

9.2 二重积分的计算

9.2.1 利用直角坐标计算二重积分

设 D 是 xOy 平面上的一个有界闭区域, 若 D 可用不等式组

$$a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

来表示, 其中 $g_1(x), g_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则称 D 为 **x 型区域**.

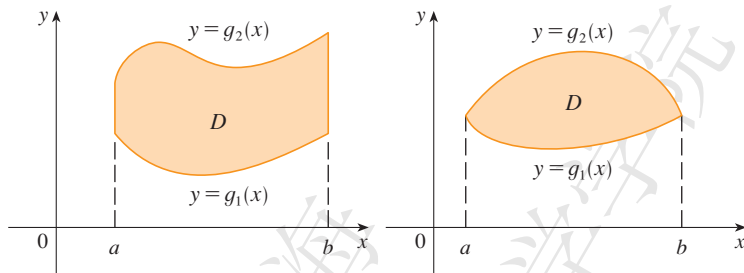


图 9.1: x 型区域

若 D 可用不等式组

$$c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

来表示, 其中 $h_1(y), h_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 则称 D 为 **y 型区域**.

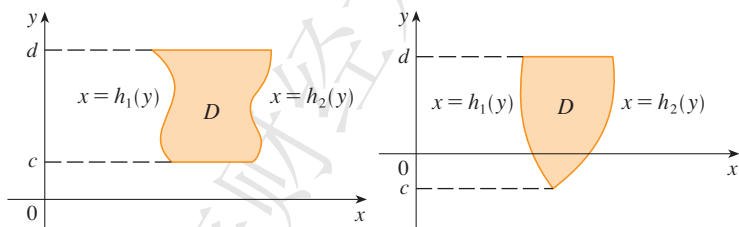


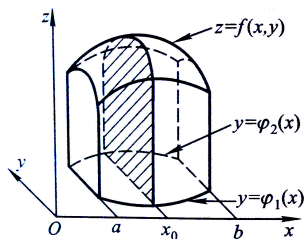
图 9.2: y 型区域

从二重积分的几何意义来建立二重积分的计算公式

设 D 是 x 型区域, 根据二重积分的几何意义, 当 $f(x, y) \geq 0$ 时, $\iint_D f(x, y) dx dy$ 等于以 D 为底、以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

现按“平行截面面积为已知的立体体积”的计算方法求曲顶柱体的体积. 在区间 $[a, b]$ 上任意取定一点 x_0 , 过点 $(x_0, 0, 0)$ 作平行于 yOz 面的平面. 此平面截曲顶柱体得一截面, 该截面是一个以区间 $\varphi_1(x_0) \leq y \leq \varphi_2(x_0)$ 为底, $z = f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形, 其面积为

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$



一般地, 对于 $x \in [a, b]$, 有

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

从而曲顶柱体的体积 V 为

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

故有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

上式右端的积分称为先对 y 后对 x 的二次积分(或累次积分), 此二次积分常记作

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

于是二重积分化为先对 y 后对 x 的二次积分的计算公式为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad (9.2.1)$$

其中积分区域 D 用不等式组 $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ 表示.

若积分区域是 y 型区域, 则二重积分化为先对 x 后对 y 的二次积分的计算公式为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (9.2.2)$$

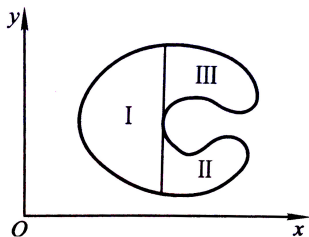
其中积分区域 D 用不等式组 $c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$ 表示.

当被积函数 $f(x, y)$ 在 D 上变号时, 由于

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(|f(x, y)| + f(x, y)) - \frac{1}{2}(|f(x, y)| - f(x, y)),$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D \frac{1}{2}(|f(x, y)| + f(x, y)) dx dy \\ &\quad - \iint_D \frac{1}{2}(|f(x, y)| - f(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$



因此上面讨论的累次积分法仍然有效.

若积分区域既不是 x 型的, 又不是 y 型的, 这时通常可以把 D 分成几部分, 使每个部分是 x 型区域或 y 型区域, 从而在每个小区域上的二重积分都能利用(9.2.1)或(9.2.2)式计算, 再利用重积分的区域可加性, 将这些小区域上的二重积分的计算结果相加, 就可得到整个区域 D 上的二重积分.

例 2.1. 化下列积分为两个二次积分:

- (1) $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$;
- (2) $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$;
- (3) $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$.

解:

- (1) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$
- (2) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx.$
- (3) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$

例 2.2. 交换下列积分次序:

- (1) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$
- (2) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x, y) dy.$

解:

- (1) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx.$
- (2) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx.$

例 2.3. 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = 1$, $x = 2$ 及 $y = x$ 所围成的闭区域.

解:

$$\iint_D xy dx dy = \int_1^2 dx \int_1^x xy dy = \int_1^2 \frac{1}{2} (x^3 - x) dx = \frac{9}{8},$$

或

$$\iint_D xy dx dy = \int_1^2 dy \int_y^2 xy dx = \int_1^2 \frac{1}{2} (4y - y^3) dy = \frac{9}{8}.$$

例 2.4. 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由 $x=2, y=x$ 及 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解:

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

例 2.5. 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=x-1$ 和抛物线 $y^2=2x+6$ 所围成的闭区域.

解:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_{-3}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy dy + \int_{-1}^5 dx \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy dy \\ &= \int_{-1}^5 \left(-\frac{x^3}{2} + 2x^2 + \frac{5}{2}x \right) dx = 36, \end{aligned}$$

或

$$\iint_D xy dx dy = \int_{-2}^4 dy \int_{\frac{1}{2}(y^2-6)}^{y+1} xy dx = \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{8} + 2y^3 + y^2 - 4y \right) dy = 36.$$

例 2.6. 计算 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

解: 由于函数 $\frac{\sin y}{y}$ 关于 y 的原函数不是初等函数, 故应先对 x 进行积分, 得

$$\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 y \sin y dy = \sin 1 - \cos 1.$$

例 2.7. 计算 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=1, x=0$ 所围成的闭区域.

解: 由于函数 e^{-y^2} 关于 y 的原函数不是初等函数, 故应先对 x 进行积分, 得

$$\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e}.$$

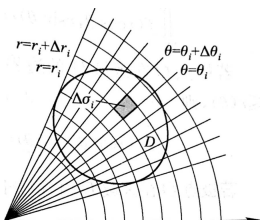
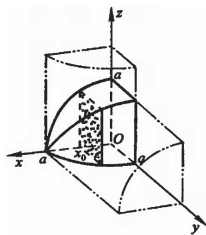
例 2.8. 求两个底面半径都为 a 的直交圆柱所围立体的体积 V .

解: 设两个圆柱方程为

$$x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2.$$

第一象限部分的立体是以 $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ 为曲顶, 以四分之一圆域

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$$



为底的曲顶柱体, 所以

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \, dy = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} \, dy \\ &= 8 \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx = \frac{16}{3} a^3. \end{aligned}$$

9.2.2 利用极坐标计算二重积分

以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 假定从极点 O 出发的射线与区域 D 的边界至多交于两点, 我们用以极点为圆心, r 为半径的一簇同心圆和从极点出发与极轴的夹角为 θ 的一簇射线 $\theta = \text{常数}$, 将区域 D 分成 n 个小闭区域 σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 第 i 个小闭区域 σ_i 的面积

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta\theta_i - \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta_i = \frac{r_i + (r_i + \Delta r_i)}{2} \Delta r_i \Delta\theta_i = \bar{r}_i \Delta r_i \Delta\theta_i,$$

其中 \bar{r}_i 表示小闭区域 σ_i 边界所在的两个相邻圆弧 $r = r_i$ 和 $r = r_i + \Delta r_i$ 的半径的平均值. 在小闭区域 σ_i 上取 $r = \bar{r}_i$ 上的一点 $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$. 从而有

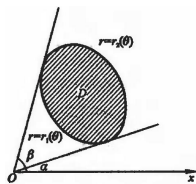
$$\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i \cos \bar{\theta}_i, \bar{r}_i \sin \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta r_i \Delta\theta_i,$$

其中 λ 是所有小区域直径的最大值. 所以极坐标系下的二重积分的表达式为

$$\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.$$

从上面的推导可知极坐标下的面积微元为

$$d\sigma = r \, dr \, d\theta.$$



极坐标系中的二重积分化为二次积分来计算

设积分区域 D 可以用不等式组

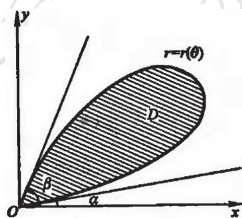
$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$$

来表示, 其中 $r_1(\theta), r_2(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, $0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$, 且 $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, 则极坐标系中的二重积分化为二次积分的公式

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr.$$

进一步可得极坐标中区域 D 的面积计算公式

$$\sigma = \iint_D r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \, dr.$$

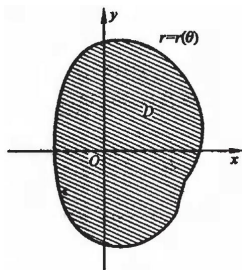


若极点 O 在积分区域 D 的边界上, 积分区域 D 是曲边扇形, 即

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \quad 0 \leq r \leq r(\theta),$$

则

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr.$$



若极点 O 在积分区域 D 内, 即

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq r(\theta),$$

则

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr.$$

例 2.9. 将下列积分化为极坐标下的积分

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) \, dy$;

(2) $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$;

(3) $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$.

解:

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr$.

(2) $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr$.

(3) $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr$.

例 2.10. 计算 $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$ 所围成的第一象限部分.

解: 在极坐标下, D 可表示为

$$0 \leq r \leq 2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

被积函数

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

于是

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^3 \, dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{3}{4} \pi.$$

例 2.11. 计算 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的圆环形区域.

解: 在极坐标下, D 可表示为

$$1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

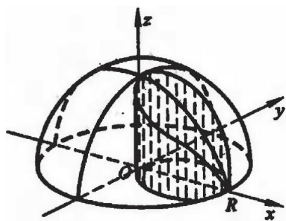
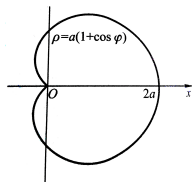
被积函数

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

于是

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \, dr = \int_0^{2\pi} \frac{7}{3} \, d\theta = \frac{14}{3} \pi.$$

例 2.12. 求心形线 $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$) 所围成区域的面积 σ .



解: 利用图形关于 x 轴对称的性质有

$$\begin{aligned}\sigma &= \iint_D \rho d\rho d\varphi = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho \\ &= a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi \\ &= a^2 \int_0^\pi \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.\end{aligned}$$

例 2.13. 计算 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 其中 D 为圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$.

解: 在极坐标下, D 可表示为

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

所以

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

例 2.14. 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 所割下部分的体积 (称为维维安尼 (Viviani) 体).

解: 由对称性, 只要求出在第一象限内的部分体积后乘以 4 即得所求立体的体积. 在第一象限内的立体是一个曲顶柱体, 其底为 xy 平面内由 $y \geq 0$ 和 $x^2 + y^2 \leq Rx$ 所确定的区域, 曲顶的方程为

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

所以

$$V = 4 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) | y \geq 0, x^2 + y^2 \leq Rx\}$. 作极坐标变换得

$$\begin{aligned}V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

9.2.3 二重积分的换元法

定理 2.1. 设 $f(x, y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续, 变换

$$T: x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

将 uOv 平面的闭区域 D' 一对一地映成 xOy 平面上的闭区域 D , 若函数 $x(u, v), y(u, v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数, 且在 D' 上的雅可比行列式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in D',$$

则

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv.$$

极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 的雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

所以

$$\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.$$

例 2.15. 求 $\iint_D \frac{y}{x+y} e^{(x+y)^2} \, d\sigma$, 其中 D 是由 $x+y=1, x=0$ 和 $y=0$ 所围成.

解: 令 $u = x+y, v = y$. 为此作变换 $T: x = u-v, y = v$, 则

$$x+y=1 \Rightarrow u=1, \quad x=0 \Rightarrow u-v=0, \quad y=0 \Rightarrow v=0.$$

雅可比行列式

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

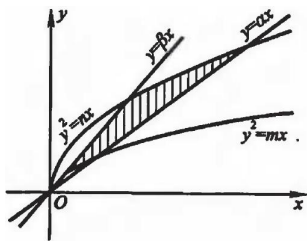
于是

$$\iint_D \frac{y}{x+y} e^{(x+y)^2} \, d\sigma = \int_0^1 du \int_0^u \frac{v}{u} e^{u^2} \, dv = \int_0^1 \frac{u}{2} e^{u^2} \, du = \frac{e-1}{4}.$$

例 2.16. 求 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dx \, dy$, 其中 D 是由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围区域.

解: 为了简化被积函数, 令 $u = x-y, v = x+y$. 作变换 $T: x = \frac{1}{2}(u+v), y = \frac{1}{2}(v-u)$, 则

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$



在变换 T 作用下, 区域 D 的原象记为 D' . 于是

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy &= \frac{1}{2} \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v(e - e^{-1}) dv = \frac{e - e^{-1}}{4}.\end{aligned}$$

例 2.17. 求抛物线 $y^2 = mx, y^2 = nx$ 和直线 $y = \alpha x, y = \beta x$ 所围区域 D 的面积 ($0 < m < n, 0 < \alpha < \beta$).

解: D 的面积为 $\iint_D dx dy$. 为了简化积分区域, 作变换

$$x = \frac{u}{v^2}, \quad y = \frac{u}{v}.$$

它把 xOy 平面上的区域 D 对应到 uOv 平面上的矩形区域 $D' = [m, n] \times [\alpha, \beta]$. 由于

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v^2} & -\frac{2u}{v^3} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{v^4} > 0, \quad (u, v) \in D',$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D dx dy &= \iint_{D'} \frac{u}{v^4} du dv = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{v^4} dv \int_m^n u du \\ &= \frac{(n^2 - m^2)(\beta^3 - \alpha^3)}{6\alpha^3\beta^3}.\end{aligned}$$

例 2.18. 求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

的体积.

解: 鉴于对称性, 只考虑第一象限部分的立体, 这一部分立体是以 $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ 为曲顶,

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, 0 \leq x \leq a\}$$

为底的曲顶柱体, 所以

$$V = 8 \iint_D c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

作变换 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 则

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 c\sqrt{1 - r^2} abr dr = \frac{4\pi}{3} abc.$$

9.2.4 思考与练习

练习 240. 设 $f(x, y)$ 连续且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) \, du \, dv$, 其中 D 是由 $y = 0, y = x^2, x = 1$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$.

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{8}$$

练习 241. 二重积分 $\iint_D \frac{1}{x^2 y^2} \, dx \, dy$ 的值为 (), 其中 D 是矩形区域 $\{(x, y) : |x| \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$.

(A) 0

(B) 2

(C) -2

(D) ∞

D

练习 242. 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 且 $\int_0^1 f(x) \, dx = A$, 求 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) \, dy$.

$$I = \frac{1}{2}A^2. \text{ 令 } F(x) = \int_x^1 f(y) \, dy.$$

练习 243. 设 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, 求 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma$.

利用对称性,

$$I = \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma = \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \, d\sigma.$$

故

$$2I = \iint_D \frac{(a+b)(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)})}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma = (a+b)\pi.$$

所以 $I = \frac{a+b}{2}\pi$.

练习 244. 计算二重积分

$$I = \iint_D |y - x^2| \, dx \, dy,$$

其中 $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

$$I = \frac{11}{15}.$$

练习 245. 计算二重积分

$$I = \iint_D \max\{xy, 1\} \, dx \, dy,$$

其中 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

$$I = \frac{19}{4} + \ln 2.$$

练习 246. 将极坐标下的二次积分改写成直角坐标系下的二次积分:

$$(1) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr$$

$$(2) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{2 \cos \theta}^2 f(r^2) r \, dr$$

$$(1) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) \, dy$$

$$(2) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$$

练习 247. 计算二重积分 $\iint_D \left(\tan(x^2 y^3) + \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} \right) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$\tan(x^2 y^3)$ 关于 y 为奇函数, 积分区域 D 关于 x 轴对称, 所以 $\iint_D \tan(x^2 y^3) dx dy = 0$.

$$\text{原式} = \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr = \frac{1}{2} \pi (\pi - 2).$$

练习 248. 计算二重积分 $\iint_D (\sqrt{x^2+y^2} + y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, (x+1)^2 + y^2 \geq 1\}$.

利用对称性, $\iint_D y d\sigma = 0$.

$$\text{原式} = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{-2\cos\theta}^2 r^2 dr + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 dr = \frac{16}{9} (3\pi - 2).$$

练习 249. 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = 2y$, $y = x$, y 轴围成的.

$$0 \leq r \leq 2 \sin \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot r dr = \frac{7}{12}.$$