

12.3 全微分方程

对于一阶微分方程 $y' = f(x, y)$, 当 $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ 时, 方程变形为

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (12.3.1)$$

如果方程(12.3.1)的左端恰好是某个函数 $u = u(x, y)$ 的全微分, 即

$$du(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

则称方程(12.3.1)为全微分方程 (或恰当方程).

此时方程(12.3.1)可写成

$$du(x, y) = 0.$$

故方程(12.3.1)的通解为方程

$$u(x, y) = C$$

所确定的隐函数, 其中 C 是任意常数.

定理 3.1. 设方程 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 中的函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续的偏导数, 则此方程为全微分方程的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D.$$

根据曲线积分与路径的无关性, 全微分方程 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 的通解为

$$\int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, v) dv = C \quad (12.3.2)$$

或

$$\int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, v) dv = C. \quad (12.3.3)$$

全微分方程的另一种解法

显然有 $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. 先将 $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ 对 x 积分得

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y).$$

然后两边对 y 求偏导, 有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + \varphi'(y) = Q(x, y),$$

即

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx.$$

对 y 积分得

$$\varphi(y) = \int Q(x, y) dy - \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right) dy.$$

代入 $u(x, y)$ 得

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \int Q(x, y) dy - \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right) dy.$$

所以

$$\int P(x, y) dx + \int Q(x, y) dy - \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right) dy = C$$

是全微分方程(12.3.1)的通解.

类似可得

$$\int Q(x, y) dy + \int P(x, y) dx - \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \int Q(x, y) dy \right) dx = C$$

是全微分方程(12.3.1)的通解.

例 3.1. 求 $(x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy = 0$ 的通解.

解: $P(x, y) = x + y + 1, Q(x, y) = x - y^2 + 3$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

所以这是全微分方程. 取 $x_0 = y_0 = 0$, 由公式(12.3.3)得

$$u(x, y) = \int_0^x (t + 1) dt + \int_0^y (x - v^2 + 3) dv = \frac{1}{2}x^2 + x + xy - \frac{1}{3}y^3 + 3y.$$

故原方程的通解为

$$\frac{1}{2}x^2 + x + xy - \frac{1}{3}y^3 + 3y = C.$$

例 3.2. 求 $(5x^4 + 3xy^2 - y^3) dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2) dy = 0$ 的通解.

解: $P(x, y) = 5x^4 + 3xy^2 - y^3, Q(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy - 3y^2,$$

所以这是全微分方程. 取 $x_0 = y_0 = 0$, 由公式(12.3.2)得

$$u(x, y) = \int_0^x (5t^4 + 3ty^2 - y^3) dt + \int_0^y v^2 dv = x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^2 + \frac{1}{3}y^3.$$

故原方程的通解为

$$x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^2 + \frac{1}{3}y^3 = C.$$

例 3.3. 求 $2ye^{2x} dx + (1 + e^{2x}) dy = 0$ 的通解.

解: $P(x, y) = 2ye^{2x}, Q(x, y) = 1 + e^{2x}$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{2x},$$

所以这是全微分方程. 将 $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 2ye^{2x}$ 两边对 x 积分得

$$u(x, y) = \int 2ye^{2x} dx = ye^{2x} + \varphi(y).$$

将上式两边对 y 求偏导, 得

$$e^{2x} + \varphi'(y) = 1 + e^{2x} \Rightarrow \varphi'(y) = 1.$$

解得 $\varphi(y) = y$, 所以

$$u(x, y) = ye^{2x} + y.$$

于是原方程的通解为

$$ye^{2x} + y = C.$$

定义 3.1. 如果存在函数 $I(x, y)$, 使得方程(12.3.1) 乘以 $I(x, y)$ 后成为全微分方程

$$I(x, y)P(x, y)dx + I(x, y)Q(x, y)dy = 0,$$

则函数 $I(x, y)$ 称为方程(12.3.1)的积分因子.

二元函数全微分公式举例

$$(1) \quad x dy + y dx = d(xy);$$

$$(4) \quad \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2});$$

$$(2) \quad \frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$(5) \quad \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan \frac{x}{y}\right);$$

$$(3) \quad \frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$(6) \quad \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2).$$

例 3.4. 求 $y dx - x dy = 0$ 的通解.

解:

$$y dx - x dy = 0 \Rightarrow \frac{y dx - x dy}{y^2} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

所以原方程的通解为

$$y = Cx.$$

此外还有特解 $x = 0$.

例 3.5. 求 $(x + x^2 + y^2) dy - y dx = 0$ 的通解.

解:

$$(x + x^2 + y^2) dy - y dx = 0 \Rightarrow (x dy - y dx) + (x^2 + y^2) dy = 0,$$

从而有

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + dy = 0 \Rightarrow d\left(\arctan \frac{y}{x} + y\right) = 0.$$

所以原方程的通解为

$$\arctan \frac{y}{x} + y = C.$$

例 3.6. 求 $(1+xy)y \, dx + (1-xy)x \, dy = 0$ 的通解.

解:

$$(1+xy)y \, dx + (1-xy)x \, dy = 0 \Rightarrow (y \, dx + x \, dy) + xy(y \, dx - x \, dy) = 0,$$

从而有

$$d(xy) + xy(y \, dx - x \, dy) = 0 \Rightarrow \frac{d(xy)}{x^2 y^2} + \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0.$$

所以原方程的通解为

$$-\frac{1}{xy} + \ln|x| - \ln|y| = C_1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = C e^{\frac{1}{xy}} \quad (C = \pm e^{C_1}).$$