第十二章　微分方程与差分方程

12.1　微分方程的基本概念

例 1.1. 假设某人以本金 A_0 进行一项投资,投资的年利率为 r,若以连续复利计算,试求 t 年末的本利和.

解: 设 t 年末的本利和为 $A(t)$. 由于 t 时刻资金总额的变化率等于 t 时刻资金总额获取得到的利息, 故

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = rA(t),$$

且

$$A(0) = A_0.$$

解得

$$A(t) = Ce^{rt},$$

其中 C 为任意常数. 由 $A(0) = A_0$ 可得 $C = A_0$, 故

$$A(t) = A_0 e^{rt}.$$

例 1.2. 一曲线上经过点 $(1,1)$, 且该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $3x^2$, 求这曲线的方程.

解: 设曲线的方程为 $y = y(x)$, 由题意知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \tag{12.1.1}$$

且

$$y(1) = 1. \tag{12.1.2}$$

对(12.1.1)两端进行积分, 得

$$y = \int 3x^2 \,\mathrm{d}x = x^3 + C, \tag{12.1.3}$$

其中 C 为任意常数. 将条件(12.1.2)代入到(12.1.3)得

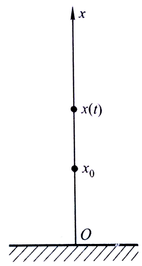
$$1 = 1^3 + C \Rightarrow C = 0.$$

于是所求的曲线方程为

$$y = x^3.$$

例 1.3. 以初速度 v_0 将质量为 m 的质点铅直上抛, 不计阻力, 求质点的运动规律.

解: 如图建立坐标轴, 设运动开始时 $(t=0)$ 质点位于坐标原点 $(x=0)$, 在时刻 t 时质点位于 $x(t)$. 由



牛顿第二定律知

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g, \tag{12.1.4}$$

并且 $x(t)$ 还满足条件:

$$x(0)=0,\qquad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0. \tag{12.1.5}$$

把(12.1.4)式两端对 t 做积分, 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1, \tag{12.1.6}$$

再一次积分得

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{12.1.7}$$

将条件(12.1.5)代入(12.1.6)和(12.1.7), 得

$$C_1=v_0,\quad C_2=0.$$

于是有

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t.$$

定义 1.1. 含有未知函数的导数或微分的等式叫做微分方程. 未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程, 至少一个未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程. 要指出的是: 微分方程中可以不显含自变量和未知函数, 但未知函数的导数必须出现.

前述三个例子中的方程都含有一元未知函数的导数, 因此都是常微分方程.

偏微分方程举例:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数称为 微分方程的阶.

例如微分方程

$$y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12(y')^8 + 5y = \sin 2x$$

为一个四阶微分方程.

一般 n 阶常微分方程具有如下形式

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{12.1.8}$$

如果 n 阶微分方程(12.1.8)为 y 及 $y', \cdots, y^{(n)}$ 的一次方程, 则称之为线性微分方程, 否则称为非线性微分方程.

一般的 n 阶线性微分方程具有形式

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{12.1.9}$$

其中 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x), f(x)$ 是已知函数, $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ 称为微分方程的系数.

当 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ 为函数时, 方程(12.1.9)称为变系数的微分方程; 当 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ 为常数时, 方程(12.1.9)称为常系数的微分方程.

一阶线性微分方程的一般形式为

$$y' + a_1(x)y = f(x),$$

$y' + x^3 y = \sin x$ 和 $y' + \frac{2}{x}y = e^x$ 是一阶线性微分方程.

二阶线性微分方程的一般形式为

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

$y'' + 4y = \sin 2x$ 和 $y'' + y' - 2y = xe^{-2x}$ 是二阶线性微分方程.

设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上存在 n 阶导数, 如果将 $y = \varphi(x)$ 代入方程(12.1.8)后, 得到恒等式

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in I,$$

则称函数 $y = \varphi(x)$ 为微分方程(12.1.8)在 I 上的解.

如果关系式 $\Phi(x, y) = 0$ 决定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 是方程(12.1.8)的解, 则称 $\Phi(x, y) = 0$ 为微分方程(12.1.8)在 I 上的隐式解.

含有 n 个独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 称为 n 阶方程(12.1.8)的通解.

$y = Ce^x$ 是微分方程 $y' = y$ 的通解.

$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解.

确定微分方程通解中的任意常数的值的条件叫做定解条件. 定解条件

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_1, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1}$$

通常称为 n 阶微分方程的初值条件, 其中 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 是给定的常数. 由定解条件确定了通解中任意常数的值后所得到的解称为微分方程的特解.

$A(t) = A_0 e^{rt}$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = rA(t)$ 的特解.
$y = x^3$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ 的特解.

求微分方程满足初值条件的特解这样一类问题称为微分方程的初值问题.

初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \\ y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1}. \end{cases}$$

对于微分方程 $y'' + y = 0$ 来说,
$y = C_1 \sin x + \cos x$ 既不是通解也不是特解;
$y = C_1 \sin x + C_2 \sin x$ 既不是通解也不是特解.

通解不一定是方程的全部解.

例如, 方程 $(x + y)y' = 0$ 有解

$$y = -x \quad \text{和} \quad y = c.$$

后者是通解, 但不包含前一个解.

微分方程通解的图形称为微分方程的积分曲线族. 微分方程特解的图形称为微分方程的积分曲线.

例 1.4. 判断下列微分方程的阶数:

(1) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = xy$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = xy'$

(3) $xy'' - (xy')' = xy$

(4) $(xy^2)' = y' + x$

解:

(1) 一阶

(2) 二阶

(3) 一阶

(4) 一阶

例 1.5. 验证函数 $y = \cos 2x - \sin 2x + x$, $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x$, $y = C \cos 2x - \sin 2x + x$ (其中 C, C_1, C_2 为任意常数) 是否为微分方程 $y'' + 4y = 4x$ 的解? 是通解还是特解?

解: 特解, 通解, 解 (不是通解也不是特解).

例 1.6. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2 为常数, k 为非零常数) 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$ 的通解, 并求满足初始条件 $x|_{t=0} = A$, $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ 的特解.

解: $x = A \cos kt$.

例 1.7. 已知曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q, 且线段 PQ 被 y 轴平分, 求曲线所满足的微分方程.

解: 由题意, 点 Q 的坐标为 $(-x,0)$. 于是

$$\frac{y-0}{x-(-x)}\cdot y' = -1.$$

因此曲线所满足的微分方程为

$$yy' + 2x = 0.$$