10.7 高斯公式、通量与散度

10.7.1 高斯公式

引例

计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧, $\Omega = \{(x,y,z)|0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$.

用此公式计算复杂曲面上的第二类曲面积分还是相当烦琐的.

高斯公式

定理 7.1. 设空间有界闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧. 上式称为高斯 (Gauss) 公式.

根据两类曲面积分的联系, 高斯公式也可写作

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的指向外侧的法向量的方向余弦.

用第二类曲面积分计算空间区域的体积公式

若在高斯公式中取 $P = x, Q = y, R = z$, 则可以得到应用第二类曲面积分计算空间区域 Ω 的体积公式

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

例 7.1. 计算

$$I = \oiint_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 的外侧.

解: 由高斯公式知,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-z) + \frac{\partial}{\partial z}(z+3x)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{\Omega} 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\pi R^3. \end{aligned}$$

例 7.2. 计算

$$\oiint_{\Sigma} x(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解: 由高斯公式知,

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x(y-z))+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z\\
&= -\frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

例 7.3. 计算

$$\oiint_{\Sigma} y(x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y^2+xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是一顶点在坐标原点、侧面平行于坐标面且位于第一象限的边长为 a 的正立方体表面, 并取外侧.

解: 由高斯公式知,

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y(x-z))+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(y^2+xz)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \iiint_{\Omega}(y+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(y+x)\,\mathrm{d}x\\
&=a\int_0^a\left(ay+\frac{1}{2}a^2\right)\mathrm{d}y=a^4.
\end{aligned}
$$

例 7.4. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧, $\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c\}$.

解: 由高斯公式得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{x}(x^2)+\frac{\partial}{y}(y^2)+\frac{\partial}{z}(z^2)\right]\mathrm{d}V\\
&=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}V\\
&=2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^c(x+y+z)\,\mathrm{d}z=(a+b+c)abc.
\end{aligned}
$$

例 7.5. 设函数 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数, 证明

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 是闭区域 Ω 的整个边界曲面, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 $v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数, 符号 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为Laplace 算子. 这个公式叫做格林第一公式.

例 7.6. 设 Ω 是三维空间的区域, Ω 内任何封闭曲面所围成的区域都属于 Ω, 此时称 Ω 为空间二维单连通区域. 又设函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续的偏导数. Σ 表示 Ω 内任一不自交的光滑封闭曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的外法线方向. 试证明: 对 Ω 内任意曲面 Σ 恒有

$$\oiint\limits_{\Sigma}[P\cos(\widehat{\boldsymbol{n},x})+Q\cos(\widehat{\boldsymbol{n},y})+R\cos(\widehat{\boldsymbol{n},z})]\,\mathrm{d}S=0$$

的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$ 在 Ω 内处处成立.

10.7.2 通量与散度

高斯公式的物理意义

设稳定流动的不可压缩流体 (假定密度为 1) 的速度场由

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出, 其中函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 具有一阶连续的偏导数. 令 Σ 是速度场内一有向曲面, $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位法向量, 则单位时间内流体经过 Σ 流向指定侧的流体总质量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oiint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S \\ &= \oiint_{\Sigma} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} v_n\,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

其中 $v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ 表示流体的速度向量在有向曲面 Σ 的法向量上的投影.

若 Σ 是高斯公式中闭区域 Ω 的边界曲面的外侧, 则高斯公式的右端表示单位时间内流出闭区域 Ω 的流体的总质量.

由假设流体是不可压缩的, 且流动是稳定的, 因此在流体流出 Ω 的同时, Ω 内部必须有产生流体的源头产生出同样多的流体来补充. 所以高斯公式的左端可解释为分布在 Ω 内的源头在单位时间内所产生的流体的总质量.

通量与散度

设向量场由

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出, 其中函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 具有一阶连续的偏导数. 令 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是一有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位法向量, 称 $\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ 为向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量(或流量), 其中 $A_n = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ 是向量 $\boldsymbol{A}$ 在曲面 Σ 的外侧法向量上的投影. 称 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度, 记作 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, 即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

高斯公式

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \oiint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

可写成

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \oiint_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}S.$$

由积分中值定理可知, 存在一点 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{A})|_{(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{1}{V}\oiint_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}S.$$

再令 Ω 缩到一点 $M(x,y,z)$ (记 $\Omega\to M$), 取上式的极限, 得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}S.$$

上式可作为散度的另一种定义形式.

$\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 可看作是稳定流动的不可压缩流体在点 $M(x,y,z)$ 的源头强度, 即在单位时间体积内所产生的流体的质量.

- 若 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} > 0$, 说明在每一单位时间内有一定数量的流体流出这一点, 则称这点为源;
- 若 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} < 0$, 说明在每一单位时间内有一定数量的流体被这一点吸收, 则称这点为汇;
- 若 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为无源场;

例 7.7. 求向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (x^2+yz)\boldsymbol{i} + (y^2+xz)\boldsymbol{j} + (z^2+xy)\boldsymbol{k}$ 的散度.

解:
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial(x^2+yz)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2+xz)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2+xy)}{\partial z} = 2(x+y+z).$$

例 7.8. 设 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明
$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$
其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. 这个公式称为格林第二公式.

例 7.9. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力 (即浮力) 的方向竖直向上, 其大小等于这物体所排开的液体的重力.

解: 建立空间直角坐标系, 取液面为 xOy 面, z 轴竖直向下, 设液体的密度为 ρ. 在物体表面 Σ 上取面积微元 $\mathrm{d}S$, 并设 Σ 在此微元处的外法线方向为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则 $\mathrm{d}S$ 所受液体的压力在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量分别为
$$-\rho g z\cos\alpha\,\mathrm{d}S, \quad -\rho g z\cos\beta\,\mathrm{d}S, \quad -\rho g z\cos\gamma\,\mathrm{d}S,$$
其中 g 为重力加速度. 利用高斯公式计算 Σ 说所受的压力, 可得
$$F_x = \oiint\limits_{\Sigma} (-\rho g z\cos\alpha)\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_{\Omega} 0\,\mathrm{d}V = 0,$$
$$F_y = \oiint\limits_{\Sigma} (-\rho g z\cos\beta)\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_{\Omega} 0\,\mathrm{d}V = 0,$$
$$F_z = \oiint\limits_{\Sigma} (-\rho g z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_{\Omega} (-\rho g)\,\mathrm{d}V = -\rho g|\Omega|,$$
其中 $|\Omega|$ 为物体的体积. 得证.