10.4 对面积的曲面积分

10.4.1 对面积的曲面积分的定义与性质

曲面的质量

设 Σ 是一片光滑曲面, 面密度为 $\rho(x,y,z)$, 则曲面的质量为

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

定义 4.1. 设 Σ 是一片光滑曲面, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界. 将 Σ 任意分成 n 小块 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$, 仍用 ΔS_i 表示第 i 个小块的面积, 又在 ΔS_i 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 作和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时, 这和的极限存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分, 记作 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, 即

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数, $f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 称为被积表达式, Σ 称为积分曲面, $\mathrm{d}S$ 称为曲面面积微元.

对面积的曲面积分也常称为第一类曲面积分.

曲面的质量可表示为

$$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

当被积函数为常数 1 时, $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$ 等于曲面 Σ 的面积.

如果 Σ 是分片光滑的 (即 Σ 由有限片光滑曲面所组成), 则规定函数在 Σ 上的曲面积分等于函数在 Σ 的各光滑片上的曲面积分之和. 若 Σ 是闭曲面, 则曲面积分的符号常写作 $\oiint\limits_{\Sigma}$.

当函数 $f(x,y,z)$ 在积分曲面 Σ 上连续时, 对面积的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 存在.

对面积的曲面积分的性质

(1) 若 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 和 $\iint\limits_{\Sigma}g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 都存在, 则 $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S$ 也存在, 且有

$$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\pm\iint\limits_{\Sigma}g(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

(2) 若 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 存在, k 为常数时, 则 $\iint\limits_{\Sigma}kf(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 也存在, 且有

$$\iint\limits_{\Sigma}kf(x,y,z)\,\mathrm{d}S=k\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

(3) 若 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 且 $\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 和 $\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 都存在, 则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 也存在, 且有

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

10.4.2 对面积的曲面积分的计算

设光滑曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 给出, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果积分曲面 Σ 由方程 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 给出, 也可类似地把对面积的曲面积分化为相应的二重积分.

例 4.1. 计算 $\iint\limits_{S}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 所截的顶部.

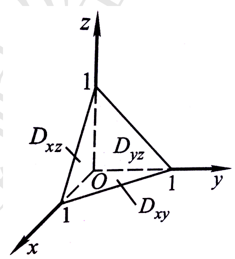
解: 曲面 S 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 定义域 D 为圆域 $x^2+y^2\le a^2-h^2$. 由于

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S\frac{\mathrm{d}S}{z}&=\iint_D\frac{a}{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-r^2}r\,\mathrm{d}r\\&=2\pi a\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r}{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r=2\pi a\ln\frac{a}{h}.\end{aligned}$$

例 4.2. 计算 $\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, 其中 Σ 是由平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.



解: 将 Σ 在平面 $x+y+z=1, x=0, y=0$ 及 $z=0$ 上的部分依次记为 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 及 Σ_4, 则所求曲面积分等于这四个部分上的曲面积分之和.

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right),$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}=1-\ln 2,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}=1-\ln 2,$$

$$\iint_{\Sigma_4} \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

所以

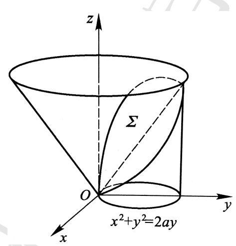
$$\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2.$$

例 4.3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 被旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 截出的顶部.

解: Σ 关于 zOx, yOz 坐标面对称, 故 $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S=0, \iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S=0$.

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S &= \iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{2-x^2-y^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

例 4.4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ay\ (a>0)$ 所截下的部分.



解: Σ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2ay$. 又 $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2}$, 所以

$$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}}\sqrt{2}(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}\sigma.$$

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $r\le 2a\sin\theta, 0\le\theta\le\pi$. 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta}\sqrt{2}(r^2\cos\theta\sin\theta+(r\cos\theta+r\sin\theta)r)r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\sqrt{2}(2a)^4}{4}\int_0^{\pi}(\cos\theta\sin\theta+(\cos\theta+\sin\theta))\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 4a^4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.\end{aligned}$$

例 4.5. 计算 $\iint\limits_{S}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$, 其中

(1) $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

(2) $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

解:

(1) $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S a^2\,\mathrm{d}S = 4\pi a^2 \cdot a^2 = 4\pi a^4$.

(2) $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S 2az\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} 2az\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} 2az\,\mathrm{d}S$, 其中

$$S_1 : z_1 = a + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}, (x, y) \in D,$$

$$S_2 : z_2 = a - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}, (x, y) \in D,$$

$$D : x^2 + y^2 \le a^2.$$

由于 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$, 故

$$\iint_{S_1} 2az\,\mathrm{d}S = \iint_D 2a(a + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)})\frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{S_2} 2az\,\mathrm{d}S = \iint_D 2a(a - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)})\frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S =& 4\iint_D \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ =& 4a^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 8a^4\pi.\end{aligned}$$

例 4.6. 计算 $\iint\limits_\Sigma z^2\,\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

解: 因为积分曲面具有轮换对称性, 即

$$\iint\limits_\Sigma z^2\,\mathrm{d}S = \iint\limits_\Sigma x^2\,\mathrm{d}S = \iint\limits_\Sigma y^2\,\mathrm{d}S,$$

所以

$$\iint\limits_\Sigma z^2\,\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint\limits_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S = \frac{R^2}{3}\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}S = \frac{4}{3}\pi R^4.$$

10.4.3 思考与练习

练习 268. 计算 $\iint\limits_\Sigma x^2 y^2\,\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

解: 因为

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

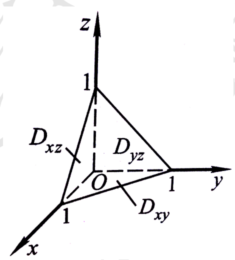
所以

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

又 D_{xy} 为 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \le R^2\}$, 于是

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} x^2y^2 \, \mathrm{d}S &= \iint_{D_{xy}} x^2y^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, \mathrm{d}\sigma \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^R r^5 \cos^2\theta \sin^2\theta \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, \mathrm{d}r = \frac{2}{15}\pi R^6.\end{aligned}$$

练习 269. 计算 $\oiint_{\Sigma} z \, \mathrm{d}S$, 其中 Σ 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.



解: 将 Σ 在平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x + y + z = 1$ 上的部分依次记为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 及 Σ_4, 则所求曲面积分等于这四个部分上的曲面积分之和.

Σ_1 的方程是 $x = 0$, 它在 yOz 面上的投影区域就是 Σ_1 自身, 即由直线 $y = 0, z = 0$ 及 $y + z = 1$ 所围成的三角形区域. 又在 Σ_1 上

$$\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{1 + 0^2 + 0^2} = 1,$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} z \, \mathrm{d}S &= \iint_{D_{yz}} z\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{D_{yz}} z \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^1 z \, \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}y = \int_0^1 z(1 - z) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

同理可得 $\iint_{\Sigma_2} z \, \mathrm{d}S = \frac{1}{6}$.

因在 Σ_3 上, $z = 0$, 故 $\iint_{\Sigma_3} z \, \mathrm{d}S = 0$.

Σ_4 的方程可写成 $z = 1 - x - y$, 它在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 是由直线 $x = 0, y = 0$ 及 $x + y = 1$ 所围成的三角形区域. 又在 Σ_4 上

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3},$$

因此

$$\iint_{\Sigma_4} z\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} (1-x-y)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}\sigma = \sqrt{3}\iint_{D_{xy}} (1-x-y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

于是

$$\oiint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} z\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} z\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_3} z\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_4} z\,\mathrm{d}S = \frac{2+\sqrt{3}}{6}.$$