12.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y') = 0.$$

若方程式中可以解出 y', 则方程可表达为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y).$$

12.2.1 可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

的一阶微分方程称为可分离变量的微分方程, 其中 $f(x)$ 与 $g(y)$ 为连续函数.

若 $g(y) \neq 0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

得通解

$$G(y) = F(x) + C,$$

其中 $G(y), F(x)$ 分别表示 $\frac{1}{g(y)}, f(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数.

这种将微分方程中的变量分离开来, 然后求解的方法称为分离变量法.

可分离变量的微分方程还可以有如下形式

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x + N_1(x)N_2(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

其中 $M_1(x), M_2(y), N_1(x), N_2(y)$ 为已知的连续函数.

例 2.1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(x-1)^2(1+y^2)$ 的通解.

解: $y = \tan[(x-1)^3 + C]$, 其中 C 为任意常数.

例 2.2. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$ 的通解.

解: 当 $y \neq 0$ 时, 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 3x^2\,\mathrm{d}x.$$

从而

$$\ln|y| = x^3 + C_1 \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{C_1}e^{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{C_1}e^{x^3}.$$

令 $C = \pm e^{C_1}$, 便得原微分方程的通解

$$y = Ce^{x^3}.$$

此通解已包含解 $y = 0$.

例 2.3. 求解定解问题

$$y' = y^2 e^{2x}, \quad y|_{x=0} = 1.$$

解: 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$y^{-1} = -\frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

于是通解为

$$y = \frac{2}{-e^{2x} + 2C}$$

由初始条件得 $C = \frac{3}{2}$. 所以方程的特解为

$$y = \frac{2}{-e^{2x} + 3}.$$

例 2.4. 求下列方程的通解:

(1) $(x + xy^2)\,\mathrm{d}x - (x^2 y + y)\,\mathrm{d}y = 0$;

(2) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

解:

(1) $(1 + y^2) = C(1 + x^2)$ $(C > 0)$;

(2) $y' = -2\cos x \sin y$, $\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$.

12.2.2 齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的一阶微分方程称为齐次微分方程, 简称齐次方程.

例如方程

$$(xy - y^2)\,\mathrm{d}x - (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y = 0$$

是齐次方程. 因为原方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}.$$

齐次方程的解法

设齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入上述方程得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u),$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) - u.$$

这是一个变量可分离的微分方程, 分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

两端积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

记 $F(u)$ 为函数 $\frac{1}{f(u)-u}$ 的一个原函数, 则有通解

$$F(u) = \ln|x| + C.$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 得原方程的隐式通解

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

例 2.5. 求解方程

$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x).$$

解: 此方程为齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u(1 + \ln u),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分得

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C_1,$$

即

$$\ln y - \ln x = Cx \quad (C = \pm e^{C_1}).$$

从而得到原方程的通解

$$y = xe^{Cx}.$$

例 2.6. 求解方程

$$y^2\,\mathrm{d}x-(xy-x^2)\,\mathrm{d}y=0.$$

解: 方程为齐次方程. 变形后为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}.$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入上式得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1}.$$

移项整理后得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1}.$$

分离变量得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

两端积分得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C_1,$$

即

$$\ln|xu|=u-C_1.$$

从而得到原方程的通解

$$\ln|y|=\frac{y}{x}-C_1$$

或

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}\quad(C=\pm e^{-C_1}).$$

例 2.7. 求微分方程 $xy'-2\sqrt{xy}=y$ 满足 $y(1)=9$ 的解.

解: 方程变形得

$$y'=2\frac{\sqrt{xy}}{x}+\frac{y}{x}.$$

令 $u=\frac{\sqrt{xy}}{x}$, 则 $y=xu^2$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u^2+2xu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 故原方程化为

$$u^2+2xu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2u+u^2.$$

在 $u\neq 0$ 的情况下，有 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$. 解得

$$u=\ln|x|+C.$$

于是

$$y=x(\ln|x|+C)^2.$$

将 $x=1, y=9$ 代入上式, 得 $C=\pm3$. 所以解为

$$y=x(\ln|x|\pm3)^2.$$

利用变量代换将某些非齐次微分方程转化为齐次方程或可分离变量方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{12.2.1}$$

的方程可以经过变量代换化为可分离变量的方程. 这里 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 均为常数.

1. 若 $c_1 = c_2 = 0$

   方程(12.2.1)可化为齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

2. 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, 即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 且 c_1, c_2 不全为零

   方程(12.2.1)可化为齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{(a_2x + b_2y) + c_2}\right) = g(a_2x + b_2y).$$

   令 $u = a_2x + b_2y$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a_2 + b_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a_2 + b_2g(u),$$

   这是关于 u, x 的可分离变量微分方程.

3. 若 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, 即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 且 c_1, c_2 不全为零

   令 $\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$, 其中 (x_0, y_0) 是方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ 的解, 即两条直线的交点, 则方程(12.2.1)可化为齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right).$$

   求出解后, 代回原变量即可.

例 2.8. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+3}$ 的通解.

解: 令 $u = 2x + y$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2$. 代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2 = \frac{u - 1}{2u + 3}.$$

化简分离变量得

$$\left(2 + \frac{1}{u + 1}\right)\mathrm{d}u = 5\,\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$2u + \ln|u + 1| = 5x + C_1.$$

将 $u=2x+y$ 代入上式得通解

$$2y+\ln|2x+y+1|=x+C_1.$$

也即 $2x+y+1=Ce^{x-2y}$.

例 2.9. 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

解: 解方程组 $\begin{cases}x-y+1=0,\\x+y-3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_0=1,\\y_0=2.\end{cases}$ 令 $\begin{cases}u=x-1,\\v=y-2,\end{cases}$ 代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{u-v}{u+v}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}.$$

再令 $z=\frac{v}{u}$, 得 $v=uz$, 则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=z+u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}$. 代入上式得

$$z+u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=\frac{1-z}{1+z}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{1+z}{1-2z-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

两边积分得 $\ln u^2=-\ln|z^2+2z-1|+C_1$, 即 $u^2(z^2+2z-1)=C$. 将 $z=\frac{v}{u}$ 代入上式得 $v^2+2uv-u^2=C$. 再将 $u=x-1, v=y-2$ 代入上式得

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C.$$

因此方程的通解为

$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=C.$$

12.2.3 一阶线性微分方程

方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)\tag{12.2.2}$$

称为一阶线性微分方程, 其中 $P(x), Q(x)$ 为已知函数. 如果 $Q(x)\equiv 0$, 则称方程(12.2.2) 是一阶齐次线性微分方程, 否则称方程是 一阶非齐次线性微分方程.

一阶齐次线性微分方程的解法

考虑(12.2.2)所对应的齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0.\tag{12.2.3}$$

注意到方程(12.2.3)是可分离变量的, 分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\,\mathrm{d}x,$$

两端积分后得方程的通解

$$\ln|y|=-\int P(x)\,\mathrm{d}x+C_1$$

或

$$y=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\quad(C=\pm e^{C_1}).\tag{12.2.4}$$

例 2.10. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5x^4y=0$ 的通解.

解: 由公式(12.2.4)知, 通解为

$$y=Ce^{-\int 5x^4\,\mathrm{d}x}=Ce^{-x^5}.$$

一阶非齐次线性微分方程的解法

常数变易法是指将公式(12.2.4)中的常数 C 变易成 x 的待定函数 $C(x)$, 使它满足方程(12.2.2), 从而求出方程(12.2.2)的通解.

令

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{12.2.5}$$

将(12.2.5)代入(12.2.2), 得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y\\=&\left[C'(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}-P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\right]+P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\\=&C'(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x),\end{aligned}$$

从而 $C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$. 积分得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C.$$

将上式代入(12.2.5)得一阶非齐次线性微分方程(12.2.2)的通解公式

$$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right). \tag{12.2.6}$$

若将(12.2.6)改写成两项之和

$$y=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}+e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x,$$

则此式的第一项是(12.2.2)对应的齐次线性微分方程(12.2.3)的通解, 第二项是非齐次线性微分方程(12.2.2)的一个特解.

一阶非齐次线性微分方程的通解等于对应的齐次线性微分方程的通解与非齐次线性微分方程的一个特解之和.

例 2.11. 求解方程

$$y'\cos x+y\sin x=1.$$

解: 方程变形后得

$$y'+y\tan x=\frac{1}{\cos x}.$$

由求解公式(12.2.6)得

$$
\begin{aligned}
y =& e^{-\int \tan x \,\mathrm{d}x}\left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\int \tan x \,\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x + C\right) \\
=& \cos x\left(\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x + C\right) = \cos x(\tan x + C) = C\cos x + \sin x.
\end{aligned}
$$

例 2.12. 求解定解问题 $y' x \ln x - y = 1 + \ln^2 x,\ y|_{x=e} = 1.$

解: 原方程变形为

$$
y' - \frac{y}{x\ln x} = \frac{1+\ln^2 x}{x\ln x} = \frac{1}{x\ln x} + \frac{\ln x}{x}.
$$

由求解公式(12.2.6)求得通解

$$
\begin{aligned}
y =& e^{\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x}\left(\int\left(\frac{1}{x\ln x}+\frac{\ln x}{x}\right) e^{-\int \frac{1}{x\ln x}dx}\,\mathrm{d}x + C\right) \\
=& \ln x\left(\int\left(\frac{1}{x\ln x}+\frac{\ln x}{x}\right)\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x + C\right) = \ln x\left(\int\left(\frac{1}{x\ln^2 x}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + C\right) \\
=& \ln^2 x - 1 + C\ln x.
\end{aligned}
$$

再由定解条件得 $C = 1$. 因此所求特解为

$$
y = \ln^2 x - 1 + \ln x.
$$

例 2.13. 求解方程

$$
y\ln y\,\mathrm{d}x + (x - \ln y)\,\mathrm{d}y = 0.
$$

解: 将 y 视为自变量, x 为因变量, 方程为

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}.
$$

由求解公式(12.2.6)得

$$
\begin{aligned}
x =& e^{-\int \frac{1}{y\ln y}\,\mathrm{d}y}\left(\int \frac{1}{y} e^{\int \frac{1}{y\ln y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right) \\
=& e^{-\ln\ln y}\left(\int \frac{1}{y} e^{\ln\ln y}\,\mathrm{d}y + C\right) \\
=& \frac{1}{\ln y}\left(\int \frac{1}{y}\ln y\,\mathrm{d}y + C\right) = \frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y + C\right).
\end{aligned}
$$

12.2.4 伯努利方程

方程

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{12.2.7}
$$

称为伯努利 (Bernoulli) 方程, 其中 $P(x), Q(x)$ 为已知函数, 且 $n \neq 0, 1$ 为常数.

当 $n=0$ 或 $n=1$ 时, 方程(12.2.7)是一阶线性微分方程. 当 $n\neq 0,1$ 时, 伯努利方程不是线性微分方程, 利用变量代换可化为一阶线性微分方程.

当 $y\neq 0$ 时, 方程(12.2.7)两边同除以 y^n 得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x).$$

令 $z=y^{1-n}$, 则有

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+P(x)z=Q(x)\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

利用一阶非齐次线性微分方程得其通解为

$$z=e^{-\int(1-n)P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right),$$

即方程(12.2.7)的通解为

$$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)Q(x)e^{-\int(1-n)P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right).$$

当 $n>0$ 时, 伯努利方程还有解 $y=0$.

例 2.14. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy+y^3$ 的通解.

解: 方程两边除以 y^3, 得

$$y^{-3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy^{-2}=1.$$

令 $z=y^{-2}$, 则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+2zx=-2.$$

此方程通解为

$$z=e^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}\left(\int -2e^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=e^{-x^2}\left(-2\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x+C\right).$$

将 $z=y^{-2}$ 代入, 得原方程通解

$$y^{-2}=e^{-x^2}\left(-2\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x+C\right).$$

除此通解外, 原方程还有解 $y=0$.

例 2.15. 求微分方程 $3xy'-y-3xy^4\ln x=0$ 满足初值条件 $y(1)=1$ 的特解.

解: 方程两边除以 $3xy^4$, 得

$$y^{-4}y'-\frac{1}{3x}y^{-3}=\ln x.$$

令 $z=y^{-3}$, 则方程化为

$$z'+\frac{1}{x}z=-3\ln x.$$

此方程通解为

$$z=-\frac{3}{2}x\ln x+\frac{3}{4}x+\frac{C}{x}.$$

将 $z = y^{-3}$ 代入, 得原方程通解

$$y^{-3} = -\frac{3}{2}x\ln x + \frac{3}{4}x + \frac{C}{x}.$$

将 $x = 1, y = 1$ 代入求得 $C = \frac{1}{4}$. 所以原方程的特解为

$$y^{-3} = -\frac{3}{2}x\ln x + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4x}.$$

12.2.5 思考与练习

练习 303. 求解微分方程

$$y\,\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

解: 原方程变形为

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4x - x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right)dx.$$

两边积分得

$$\ln|y| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C_1.$$

所以方程的通解为

$$(x-4)y^4 = Cx.$$

练习 304 (铀的衰变规律). 放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其它元素, 铀的含量就不断减少, 这种现象称为衰变. 由原子物理学知道, 铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 已知 $t = 0$ 时, 铀的含量为 M_0, 求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 的变化规律.

解: 铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间的导数 $\frac{dM}{dt}$. 由已知条件知

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M,$$

其中 $\lambda(\lambda > 0)$ 是常数, 称为衰变系数. 由题意, 相应的初值条件为:

$$M|_{t=0} = M_0.$$

利用分离变量法求得通解

$$M = Ce^{-\lambda t}.$$

由初值条件确定 $C = M_0$, 于是铀的衰变规律为

$$M = M_0e^{-\lambda t}.$$

练习 305. 求一曲线, 使曲线上任意一点到该点的法线与 x 轴的交点之间的距离为常数 a.

解: 设曲线方程为 $y = y(x)$, 则曲线上任意点 $M(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

令 $Y = 0$, 得法线在 x 轴上的截距 $X = x + yy'$. 因此法线与 x 轴的交点为 $P(x + yy', 0)$. 于是

$$|MP| = \sqrt{(x - (x + yy'))^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(yy')^2 + y^2}.$$

由题意知 $|MP| = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = a$, 解出 y' 得微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad (y \neq 0).$$

分离变量后得

$$\frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm dx,$$

积分后得

$$-\sqrt{a^2 - y^2} = C_1 \pm x$$

或

$$(x + C)^2 + y^2 = a^2 \quad (y \neq 0, C = \pm C_1).$$

上式表示圆心在 x 轴, 半径为 a 的圆族（不包含与 x 轴的交点）, 该圆族中的任意曲线都满足题设条件.

练习 306. 求微分方程 $y' = \sin^2(x - y + 1)$ 的通解.

解: 作变量替换 $u = x - y + 1$, 则 $u' = 1 - y'$. 代入方程得 $u' = 1 - \sin^2 u$. 通解 $\tan(x - y + 1) = x + C$.

练习 307. 求微分方程 $f(xy)y\,\mathrm{d}x + g(xy)x\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解: 作变量替换 $u = xy$, 则 $y = \frac{u}{x}$, $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$. 代入方程得 $f(u)y\,\mathrm{d}x + g(u)(\,\mathrm{d}u - y\,\mathrm{d}x) = 0$, 即 $(f(u) - g(u))y\,\mathrm{d}x + g(u)\,\mathrm{d}u = 0$. 从而有方程

$$(f(u) - g(u))\frac{u}{x}\,\mathrm{d}x + g(u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

通解 $\ln|x| = -\int \frac{g(u)\,\mathrm{d}u}{u(f(u)-g(u))} + C$.

练习 308. 求解定解问题

$$\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2,\ y(1) = 1.$$

解: 方程变形得

$$y' = \frac{y - 2x}{x + 2y} = \frac{\frac{y}{x} - 2}{1 + 2\frac{y}{x}}.$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u - 2}{1 + 2u},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u-2}{1+2u}-u=-2\frac{1+u^2}{1+2u}.$$

分离变量后得

$$\frac{1+2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=-\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x.$$

两端积分得

$$\ln(1+u^2)+\arctan u=-2\ln|x|+C,$$

即

$$\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}=C.$$

再由定解条件得 $C=\frac{\pi}{4}+\ln 2$. 故原方程的特解为

$$\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}=\frac{\pi}{4}+\ln 2.$$

练习 309. 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4x+6y+4}{2x+3y+6}$.

解: $-6x+3y+3\ln|2x+3y+3|=C$, $2x+3y+3=0$.

练习 310. 求解微分方程 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+4}{x-y-6},\\ y(2)=-5.\end{cases}$

解: $\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln[(x-1)^2+(y+5)^2]$

练习 311. 求微分方程 $(y^2-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解: 将 y 视为自变量, x 为因变量, 方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=y.$$

由求解公式(12.2.6)得

$$\begin{aligned}x=&e^{-\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\left(\int ye^{\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right)\\=&\frac{1}{y}\left(\int y^2\,\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{3}y^3+C\right)=\frac{C}{y}+\frac{1}{3}y^2.\end{aligned}$$

将初值条件 $y|_{x=1}=1$ 代入上式, 得 $C=\frac{2}{3}$. 因此所求特解为

$$x=\frac{2}{3y}+\frac{1}{3}y^2.$$

练习 312. 一曲线过原点, 且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x+y$, 求该曲线的方程.

解: 设曲线方程为 $y = y(x)$, 由题意得方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y, \quad \text{即} \quad \frac{dy}{dx} - y = 2x.$$

初值条件为

$$y|_{x=0} = 0.$$

由公式(12.2.6)求得通解

$$y = e^{\int dx}\left(\int 2xe^{-\int dx}dx + C\right) = e^{x}\left(\int 2xe^{-x}dx + C\right) = Ce^{x} - 2x - 2.$$

由初值条件得 $C = 2$, 因此所求曲线方程为

$$y = 2(e^{x} - x - 1).$$