2017 – 2018年第一学期

2017年12月5日

概率论试卷

杨勇制作

一. 填空题

1.设A, B为两个随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则$P(\overline{AB})=$ ______________。

解:

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.3,$$

$$P(AB)=0.4, \quad P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6。$$

2.一试验可以独立重复进行,每次试验成功的概率为p,则直到第8次试验才取得3次成功的概率为______________。

解:

$$\overbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}^{\text{前7次成功2次}}\ \underbrace{\underline{\qquad}}_{\text{第8次成功}}$$

$A=$“前7次成功2次”,　　$B=$“第8次成功”,

A,B独立,

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$=C_7^2 p^2(1-p)^5 \times p$$

$$=C_7^2 p^3(1-p)^5 。$$

3.设随机变量X在$(1,6)$上服从均匀分布,则关于 y 的方程$y^2 - Xy + 1 = 0$无实根的概率为________________。

解: $$\Delta = (-X)^2 - 4 < 0,$$

$$-2 < X < 2,$$

$$P(-2 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5}。$$

4.已知离散型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ 0.4, & -1\le x<1 \\ 0.8, & 1\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases},$$

则X的概率分布为____________。

解：

$$X\sim\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

5.设$X \sim B(n,p)$,根据泊松定理,当n很大,p很小,且$np=8$时,对任意非负整数k,有近似计算公式$P(X=k)$ ______________。

解:

$$P(X=k)=\frac{8^k}{k!}e^{-8},k=0,1,\cdots,n。$$

6.随机变量X的密度函数为$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+x-\frac{1}{4}}$,

则$E\left(9X^2-\dfrac{7}{2}X\right)=$ ______________。

解：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+x-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\frac{1}{2}}},$$

$$X\sim N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

$$EX=\frac{1}{2},DX=\frac{1}{2}=E(X^2)-(EX)^2,$$

$$E(X^2)=\frac{3}{4},$$

$$E\left(9X^2-\frac{7}{2}X\right)=9E(X^2)-\frac{7}{2}EX=9\times\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}=5。$$

7.设随机变量X与Y的相关系数$\rho_{XY}=\rho$，而$Z=aX+b(a,b$为常数$)$，则使$\rho_{YZ}=\rho$的充分必要条件是____________。

解：

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho,$$

$$DZ=a^2DX,$$

$$Cov(Y,b)=E(Y-EY)(b-Eb)=0,$$

$$Cov(Y,Z)=Cov(Y,aX+b)$$

$$=aCov(Y,X)+Cov(Y,b)$$

$$=aCov(X,Y)$$

$$\rho_{YZ}=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}}=\frac{aCov(X,Y)}{|a|\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{a}{|a|}\rho,$$

$\rho_{YZ}=\rho$的充分必要条件是$a>0$。

8.设随机变量X,Y的密度函数同为

$$p(t)=\begin{cases}\frac{3}{8}t^2, 0<t<2\\ 0, 其他\end{cases},$$

已知事件$A=\{X>a\}$与$B=\{Y>a\}$相互独立,

且$P(A\cup B)=\frac{3}{4}$,　则常数$a=$ ________。

解:

$$P(A)=P(B)=P(X>a)=\int_a^2 \frac{3}{8}t^2dt=\frac{8-a^3}{8},$$

$$\frac{3}{4}=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B),$$

$$(8-a^3)^2-16(8-a^3)+48=0,$$

$$8-a^3=4,8-a^3=12,\qquad a=\sqrt[3]{4},a=-\sqrt[3]{4},$$

a为负的舍去。 即$a=\sqrt[3]{4}$。

9.某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为$p(0<p<1)$,记A为“此人第4次射击恰好是第2次命中目标”这一事件。又记X为服从参数是$P(A)$的0-1分布的随机变量,则$E(X^2)=$______________。

解:

$$\overbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}^{\text{前3次射击命中1次}}\ \underbrace{\underline{\qquad\qquad}}_{\text{第4次命中目标}}$$

B表示前3次射击命中1次,

C表示第4次命中目标,

$$P(A)=P(BC)=P(B)P(C)$$

$$=C_3^1 p^1(1-p)^2\times p$$

$$=3p^2(1-p)^2,$$

$E(X^2)=3p^2(1-p)^2$。

10.设随机变量X与Y相互独立,都服从参数为1的指数分布,即它们的密度函数为

$$p(t)=\begin{cases} e^{-t}, t>0 \\ 0, t\le 0 \end{cases},$$

则$P(\max\{X,Y\}\le 1)=$ ____________。

解：

$$P(X \le 1) = \int_0^1 e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^1 = 1 - e^{-1},$$

$$P(\max\{X, Y\} \le 1) = P(X \le 1, Y \le 1)$$

$$= P(X \le 1) P(Y \le 1)$$

$$= (1 - e^{-1})^2 。$$

11.设$EX=-2, EY=2, DX=1, DY=4,$

$\rho_{XY}=-0.5,$则根据切比雪夫不等式有

$P\left(\left|X+Y\right|\geq 6\right)\leq$ ______________。

解:　　设$Z=X+Y,$

$$EZ=E(X+Y)=EX+EY=0, Cov(X,Y)=-1,$$

$$DZ=D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)=3,$$

$$P\left(\left|X+Y\right|\geq 6\right)=P\left(\left|Z-EZ\right|\geq 6\right)\leq\frac{DZ}{6^2}=\frac{1}{12}。$$

12.设(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

则$P(Y=1 \mid X=1)=$____________。

解:

$$P(Y=1 \mid X=1)=\frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{11}{24}}=\frac{3}{11}。$$

13. 设$X_1 \sim B(1, p), X_2 \sim B(2, p), X_2 \sim B(3, p)$,

且X_1, X_2, X_3独立,

则$X_1 + X_2 + X_3 \sim$ ______________。

解:　二项分布具有可加性,

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim B(6, p)\text{。}$$

二. 选择题

1.设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立且服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的指数分布,即它们的密度函数同为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0 \\ 0, x \le 0\end{cases},$$

记$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数,则对任意实数x,下列结论中正确的为__________。

$$(A)\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x),$$

$$(B)\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x),$$

$$(C)\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x \right) = \Phi(x),$$

$$(D)\frac{4}{5}\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x \right) = \Phi(x)\text{。}$$

解:　　中心极限定理

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n}\,\frac{1}{\lambda}} \le x \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x \right) = \Phi(x),$$

(A)

2.设随机变量X, Y相互独立，密度函数都为$p(t)$，则随机变量$Z = X - 2Y$的密度函数$p_Z(z)$为________。

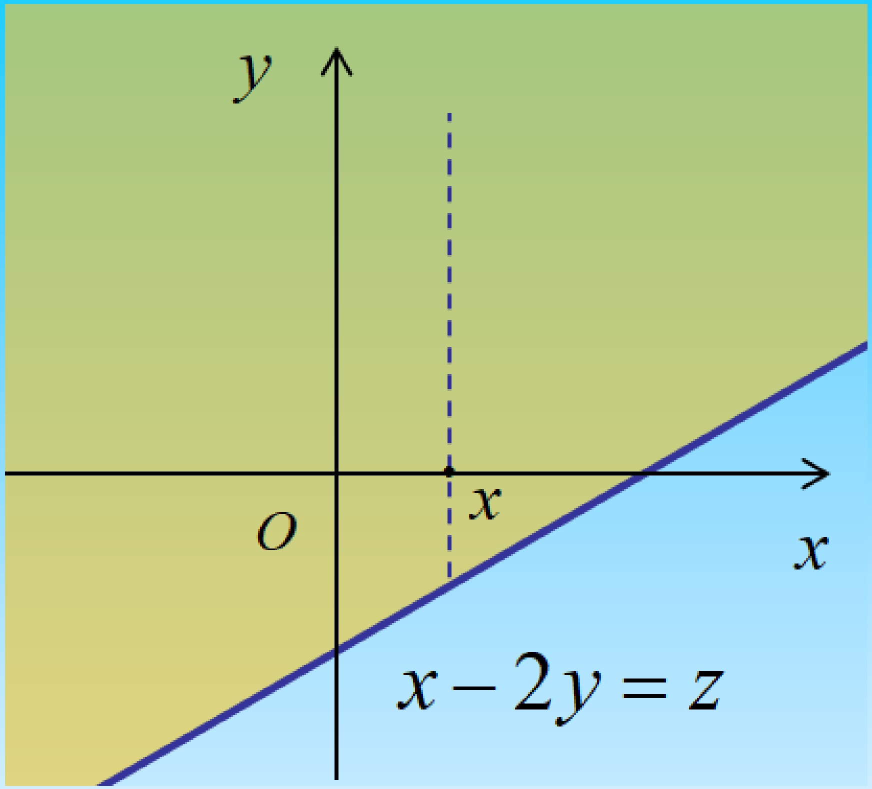
$$(A)\ p_Z(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, p\left(\frac{z-x}{2}\right) dx,$$

$$(B)\ p_Z(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, p\left(\frac{x-z}{2}\right) dx,$$

$$(C)\, p_Z(z) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, p\big(2(z-x)\big)dx,$$

$$(D)\, p_Z(z) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, p\big(2(x-z)\big)dx$$

解：$F_Z(Z \le z) = P(X - 2Y \le z)$



$$F_Z(Z \le z) = P(X - 2Y \le z)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\frac{x-z}{2}}^{+\infty} p(x)p(y)dy \right) dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\frac{x-z}{2}}^{+\infty} p(x)\,p(y)\,dy\right)dx,$$

做替换 $y=\dfrac{x-t}{2},\ dy=-\dfrac{1}{2}dt$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\frac{x-z}{2}}^{+\infty} p(x)\,p(y)\,dy\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{z}^{-\infty} p(x)\,p\left(\frac{x-t}{2}\right)dt\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,p\left(\frac{x-t}{2}\right)dx\right)dt,$$

$$p_Z(z) = F_Z{}'(z)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,p\left(\frac{x-z}{2}\right)dx$$

$$(B)$$

3.设随机变量X的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} 1/2, & -1<x<0 \\ 1/4, & 0\le x<2 \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

记$Y=X^2$,二维随机向量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$,则$F(1,4)=$__________。

$(A)\dfrac{1}{4},(B)\dfrac{1}{2},(C)\dfrac{3}{4},(D)1$。

解：
$$F(1,4)=P(X\le 1, Y\le 4)$$
$$=P(X\le 1, X^2\le 4)$$
$$=P(X\le 1, -2\le X\le 2)$$
$$=P(-2\le X\le 1)$$
$$=P(-1\le X\le 1)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}。\qquad (C)$$

4.设连续型随机变量X的密度函数为$p(x)$,

数学期望$EX=0$,则_______________。

$$(A)\int_0^{+\infty} p(x)dx=\frac{1}{2},(B)\int_0^{+\infty} xp(x)dx=\frac{1}{2},$$

$$(C)\int_0^{+\infty} x\left[p(x)+p(-x)\right]dx=0,$$

$$(D)\int_0^{+\infty} x\left[p(x)-p(-x)\right]dx=0$$

解:

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}xp(x)dx+\int_{0}^{+\infty}xp(x)dx$$

$y=-x$

$$=-\int_{+\infty}^{0}(-y)p(-y)dy+\int_{0}^{+\infty}xp(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}yp(-y)dy+\int_{0}^{+\infty}xp(x)dx$$

$$= -\int_0^{+\infty} xp(-x)dx + \int_0^{+\infty} xp(x)dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x\left[p(x) - p(-x)\right]dx = 0。$$

(D)

5.已知X服从标准正态分布,$Y=2X^2+X+3$,

则X与Y ______________。

(A)不相关且相互独立,(B)不相关且不独立,

(C)相关且相互独立,(D)相关且不独立。

解:

$$Cov(X,Y)=Cov(X,2X^2+X+3)$$

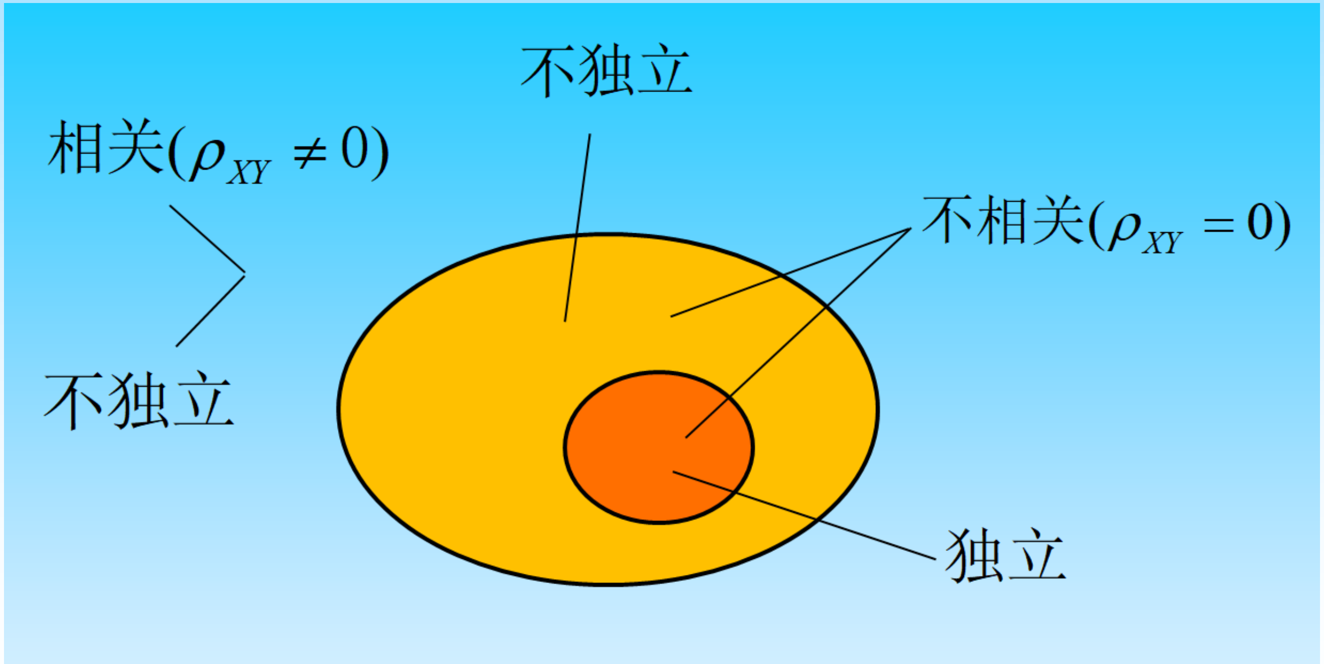
$$=2Cov(X,X^2)+Cov(X,X)$$

$$=2\left(E(X^3)-EXE(X^2)\right)+DX=DX=1$$

其中

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0,$$

则$\rho_{XY}\neq 0$, 从而X,Y不独立。 (D)



三.简答及分析判断题

1.叙述下列概念:(a)概率的公理化定义;
(b)数学期望的定义(一维,连续型)。

解: (a)

随机事件A发生的可能性大小的数值称为随机事件A的概率,记为$P(A)$,并且还必须满足以下三个公理:

(1)非负性：$P(A) \geq 0$, 任意A;

(2)规范性：$P(\Omega)=1$;

(3)可列可加性：若$A_1, A_2, \cdots$两两互不相容，

则 $P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$。

(b) 设连续型随机变量X的密度函数为$p(x)$,

若$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$绝对收敛，则称$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$为

X的数学期望或均值，记为$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$。

2.分析判断题：设$X \sim B(1, p)$(这里$0 < p < 1$), $Y \sim Exp(\lambda)$(参数为λ的指数分布), 则$Z = XY$一定不是连续型随机变量。

解：　对。

$$P(Z = 0) = P(XY = 0)$$

$$= P(X = 0)P(XY = 0 | X = 0) + P(X = 1)P(XY = 0 | X = 1)$$

$$= 1 - p,$$

而连续型随机变量等于任何一点的概率为0,

所以Z一定不是连续型随机变量

注：$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(XY \le z)$$

$z < 0, F_Z(z) = 0,$

$z \ge 0,$ $$F_Z(z) = P(XY \le z)$$

$$= P(X = 0)P(XY \le z \mid X = 0) + P(X = 1)P(XY \le z \mid X = 1)$$

$$= (1 - p) + pP(Y \le z)$$

$$= (1 - p) + p(1 - e^{-\lambda z}),$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-pe^{-\lambda z}, z\geq 0\\ 0, z<0\end{cases},$$

此分布函数在$z=0$不连续,所以Z不是连续型随机变量,也不是离散型随机变量。

四.计算题

1.已知每次试验“成功”的概率为p,现进行n次独立试验,则在没有全部“失败”的条件下,“成功”不止一次的概率为多少?

解:　A表示没有全部“失败”,

B表示“成功”不止一次,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$=\frac{\sum_{k=2}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{\sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$=\frac{1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^n}。$$

2.设甲,乙两人随机决定次序对同一个目标独立地射击,并约定:若第一次命中,则停止射击,否则由另一人进行第二次射击,不论命中与否,停止射击。设甲,乙两人每次射击命中目标的概率依次为0. 6和0. 5。

(1)计算目标第二次射击时被命中的概率;

(2)设X,Y分别表示甲,乙的射击次数,求X和Y的相关系数ρ_{XY}。

解： (1)

A表示甲先射击，B表示乙先射击，

C表示第2次命中，

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$=\frac{1}{2}\times(0.4\times0.5)+\frac{1}{2}\times(0.5\times0.6)=0.25;$$

(2) $X:0,1;\quad Y:0,1;$

$$P(X=0,Y=0)=0,$$

$$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{2}\times 0.5=0.25,$$

注:乙先打,命中,甲没打,

$$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{2}\times 0.6=0.3,$$

注:甲先打,命中,乙没打,

$$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{2}\times 0.4+\frac{1}{2}\times 0.5=0.45,$$

注:甲先打,没中,或者,乙先打,没中,

$X \backslash Y$	0	1
0	0	0.25
1	0.3	0.45

$$EX = 0.75, DX = 0.1875,$$

$$EY = 0.7, DY = 0.21,$$

$$E(XY) = (1 \times 1) \times 0.45,$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - EXEY$$

$$= -0.075,$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = -\frac{\sqrt{7}}{7} \approx -0.378 \text{。}$$

3.已知二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, x>0, y>0\\ 0,其他\end{cases},$$

记$Z=X+2Y$,

(1)求Z的分布函数$F_Z(z)$及其密度函数$p_Z(z)$;

(2)求EZ及DZ。

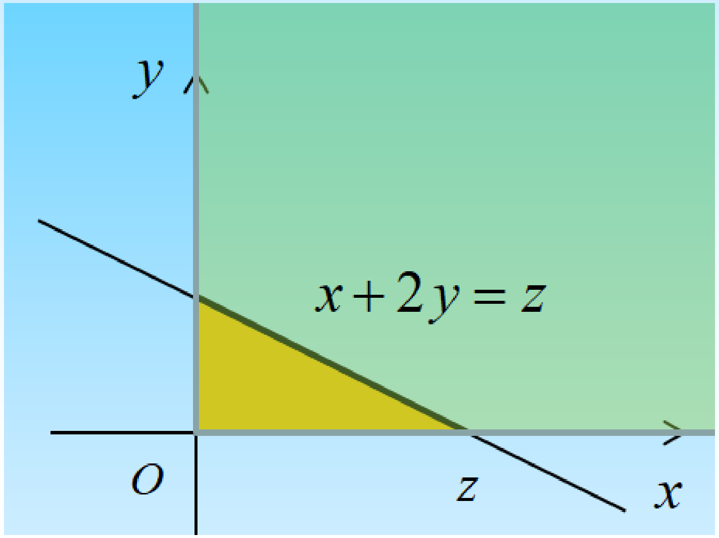
解:　　(1)

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$z < 0, F_Z(z) = 0,$$

$$z \ge 0, \quad F_Z(z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$= \int_0^z \left(\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)} dy \right) dx$$



$$= \int_0^z e^{-x} \left(\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-2y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^z e^{-x} \left(-e^{-2y} \Big|_0^{\frac{z-x}{2}} \right) dx$$

$$= \int_0^z e^{-x} \left(1 - e^{-(z-x)} \right) dx$$

$$= \int_0^z e^{-x} dx - \int_0^z e^{-z} dx$$

$$=1-e^{-z}-ze^{-z},$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z}, z\geq 0\\ 0, z<0\end{cases},$$

$$z\geq 0, p_Z(z)=F_Z{}'(z)=e^{-z}-e^{-z}+ze^{-z}=ze^{-z},$$

$$p_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, z\geq 0\\ 0, z<0\end{cases}。$$

(2)

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-(x+2y)}dy, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases},$$

同理

$$p_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y\geq 0\\ 0, y<0\end{cases},$$

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y), \forall x,y\in R$$

所以，X和Y独立。

$$X\sim Exp(1), Y\sim Exp(2)$$

$$EX=1, DX=1, \quad EY=\frac{1}{2}, DX=\frac{1}{4},$$

$$EZ = EX + 2EY = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2,$$

$$DZ = DX + 4DY = 1 + 4 \times \frac{1}{4} = 2 。$$

4.某公司计划开发一种新产品,并试图确定该产品的产量,他们计划出售一件产品可获得收入100元,而积压一件产品导致损失20元。同时预测销售Y服从指数分布,即密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases},$$

为了获得利润的数学期望最大,应生产多少件产品？（已知ln6=1.7918)

解： a表示生产的件数， X表示利润，

$$X = f(Y) = \begin{cases} 100Y - 20(a-Y), Y < a \\ 100a, Y \geq a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 120Y - 20a, Y < a \\ 100a, Y \geq a \end{cases},$$

$$EX = Ef(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p_Y(y) dy$$

$$= \int_0^a (120y - 20a) \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy + \int_a^{+\infty} 100a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy$$

$$= 120 \int_0^a y \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy - 20a \int_0^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy + 100a \int_a^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy$$

$$= -120 \left[ye^{-\frac{y}{5}} \Big|_0^a - \int_0^a e^{-\frac{y}{5}} dy \right] - 20a \left[-e^{-\frac{y}{5}} \Big|_0^a \right] + 100a \left[-e^{-\frac{y}{5}} \Big|_a^{+\infty} \right]$$

$$=-120\left[ae^{-\frac{a}{5}}-5\left(-e^{-\frac{y}{5}}\Big|_0^a\right)\right]-20a\left[1-e^{-\frac{a}{5}}\right]+100ae^{-\frac{a}{5}}$$

$$=-120\left[ae^{-\frac{a}{5}}-5\left(1-e^{-\frac{a}{5}}\right)\right]-20a\left(1-e^{-\frac{a}{5}}\right)+100ae^{-\frac{a}{5}}$$

$$=-120ae^{-\frac{a}{5}}+600-600e^{-\frac{a}{5}}-20a+20ae^{-\frac{a}{5}}+100ae^{-\frac{a}{5}}$$

$$=600-600e^{-\frac{a}{5}}-20a,$$

$$\left(EX\right)'_a=-600e^{-\frac{a}{5}}\times\left(-\frac{1}{5}\right)-20=0,$$

$$e^{-\frac{a}{5}} = \frac{1}{6},$$

$$-\frac{a}{5} = -\ln 6 = -1.7918,$$

$$a = 8.959 \approx 9,$$

应生产9件产品。

$$EX = Ef(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p_Y(y) dy$$

$$= \int_0^a (120y - 20a) \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy + \int_a^{+\infty} 100a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy$$

$$= 120 \int_0^a y \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy - 20a \int_0^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy - 100a \int_{+\infty}^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy,$$

$$(EX)'_a = 120a \frac{1}{5} e^{-\frac{a}{5}} - \left[20a \frac{1}{5} e^{-\frac{a}{5}} + 20 \int_0^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy \right]$$

$$- \left[100a \frac{1}{5} e^{-\frac{a}{5}} + 100 \int_{+\infty}^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy \right]$$

$$= -20\int_0^a \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy + 100\int_a^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy$$

$$= -20\left[-e^{-\frac{y}{5}}\Big|_0^a\right] + 100\left[-e^{-\frac{y}{5}}\Big|_a^{+\infty}\right]$$

$$= -20\left[1 - e^{-\frac{a}{5}}\right] + 100e^{-\frac{a}{5}}$$

$$= -20 + 120e^{-\frac{a}{5}} = 0,$$

$$e^{-\frac{a}{5}} = \frac{1}{6},$$

$$-\frac{a}{5} = -\ln 6 = -1.7918,$$

$$a = 8.959 \approx 9,$$

应生产9件产品。

5.假设某种型号的螺丝钉的重量是随机变量,期望值为50克,标准差为5克。求

(1) 100个螺丝钉一袋的重量超过5. 1千克的概率;

(2) 每箱螺丝钉装有500袋, 500袋中最多有4%的重量超过5. 1千克的概率。

解: (1)

X_i :第i个螺丝钉的重量, $i=1,2,\cdots,100,$

可以认为$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$独立,

$$p = P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 5.1\times 1000\right)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{5100-5000}{\sqrt{100\times 5^2}}\right) = 1-\Phi(2)$$

$$= 1-0.97725 = 0.02275;$$

(2) $Y:$500袋中重量超过5.1千克的袋数,

$Y \sim B(500, 0.02275),$

$$Y_k=\begin{cases}1, 第k袋重量超过5.1千克\\0, 第k袋重量不超过5.1千克\end{cases}, k=1,2,\cdots,500,$$

$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{500}$相互独立,

$$P\left(Y=\sum_{k=1}^{500}Y_k\le 20\right)\approx\Phi\left(\frac{20-500\times 0.02275}{\sqrt{500\times 0.02275\times 0.97725}}\right)$$

$$=\Phi(2.58698)=0.995。$$

完