = \frac{z - 2}{-2}.$$

8.7.2 空间曲面的切平面与法线

光滑曲面

设曲面 S 的一般方程为

$$F(x, y, z) = 0,$$

$F(x, y, z)$ 的偏导数 F'_x, F'_y, F'_z 连续且不同时为零, 这时称 S 是光滑曲面.

切平面

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 S 上一点, 平面 π 称为曲面 S 在点 P_0 处的切平面, 如果它满足: 曲面上任一条过该点的光滑曲线在该点的切线总在该平面上.

切平面方程的建立

设 C 是曲面 S 上过点 P_0 的任一条光滑曲线, 参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

点 P_0 对应于 $t = t_0$, C 在点 P_0 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

因曲线 C 在曲面 S 上, 故总有

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0.$$

两边求导, 并取 $t = t_0$ 处的导数, 有

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$$

记

$$\boldsymbol{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)),$$

则 $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{n}$.

因此 \boldsymbol{n} 为所求切平面 π 的一个法向量. 由此切平面方程为

$$\begin{aligned} F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

过点 P_0 且与切平面垂直的直线称为曲面 S 在点 P_0 处的法线, 法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

设曲面 S 的方程为 $z = f(x, y)$, 则曲面 S 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

设曲面 S 的方程为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

设 $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面 S 上一点, 且 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{P_0} \neq 0$, 则上述方程在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的某个邻域内能确定隐函数

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

满足 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. 于是曲面 S 可表示为

$$z = f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)).$$

通过计算求得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}},$$

故

$$f'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = -\frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad f'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -\frac{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

所以曲面 S 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (x - x_0) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (y - y_0) + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (z - z_0) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}}.$$

例 7.3. 求曲面 $z = y + \ln \frac{x}{z}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面与法线方程.

解: 令 $F(x, y, z) = y + \ln \frac{x}{z} - z$, 则

$$\mathbf{n} = \nabla F = \left(\frac{1}{x}, 1, -\frac{1}{z} - 1 \right),$$

故 $\mathbf{n}|_{(1,1,1)} = (1, 1, -2)$. 由此得切平面方程为

$$(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0,$$

即

$$x + y - 2z = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

例 7.4. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的切平面与法线方程.

解: 因

$$\mathbf{n} = (z_x, z_y, -1)|_{(2,1,4)} = (2x, 2y, -1)|_{(2,1,4)} = (4, 2, -1),$$

故所求切平面方程为

$$4(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 4) = 0,$$

即

$$4x + 2y - z - 6 = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 4}{-1}.$$

例 7.5. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 的一个切平面, 使该切平面与直线 $l: \begin{cases} x + 2z = 1, \\ y + 2z = 2 \end{cases}$ 垂直.

解: 直线 l 的方向向量为

$$\mathbf{s} = (1, 0, 2) \times (0, 1, 2) = (-2, -2, 1).$$

曲面在点 (x, y, z) 处的法向量为

$$\mathbf{n} = (2x, 2y, -1).$$

由题意知 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{s}$, 即

$$\frac{2x}{-2} = \frac{2y}{-2} = \frac{-1}{1},$$

解得 $x = 1, y = 1$, 代入曲面方程得 $z = 2$. 故切平面方程为

$$2x + 2y - z - 2 = 0.$$

例 7.6. 求曲面 $z = xy$ 的一个切平面, 使之平行于平面 $3x + 2y - z = 2$.

解: 设切点为 (x_0, y_0, z_0) , 则切平面的法向

$$\mathbf{n} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) = (y_0, x_0, -1).$$

已知平面的法向量为

$$\mathbf{n}_1 = \nabla f_1(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, -1).$$

又两平面平行, 得 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}_1$, 故有 $x_0 = 2, y_0 = 3$, 代入曲面方程得 $z_0 = 6$. 从而相应的切平面方程为

$$3x + 2y - z - 6 = 0.$$

8.7.3 思考与练习

练习 232. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线与法平面方程.

解: 曲线上的点对应 $t = 1$. 由于

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = (1, 2t, 3t^2),$$

故曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的切向量

$$\tau = (1, 2, 3).$$

于是切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$

法平面方程为

$$(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0,$$

即

$$x + 2y + 3z = 6.$$

练习 233. 求曲面 $e^{xy} + x^2 - z = e^2$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处的切平面与法线方程.

解: 令 $F(x, y, z) = e^{xy} + x^2 - z - e^2$, 则

$$F_x = ye^{xy} + 2x, \quad F_y = xe^{xy}, \quad F_z = -1,$$

因而 $\nabla F(1, 2, 1) = (2e^2 + 2, e^2, -1)$. 由此得切平面方程为

$$(2e^2 + 2)(x-1) + e^2(y-2) - (z-1) = 0,$$

即

$$2e^2x + e^2y - z = 4e^2 + 1,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2e^2+2} = \frac{y-2}{e^2} = \frac{z-1}{-1}.$$