第十二章　微分方程习题课

黄学海

Email: huang.xuehai@sufe.edu.cn

上海财经大学　数学学院

目录

一阶微分方程求解

1. 一阶标准类型方程求解
   四个标准类型: 可分离变量方程，齐次方程，线性方程，全微分方程
   关键：辨别方程类型，掌握求解步骤
2. 一阶非标准类型方程求解
   1. 变量代换法：代换自变量、因变量、某组合式
   2. 积分因子法：选积分因子，解全微分方程

例

求下列方程的通解

1. $y' + \frac{1}{y^2} e^{y^3+x} = 0;$
2. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$
3. $y' = \frac{1}{2x-y^2};$
4. $y' = -\frac{6x^3+3xy^2}{3x^2y+2y^3}.$

例

求下列方程的通解

1. $y' + \frac{1}{y^2} e^{y^3+x} = 0$;
2. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
3. $y' = \frac{1}{2x-y^2}$;
4. $y' = -\frac{6x^3+3xy^2}{3x^2y+2y^3}$.

解:

1. 分离变量, $\frac{1}{3} e^{-y^3} = e^x + C$
2. 齐次方程, 分 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情况讨论, $\arcsin \dfrac{y}{|x|} = \ln|x| + C$;
3. 化为一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - 2x = -y^2$, $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$;
4. 齐次方程或全微分方程, $3x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = C$.

例

求下列方程的通解

1. $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$;
2. $2x \ln x \,\mathrm{d}y + y(y^2 \ln x - 1)\,\mathrm{d}x = 0$;
3. $y' = \frac{3x^2+y^2-6x+3}{2xy-2y}$;
4. $y^2(x - 3y)\,\mathrm{d}x + (1 - 3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

例

求下列方程的通解

1. $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$;
2. $2x\ln x\,\mathrm{d}y + y(y^2\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = 0$;
3. $y' = \frac{3x^2+y^2-6x+3}{2xy-2y}$;
4. $y^2(x-3y)\,\mathrm{d}x + (1-3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

解:

1. 先化为 $(xy)' = y\ln(xy)$, 令 $u = xy$, 再分离变量, $y = \frac{1}{x}e^{cx}$;
2. 改写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{2x\ln x}y = -\frac{y^3}{2x}$, 伯努利方程, 令 $z = y^{-2}$, $y^{-2} = \frac{1}{2}\ln x + \frac{C}{\ln x}$;
3. 化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3(x-1)^2+y^2}{2y(x-1)}$, 令 $t = x-1$ 的齐次方程, $y^2 - 3(x-1)^2 = C(x-1)$;
4. 化为 $y^2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y - 3y^2(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = 0$, 乘以 y^{-2} 得 $x\,\mathrm{d}x + y^{-2}\,\mathrm{d}y - 3(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = 0$, 凑微分得通解 $\frac{1}{2}x^2 - y^{-1} - 3xy = C$.

例

设 $F(x)=f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0$, $f(x)+g(x)=2e^x$.

1. 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;
2. 求出 $F(x)$ 的表达式.

例

设 $F(x)=f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0$, $f(x)+g(x)=2e^x$.

1. 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;
2. 求出 $F(x)$ 的表达式.

解:

1. $$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x) \\ &= [g(x)+f(x)]^2-2f(x)g(x)=(2e^x)^2-2F(x). \end{aligned}$$

   所以 $F(x)$ 满足一阶线性非齐次微分方程 $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$.
2. 通解 $F(x)=e^{2x}+Ce^{-2x}$, 将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入可得解 $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$.

目录

二阶微分方程求解

1. 可降阶微分方程的解法：降阶法
   1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$：逐次积分求解
   2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y')$：令 $p(x) = \dfrac{dy}{dx}$，得 $\dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$
   3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y, y')$：令 $p(y) = \dfrac{dy}{dx}$，得 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$
2. 二阶常系数线性微分方程的解法

例

求微分方程 $\begin{cases} y'' + y = x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ y'' + 4y = 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ *满足条件* $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, *在* $x = \frac{\pi}{2}$ *处连续且可微的解.*

例

求微分方程 $\begin{cases} y'' + y = x, & x \le \frac{\pi}{2}, \\ y'' + 4y = 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ *满足条件* $y(0) = 0, y'(0) = 0$, *在* $x = \frac{\pi}{2}$ *处连续且可微的解.*

解: 当 $x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 解满足 $\begin{cases} y'' + y = x, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$ 特征根 $r_{1,2} = \pm i$. 设特解 $y^* = Ax + B$, 代入方程解得 $y^* = x$. 故通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$. 利用 $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ 得 $y = -\sin x + x$, $x \le \frac{\pi}{2}$.

当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时，解满足 $\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(\pi/2) = -1 + \pi/2, y'(\pi/2) = 1. \end{cases}$ 其通解为 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. 定解问题的解为
$y = -\frac{1}{2} \sin 2x + (1 - \frac{\pi}{2}) \cos 2x$, $x > \frac{\pi}{2}$.
故所求解为

$$y = \begin{cases} -\sin x + x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2} \sin 2x + (1 - \frac{\pi}{2}) \cos 2x, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

例

设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且满足方程

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $f(x)$.

例

设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且满足方程

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $f(x)$.

解: $f(x) = \sin x - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f''(x) = -\sin x - f(x).$$

问题化为解初值问题 $\begin{cases} f''(x) + f(x) = -\sin x, \\ f(0) = 0, f'(0) = 1. \end{cases}$ 解得 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x.$

思考

设 $\varphi'(x) = e^x + \sqrt{x}\int_0^{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}u)\,\mathrm{d}u$, $\varphi(0) = 0$, 如何求 $\varphi(x)$?

思考

设 $\varphi'(x) = e^x + \sqrt{x}\int_0^{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}u)\,\mathrm{d}u$, $\varphi(0) = 0$, 如何求 $\varphi(x)$?

解: 对积分换元, 令 $t = \sqrt{x}u$, 则

$$\varphi'(x) = e^x + \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \varphi''(x) = e^x + \varphi(x).$$

问题化为解初值问题 $\begin{cases} \varphi''(x) - \varphi(x) = e^x, \\ \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1. \end{cases}$ 解得 $\varphi(x) = \frac{1}{4}e^x(2x+1) - \frac{1}{4}e^{-x}$.

例

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的函数.

1. 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$$

   变换为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程;
2. 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

解:

1. 由反函数的导数公式知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y'}$, 即 $y' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1$, 上式两端对 x 求导, 得:
$$y'' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}(y')^2 = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{y'' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{(y')^2} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$
代入原微分方程得 $y'' - y = \sin x$.
2. 上述方程对应的齐次方程的通解 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. 设上述非齐次方程的特解为 $y^* = A\cos x + B\sin x$, 代入可得解 $y^* = -\frac{1}{2}\sin x$. 从而非齐次方程的通解为
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$
由初始条件得 $y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$.