# 习题课

# 重积分

一、 重积分计算的基本方法

二、重积分计算的基本技巧

三、重积分的应用

## 一、重积分计算的基本方法 — 累次积分法

1. 选择合适的坐标系

使积分域多为坐标面(线)围成;

被积函数用此坐标表示简洁或变量分离.

2. 选择易计算的积分序

积分域分块要少, 累次积分易算为妙 .

3. 掌握确定积分限的方法

$\left\{\begin{array}{l}\text{图示法}\\\text{列不等式法}\end{array}\right.$ (从内到外: 面、线、点)

## 二、重积分计算的基本技巧

1. 交换积分顺序的方法

2. 利用对称性或质心公式简化计算

3. 消去被积函数绝对值符号 $\begin{cases}\text{分块积分法}\\ \text{利用对称性}\end{cases}$

4. 利用扩展积分域进行计算

5. 利用重积分换元公式

## 三、重积分的应用

1. 几何方面

   面积 ( 平面域或曲面域 ) ， 体积 ， 形心

2. 物理方面

   质量, 转动惯量, 质心, 引力

3. 其它方面

   证明某些结论等

**例** 比较下列积分值的大小关系:

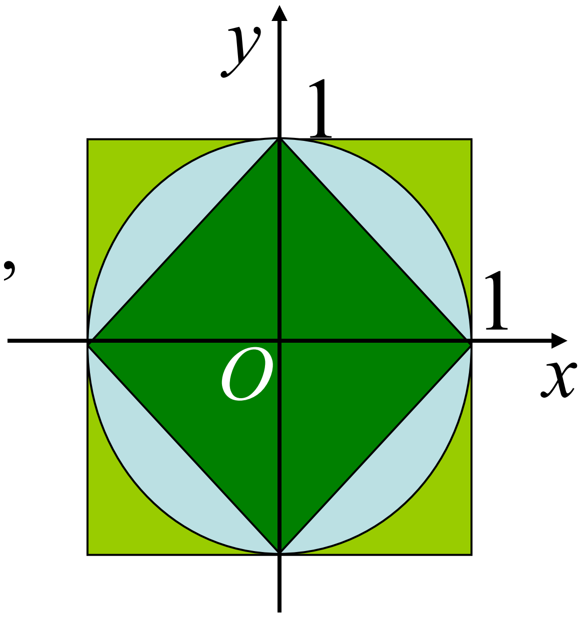
$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

**解:** $I_1, I_2, I_3$ 被积函数相同, 且非负,

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$

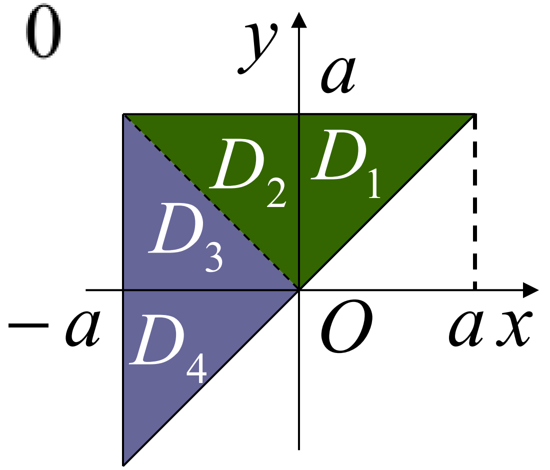


**例** $D=\{(x,y)\,|\,-a\le x\le a, x\le y\le a\}$, $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a, x\le y\le a\}$, 则

$$\iint_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\quad A \quad}$$

$(A)$ $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$  $(B)$ $2\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$(C)$ $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$  $(D)$ $0$




**提示**: 如图，$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$

由对称性知 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$

$$\cos x\sin y\begin{cases}在\ D_3\cup D_4\ 上是关于\ y\ 的奇函数\\ 在\ D_1\cup D_2\ 上是关于\ x\ 的偶函数\end{cases}$$

**例** 设区域 $D$ 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1$ 围成，

求 $\iint\limits_D (x^5 y-1)dxdy$

**解:** 由积分区域对称性，得

$$\iint\limits_D (x^5 y-1)dxdy = -\iint\limits_D dxdy$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx$$

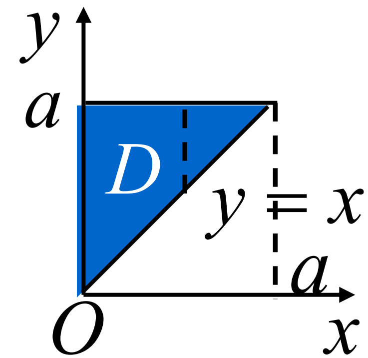
$$= -\pi$$

**例** 证明:

$$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)\,\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x$$

**提示:** 左端积分区域如图,

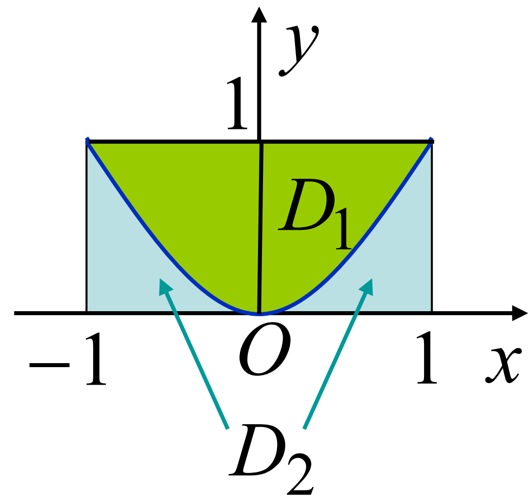
交换积分顺序即可证得.




左边= $\int_0^a \mathrm{d}x \int_x^a \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}y$ = 右边

**例** 计算二重积分

(1) $I = \iint_D \operatorname{sgn}(y - x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1;$



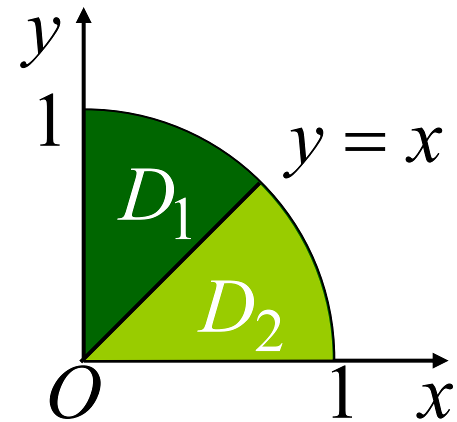

**解:** (1) 作辅助线 $y = x^2$ 把 $D$ 分成

$D_1, D_2$ 两部分, 则

$$I = \iint_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1} \mathrm{d}y - \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{x^2} \mathrm{d}y = \frac{2}{3}$$

(2) $I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$ 为圆域 $x^2+y^2\le 1$在第一象限部分.




**解:** $I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_D(|x-y|+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作辅助线 $y=x$ 将$D$ 分成 $D_1$ , $D_2$ 两部分

$$=2\iint_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}(x-y)dx+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}$$

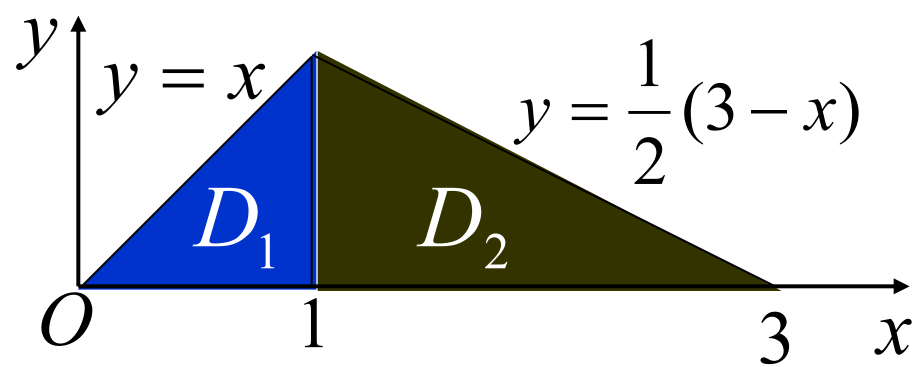
**说明:** 若不用对称性, 需分块积分以去掉绝对值符号.

**例** 交换积分顺序计算 $I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{3-x}{2}} \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y$

**解：** 积分域如图.

$$I = \iint_{D_1} \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{3-2y} \mathrm{e}^y \mathrm{d}x$$




$$= 3\int_0^1 (1 - y)\mathrm{e}^y \mathrm{d}y$$

$$= 3(\mathrm{e} - 2)$$

**例** 计算 $\iint_D e^x xydxdy$，其中D为由 $y$ 轴、曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 所围区域

**解:** $\iint_D e^x xydxdy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xydy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1-x^2)dx \ =\frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 de^x$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)\ +\frac{1}{2}(-e^x x^2+2e^x x-2e^x)\Big|_0^1$$

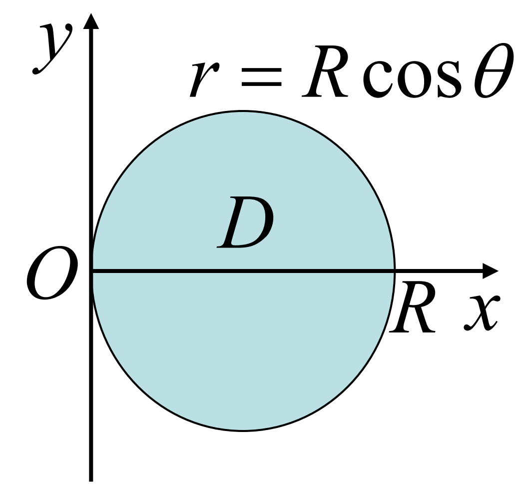
$$=\frac{1}{2}(e-1)+\frac{1}{2}(-e+2)\ =\frac{1}{2}$$

**例** 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

其中$D$ 为圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

**解:** 利用极坐标

$$D: \begin{cases} 0 \le r \le R\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$




$$原式 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}R^3(\pi - \frac{4}{3})$$

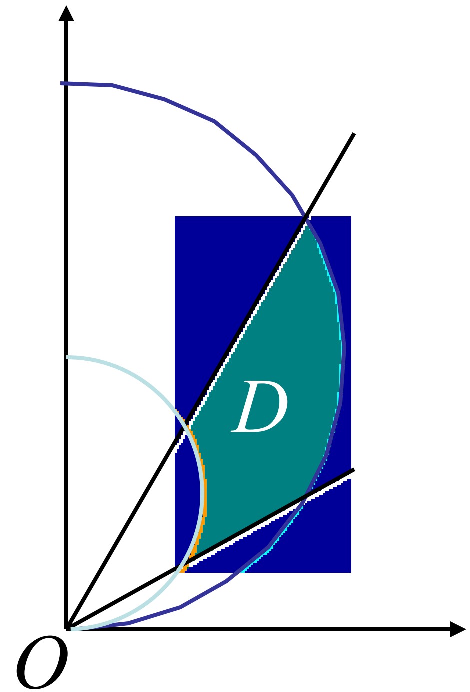
**例** 计算 $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$为由圆$x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

**解:** $x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$

$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$

$y-\sqrt{3}x=0 \quad \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$




$$\therefore \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=\frac{15}{4}\pi-\frac{15}{8}\sqrt{3}$$

**例** 计算二重积分$I=\iint_D (x^2+xye^{x^2+y^2})\,dxdy$, 其中:

(1) $D$为圆域 $x^2+y^2\le 1$;

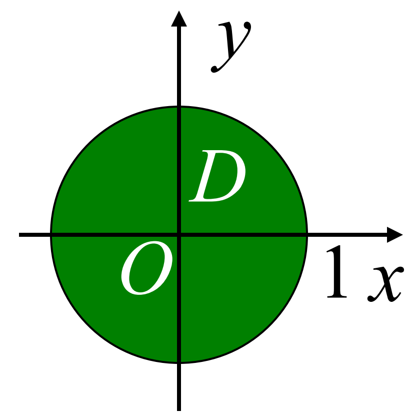
(2) $D$由直线$y=x$, $y=-1$, $x=1$ 围成 .

**解:** (1) 利用对称性.

$$I=\iint_D x^2\,dx\,dy+\iint_D xye^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3\,dr=\frac{\pi}{4}$$



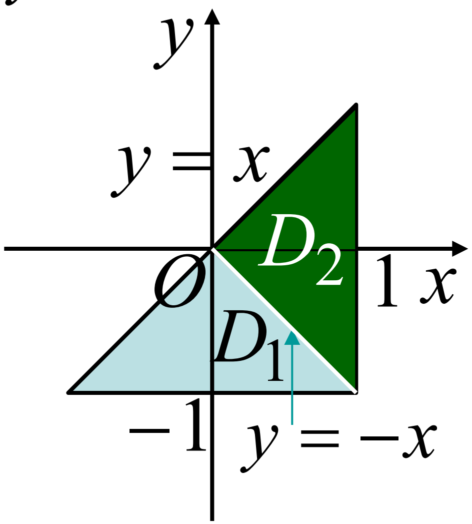
$\boxed{I=\iint_D (x^2+xy\mathrm{e}^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ $D$由 $y=x$ , $y=-1$ , $x=1$围成

**(2)** 积分域如图: 添加辅助线 $y=-x$,将$D$ 分为 $D_1, D_2$,利用对称性 , 得

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1} xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}\mathrm{d}y+0+0=\frac{2}{3}$$



**例** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，**证明**

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

**证:**左端 $= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$

$$= \iint_D f(x)\, f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

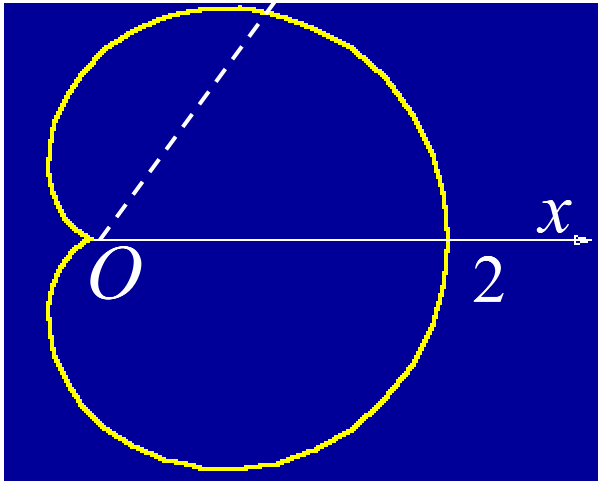
$$D: \begin{cases} a \le x \le b \\ a \le y \le b \end{cases}$$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D [f^2(x) + f^2(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D f^2(x)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ = 右端

**例** 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D$ 是曲线$r=1+\cos\theta(0\le\theta\le\pi)$ 与极轴围成




**解:** $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$

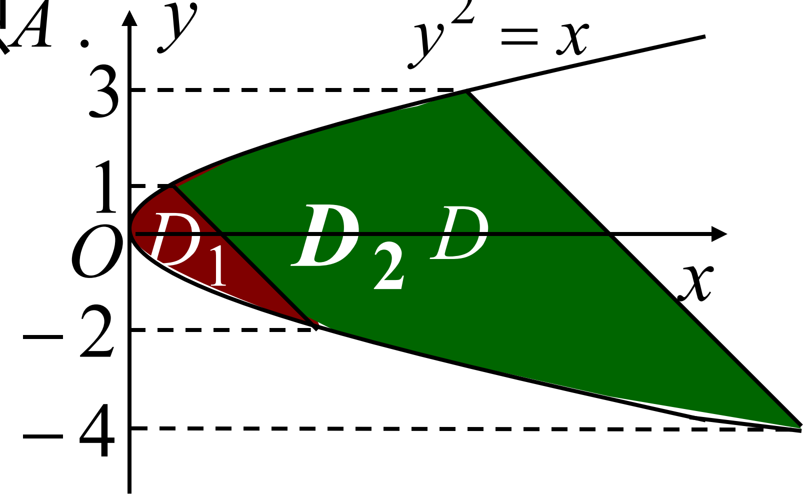
$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta(1+\cos\theta)^4d\theta$$

$$=16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos^8\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{11}tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^9 tdt=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}\quad=\frac{16}{15}$$

**例** 求抛物线 $x=y^2$ 与直线 $x+y-2=0$ 及 $x+y-12=0$ 所围区域 $D$ 的面积 $A$ .




**解:**如图所示 $D=D_2\setminus D_1$,

$$A=\iint_{D_2}\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-4}^{3}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{12-y}\mathrm{d}x-\int_{-2}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}\mathrm{d}x$$

$$=\left[12y-\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-4}^{3}-\left[2y-\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{1}=52\frac{2}{3}$$

**注:** 计算 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 时, 若 $f(x,y)$ 可扩展到 $D_1$ 上可积 , 则也可利用上述方法简化计算.

**例** 计算二重积分 $\iint_D (5x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是由曲线 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 所围成的平面域 .

**解:** $I = 5\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 3\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

积分区域 $(x+1)^2+(y-2)^2 \le 3^2$

其形心坐标为: $\overline{x}=-1,\ \overline{y}=2$

面积为: $A=9\pi$

$= 5\cdot\overline{x}A + 3\cdot\overline{y}A$

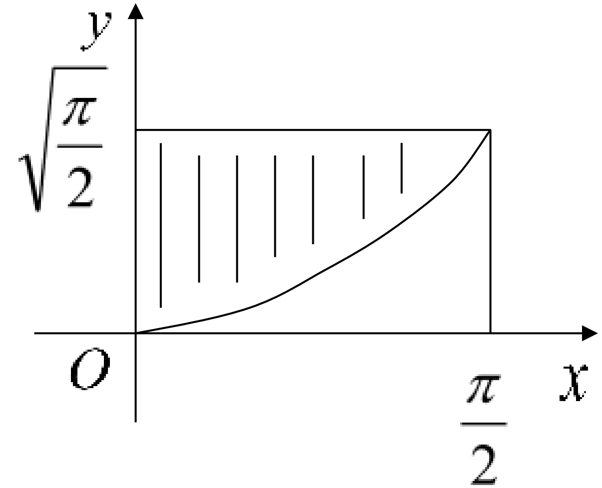
$= [5\cdot(-1)+3\cdot 2]A = 9\pi$

形心坐标

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**例** 求积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{1+\left(\tan y^2\right)^{\sqrt{2}}}dy$




**解:** 交换积分次序得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{1+\left(\tan y^2\right)^{\sqrt{2}}}dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{1+\left(\tan y^2\right)^{\sqrt{2}}}dy\int_0^{y^2} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{2y}{1+\left(\tan y^2\right)^{\sqrt{2}}}dy \overset{t=y^2}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\left(\tan t\right)^{\sqrt{2}}}dt$$

$$\overset{u=\tan t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^{\sqrt{2}})(1+u^2)}du = \frac{\pi}{4}$$

首先广义积分收敛

**例** 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx$

**解:** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})} \cdot (-\frac{1}{t^2}) dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(t^2+1)(t^\alpha+1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^2+1)(x^\alpha+1)} dx$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \arctan x \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

**(09-10,六)**

# 作业

高等数学习题集

P184　1 (2)(3)(7)(8), 2 (2) , 3(1)(2)(3)(11)