10.6 两类曲面积分之间的联系

两类曲面积分的联系

设 Σ 是有向光滑曲面, 其上任一点 (x,y,z) 处的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

其向量形式为

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中 $\boldsymbol{v}=(P,Q,R)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=(\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$ 称为有向曲面微元.

例 6.1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角.

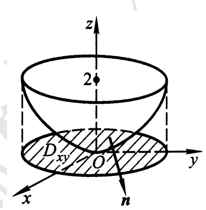
解:

$$\iint_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

例 6.2. 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.



解: 由于 Σ 取下侧, 故 $\cos\gamma<0$, 从而

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}(z_x',z_y',-1)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(x,y,-1).$$

于是由两类曲面间的联系, 有

$$\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\frac{zx-x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S.$$

由于曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$, 且

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

故

$$\iint_{\Sigma}\frac{zx-x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{x}{2}(x^2+y^2)-x^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

注意到上式右端中 $\frac{z}{2}(x^2+y^2)$ 在 D_{xy} 上的二重积分等于零, 于是得

$$\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r = -4\pi.$$