8.3 全微分

8.3.1 多元函数全微分的定义及其计算

定义 3.1. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域, 点 $P_0(x_0,y_0)\in D$, 函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 的某邻域内有定义, 自变量 x,y 分别有增量 $\Delta x,\Delta y$, 若存在仅与点 $P_0(x_0,y_0)$ 有关而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数 A,B, 使得函数全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$可微, 并称其线性主部 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 全微分, 记作 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)}$, 即

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y.$$

若函数在域 D 内各点都可微, 则称此函数在 D 内可微, 其全微分记为 $\mathrm{d}z$.

注

- 由于 $\Delta x=\mathrm{d}x$ 和 $\Delta y=\mathrm{d}y$, 故函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分可表示为 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y=A\,\mathrm{d}x+B\,\mathrm{d}y$.
- 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 Δz 与 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y$ 之差为 ρ 的高阶无穷小量.

例 3.1. 考察函数 $f(x,y)=xy$ 在点 (x_0,y_0)(除 $(0,0)$ 外) 处的可微性.

解: 由于

$$\Delta z=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0=y_0\Delta x+x_0\Delta y+\Delta x\Delta y,$$
$$|\Delta x\Delta y|\le\frac{1}{2}(\Delta x^2+\Delta y^2),$$

所以

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-(y_0\Delta x+x_0\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0.$$

故 $f(x,y)=xy$ 在点 (x_0,y_0)) 处可微.

定理 3.1. 若区域 D 上的二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 可微, 其全微分为 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y$, 则函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的一阶偏导数都存在, 且

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad B=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

此时

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\mathrm{d}y.$$

例 3.2. 求函数 $z=x^2+e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解: 由于

$$z'_x = 2x + ye^{xy}, \quad z'_y = xe^{xy},$$

故全微分为

$$\mathrm{d}z = z'_x(2,1)\,\mathrm{d}x + z'_y(2,1)\,\mathrm{d}y = (4+e^2)\,\mathrm{d}x + 2e^2\,\mathrm{d}y.$$

例 3.3. 设 $z = x^y$, 求全微分 $\mathrm{d}z$.

解: 由于

$$z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x,$$

故全微分

$$\mathrm{d}z = yx^{y-1}\,\mathrm{d}x + x^y \ln x\,\mathrm{d}y.$$

定理 3.2 (可微的必要条件). 若区域 D 上的二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

例 3.4. 证明二元函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导, 但不可微.

解: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导的证明见上节. 对任意的实数 k, 有

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y=kx \\ x\to 0}} \frac{kx^2}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

所以函数 $f(x,y)$ 在原点处的极限不存在, 故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

注 3.3. 函数连续与可偏导是可微的必要条件而非充分条件. 事实上, 函数可偏导并不能保证函数可微.

定理 3.4 (可微的充分条件). 若函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有连续偏导数, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微分.

例 3.5. 证明函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在, 但偏导数在点 $(0,0)$ 处不连续, 而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

解: 因为 $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0$, 故 $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$. 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时,

$$f'_x(x,y) = y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由于

$$\lim_{\substack{y=|x| \\ x\to 0}} f'_x(x,y) = \lim_{\substack{y=|x| \\ x\to 0}} \left(y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

不存在, 所以 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续. 由函数的对称性知, $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x\Delta y\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0.$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 进而连续且可偏导.

以上所作的讨论可以完全类似地推广到二元以上的多元函数.

对于多元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 当 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可微时, 其全微分

$$\mathrm{d}u = f'_{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + f'_{x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + f'_{x_n}\,\mathrm{d}x_n.$$

例 3.6. 设 $u=\ln(x-y+z^2)$, 求全微分 $\mathrm{d}u$.

解: 由于

$$u_x = \frac{1}{x-y+z^2},\quad u_y = \frac{-1}{x-y+z^2},\quad u_z = \frac{2z}{x-y+z^2},$$

故全微分

$$du = \frac{1}{x-y+z^2}(dx-dy+2zdz).$$

二元函数可微分的几何意义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分, 则在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

记上式的右端为

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

它表示通过点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 并以 $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$ 为法向量的一张平面. 这张平面就是曲面在该点的切平面.

若函数在点 (x_0,y_0) 可微分, 则曲面在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 近旁的一小部分, 可用曲面在该点的切平面来近似代替.

8.3.2 近似计算

近似计算

由全微分定义

$$\Delta z|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho).$$

可知当 $|\Delta x|$ 和 $|\Delta y|$ 都很小时, 有近似公式

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

例 3.7. 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $z = f(x, y) = x^y$, 利用函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 2)$ 处的可微性, 可得

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z,$$

即

$$f(1.04, 2.02) - f(1, 2) \approx f'_x(1, 2)\Delta x + f'_y(1, 2)\Delta y,$$

其中 $\Delta x = 0.04, \Delta y = 0.02$. 于是

$$\begin{aligned}(1.04)^{2.02} =& f(1.04, 2.02) \approx f(1, 2) + f'_x(1, 2)\Delta x + f'_y(1, 2)\Delta y \\ =& 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08.\end{aligned}$$

例 3.8. 计算 $1.002 \times 2.003^2 \times 3.004^3$ 的近似值.

解: 设 $f(x, y, z) = (1 + x)^m(1 + y)^n(1 + z)^t$, 则当 $|x|, |y|, |z|$ 很小时, 有近似公式

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &\approx f(0, 0, 0) + f'_x(0, 0, 0)x + f'_y(0, 0, 0)y + f'_z(0, 0, 0)z \\ &= 1 + mx + ny + tz.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&1.002 \times 2.003^2 \times 3.004^3 \\ =&(1 + 0.002) \times 2^2(1 + 0.003/2)^2 \times 3^3(1 + 0.004/3)^3 \\ \approx&2^2 \times 3^3(1 + 0.002 + 0.003 + 0.004) = 108.972.\end{aligned}$$

8.3.3 思考与练习

练习 210. 函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处满足 (　　), 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微.

(A) $\lim\limits_{\rho\to 0}(\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y) = 0$

(B) $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\rho} = 0$

(C) 连续且偏导数存在

(D) 二阶偏导数存在

B

练习 211. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, 则函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处一定 (　　)

(A) 连续　　(B) 不连续

(C) 可微　　(D) 以上均不正确

D

练习 212. 设 $f(x,y,z) = \dfrac{x\cos y + y\cos z + z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$, 求 $\mathrm{d}f|_{(0,0,0)}$.

利用轮换对称性, $\frac{1}{4}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$

练习 213. 设 $z = x^2 + 3xy - y^2$, x 从 2 变到 2.05, y 从 3 变到 2.96, 试求 Δz 与 $\mathrm{d}z$ 的差.

解:

$$\Delta z = (2.05^2 + 3\times 2.05\times 2.96 - 2.96^2) - (2^2 + 3\times 2\times 3 - 3^2) = 0.6449,$$

而

$$z'_x(2,3) = (2x+3y)|_{(2,3)} = 13, \quad z'_y(2,3) = (3x-2y)|_{(2,3)} = 0,$$
$$\Delta x = 0.05, \quad \Delta y = -0.04,$$

故

$$\mathrm{d}z = z'_x(2,3)\Delta x + z'_y(2,3)\Delta y = 0.65,$$

于是

$$\Delta z - \mathrm{d}z = -0.0051.$$