诚实考试吾心不虚，公平竞争方显实力，
考试失败尚有机会，考试舞弊前功尽弃。

上海财经大学《 高等数学 I(工科类) 》课程考试卷（A）闭卷

课程代码 102543 课程序号____________

2023 —2024 学年第一学期

参考答案

一. 填空题(本题共 6 小题，每小题 2 分，满分 12 分. 把答案填在各题中横线上.)

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left[2+\dfrac{f(x)}{x^2}\right]=\underline{4}$.

2. 设 $f(x)$ 是可导函数，且 $f'(x)=\sin^2[\sin(x+1)]$，$f(0)=4$，$f(x)$ 的反函数是 $x=\varphi(y)$，则 $\varphi'(4)=\underline{\dfrac{1}{\sin^2(\sin 1)}}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f^{(2023)}(0)=\underline{\dfrac{1}{2024}}$.

4. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的渐近线为 $\underline{x=-\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}}$.

5. $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\underline{\tan x-\frac{1}{\cos x}+C}$.

6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}+|x|\right]dx=\underline{\frac{\pi^2}{4}}$.

二. 选择题（本题共 6 小题，每小题 2 分，满分 12 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在括号内.）

1. 设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 均为 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数，$y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且 $f(x)\neq 0$，$y=\varphi(x)$ 有间断点，则下列选项中正确的是（ D ）.

(A) $f(\varphi(x))$ 有间断点　　(B) $\varphi(f(x))$ 有间断点

(C) $\varphi^2(x)$ 有间断点　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 有间断点

2. 已知 $y=f(x)$ 为可导偶函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{2x}=-2$，则曲线在 $(-1,2)$ 处的切线方程为（ A ）

(A) $y=4x+6$　　(B) $y=-4x-2$　　(C) $y=x+3$　　(D) $y=-x+1$

3. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f''(x)<0$，且 $f(1)=f'(1)=1$，则（ A ）.

(A) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$

(B) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$

(C) 在$(1-\delta,1)$内均有$f(x)<x$，在$(1,1+\delta)$内有$f(x)>x$

(D) 在$(1-\delta,1)$内均有$f(x)>x$，在$(1,1+\delta)$内有$f(x)<x$

4. 设$F(x)$是连续函数$f(x)$的一个原函数，"$M \Leftrightarrow N$"表示"M的充要条件是N"，则必有（　A　）.

(A) $F(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$是奇函数　　(B) $F(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$是偶函数

(C) $F(x)$是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$是周期函数　　(D) $F(x)$是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$是单调函数

5. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant e\end{cases}$，若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛，则（　C　）.

(A) $\alpha<-2$　　(B) $\alpha>2$　　(C) $0<\alpha<2$　　(D) $-2<\alpha<0$

6. 如果$f(x)$在$[-1,1]$上连续，且平均值为 2，则$\int_1^{-1}f(x)dx$的值为（　C　）.

(A) -1　　(B) 1　　(C) -4　　(D) 4

三. 计算题（本题共 8 小题,每小题 8 分,满分 64 分.）

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}$.

解：因为$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{i}{n}}}{n+1}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{i}{n}}}{n}$，　而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}$$

由夹逼定理得

$$\text{原极限}=\frac{1}{\ln 2}.$$

2. 设$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-x}, & x>0 \\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$，试确定常数$a$和$b$，使得$f(x)$在$x=0$处可导.

解：若$f(x)$在$x=0$处可导，则$f(x)$在$x=0$处连续. 又

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-x}\right)=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b=f(0),$$

故当$b=1$时，$f(x)$在$x=0$处连续. 又

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\dfrac{1}{2}$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=a$，

令$f'_+(0)=f'_-(0)$，则$a=-\dfrac{1}{2}$. 因此$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1$时函数在$x=0$处可导.

3. 设$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，已知$f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)dx$.

解: 令$2x-t=u$，则$dt=-du$，当$t=0$时，$u=2x$；当$t=x$时，$u=x$. 则

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(2x-t)dt &= -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)du\\ &=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)du=2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du,\end{aligned}$$

从而有

$$2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du=\frac{1}{2}\arctan x^2.$$

两边对x求导,得

$$2\int_x^{2x}f(u)du+2x[2f(2x)-f(x)]-4xf(2x)+xf(x)=\frac{x}{1+x^4},$$

即

$$2\int_x^{2x}f(u)du=xf(x)+\frac{x}{1+x^4}.$$

令$x=1$，立即可得

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

4. 已知两曲线$y=f(x)$与$y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$在点$(0,0)$处的切线相同，写出切线方程，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解：显然$f(0)=0$，点$(0,0)$处切线的斜率为

$$f'(0)=\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\bigg|_{x=0}=1,$$

所以所求切线方程为$y=x$，极限

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$$

5．设$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，且当$x\geqslant 0$时有$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知$F(0)=1$，$F(x)>0$，求$f(x)$．

解：$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，即

$$F'(x)=f(x),$$

因此

$$2F(x)F'(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

两边同时积分得

$$2\int F(x)dF(x)=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx.$$

利用分部积分

$$\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=-\int xe^x d\frac{1}{1+x}=-\frac{xe^x}{1+x}+\int\frac{e^x(1+x)}{1+x}dx$$

$$=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+C=\frac{e^x}{1+x}+C,$$

因此$F^2(x)=\dfrac{e^x}{1+x}+C$．由于$F(0)=1$，$F(x)>0$，故可得$C=0$，$F(x)=\sqrt{\dfrac{e^x}{1+x}}$，所以

$$f(x)=F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{e^x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+x}\right)=\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

6．设$y=f(x)$是$[0,1]$上任一非负连续函数，试问：是否存在$x_0\in(0,1)$，使得$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积等于$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的梯形的面积？又$f(x)$在$(0,1)$内可导，$f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，那么x_0是否唯一？

解：存在性：设$F(x)=x\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$，则

$$F'(x)=\int_x^1 f(t)dt-xf(x),\ \ F(0)=F(1)=0,$$

由罗尔定理得$F'(x_0)=0$，即

$$\int_{x_0}^1 f(t)dt=x_0 f(x_0).$$

另解：令$\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)dt$，因$\varphi(0)=-\int_0^1 f(t)dt<0$，$\varphi(1)=f(1)>0$，有

零点定理可得，在$(0,1)$内至少存在一点x_0使得$\int_{x_0}^1 f(t)dt-x_0 f(x_0)=0$.

唯一性：令$\varphi(x)=\int_x^1 f(t)dt-xf(x)$，则

$$\varphi'(x)=-2f(x)-xf'(x),$$

因为$f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，所以$-2f(x)-xf'(x)<0$，即$\varphi'(x)<0$，所以$\varphi(x)$严格单调减，故x_0唯一.

7. 求反常积分$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

解：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2}dx$，

设$x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 tdt$，当$x\to-\infty$时，$t\to\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^+$；当$x\to+\infty$时，$t\to\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$，则

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 tdt}{\frac{9}{16}\sec^4 t}dt=\frac{16}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{16}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

8. 给出函数$y=|x|-\dfrac{|x|}{1+x}$的单调性、极值、渐近线以及凹凸性和拐点等，并作出草图.

解：(1) 函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，为非奇非偶函数，非周期函数，过原点.

(2) 由于$y=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{1+x}, & x<0\\ \dfrac{x^2}{1+x}, & x\geqslant 0\end{cases}$，当$x>0$时，

$$y'=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2},$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2}{1+x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+x}=0.$$

同理，当$x<0$时，$y'=\dfrac{-x(x+2)}{(1+x)^2}$，$y'_-(0)=0$，故

$$y'=\begin{cases}\dfrac{-x(x+2)}{(1+x)^2}, & x<0\\ \dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2}, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

令$y'=0$，得$x=-2$，$x=0$.

(3) 当$x>0$时，$y''=\dfrac{(2x+2)(1+x)^2-(x^2+2x)\times 2(1+x)}{(1+x)^4}=\dfrac{2}{(1+x)^3}$，

$$y''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}-0}{x-0}=2.$$

同理，当$x<0$时，$y''=\dfrac{-2}{(1+x)^3}$，$y''_-(0)=-2$，故$y''(0)$不存在，且

$$y''=\begin{cases}-\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x<0\\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x>0\end{cases}.$$

(4) 因$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|x}{1+x}=\infty$，无水平渐进线;

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x|x|}{1+x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x|x|}{1+x}=+\infty$，

故$x=-1$为垂直渐近线;

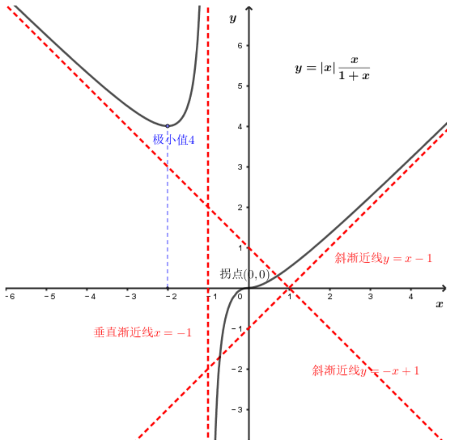
$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|x}{x(1+x)}=1,\quad b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|x|x}{1+x}-x\right)=-1,$$

故$y=x-1$为当$x\to+\infty$的渐近线. 同理$y=-x+1$为当$x\to-\infty$时的渐近线.

(5) 列表:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	$-$	不存在	$+$
y		极小值 4			$(0,0)$ 拐点	

(6) 作图:



四. 证明题(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分.)

1. 已知$f(x)$为连续函数,且$f(x)>0$,设$m=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$,$n=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$,则有$m\leqslant n$.

证明:只需说明$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \leqslant \ln\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

令$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=c$,则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx-\ln\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx-\ln c$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx-\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln c dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\frac{f(x)}{c}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{c}-1\right)\right]dx$$

因$\ln(1+x)\leqslant x(x>-1)$,因此

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{c}-1\right)\right]dx\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{f(x)}{c}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{c}dx-1=\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx-1=0,$$

所以$m\leqslant n$.

2．证明圆盘$x^2+y^2\leqslant a^2$绕$x=-b(b>a>0)$旋转所成旋转体得体积为$2\pi^2a^2b$．

证：记由曲线$x=\sqrt{a^2-y^2}$，$x=-b$，$y=-a$，$y=a$围成的图形绕$x=-b$旋转所得的旋转体的体积为V_1，由曲线$x=-\sqrt{a^2-y^2}$，$x=-b$，$y=-a$，$y=a$围成的图形绕$x=-b$旋转所得的旋转体的体积为V_2，则

$$V=V_1-V_2=\int_{-a}^{a}\pi\left(\sqrt{a^2-y^2}+b\right)^2dy-\int_{-a}^{a}\pi\left(-\sqrt{a^2-y^2}+b\right)^2dy$$

$$=\int_{-a}^{a}4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\,dy\ \overset{y=a\sin t}{=\!=\!=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi a^2b\cos^2t\,dt=8\pi a^2b\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=2\pi^2a^2b.$$