装 订 线

诚实考试吾心不虚 ，公平竞争方显实力，
考试失败尚有机会 ，考试舞弊前功尽弃。

上海财经大学《 线性代数 》课程考试卷（A）（闭卷）

课程代码__________ 课程序号____________

2020——2021 学年第 一 学期

姓名__________ 学号__________ 班级__________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

得分	

一、 填空(每题 3 分，共计 21 分)

1，函数$f(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x \\ x & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ x & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$的常数项为_____2_______.

2，已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$，则$(A^*)^{-1}=$__$\underline{|A|^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$_.

3，已知$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，P 可逆，$B=P^{-1}AP$，则$B^{2020}-2020A^2=$

_____$\begin{pmatrix} \underline{2021} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{2021} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{-2019} \end{pmatrix}$_. __________.

4，已知A,B为三阶方阵，B的列均不是$Ax=0$的解，若$r(AB)<r(A)$，$r(AB)<r(B)$，则$r(AB)$=_____1______.

5，矩阵$A_{m\times n}$的秩为r，则$A^TAx=0$的基础解析的解向量个数为__n-r_____.

6，已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可对角化，则$x,y$须满足__*x+y=0*_________.

7，已知 A 为 3 阶对称矩阵，且$r(A)=2$，已知$A^3+2A^2=0$，则k满足__k>2____ 时，$A+kE$为正定矩阵。

得分	

二、 选择(每题 3 分，共计 15 分)

1，已知$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A$为 3 阶

方阵，$B=P_1AP_2$，则B^*=__C_____

A. $P_2A^*P_1$

B. $-P_2A^*P_1$

C. $-P_2A^*P_3$

D. $P_3A^*P_2$

2，关于实对称矩阵A，下列哪条表述是不正确的___B_____.

A. 若A的某个对角元为零，则A不是正定矩阵.

B. A是正定矩阵的充分必要条件为$A=C^TC,C$为方阵.

C. 若A是正定矩阵，则A^{-1}是正定矩阵.

D. A是半正定矩阵的充分必要条件是x^TAx的负惯性为 0.

3，已知A是三阶方阵,且秩为 1，则 0 是__B______.

A. 是A的二重特征值.

B. 至少是A的二重特征值.

C. 至多是A的二重特征值.

D. 是A的一、二、三重特征值均有可能.

4，已知A为$m\times n$矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维向量，以下哪个说法正确_C__.

A. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关.

B. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

C. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

D. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关.

5，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$与以下哪个矩阵合同？______B___.

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

得分	

三、 计算题(5 题，共计 48 分)

1，计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & 1+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$.（8 分）

参考答案：拆分

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & 0 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & 0 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & 1+a_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & 1+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + a_n \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & 1+a_3^2 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_n^2$$

$$= 1 + a_1^2 + \cdots + a_n^2.$$

2，已知 4 阶方阵满足$\left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)^*\right]^{-1} BA^{-1} = 2AB + 12E$，且$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，

求矩阵B.（10 分）

参考答案：$|\mathrm{A}| = 2, \mathrm{B} = 6(2\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}$.

$$(2\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&0&0\\-1/3&-1/3&0&0\\0&0&2/6&2/6\\0&0&-1/6&2/6\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$.

3，已知向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$. 若$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$具有相同的秩，求$a,\mathrm{b}$.（8 分）

参考答案：

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&5/3-b/3\end{pmatrix}$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$秩为 2，$\mathrm{b}=5$.

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&a-15&0\end{pmatrix}$，故$a=15$.

4，已知线性方程组(I)$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_3+x_4=b\end{cases}$,

(II)$\begin{cases}x_1+ax_2+3x_3+2x_4=-1\\2x_1+2x_2+x_4=1\end{cases}$.

(1) 当a,b为何值时，(I)与(II)有公共解？写出公共解.

(2) 当a,b为何值时，(I)与(II)有相同解？（12 分）

参考答案：

(1)：联立(I)和(II)，得方程组(III)$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_3+x_4=b\\x_1+ax_2+3x_3+2x_4=-1\\2x_1+2x_2+x_4=1\end{cases}$，其增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&2&1&b\\1&a&3&2&-1\\2&2&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&a-1&2&1&-1\\0&0&2&1&b\\0&0&0&0&b+1\end{pmatrix}$. 可知，$b=-1$.

此时，(III)的增广矩阵变为$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&a-1&2&1&-1\\0&0&2&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

当$a=1$时，公共解为$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$,

当$a\neq 1$时，公共解为$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(2)：由上一步可知$b=-1$.（I）的通解为$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$, 将$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$代入(II)得$a=1$. 此时，(II)的通解也为

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

5，已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交线性变换$x=Qy$下得到标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 求$a$的值及正交矩阵$Q$.（12分）

参考答案：

二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$, 由于特征值为$\lambda_1,\lambda_2,0$, 可知行列式$=-3(a-2)=0$，得$a=2$.

由$|\lambda E-A|=(\lambda-6)(\lambda+3)\lambda=0$, 得特征值为$\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

当$\lambda_1=-3$时，$(-3E-A)x=0$解得特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当$\lambda_2=6$时，$(6E-A)x=0$解得特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

当$\lambda_3=0$时，$(0E-A)x=0$解得特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

ξ_1,ξ_2,ξ_3已正交化，只需单位化，得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

得分	

四、　证明题(2 题，共计 14 分)

1，向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是方程组$Ax=0$的基础解系，β不是该方程组的解，证明：$\beta,\ \beta+\alpha_1,\ \beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$线性无关．（8 分）

参考答案：

由于β不是该方程组的解，可知β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表示，又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性无关，故$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性无关。

又$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$与$\beta,\ \beta+\alpha_1,\ \beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$等价，则$\beta,\ \beta+\alpha_1,\ \beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$线性无关。

2，已知$H=\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & C\end{pmatrix}$，其中$A_m$为正定矩阵，$B$为$m\times n$阶实矩阵，$C$为$n$阶实对称阵．证明：H 是正定矩阵的充分必要条件是$C-B^TA^{-1}B$正定。（6 分）

参考答案：

记矩阵$G=\begin{pmatrix}E_m & 0\\ -B^TA^{-1} & E_n\end{pmatrix}$，可知$G^T=\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}B\\ 0 & E_n\end{pmatrix}$.

由于$GHG^T=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & C-B^TA^{-1}B\end{pmatrix}$，则 H 正定当且仅当$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & C-B^TA^{-1}B\end{pmatrix}$正定。

已知A_m正定矩阵，故 H 正定当且仅当$C-B^TA^{-1}B$正定。