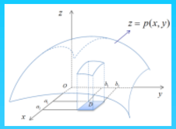


第二章 条件概率与独立性

第一节 条件概率与事件独立性

一. 条件概率

例1: 假设有一批灯泡共N个,其中有N_A个是甲厂生产的,N_B个是合格品,在甲厂生产的N_A个灯泡中有N_{AB}个是合格品。

从N个灯泡中随机地取一个,设

$A=$"任取一个产品,取得甲厂生产的",

$B=$"任取一个产品,取得合格品",

由于是古典概型

$$P(A)=\frac{N_A}{N}\quad,\quad P(B)=\frac{N_B}{N}\quad,\quad P(AB)=\frac{N_{AB}}{N}$$

任取一个产品,结果发现是甲厂生产的,此时问它是合格品的概率?

记在事件A发生的情况下,事件B发生的条件概率为$P(B|A)$

$$P(B|A)=\frac{N_{AB}}{N_A}=\frac{N_{AB}/N}{N_A/N}=\frac{P(AB)}{P(A)}。$$

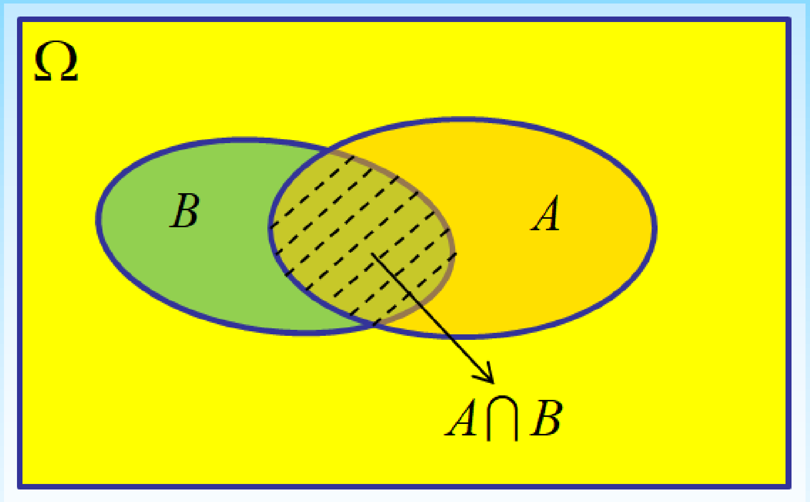
定义：设A, B为二个事件，且$P(A) > 0$，

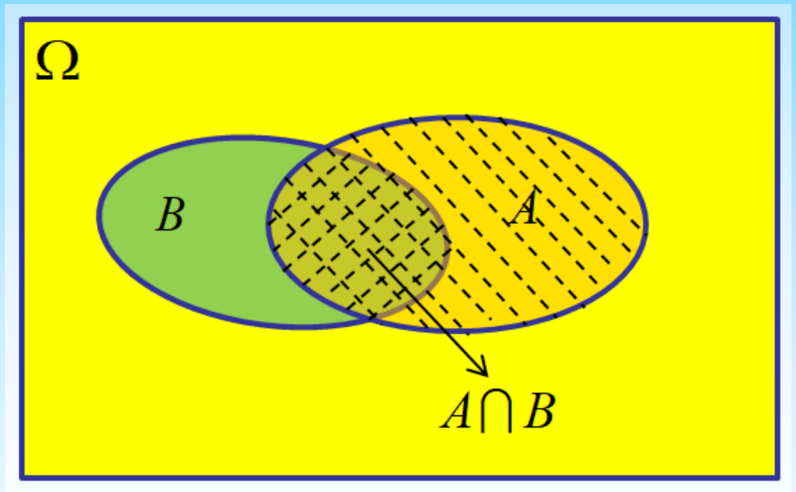
记在事件A发生的情况下，事件B发生的条件概率为$P(B|A)$，且

$$P(B|A) \triangleq \frac{P(AB)}{P(A)}。$$

我们用平面上的几何概型来理解一下。

S_A表示A的面积





$$P(AB)=\frac{S_{AB}}{S_{\Omega}}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{S_{AB}/S_{\Omega}}{S_A/S_{\Omega}}=\frac{S_{AB}}{S_A}$$

例1: 考察掷两颗骰子的试验。已知两颗骰子出现点数之和为7, 求其中有一个是3点的概率。

解：$A =$ “两颗骰子出现点数之和为7”,

$B =$ “其中有一个是3点”,

$$\Omega = \left\{(x, y) \middle| i = 1, 2, \cdots, 6,\ j = 1, 2, \cdots, 6\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} (1,1), (1,2), \cdots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), \cdots, (2,6) \\ \cdots\cdots \\ (6,1), (6,2), \cdots, (6,6) \end{array}\right\},$$

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},$$

$$B=\{(3,4),(4,3)\},$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2/36}{6/36}=\frac{1}{3}。$$

首先,我们可以证明条件概率$P(\cdot|A)$是概率,

不难验证条件概率$P(\cdot|A)$满足概率的三条公理,即非负性,规范性,可列可加性。

(1)$P(B|A)\geq 0$;

(2)$P(\Omega|A)=1$;

(3)$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i|A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$。

证明:(1),(2)显然,

(3)

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \frac{P\left(A\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{\infty} AB_i\right)}{P(A)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A)P(B_i|A)}{P(A)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)\text{。}$$

注：$P_A(\bullet) \triangleq P(\bullet|A)$，概率$P_A$可以看成$P$在$A$上的限制。

既然$P(\cdot|A)$是概率,那么概率的性质也都具有。例如

$$P(\varnothing|A)=0;$$

$$P(B|A)=1-P(\bar{B}|A);$$

$$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A);$$

……

$P(A)>0,\ P(AB)=P(A)P(B|A)$。

乘法定理：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个事件，

且$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})。$$

证明： $A_1 \supset A_1A_2 \supset \cdots \supset A_1A_2\cdots A_{n-1}$,

$$P(A_1) \geq P(A_1A_2) \geq \cdots \geq P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0,$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

$$= P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1\cdots A_{n-1})}{P(A_1\cdots A_{n-2})}\frac{P(A_1\cdots A_n)}{P(A_1\cdots A_{n-1})}$$

$$= P(A_1A_2\cdots A_n)\text{。}$$

例2: P20例2 – 3

一批零件共100件,其中有10件是次品,每次从中任取一件,取出的零件不再放回去,求第三次才取得合格品的概率。

解: A_k = "第k次取出的是合格品", $k = 1, 2, 3,$

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)P(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$= \frac{10}{100} \times \frac{9}{99} \times \frac{90}{98} \approx 0.0084。$$

例3: P30习题3

$m+n$个人排队购买足球票,票价为50元,其中有m个人持有50元的纸币,其余$n(n\le m)$个人持有100元的纸币。若每人限购一张球票,且开始时售票员无零钱可找,求买票过程中没有人等候找钱的概率。

解： $A_k=$“第k个持100元的人不用等候”，

$k=1,2,\cdots,n,$

由乘法定理知，

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

$$=\frac{m}{m+1}\bullet\frac{m-1}{m}\cdots\frac{m-(n-1)}{m+1-(n-1)}$$

$$=\frac{m-n+1}{m+1}。$$

注：　50元放成一排，

$$\downarrow\ \underbrace{O \downarrow O \downarrow O \downarrow \cdots \downarrow O}_{m} \downarrow$$

$$\underbrace{O \downarrow O \downarrow O \downarrow \cdots \downarrow O}_{m} \downarrow$$

华师大《概率论与数理统计教程》第二版,茆诗松等

P31, 第16题

16.一个人把六根草紧握在手中,仅露出它们的头尾,然后随机地把六个头两两相接,六个尾也两两相接。求放开手后六根草恰好连成一个环的概率。

原书的解答:

因为“六个尾两两相接”不会影响是否成环,所以我们只需考虑“六个头两两相接”可能出现的情况。

若考虑两两相接的前后次序,则“六个头两两相接”共有6！种不同结果,即先从6个头中任取1个,与余下的5个头的任1个相接;然后从未接的4个头中任取1个,与余下的3个头中的任1个相接;最后从未接的2个头中任取

1个,与余下的最后1个头相接,这总共有6！种可能接法,这是分母。

而要成环则第一步从6个头中任取1个,此时余下的5个头有1个不能相接,只可与余下的4个头中的任1个相接;第二步从未接的4个头中任取1个,与余下的2个头中的任1个相接;最后从未接的2个头中任取1个,与余下的最后1个头相接,这总共有$6\times4\times4\times2\times2\times1$种可能接法。

由此得所求概率为$\dfrac{6\times4\times4\times2\times2\times1}{6!}=\dfrac{8}{15}$。

思考:若将此题改成“2n 根草”,则恰巧连成一个环的概率是多少?

比较好的解法如下。

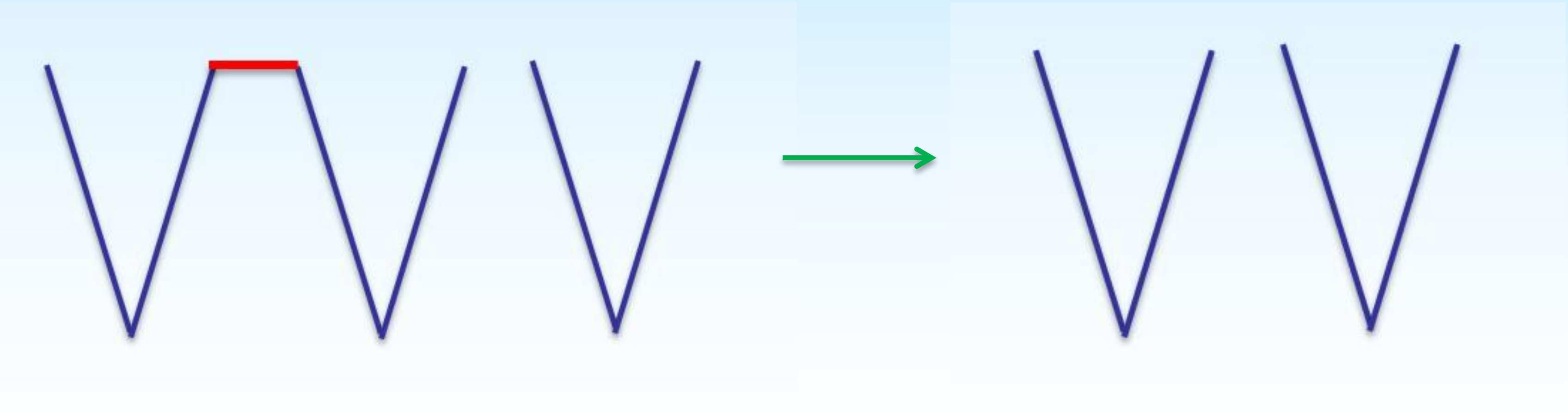
解:　　尾已经两两相接,形成三组

$A_k=$“第k个结打好,使6根草形成一个环”,$k=1,2,3,$

由乘法定理知,

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$$

$$=\frac{C_6^2-3}{C_6^2}\times\frac{C_4^2-2}{C_4^2}\times\frac{C_2^2}{C_2^2}=\frac{12}{15}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{15}。$$



推广：　若将此题改成“$2n$ 根草”，则恰巧连成一个环的概率是多少？

解：

$A_k=$“第k个结打好，使$2n$根草形成一个环”，$k=1,2,\cdots,n$，

由乘法定理知，

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

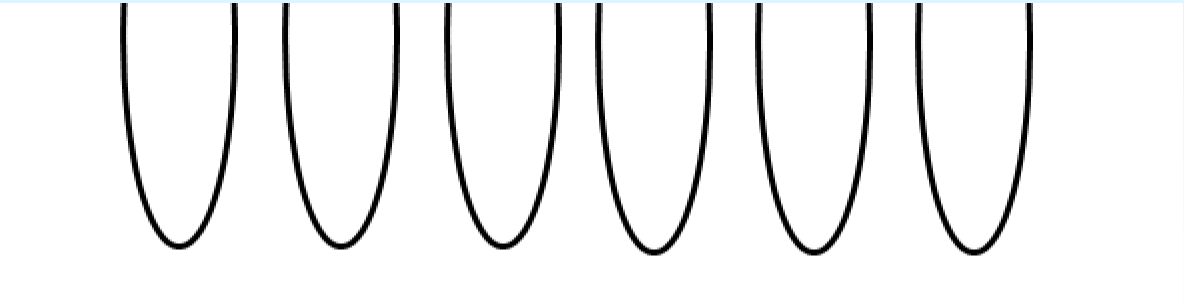
$$=\frac{C_{2n}^2-n}{C_{2n}^2}\times\frac{C_{2n-2}^2-(n-1)}{C_{2n-2}^2}\times\cdots\times\frac{C_2^2}{C_2^2}$$

$$=\frac{2n-2}{2n-1}\times\frac{2n-4}{2n-3}\times\cdots\times\frac{1}{1}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}。$$

更难的推广：

一个人有6根草,随机地为它们两两相接,求6根草恰好连成一个环的概率。

解：　把6根草按照下图放置,可以看成12根草尾已经两两相连,



$A_k=$"第k个结打好，使6根草形成一个环"，$k=1,2,\cdots,6$，

由乘法定理知，

$$P(A_1A_2\cdots A_6)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_6|A_1\cdots A_5)$$

$$=\frac{C_{12}^2-6}{C_{12}^2}\times\frac{C_{10}^2-5}{C_{10}^2}\times\cdots\times\frac{C_4^2-2}{C_4^2}\times\frac{C_2^2}{C_2^2}$$

$$=\frac{256}{693}\approx 0.3694。$$

推广：

一个人有n根草，随机地为它们两两相接，求n根草恰好连成一个环的概率。

解：

$A_k=$"第k个结打好，使n根草形成一个环"，$k=1,2,\cdots,n$，

由乘法定理知，

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

$$=\frac{C_{2n}^2-n}{C_{2n}^2}\times\frac{C_{2n-2}^2-(n-1)}{C_{2n-2}^2}\times\cdots\times\frac{C_2^2}{C_2^2}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\text{。}$$

中科大数学系概率论教材例题

将n根短绳的$2n$个端头任意两两连接,求恰好连成n个圈的概率。

解: A_k表示第k次连接被连成一个圈,

$k=1,2,\cdots,n$,由乘法定理知,

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

$$=\frac{n}{C_{2n}^2}\times\frac{(n-1)}{C_{2n-2}^2}\times\cdots\times\frac{1}{C_2^2}=\frac{1}{2n-1}\times\frac{1}{2n-3}\times\cdots\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{(2n-1)!!}\text{。}$$

例4: 在空战中,甲机先向乙机开火,击落乙机的概率为0.2;若乙机未被击落,就进行还击,击落甲机的概率为0.3;若甲机也未被击落,则再进行攻击,击落乙机的概率为0.4。求在这几个回合中,甲机被击落的概率和乙机被击落的概率。

解： $A =$ “第一回合,甲机向乙机开火,击落乙机”,

$B =$ “第二回合,乙机向甲机开火,击落甲机”,

$C =$ “第三回合,甲机向乙机开火,击落乙机”,

$$P(A)=0.2,\quad P(B|\bar{A})=0.3,\quad P(C|\bar{A}\bar{B})=0.4,$$

$$P(\text{甲被击落})=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.8\times0.3=0.24,$$

$$P(\text{乙被击落})=P(A+\bar{A}\bar{B}C)=P(A)+P(\bar{A}\bar{B}C)$$

$$=P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})P(C|\bar{A}\bar{B})$$

$$=0.2+0.8\times0.7\times0.4=0.424,$$

其中 $P(B|\bar{A})+P(\bar{B}|\bar{A})=1$。

习题集14页计算题13

某人有5把钥匙,但他忘了开门的是哪一把,逐把试开,求

(1) 恰好第3次打开房门的概率;

(2)3次内打开房门的概率;

(3) 如果5把中有2把房门钥匙,3次内打开房门的概率又是多少?

解: $A_k =$“第k次打开房门”,$k=1,2,3,$

$$(1)P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5},$$

$$(2)P(A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5},$$

$$(3)P(A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\,|\,\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)P(A_3\,|\,\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{9}{10}。$$

习题集的答案：

$$\frac{P_4^2\,2!}{5!},\ \frac{4!+C_4^1\,3!+P_4^2\,2!}{5!},\ \frac{C_2^1\,4!+C_3^1C_2^1\,3!+P_3^2C_2^1\,2!}{5!}$$

二．事件独立性

1. 两个事件的独立性

例5: P20例2 – 4

袋中有a只黑球和b只白球,采取有放回摸球,陆续取出两球,求

(1) 在已知第一次摸出黑球的条件下,第二次摸出黑球的概率;

(2) 第二次摸出黑球的概率。

$A=$“第一次摸出的是黑球”,

$B=$“第二次摸出的是黑球”,

(1)

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\dfrac{a^2}{(a+b)^2}}{\dfrac{a}{a+b}}=\frac{a}{a+b},$$

注:

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{\dfrac{ba}{(a+b)^2}}{\dfrac{b}{a+b}}=\frac{a}{a+b}$$

(2) $$P(B)=P(B\Omega)=P(B(A+\bar{A}))=P(AB+\bar{A}B)$$

$$=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{ba}{(a+b)^2}=\frac{a}{a+b},$$

所以可以得到

$$P(B|A)=P(B),P(B|\bar{A})=P(B),$$

从而

$$P(A)>0\,,P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)\text{。}$$

定义：设事件A和B满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称A和B相互独立，否则称为不独立。

Ω与任何事件A独立，

$\varnothing$与任何事件A独立。

例6: 掷一枚硬币和一颗骰子。定义

$A=$"硬币出现正面",

$B=$"骰子出现奇数点",

讨论事件A,B的独立性。

解:

$$\Omega=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),\\ (T,1),(T,2),\ (T,3),(T,4),\ (T,5),\ (T,6)\}$$

$$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(AB)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

所以,事件A和事件B相互独立。

注:有放回地取东西,射击,抛掷等认为独立。

例7: 一个家庭中有若干个小孩, 假定生男生女是等可能的, 令

$A=$ "一个家庭中有男孩又有女孩",

$B=$ "一个家庭最多有一个女孩",

(1) 家庭中有两个小孩,

(2) 家庭中有三个小孩。

对上述2种情况, 讨论事件A, B的独立性。

(1) $\Omega=\{(B,B),(B,G),(G,B),(G,G)\}$,

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{4}, P(AB)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P(AB) \neq P(A)P(B),$$

所以, 事件A和事件B不独立。

(2) $\Omega = \{(B,B,B),(B,B,G),(B,G,B),(G,B,B),$
$(G,G,B),(G,B,G),(B,G,G),(G,G,G)\},$

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{3}{8},$$

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

所以, 事件A和事件B相互独立。

讨论“A, B互不相容”和“A, B 独立”。

按定义

A, B互不相容

$$AB = \varnothing$$

A, B独立

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

一般情况：

设$P(A) > 0, P(B) > 0,$则“A与B互不相容”和“A与B独立”不能同时成立。

性质：若A, B 独立，则

"$\bar{A}, B$", "$A, \bar{B}$", "$\bar{A}, \bar{B}$" 也独立。

证明：　已知 $P(AB) = P(A)P(B)$,

$$P(\bar{A}B) = P(B-A) = P(B-AB) = P(B) - P(AB)$$

$$= P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1-P(A)) = P(\bar{A})P(B),$$

所以，$\bar{A}$与B独立。

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$$

$$=1-(P(A)+P(B)-P(A)P(B))$$

$$=(1-P(A))-P(B)(1-P(A))$$

$$=(1-P(A))(1-P(B))$$

$$=P(\bar{A})P(\bar{B}),$$

所以,$\bar{A}$与$\bar{B}$独立。

杨勇制作

2. 多个事件的独立性

先讨论三个事件独立要满足什么条件。

A_1, A_2, A_3 独立,

$$\begin{cases} P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases}$$

定义：设有n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，若

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}), \qquad (*)$$

其中$i_1, i_2, \cdots, i_k$为$1, 2, \cdots, n$中的k个数，

$2 \le k \le n$，则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，

否则称为不独立。

性质1：如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$独立，则其中一些事件改为对立事件仍然独立。

证明： 不妨先证明：$\bar{A}_1, A_2, \cdots, A_n$，

即，已知$A_1, A_2, \cdots, A_n$独立，证明$\bar{A}_1, A_2, \cdots, A_n$独立。

对于足标$i_1, i_2, \cdots, i_k$，

如果不含1，则等式(*)仍成立。

如果含1，不妨设$i_1 = 1$，则

$$P(\bar{A}_1 A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_2} \cdots A_{i_k} - A_1 A_{i_2} \cdots A_{i_k})$$

$$= P(A_{i_2} \cdots A_{i_k}) - P(A_1 A_{i_2} \cdots A_{i_k})$$

$$=P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})-P(A_1)P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

$$=(1-P(A_1))P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

$$=P(\overline{A}_1)P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

所以,等式(*)成立。

即$\overline{A}_1, A_2, \cdots, A_n$独立。

在$\overline{A}_1, A_2, \cdots, A_n$的基础上,利用以上证明,再加一个对立事件也成立,以后以此类推,这就证明了此性质。

性质2: 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)。$$

证明:

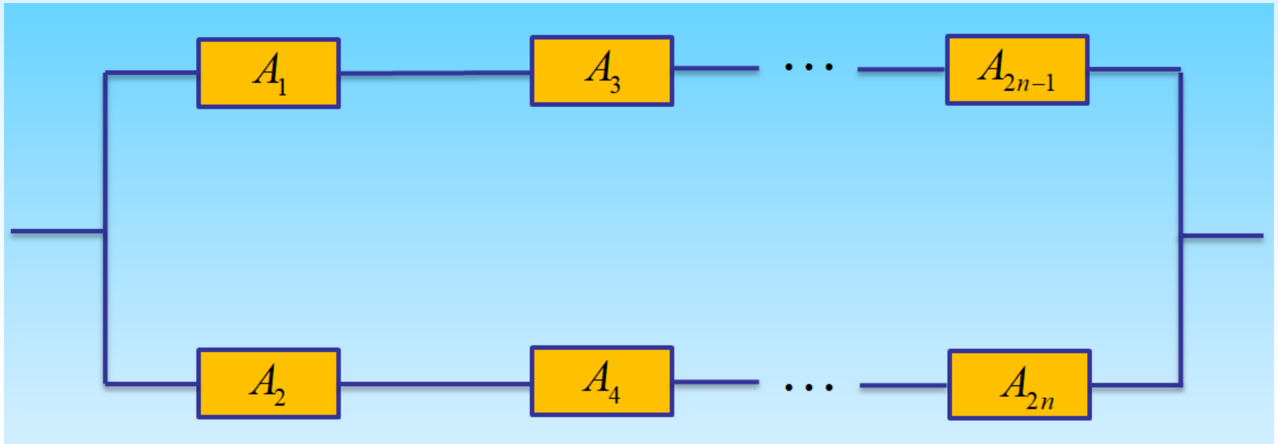
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n)$$

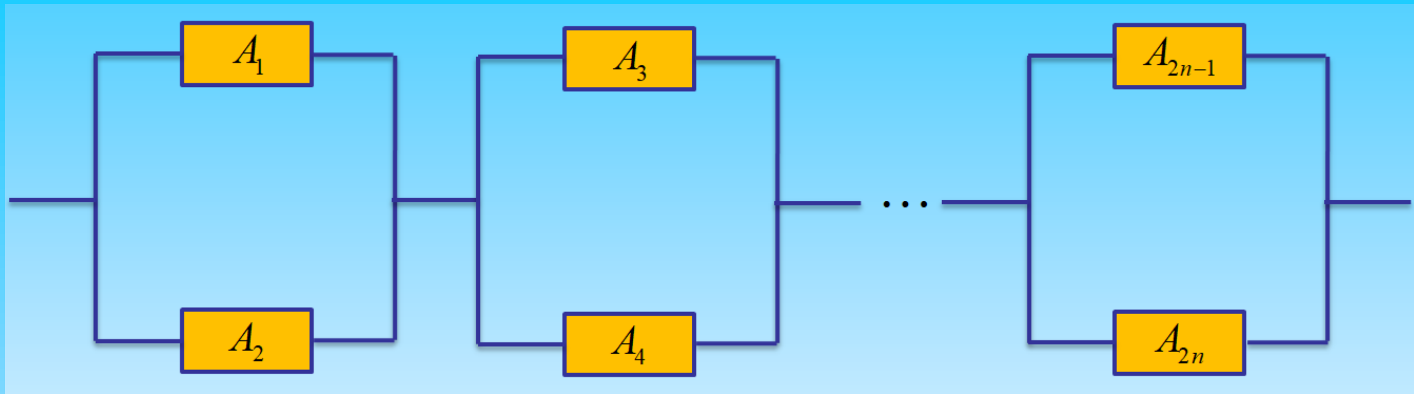
$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)。$$

例9: P24例2 – 11

对于一个元件, 它能正常工作的概率p 称为它的可靠性, 元件组成系统, 系统正常工作的概率称为该系统的可靠性。如果构成系统的每个元件的可靠性均为$r(0 < r < 1)$, 试比较图2-2系统1和图2-3系统2可靠性大小。(注: 一般可以认为元件能否正常工作相互独立)



系统1



系统2

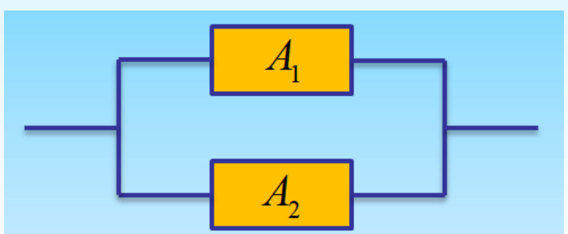
$A_i=$“第i个元件正常工作”，

串联

$P(A_i)=r\ ,i=1,2,\ A_1,A_2$独立，

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=r^2,$$

并联



$$P(A_1\cup A_2)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)$$

$$=1-(1-r)^2。$$

习题集31页计算题24

接连掷均匀的骰子两次，A 表示“两次的点数之和为5”的事件，B 表示“两次的点数之和为7”的事件，求A 在B 之前发生的概率。

解:

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\ P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

A与B互不相容,

$C_n=$“前$n-1$次试验A与B都没出现,

第n次试验A出现”,

$D_k=$“第k次试验A与B都没出现”,

$k=1,2,\cdots,n-1,$

$$P(D_k)=1-\frac{1}{9}-\frac{1}{6}=\frac{13}{18},k=1,2,\cdots,n-1,$$

D_n = "第n次试验A出现",

$$P(D_n)=P(A)=\frac{1}{9},$$

$D_1,D_2,\cdots,D_n$独立,

$$P(C_n)=P(D_1\cdots D_{n-1}D_n)$$

$$= P(D_1)\cdots P(D_{n-1})P(D_n)$$

$$= \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{9}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$P\left(\sum_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(C_n) = \frac{1/9}{1 - 13/18} = \frac{2}{5},$$

其中$C_1, C_2, \cdots$两两互不相容。

$$A_k = \text{“第}k\text{次投掷出现}A\text{”}, k = 1, 2, \cdots,$$

$$B_k = \text{“第}k\text{次投掷出现}B\text{”}, k = 1, 2, \cdots,$$

$$C_1 = A_1, C_2 = (\bar{A}_1 \bar{B}_1) A_2, C_3 = (\bar{A}_1 \bar{B}_1)(\bar{A}_2 \bar{B}_2) A_3, \cdots$$

2017－2018年第二学期

2018年6月5日概率论考试

1. 设事件A, B独立，事件C为“$A, \bar{B}$中至少有一个不发生”。若$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{2}{3}$，则$P(C)=$________。

解：$C=\bar{A}\cup\bar{\bar{B}}=\bar{A}\cup B$,

$$P(C)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)$$

$$=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A})P(B)=\frac{5}{6}。$$

第二节 全概率公式和贝叶斯公式

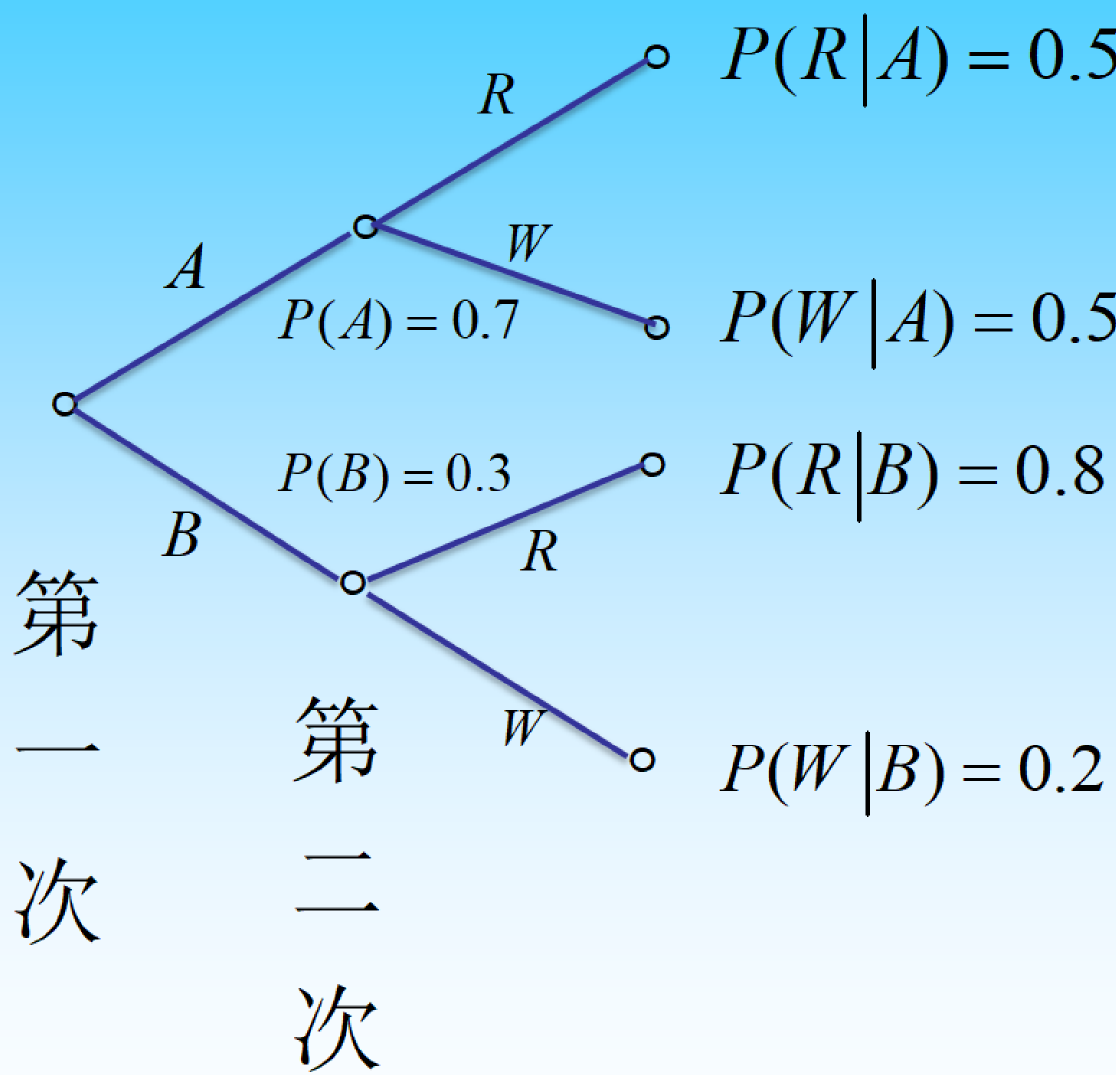
例10:有外形相同的球分装在三个盒子中,每盒10个。其中第一个盒子中7 个球标有字母A,3 个球标有字母B;第二个盒子中有红球和白球各5个;第三个盒子中有红球8 个,白球2 个。试验按如下规则进行:先在第一个盒子中任取一球,若取得标有字母A的球,则在第二个盒子中任取一个球;若第一次取得标有字母B的球,则在第三个盒子中任取一个球。如果第二次取出的是红球,则称试验为成功,求试验成功的概率。

$A =$ “第一次取到标有字母A的球”,

$B =$ “第一次取到标有字母B的球”,

$R =$ “第二次取到红球”,

$W =$ “第二次取到白球”,


R
W
A
$P(A)=0.7$
$P(R|A)=0.5$
$P(W|A)=0.5$
$P(B)=0.3$
B
R
W
$P(R|B)=0.8$
$P(W|B)=0.2$
第一次
第二次

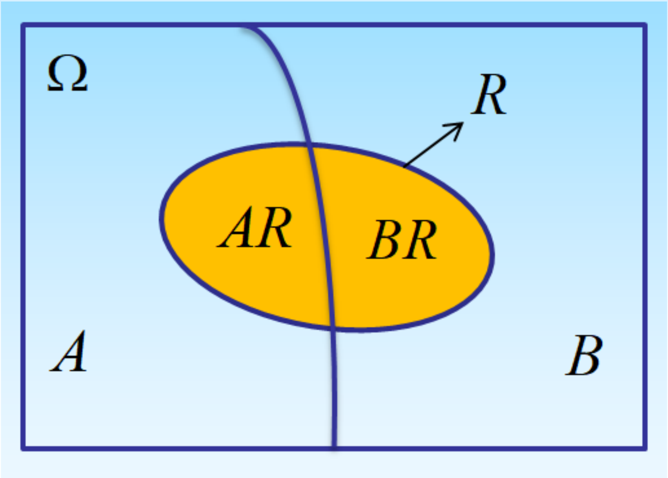
$$P(R)=P(R\Omega)=P(R(A+B))$$

$$=P(AR+BR)$$

$$=P(AR)+P(BR)$$

$$=P(A)P(R|A)+P(B)P(R|B)$$

$$=0.59。$$



注:这个解法没有考虑样本空间,但是样本空间是存在的。

下面用样本空间来解。

$$\Omega = \begin{cases} A & \begin{array}{l} (a_1^{(1)}, r_1^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_2^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_3^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_4^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_5^{(2)}), \\ (a_1^{(1)}, w_1^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_2^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_3^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_4^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_5^{(2)}), \\ \cdots\cdots \\ (a_7^{(1)}, r_1^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_2^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_3^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_4^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_5^{(2)}), \\ (a_7^{(1)}, w_1^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_2^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_3^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_4^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_5^{(2)}), \end{array} \\ \hline B & \begin{array}{l} (b_1^{(1)}, r_1^{(3)}), (b_1^{(1)}, r_2^{(3)}), (b_1^{(1)}, r_3^{(3)}), \cdots\cdots, (b_1^{(1)}, r_8^{(3)}), \\ (b_1^{(1)}, w_1^{(3)}), (b_1^{(1)}, w_2^{(3)}), \\ \cdots\cdots \\ (b_3^{(1)}, r_1^{(3)}), (b_3^{(1)}, r_2^{(3)}), (b_3^{(1)}, r_3^{(3)}), \cdots\cdots, (b_3^{(1)}, r_8^{(3)}), \\ (b_3^{(1)}, w_1^{(3)}), (b_3^{(1)}, w_2^{(3)}) \end{array} \end{cases}$$

注:大家可以看到,用样本空间解相当麻烦,还要求是古典概型。

下面把题目改一下,用古典概型就解决不了。

例10：有外形相同的球分装在三个盒子中，第一，第二个盒子10个，第三个盒子20个。其中第一个盒子中7个球标有字母A，3个球标有字母B；第二个盒子中有红球和白球各5个；第三个盒子中有红球16个，白球4个。试验按如下规则进行：先在第一个盒子中任取一球，若取得标有字母A的球，则在第二个盒子中任取一个球；若第一次取得标有字母B的球，则在第三个盒子中任取一个球。如果第二次取出的是红球，则称试验为成功，求试验成功的概率。

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l}
(a_1^{(1)}, r_1^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_2^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_3^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_4^{(2)}), (a_1^{(1)}, r_5^{(2)}), \\
(a_1^{(1)}, w_1^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_2^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_3^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_4^{(2)}), (a_1^{(1)}, w_5^{(2)}), \\
\cdots\cdots \\
(a_7^{(1)}, r_1^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_2^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_3^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_4^{(2)}), (a_7^{(1)}, r_5^{(2)}), \\
(a_7^{(1)}, w_1^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_2^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_3^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_4^{(2)}), (a_7^{(1)}, w_5^{(2)}), \\
\hline
(b_1^{(1)}, r_1^{(3)}), (b_1^{(1)}, r_2^{(3)}), (b_1^{(1)}, r_3^{(3)}), \cdots\cdots, (b_1^{(1)}, r_{16}^{(3)}), \\
(b_1^{(1)}, w_1^{(3)}), (b_1^{(1)}, w_2^{(3)}), (b_1^{(1)}, w_3^{(3)}), (b_1^{(1)}, w_4^{(3)}), \\
\cdots\cdots \\
(b_3^{(1)}, r_1^{(3)}), (b_3^{(1)}, r_2^{(3)}), (b_3^{(1)}, r_3^{(3)}), \cdots\cdots, (b_3^{(1)}, r_{16}^{(3)}), \\
(b_3^{(1)}, w_1^{(3)}), (b_3^{(1)}, w_2^{(3)}), (b_3^{(1)}, w_3^{(3)}), (b_3^{(1)}, w_4^{(3)})
\end{array} \right\}$$

A

B

这个不是古典概型,但是用性质仍然可以解决,而且不用写复杂的样本空间。

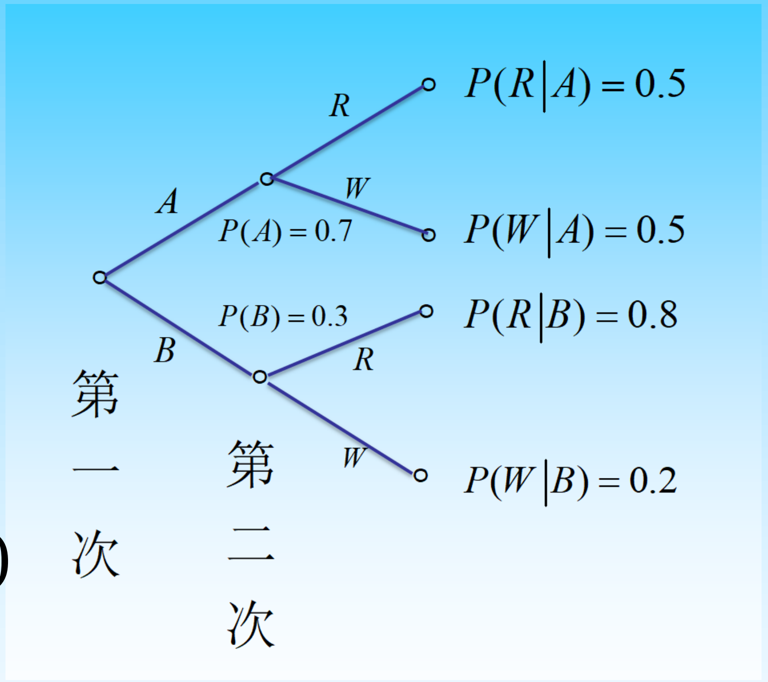
$$P(R)=P(R\Omega)=P(R(A+B))$$

$$=P(AR+BR)$$

$$=P(AR)+P(BR)$$

$$=P(A)P(R|A)+P(B)P(R|B)$$

$$=0.59。$$



注:解法一样,没有改变。

性质或者公式可以解决相当复杂的问题,而且不用写样本空间。养成用性质或者公式解题的习惯！

杨勇制作

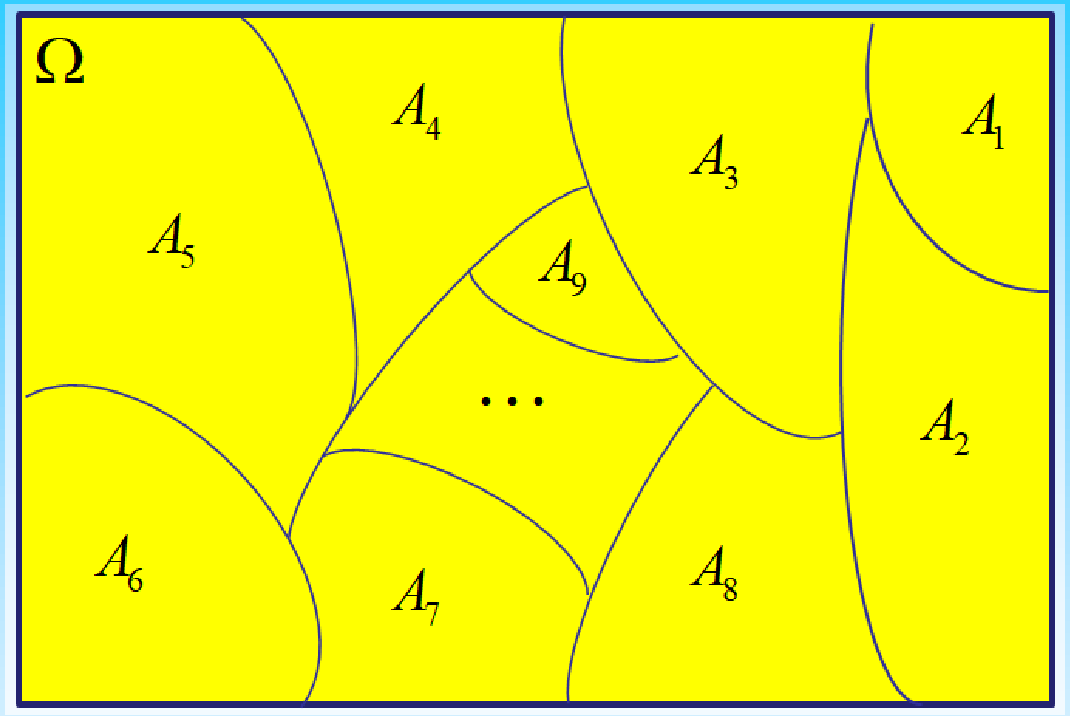
定义：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$满足

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega,$$

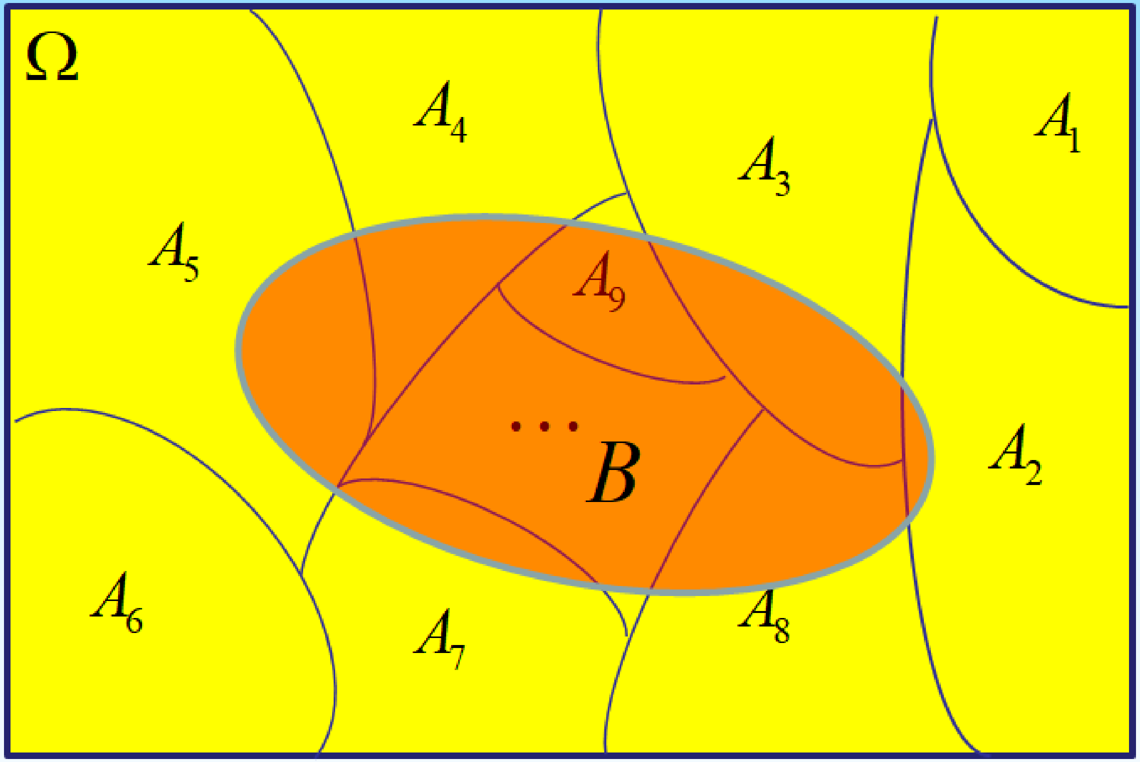
则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω的一个分割。

全概率公式：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω的一个分割，B为任一事件，则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)。$$



样本空间的分割



Ω
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
A_9
…
B

证明:

$$P(B)=P(B(A_1+A_2+\cdots+A_n))$$

$$=P(A_1B+A_2B+\cdots+A_nB)$$

$$=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)$$

$$=P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)。$$

注:分割中的事件也可以无穷多个。

例11: 某工厂有四条流水线生产同一种产品, 该四条流水线的产量分别占总产量的15%, 20%, 30%和35%, 又这四条流水线的次品率依次为0.05, 0.04, 0.03及0.02。现在从出厂产品中任取一件, 求抽到的产品是次品的概率。

解: $A_i =$ "产品来自第i条流水线", $i = 1, 2, 3, 4,$

$B =$ "抽出的产品为次品",

$$P(A_1) = 0.15, P(B|A_1) = 0.05, \cdots,$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.0315。$$

若该厂规定,出了次品要追究有关流水线的经济责任。现在出厂产品中任取一件,结果为次品,但该件产品是哪一条流水线生产的标志已经脱落,问四条流水线各应承担多大责任?

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}$$

……

$$P(A_1|B)=23.8\%,P(A_2|B)=25.4\%,$$

$$P(A_3|B)=28.6\%,P(A_4|B)=22.2\%。$$

贝叶斯公式：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω的一个分割，

B为任一事件，且$P(B) > 0$，则

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, k = 1, 2, \cdots, n。$$

$P(A_i)$称为先验概率，$P(A_k | B)$称为后验概率。

证明:

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)},$$

$k=1,2,\cdots,n$。

例12: 在电报通讯中, 发送端发出的是由“。”和“—”两种信号组成的序列, 而由于随机干扰的存在, 接收端收到的是由“。”,“不清”和“—”三种信号组成的序列。信号“。”,“不清”和“—”分别简记为0, x,1。假设已知发送0和1的概率分别为0.6和0.4; 在发出0的条件下, 收到0, x和1的条件概率分别为0.7, 0.2和0.1; 在发出1的条件下, 收到0, x和1的条件概率分别为0, 0.1和0.9。试分别计算在接收信号为x（不清）的条件下, 原发出信号为0和1的条件概率。

解: $A_i =$ "发出的信号为i", $i = 0,1,$

$B_j =$ "接收到的信号为j", $j = 0, x, 1,$

$$P(A_0 | B_x) = \frac{P(A_0)P(B_x | A_0)}{P(A_0)P(B_x | A_0) + P(A_1)P(B_x | A_1)}$$

$=0.75,$

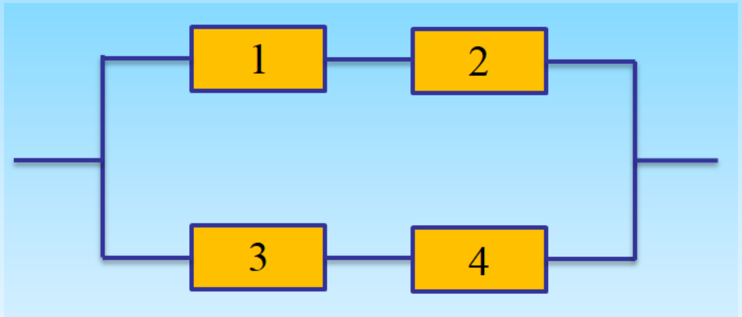
$P(A_0 | B_x) = 0.75, P(A_1 | B_x) = 0.25$。

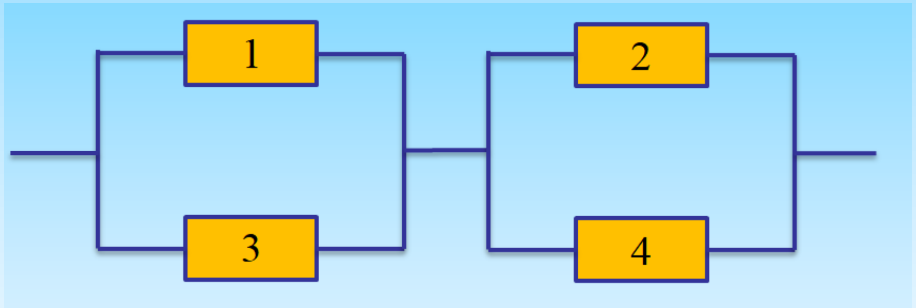
《概率论》试卷

2016－2017学年第1学期

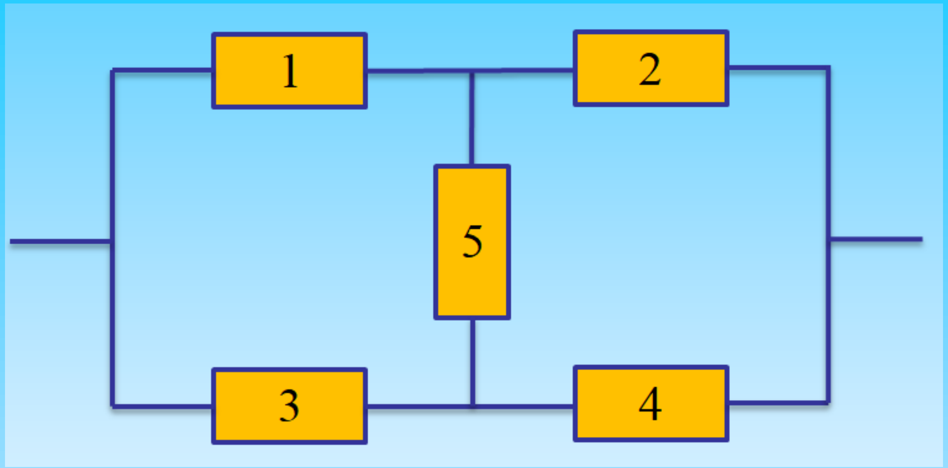
3.(5′×2=10′)

(1)由4个元件组成两个系统,如下图。设每个元件的可靠性均为0.9,且各元件是否正常工作相互独立,分别求两个系统的可靠性大小;





(2)若5个元件组成如下系统,每个元件的可靠性均为0.9,各元件相互独立工作,求该系统的可靠性。



解:

记A_i为第i个元件能正常工作, $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

$A_1, \cdots, A_5$相互独立。

(1) 系统1: $p_1 = P(A_1A_2 \cup A_3A_4)$

$$= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$=0.9636,$$

系统2: $p_2=P((A_1\cup A_3)(A_2\cup A_4))$

$$=P(A_1\cup A_3)P(A_2\cup A_4)$$

$$=\left(1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_3)\right)\cdot\left(1-P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_4)\right)=0.9801,$$

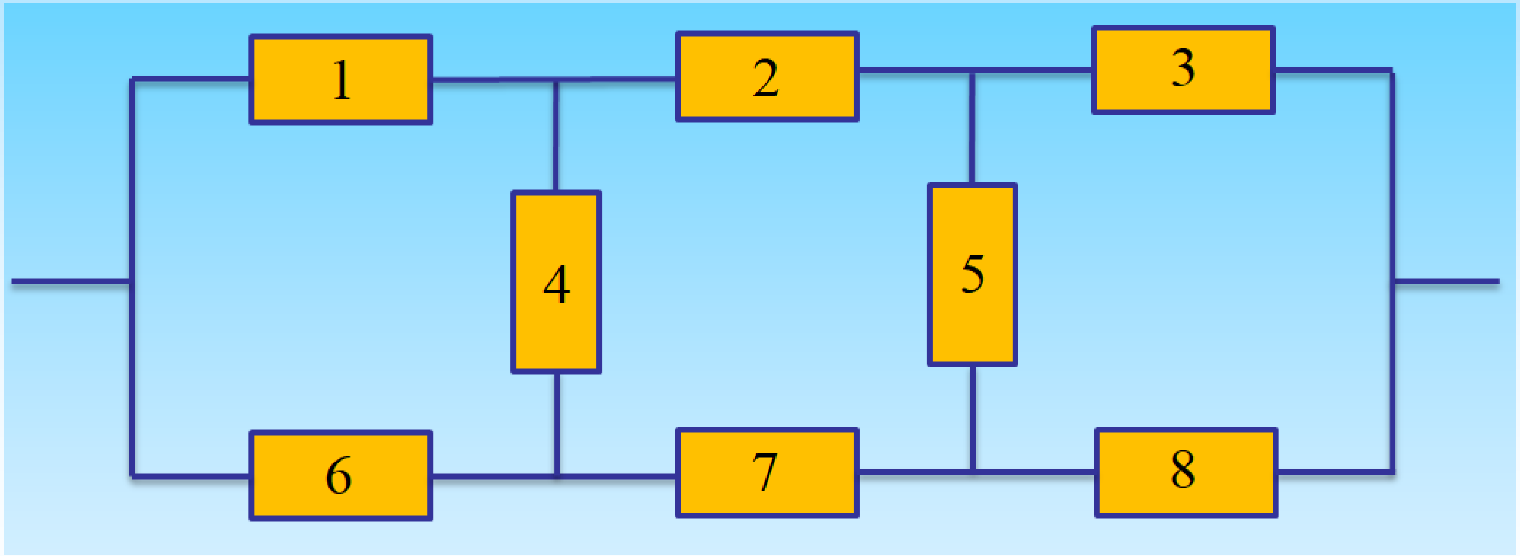
(2)记B为系统正常工作的事件,由全概率公式,

$$P(B)=P(A_5)P(B\mid A_5)+P(\bar{A}_5)P(B\mid\bar{A}_5)$$

$$=0.9\times0.9801+0.1\times0.9636=0.97848。$$

推广：

若8个元件组成如下系统，每个元件的可靠性均为0.9，各元件相互独立工作，求该系统的可靠性。



解:

$A_k=$"第k个元件通", $P(A_k)=0.9, k=1,2,\cdots,8,$

$A_1, A_2, \cdots, A_8$独立,

$B=$"整个系统正常工作",

$C_1=$"元件4和5通" $=A_4A_5,$

$C_2=$"元件4和5都不通" $=\bar{A}_4\bar{A}_5,$

$C_3=$"元件4通和5不通" $=A_4\bar{A}_5,$

$C_4 =$"元件4不通和5通" $=\bar{A}_4 A_5$,

C_1, C_2, C_3, C_4是一个分割,

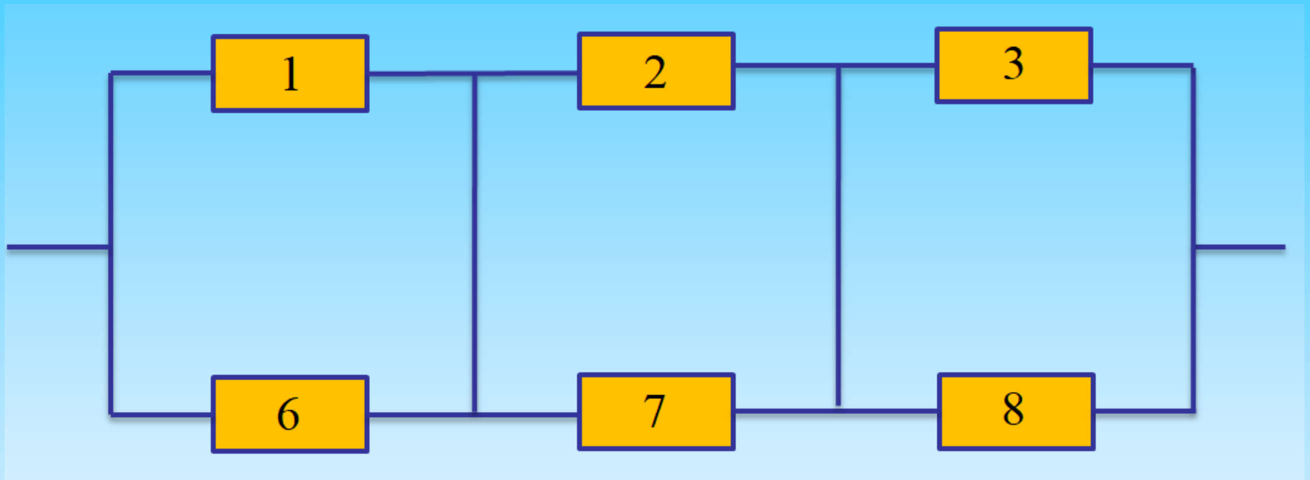
$$P(C_1) = P(A_4 A_5) = P(A_4)P(A_5) = 0.81,$$

$$P(C_2) = P(\bar{A}_4 \bar{A}_5) = P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5) = 0.01,$$

$$P(C_3) = P(A_4 \bar{A}_5) = P(A_4)P(\bar{A}_5) = 0.09,$$

$$P(C_4) = P(\bar{A}_4 A_5) = P(\bar{A}_4)P(A_5) = 0.09,$$

当事件C_1发生时，系统为

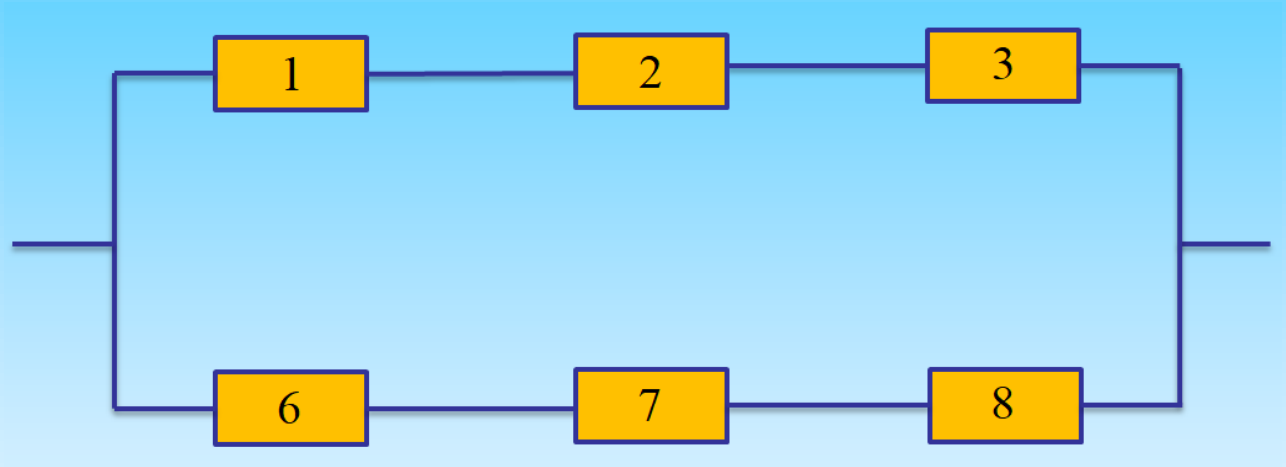


此时，$P(B|C_1) = P((A_1 \cup A_6)(A_2 \cup A_7)(A_3 \cup A_8))$

$$= P(A_1 \cup A_6)P(A_2 \cup A_7)P(A_3 \cup A_8)$$

$$= (1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_6))^3 = 0.99^3 = 0.9703,$$

当事件C_2发生时,系统为



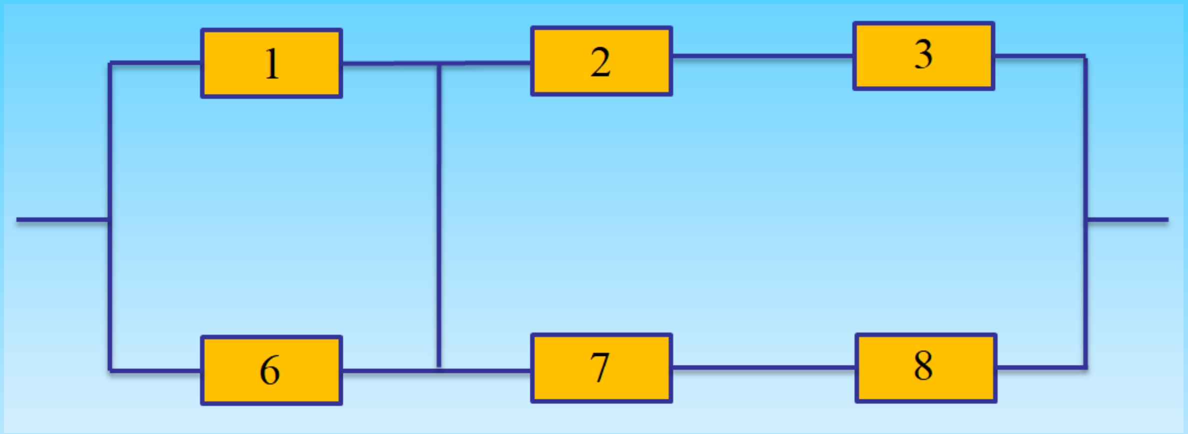
$$此时, P(B|C_2) = P(A_1A_2A_3 \cup A_6A_7A_8)$$

$$= P(A_1A_2A_3) + P(A_6A_7A_8) - P(A_1A_2A_3A_6A_7A_8)$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_6)P(A_7)P(A_8) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_6)P(A_7)P(A_8)$$

$$= 0.729 + 0.729 - 0.5314 = 0.9266,$$

当事件C_3发生时,系统为



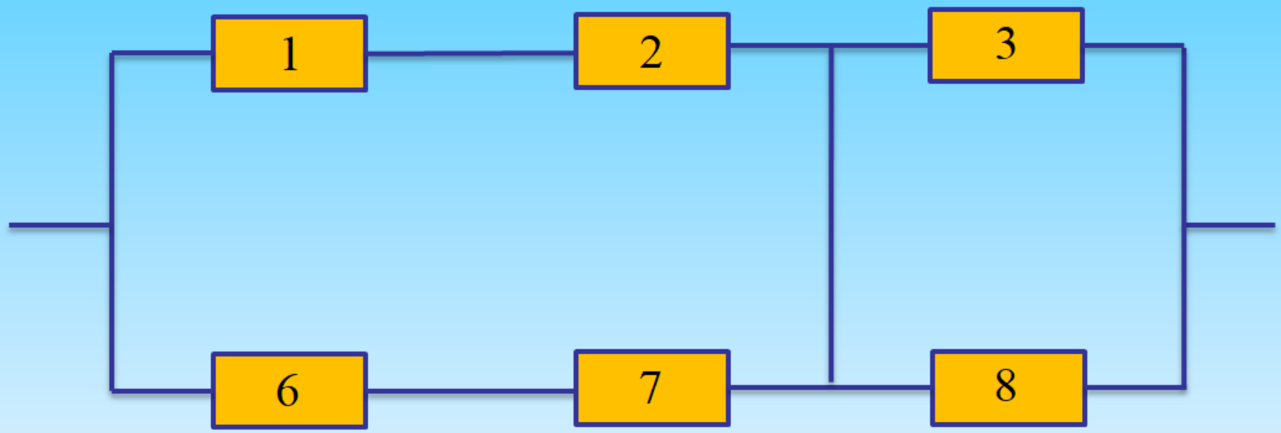
$$此时, P(B|C_3) = P((A_1 \cup A_6)(A_2A_3 \cup A_7A_8))$$

$$= P(A_1 \cup A_6)P(A_2A_3 \cup A_7A_8)$$

$$= (1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_6))(P(A_2A_3) + P(A_7A_8) - P(A_2A_3A_7A_8))$$

$$= 0.9639,$$

当事件C_4发生时，系统为



$$\text{此时}, P(B|C_4) = P((A_1A_2 \cup A_6A_7)(A_3 \cup A_8))$$

$$= P(B|C_3) = 0.9639,$$

最后,由全概率公式知,

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(C_i)P(B|C_i)$$

$$=0.81\times0.9703+0.01\times0.9266+0.09\times0.9639+0.09\times0.9639$$

$$=0.9687$$ 。

概率论试卷

2018-2019学年第1学期

2019年1月3日

四.计算题(12分)

1.甲袋中有2个白球和4个黑球,乙袋中有6个白球和2个黑球。现从甲乙两袋中各任取一球,再从取出的两球中任取一球,试求:（1）该球是白球的概率是多少?（2）如果发现该球是白球,问原先从两个袋子中取出的两球是同颜色球的概率是多少?

解:　　(1)

A_1:任取一球,来自甲袋,

A_2:任取一球,来自乙袋,

B:两球中任取一球,该球为白球,

由全概率公式知,

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{8}=\frac{13}{24};$$

(2) C_1 :甲袋中任取一球，该球为白球,

C_2 :乙袋中任取一球，该球为白球,

C_1和C_2独立， $C_1C_2 \subset B$,

$$P(C_1C_2 \mid B) = \frac{P(C_1C_2B)}{P(B)} = \frac{P(C_1C_2)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(C_1)P(C_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}}{\frac{13}{24}} = \frac{6}{13}\text{。}$$

考试标准答案:

设A_i =“从甲袋取出i个白球”,$i=0,1,$

B_j =“从乙袋取出j个白球”,$j=0,1,$

C =“该球是白球”,

A_i和B_j独立,

(1) $$P(C)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}P(A_iB_j)P(C\,|\,A_iB_j)$$

$$=\frac{4}{8}\times\frac{2}{8}\times 0+\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}\times 1=\frac{13}{24},$$

(2)

$$P\left((A_0B_0+A_1B_1)\middle|C\right)=P\left(A_1B_1\middle|C\right)=\frac{\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}\times 1}{\frac{13}{24}}=\frac{6}{13}。$$

注:如果不习惯,可以这样设,

$A=$“从甲袋取出白球”,$\bar{A}=$“从甲袋取出黑球”,

$B=$“从乙袋取出白球”,$\bar{B}=$“从乙袋取出黑球”,

$AB,\bar{A}B,A\bar{B},\bar{A}\bar{B}$也是一个分割。

2018年10月27日期中考试

假设有两箱同种零件:第一箱内装50 件,其中10件一等品;第二箱内装30件,其中18件一等品。现从两箱中随机挑出一箱,然后从该箱中先后随机取出两个零件(取出的零件均不放回),试求:(1) 先取出的零件是一等品的概率;(2) 在先取的零件是一等品的条件下,第二次取出的零件仍然是一等品的概率。

解： 设$A_i =$“第i次取出的零件是一等品”$, i=1,2,$

$B_i =$“取到第i箱”$, i=1,2, B_1$和B_2是一个分割，

则

$$(1)\ P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5};$$

$$(2)\ P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{P(A_1A_2B_1+A_1A_2B_2)}{P(A_1)}$$

$$=\frac{P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)}{P(A_1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{P_{10}^2}{P_{50}^2}+\frac{P_{18}^2}{P_{30}^2}\right]}{\frac{2}{5}}=\frac{\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)}{4}\approx 0.4856\text{。}$$

注： 错误解法

设事件C为先取得的零件是一等品的条件下,再取出的零件仍是一等品,则

$$P(C)=P(B_1)P(C|B_1)+P(B_2)P(C|B_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{17}{29}=\frac{547}{1421}\approx 0.3849\text{。}$$

其实他意思就是$C=A_2|A_1$,只是心虚,写成C。条件概率$P(\cdot|A_1)$是一个整体,可以记成$P_{A_1}(\cdot)=P(\cdot|A_1)$,单独拿出来$A_2|A_1$没有意义,当然不能表示事件。

杨勇制作

第三节 贝努利概型

定义:有一随机试验,观察事件A发生与否,

$$P(A) \hat{=} p(0 < p < 1), P(\bar{A}) = 1 - p \hat{=} q,$$

将此试验独立地重复进行n次,则称此模型为n重贝努利概型。

求在n次独立试验中事件A发生k次的概率。

$B_k =$“n次独立试验中事件A发生k次”,

$n = 5,$

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}
(A,A,A,A,A)_1,(A,A,A,A,\bar{A})_2,(A,A,A,\bar{A},A)_3,\\
(A,A,\bar{A},A,A)_4,(A,\bar{A},A,A,A)_5,(\bar{A},A,A,A,A)_6,\\
(A,A,A,\bar{A},\bar{A})_7,(A,A,\bar{A},A,\bar{A})_8,(A,\bar{A},A,A,\bar{A})_9,\\
(\bar{A},A,A,A,\bar{A})_{10},(A,A,\bar{A},\bar{A},A)_{11},(A,\bar{A},A,\bar{A},A)_{12},\\
(\bar{A},A,A,\bar{A},A)_{13},(A,\bar{A},\bar{A},A,A)_{14},(\bar{A},A,\bar{A},A,A)_{15},\\
(\bar{A},\bar{A},A,A,A)_{16},(A,A,\bar{A},\bar{A},\bar{A})_{17},(A,\bar{A},A,\bar{A},\bar{A})_{18},\\
(\bar{A},A,A,\bar{A},\bar{A})_{19},(A,\bar{A},\bar{A},A,\bar{A})_{20},(\bar{A},A,\bar{A},A,\bar{A})_{21},\\
(\bar{A},\bar{A},A,A,\bar{A})_{22},(A,\bar{A},\bar{A},\bar{A},A)_{23},(\bar{A},A,\bar{A},\bar{A},A)_{24},\\
(\bar{A},\bar{A},A,\bar{A},A)_{25},(\bar{A},\bar{A},\bar{A},A,A)_{26},(A,\bar{A},\bar{A},\bar{A},\bar{A})_{27},\\
(\bar{A},A,\bar{A},\bar{A},\bar{A})_{28},(\bar{A},\bar{A},A,\bar{A},\bar{A})_{29},(\bar{A},\bar{A},\bar{A},A,\bar{A})_{30},\\
(\bar{A},\bar{A},\bar{A},\bar{A},A)_{31},(\bar{A},\bar{A},\bar{A},\bar{A},\bar{A})_{32}
\end{array}\right\}$$

$A_i =$ "第i次试验中A发生",

$P(A_i) = p, i = 1, 2, 3, 4, 5,$

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5独立,

$$P(\{\omega_8\}) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 \bar{A}_5)$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)P(A_4)P(\bar{A}_5)$$

$$= p^3 q^2,$$

样本空间中的32个样本点依次记为$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{32}$

$$B_0 = \{\omega_{32}\}$$

$$B_1 = \{\omega_{27}, \omega_{28}, \omega_{29}, \omega_{30}, \omega_{31}\}$$

$$B_2 = \{\omega_{17}, \omega_{18}, \cdots, \omega_{26}\}$$

$$B_3 = \{\omega_7, \omega_8, \cdots, \omega_{16}\}$$

$$B_4 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$$B_5 = \{\omega_1\}$$

$B_0, B_1, \cdots, B_5$两两互不相容,

$$B_3 = \{\omega_7, \omega_8, \cdots, \omega_{16}\}$$

$$= \{\omega_7\} + \{\omega_8\} + \cdots + \{\omega_{16}\},$$

$$P(B_3) = P(\{\omega_7\}) + P(\{\omega_8\}) + \cdots + P(\{\omega_{16}\})$$

$$= C_5^3 p^3 q^2,$$

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i = A\text{或}\bar{A}, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

$$A_i = \text{“第}i\text{次试验中}A\text{发生”},$$

$$P(A_i) = p, i = 1, 2, \cdots, n, A_1, A_2, \cdots, A_n\text{独立},$$

$$\forall \omega \in B_k,$$

$$P(\{\omega\}) = P(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i} \cdot \bigcap_{i \notin \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}} \bar{A}_i) = p^k q^{n-k},$$

$$P(B_k) = P\left(\sum_{\omega \in B_k} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in B_k} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in B_k} p^k q^{n-k}$$

$$= p^k q^{n-k} \sum_{\omega \in B_k} 1 = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, n = 0, 1, \cdots, n,$$

$B_0, B_1, \cdots, B_n$两两互不相容。

$$C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \cdots + C_n^n p^n q^0$$

$$= (q + p)^n = 1,$$

$$0 \le P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k} \le 1, k = 0, 1, \cdots, n。$$

杨勇制作

顺便问一个问题:

求在n次独立试验中事件$\bar{A}$发生k次的概率。

$B_k=$“n次独立试验中事件$\bar{A}$发生k次”,

$$P(B_k)=C_n^k q^k p^{n-k}, n=0,1,\cdots,n。$$

例13: 某车间有10 台同类型的机床, 每台机床配备的电动机功率为10 千瓦, 已知每台机床工作时, 平均每小时实际开动12分钟, 且开动与否是相互独立。现因当地电力供应紧张, 供电部门经研究只提供50 千瓦的电力给这10 台机床, 问这10 台机床能够正常工作的概率。

解:

$$A = \text{“10台机床能够正常工作”},$$

$$B_k = \text{“10台机床中有}k\text{台机床开动”},$$

$$k = 0, 1, \cdots, 10,$$

$$P(B_k) = C_{10}^{k} \left(\frac{1}{5}\right)^{k} \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}, k = 0, 1, \cdots, 10,$$

$$P(A) = P(\sum_{k=0}^{5} B_k) = \sum_{k=0}^{5} P(B_k) = \sum_{k=0}^{5} C_{10}^{k} \left(\frac{1}{5}\right)^{k} \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$$

$$\approx 0.994。$$

例14: P29例2－17

甲、乙两个乒乓球运动员进行乒乓球单打比赛。如果每局甲胜的概率为0.6,乙胜的概率为0.4,比赛可以采用三局二胜制或五局三胜制,问在哪一种比赛制度下甲获胜的可能性较大?

解:我们必须假定各局比赛结果相互独立,

(1) 采用三局二胜制

$A_1 =$ "甲2:0胜", $A_2 =$ "甲2:1胜",

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2),$$

$$P(A_1) = C_2^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^0,$$

$$P(A_2) = C_3^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^1, \qquad \times$$

$B =$ “前二局1:1”, $C =$ “第三局甲胜”,

B, C相互独立,

$$P(A_2) = P(BC) = P(B)P(C),$$

$$P(B) = C_2^1 \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^1, \qquad P(C) = 0.6。$$

巴拿赫火柴盒问题

某人随身带有两盒火柴,吸烟时从任一盒中取一根火柴,经过若干时间后,发现一盒火柴已经用完。如果最初两个盒子中各有n根火柴,求这时另一盒中还剩r根的概率。

解：　　A表示取到甲盒，则$\bar{A}$表示取到乙盒，

$$P(A)=P(\bar{A})=0.5,$$

B表示一盒已经用完，另一盒中还剩r根火柴。

$P(B|A)$表示取到甲盒已经用完，乙盒还剩r根火柴，

即第$2n-r+1$次必然取到甲盒，在此之前一定已经取过$2n-r$次，其中恰好有n次取于甲盒，有$n-r$次取于乙盒，则

$$P(B|A)=C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}=C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r},$$

同理,

$$P(B|\bar{A})=C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r},$$

全概率公式:

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}+\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}=C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}。$$

习题集P55, 填空题10

在每次试验中, 事件A发生的概率为$p(0<p<1)$, 直到第n次时, 事件A才发生$k(1\le k\le n)$次的概率。

解： $B=$"前$n-1$次试验事件A发生$k-1$次",

$C=$"第n次试验事件A发生",

显然B, C独立,

前$n-1$次试验事件A出现$k-1$次

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n-1}\quad A$$

$$P(BC)=P(B)P(C)=\left(C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}\right)p$$

$$=C_{n-1}^{k-1}p^{k}(1-p)^{n-k}。$$

31页习题10

投掷硬币n回,第一回出正面的概率为c,第二回后每次出现与前一次相同表面的概率为 p,求第n回出正面的概率,并讨论$n\to\infty$时的情况。

解: $A_n=$“第n次出现正面”,

$$P(A_n)\triangleq p_n,$$

$$p_n = P(A_n) = P(A_{n-1})P(A_n | A_{n-1}) + P(\bar{A}_{n-1})P(A_n | \bar{A}_{n-1})$$

$$= p_{n-1} \cdot p + (1 - p_{n-1}) \cdot (1 - p)$$

$$p_n = (2p-1)p_{n-1} + (1-p)\,,\ p_1 = c\,,$$

当$p = 1$时$,\ p_n = p_{n-1},\ p_n = c,$

当$0 \le p < 1$时$,$

$$p_{n-1} = (2p-1)p_{n-2} + (1-p)\,,$$

$$p_n = (2p-1)((2p-1)p_{n-2} + (1-p)) + (1-p),$$

$$p_n = (2p-1)^2 p_{n-2} + (1-p)(2p-1) + (1-p),$$

$$p_n = (2p-1)^{n-1} p_1 + (1-p)(2p-1)^{n-2} + \cdots + (1-p)(2p-1) + (1-p),$$

$$p_n = c(2p-1)^{n-1} + (1-p)\left(\frac{1-(2p-1)^{n-1}}{1-(2p-1)}\right),$$

$$p_n = c(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(1-(2p-1)^{n-1}\right),$$

$$p_n = \frac{1}{2} + \left(c - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1},$$

$p = 0, 0 < p < 1,$ 讨论。