

第二章 统计量及其分布

1. 设有容量为 n 的样本 A ，它的样本均值为 \bar{X}_A ，样本标准差为 S_A ，样本极差为 R_A ，样本中位数为 M_A 。现对样本中每一个观测值施行变换

$$Y = aX + b,$$

如此得到样本 B ，试写出样本 B 的均值、标准差、极差和中位数。

2. 设总体以等概率取 $1,2,3,4,5$ ，现从中抽取一个容量 4 的样本，试分别求 $X_{(1)}$ 和 $X_{(4)}$ 的分布。

3. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为一个样本， $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是样本方差，试证：

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i < j} (X_i - X_j)^2 = S^2.$$

4. 在总体 $N(12,4)$ 中随机抽一容量为 5 的样本 X_1, X_2, \dots, X_5 。

(1) 求样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率。

(2) 求概率 $P\{\max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} > 15\}, P\{\min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} < 10\}$ 。

5. 一地质学家为研究密歇根湖的湖滩地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子，记录了每个样品中属石灰石的石子数。假设这 100 次观察相互独立。求样本均值的渐进分布。

6. 设 X_1, X_2 是来自 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，试求 $Y = (X_1 + X_2)^2 + (X_1 - X_2)^2$ 的方差。

7. (1) 设样本 X_1, X_2, \dots, X_6 来自总体 $N(0,1)$ ， $Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$ ，试确定常数 C 使得 CY 服从 χ^2 分布。

(2) 设样本 X_1, X_2, \dots, X_5 来自总体 $N(0,1)$ ， $Y = \frac{C(X_1 + X_2)}{(X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)^{\frac{1}{2}}}$ ，试确定常数 C 使得 Y 服从 t 分布。

(3) 已知 X 服从 $t(n)$, 求证 $X^2 \sim F(1, n)$ 。

8. (附加题) 第二章抽样分布我们已学习了总体与样本的概念、样本数据的整理与图示、统计量及其分布、三大抽样分布等很多知识点, 已经初步了解通过样本对总体进行推断的基本思想, 请把学到的知识进行实际应用, 实践设计一个(思政)案例来展现数理统计的应用和魅力。

- 1) 选做本题可以减免 1-7 题中的 3 题;
- 2) 可以组队来做 (小组人数最多 3 人);
- 3) 需要提交一个 ppt 和一个 word 文档报告 (原则上不低于 800 字)。