11.2 正项级数的敛散性判别法

11.2.1 正项级数

设有级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

若级数中的每一项 $u_n \geq 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 则称该级数为 正项级数.

定理 2.1. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

例 2.1. 试证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = 0,$$

其中 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$.

证明: 由

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} < 1.$$

所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛, 故由收敛级数的必要条件知结论成立.

例 2.2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ 收敛.

证明: 由

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

可得

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

即部分和数列 $\{s_n\}$ 有界. 故正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

11.2.2 正项级数敛散性判别法

定理 2.2 (比较判别法). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且存在正整数 N, 当 $n > N$ 时有 $u_n \leq v_n$, 则

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

若将此定理中的条件 $u_n \leq v_n (n = 1, 2, \cdots)$ 改为存在常数 $k > 0$ 和正整数 N, 当 $n > N$ 时有 $u_n \leq k v_n$, 则结论同样成立.

例 2.3. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 的收敛性.

解: 因 $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散.

例 2.4. 证明 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

收敛的充要条件为 $p > 1$.

解: 先设 $p > 1$. 当 $n-1 \leq x \leq n$ 时, 因 $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \leq \frac{1}{p-1},$$

即部分和数列有界, 因而级数收敛.

当 $p \leq 1$ 时, 则有 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

在用比较判别法判别一个正项级数是否收敛时, 需要与另一个已知的收敛或发散的正项级数进行比较, 常用于比较的级数有等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 与 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 等.

例 2.5. 判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ 的收敛性.

解: 由于当 $n > 2$ 时, $\frac{1}{n^2-n} < \frac{2}{n^2}$, 而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 是收敛的, 根据比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ 收敛.

例 2.6. 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$.

定理 2.3 (比较判别法的极限形式). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l = 0$ 时, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

例 2.7. 判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n-\ln n}$ 的收敛性.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-n-\ln n}\Big/\frac{1}{n^2}=1,$$

又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n-\ln n}$ 收敛.

例 2.8. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}$.

解:

(1) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

(2) 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-2^n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛, 故原级数收敛.

推论 2.4 (比较判别法极限形式的特殊情形). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pu_n=l$, 则

(1) 当 $p>1$, 且 l 为一有限数时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 当 $p\le1$, 且 $l\ne0$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 2.9. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^3-2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}}$.

解:

(1) 收敛.

(2) 发散.

定理 2.5 (比值判别法或达朗贝尔判别法). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数, 如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛; 当 $1<\rho\le+\infty$ 时级数发散.

值得注意的是, 当 $\rho=1$ 时, 比值判别法失效, 级数是否收敛需要进一步审定.

以 p 级数为例, 不论 p 是何值都有

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=1,$$

而当 $p>1$ 时, p 级数收敛; 当 $p\le1$ 时, p 级数发散.

例 2.10. 判定下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

解:

(1) $\rho < 1$, 收敛;

(2) $\rho > 1$, 发散;

(3) $\rho = 1$, 改用比较判别法, 发散.

例 2.11. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{2}{1} + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 5} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9} + \cdots + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot 5\cdot 9\cdots[1+4(n-1)]} + \cdots$$

的敛散性.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{1+4n} = \frac{3}{4} < 1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

定理 2.6 (根值判别法或柯西判别法). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; 当 $1 < \rho \le +\infty$ 时级数发散.

值得注意的是, 当 $\rho = 1$ 时, 根值判别法失效, 级数是否收敛需要进一步审定.

以 p 级数为例, 不论 p 是何值都有

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1.$$

例 2.12. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2},$$

所以级数是收敛的.

例 2.13. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ 的收敛性.

解: 根据根值判别法, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

故级数收敛.

例 2.14. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{an}$(其中 a 为常数) 的敛散性.

解: 由于
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^a=\left(\frac{1}{2}\right)^a,$$
所以当 $a>0$ 时, 级数收敛; 当 $a<0$ 时, 级数发散; 当 $a=0$ 时级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, 故发散.

定理 2.7 (积分判别法). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上非负、连续、单调下降, 且存在正整数 N, 当 $n\geq N$ 时有
$$f(n)=u_n,$$
则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

例 2.15. 讨论下列级数
$$(i)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p};\quad (ii)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$$
的敛散性.

解: (i) 研究反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$, 由于
$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$$
当 $p>1$ 时收敛, $p\leq 1$ 时发散. 故有积分判别法知级数 (i) 在 $p>1$ 时收敛, $p\leq 1$ 时发散.

(ii) 研究反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$, 同理可知级数 (ii) 在 $p>1$ 时收敛, $p\leq 1$ 时发散.

11.2.3 思考与练习

练习 277. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 则数列 $\{s_n\}$ 有界是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的 (　　)

(A) 充分必要条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D) 既不充分又不必要条件

A

练习 278. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

解:

(1) 因 $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{n^{3/2}}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛, 故原级数收敛.

(2) 因 $\frac{1}{n2^n}\leq\frac{1}{2^n}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数收敛.

练习 279. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$ 的收敛性.

解: 设 $u_n = \frac{n2^n}{3^n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n2^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{3n} = \frac{2}{3} < 1,$$

故由比值判别法知级数收敛.

练习 280. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 的收敛性.

解: 设 $u_n = \frac{n!}{n^n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

故由比值判别法知级数收敛.

练习 281. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{5^n}$ 的收敛性.

解: 根据根值判别法, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n3^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5} \sqrt[n]{n} = \frac{3}{5} < 1,$$

故级数收敛.

练习 282. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$ 的收敛性, 其中 a, p 为常数, 且 $a > 0$.

解: 根据根值判别法, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^p}} = a,$$

所以当 $a < 1$ 时, 级数收敛; 当 $a > 1$ 时, 级数发散; 当 $a = 1$ 时, 该级数是 p 级数, 故仅当 $p > 1$ 时级数收敛.

练习 283. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 的收敛性.

解: $0 \le \frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n} \le \frac{n}{2^n}$, 收敛.