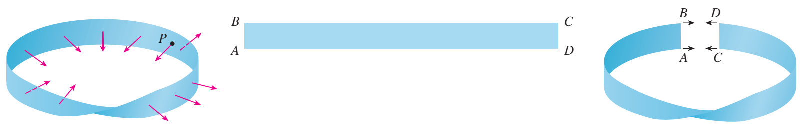


10.5 对坐标的曲面积分

10.5.1 对坐标的曲面积分的概念和性质

曲面的侧

设连通曲面 Σ 上到处都有连续变动的切平面 (或法线), M 为曲面 Σ 上的一点, 曲面在 M 处的法线有两个方向: 当取定其中一个指向为正方向时, 则另一个指向就是负方向.

设 M_0 为 Σ 上任一点, L 为 Σ 上任一经过点 M_0, 且不超出 Σ 边界的闭曲线. 又设 M 为动点, 它在 M_0 处与 M_0 有相同的法线方向, 且有如下特性 : 当 M 从 M_0 出发沿 L 连续移动, 这时作为曲面上的点 M, 它的法线方向也连续地变动. 最后当 M 沿 L 回到 M_0 时 ,

- 若这时 M 的法线方向仍与 M_0 的法线方向相一致, 则说曲面 Σ 是双侧曲面;
- 若与 M_0 的法线方向相反, 则说曲面 Σ 是单侧曲面.

单侧曲面的例子: 莫比乌斯 (Möbius) 带

通常我们遇到的曲面都有两个侧. 对封闭曲面而言, 有 外侧和内侧 ; 又如旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 或者用 $z = f(x, y)$ 表示的曲面, 有上侧和 下侧.

所谓取定曲面的侧, 就是指定曲面上各点处的法向量的指向. 比如

- 对于曲面 $z = f(x, y)$, 如果取定的法向量是朝上的, 则就取定曲面的上侧;
- 对于封闭曲面, 如果取定的法向量是由内指向外的, 则就取定曲面的外侧.

这种指定了法向量指向的曲面就称为有向曲面.

流体流向曲面一侧的流量

设 Σ 是一有向曲面, 某不可压缩的流体 (假设密度为 1) 以流速

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

通过 Σ, 求在单位时间内流过 Σ 指定侧的流体质量, 即流量 Φ.

由于流体流经 Σ 上各点处的速度是不同的, 且 Σ 为一曲面, 因此采用定积分的思想方法来解决该问题.

$$\begin{aligned}\Phi &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\boldsymbol{n}\Delta S_i\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}],\end{aligned}$$

其中 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta S_i$, 曲面在该点处的单位法向量

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha_i)\boldsymbol{i} + (\cos\beta_i)\boldsymbol{j} + (\cos\gamma_i)\boldsymbol{k},$$

$(\Delta S_i)_{yz} = (\cos\alpha_i)\Delta S_i, (\Delta S_i)_{zx} = (\cos\beta_i)\Delta S_i, (\Delta S_i)_{xy} = (\cos\gamma_i)\Delta S_i$ 分别称为有向小曲面 ΔS_i 在 yOz 面, zOx 面和 xOy 面上的投影.

定义 5.1 (对坐标的曲面积分的定义). 设 Σ 为光滑 (或逐片光滑) 的有向曲面, 函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i(ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积), ΔS_i 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$, (ξ_i,η_i,ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点. 如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

存在, 则称此极限为函数 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上 对坐标 x,y 的曲面积分, 并记作 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 即

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy},$$

其中 $R(x,y,z)$ 称为被积函数, Σ 称为 (有向) 积分曲面, $R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 称为 被积表达式, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 称为 有向曲面 Σ 在 xOy 面上的投影微元.

类似地可以定义函数 $P(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 y,z 的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 及函数 $Q(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上 对坐标 z,x 的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$, 分别为

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz},$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}.$$

以上三个曲面积分也称为第二类曲面积分.

当 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在有向光滑曲面 Σ 上连续时, 对坐标的曲面积分是存在的.

在应用上出现较多的是以上三种积分合并起来的形式

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

为简便起见上式又写成

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果 Σ 是封闭曲面, 通常记为

$$\oiint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

上述流向 Σ 指定侧的流量 Φ 可表示为

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

对坐标的曲面积分的性质

(1) 如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&\iint_{\Sigma_1} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(2) 设 Σ 是有向曲面, $-\Sigma$ 表示与 Σ 取相反侧的有向曲面, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{-\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&-\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

关于对坐标的曲面积分, 必须要注意积分曲面所取的侧.

10.5.2 对坐标的曲面积分的计算

设有向光滑曲面 Σ 是由方程 $z = z(x,y)$ 给出的曲面的上侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}, 函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

若 Σ 是由方程 $z = z(x,y)$ 给出的曲面的下侧, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

类似地, 若 Σ 由方程 $x = x(y,z)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

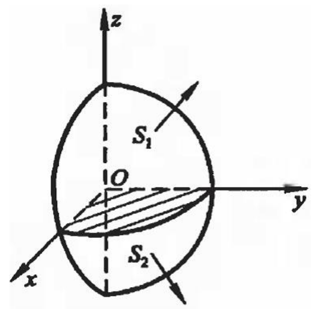
等式右端的符号这样确定: 若积分曲面 Σ 是由方程 $x = x(y,z)$ 所给出的曲面的前侧, 则符号取正; 反之, 若 Σ 取后侧, 则符号取负.

若 Σ 由方程 $y = y(z,x)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

等式右端的符号这样确定: 若积分曲面 Σ 是由方程 $y = y(z,x)$ 所给出的曲面的右侧, 则符号取正; 反之, 若 Σ 取左侧, 则符号取负.

例 5.1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.



解: 曲面 Σ 在 xOy 面上的投影为

$$D_{xy} = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} \,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

例 5.2. 计算

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在 $x \ge 0, y \ge 0$ 部分并取球面外侧.

解: 将曲面 Σ 分为上侧 $\Sigma_1 : z_1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 和下侧 $\Sigma_2 : z_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. 它们在 xOy 面上的投影区域都是单位圆在第一象限部分. 于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} xyz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\Sigma_1} xyz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2} xyz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}} -xy\sqrt{1 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= 2 \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1 - r^2} \,\mathrm{d}r = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

例 5.3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一象限部分, 取上侧.

解: 由对称性得

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 3 \iint\limits_{\Sigma} z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

由于曲面 Σ 在 xOy 面上的投影为

$$D_{xy} = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\},$$

因此

$$\begin{aligned} 3\iint_{\Sigma} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =& 3\iint_{D_{xy}} (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r(1-r^2)\,\mathrm{d}r \\ =&\frac{3}{2}\pi \int_0^1 r(1-r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

例 5.4. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解:

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_{\Sigma_{前}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_{后}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_{D_{yz}} (\sqrt{R^2-y^2-z^2}+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint_{D_{yz}} (-\sqrt{R^2-y^2-z^2}+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 2\iint_{y^2+z^2 \le R^2} \sqrt{R^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x &= \iint_{\Sigma_{右}} (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma_{左}} (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &= \iint_{D_{zx}} (\sqrt{R^2-z^2-x^2}-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint_{D_{zx}} (-\sqrt{R^2-z^2-x^2}-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &= 2\iint_{z^2+x^2 \le R^2} \sqrt{R^2-z^2-x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{\Sigma_{上}} (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_{下}} (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\iint_{x^2+y^2 \le R^2} \sqrt{R^2-z^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

综上可得

$$\oiint_{\Sigma} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi R^3.$$

10.5.3 思考与练习

练习 270. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧, $\Omega = \{(x,y,z)|0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$.

解: 把有向曲面 Σ 分成以下六部分:

$$\Sigma_1 : z = c(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)\text{的上侧;}$$

$$\Sigma_2 : z = 0(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)\text{的下侧;}$$

$$\Sigma_3 : x = a(0 \le y \le b, 0 \le z \le c)\text{的前侧;}$$

$$\Sigma_4 : x = 0(0 \le y \le b, 0 \le z \le c)\text{的后侧;}$$

$$\Sigma_5 : y = b(0 \le x \le a, 0 \le z \le c)\text{的右侧;}$$

$$\Sigma_6 : y = 0(0 \le x \le a, 0 \le z \le c)\text{的左侧.}$$

除 Σ_3, Σ_4 外, 其余四片曲面在 yOz 面上的投影为零, 因此

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma_3} x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma_4} x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} a^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_{xy}} 0^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = a^2 bc.$$

类似地可得

$$\oiint\limits_{\Sigma} y^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = b^2 ac, \quad \oiint\limits_{\Sigma} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c^2 ab.$$

于是所求曲面积分为 $(a + b + c)abc$.