8.5 方向导数与梯度

8.5.1 方向导数

定义 5.1. 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义, $\boldsymbol{l}$ 为从点 P_0 出发的射线. $P(x,y,z)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 上且含于 $U(P_0)$ 内的任一点, 以 ρ 表示 P 与 P_0 两点间的距离. 若极限

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta f}{\rho}$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数, 记作 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$, $f_l'(P_0)$ 或 $f_l'(x_0,y_0,z_0)$.

沿 x 轴、y 轴和 z 轴的正向的方向分别为 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$. 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 关于 x (y 或 z) 偏导数存在的充分必要条件是 $f(x,y,z)$ 沿方向 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $-\boldsymbol{e}_1$ ($\boldsymbol{e}_2$ 和 $-\boldsymbol{e}_2$ 或 $\boldsymbol{e}_3$ 和 $-\boldsymbol{e}_3$) 的方向导数都存在且为相反数, 且 $\frac{\partial f}{\partial e_1}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$ $\Big(\frac{\partial f}{\partial e_2}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial e_3}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\Big)$.

方向导数 $\frac{\partial f}{\partial e_1}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 存在, 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 不一定存在.

$f(x,y,z)=|x|$ 在 $(0,0,0)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_1$ 方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial e_1}\Big|_{(0,0,0)}=1$, 但偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)}$ 却不存在.

例 5.1. 设 $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$. 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(2,-2,1)$ 的方向导数.

解: 过点 $P_0(1,1,1)$, 以 $\boldsymbol{l}=(2,-2,1)$ 为方向向量的直线为

$$x=2t+1,\quad y=-2t+1,\quad z=t+1,\quad t\ge0.$$

由于 $f(P_0)=3$,

$$f(P)=f(2t+1,-2t+1,t+1)=t^3+7t^2+t+3,$$
$$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=3t.$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^3+7t^2+t}{3t}=\frac{1}{3}.$$

例 5.2. 设 $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$. 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,-2,1)$ 的方向导数.

解: 过点 $P_0(1,1,1)$, 以 $\boldsymbol{l}=(1,-3,0)$ 为方向向量的直线为

$$x=t+1,\quad y=-3t+1,\quad z=1,\quad t\ge0.$$

由于 $f(P_0)=3$,

$$f(P)=f(t+1,-3t+1,1)=9t^2-5t+3,$$

$$\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{10}t.$$

因此

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \lim_{t \to 0^+} \frac{9t^2 - 5t}{\sqrt{10}t} = -\frac{5}{\sqrt{10}}.$$

方向导数与偏导数的关系

定理 5.1. 设函数 $u = f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微, 则函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在, 且

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\\ =&f'_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f'_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma.\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦. 记

$$\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

表示与 $\boldsymbol{l}$ 同方向的单位向量.

可以类似定义一般 n 元函数的方向导数, 并有以上类似定理.

若函数 $u = f(x,y,z)$ 不可偏导, 但可能有沿任意方向的方向导数.

函数 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处两个偏导数都不存在, 故不可微. 但在点 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数都存在,

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 1.$$

例 5.3. 设 $f(x,y,z) = x^{y-z}$, 求 f 在点 $(2,1,2)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l} = (2,1,-2)$ 的方向导数.

解: 由于

$$f'_x(2,1,2) = (y-z)x^{y-z-1}|_{(2,1,2)} = -\frac{1}{4},$$

$$f'_y(2,1,2) = x^{y-z}\ln x|_{(2,1,2)} = \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$f'_z(2,1,2) = -x^{y-z}\ln x|_{(2,1,2)} = -\frac{1}{2}\ln 2,$$

$$\boldsymbol{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}(2,1,-2) = \frac{1}{3}(2,1,-2),$$

所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(2,1,2)} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\ln 2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 2 \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{6}(3\ln 2 - 1).$$

8.5.2 梯度

定义 5.2. 设函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处偏导数存在, 称向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)},\ \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)},\ \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}\right)$$

为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度, 记作 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)$, $\mathbf{grad}f|_{P_0}$ 或 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.

n 元函数的梯度定义为

$$\mathbf{grad}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

由梯度概念, 方向导数计算公式可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial l}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}=\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)\cdot\boldsymbol{e}_l=|\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)|\cos\theta,$$

其中 θ 为向量 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)$ 与向量 $\boldsymbol{l}$ 之间的夹角.

由此看出, 若函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 可微分, 则当 $\boldsymbol{l}$ 与 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)$ 方向一致时, 就有

$$\frac{\partial f}{\partial l}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}=|\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)|.$$

于是得到下述结果:

设函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 可微分, 且 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)$ 不是零向量, 则

(1) $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处沿梯度 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)$ 方向的方向导数最大, 最大值等于 $|\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)|$; 而沿梯度反方向的方向导数最小, 最小值等于 $-|\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)|$.

(2) $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处沿与 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)$ 垂直方向的方向导数等于零.

简单地说, 可微函数在一点处沿着梯度的方向具有最大的增长率, 最大增长率等于梯度的模.

说明梯度概念的例子

假设在平面的原点 $O(0,0)$ 处有一个点热源, 于是在平面的每一点 $P(x,y)$ 处都对应了确定的温度. 设温度 T 与该点到热源的距离 r 成反比, 比例系数为常数 $k>0$, 即

$$T(x,y)=\frac{k}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由 $T_x=-\frac{kx}{r^3}$, $T_y=-\frac{ky}{r^3}$, 得梯度

$$\mathbf{grad}T(x,y)=(T_x,T_y)=-\frac{k}{r^3}(x,y).$$

上式说明, $\mathbf{grad}T(x,y)$ 与向径 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ 的方向相反, 即梯度指向原点. 根据梯度的意义知, 温度沿着指向原点的方向上升最快; 反之, 沿着背离原点的方向下降得最快.

例 5.4. 已知函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$, 求

(1) 函数在点 $(1,1,1)$ 的梯度;

(2) 函数在点 $(1,1,1)$ 处沿从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,2)$ 的直线方向的方向导数;

(3) 函数在点 $(1,1,1)$ 处的增长率最大和最小的方向.

解:

(1) $\mathbf{grad}u=(2x,4y,6z)$, 故 $\mathbf{grad}u|_{(1,1,1)}=(2,4,6)$.

(2) $\boldsymbol{l}=(1,2,1), \boldsymbol{e}_l=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, 所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=(2,4,6)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)=\frac{16}{\sqrt{6}}.$$

(3) 函数在点 $(1,1,1)$ 处的增长率最大和最小的方向分别为

$$\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\quad -\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3).$$

8.5.3 数量场与向量场

如果对于空间区域 G 内的任一点 M, 都有一个确定的数量 $f(M)$, 则称在这空间区域 G 内确定了一个数量场(数量场、密度场等). 一个数量场可用一个数量函数 $f(M)$ 来确定.

如果与点 M 对应的是一个向量 $\boldsymbol{F}(M)$, 则称在这空间区域 G 内确定了一个向量场(力场、速度场等). 一个向量场可用一个向量函数 $\boldsymbol{F}(M)$ 来确定, 其中

$$\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k},$$

其中 $P(M),Q(M),R(M)$ 是点 M 的数量函数.

向量函数 $\mathbf{grad}f(M)$ 确定了一个向量场——梯度场, 它是由数量场 $f(M)$ 产生的. 通常称函数 $f(M)$ 为这个向量场的势, 而这个向量场又称为 势场. 任意一个向量场不一定是势场, 因为它不一定是某个数量函数的梯度场.

例 5.5. 试求数量场 $\frac{m}{r}$ 所产生的梯度场, 其中常数 $m>0$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为原点 O 与点 $M(x,y,z)$ 间的距离.

解:

$$\mathbf{grad}\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)=-\frac{m}{r^2}\boldsymbol{e}_r,$$

其中 $\boldsymbol{e}_r=\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)$.

力学解释

- $-\frac{m}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ 表示位于原点 O 质量为 m 的质点对位于点 M 质量为 1 的质点的引力.
- 这引力的大小与两质点的质量的乘积成正比、而与它们的距离平方成反比, 这引力的方向由点 M 指向原点.
- 因此数量场 $\frac{m}{r}$ 的势场即梯度场 $\mathbf{grad}\frac{m}{r}$ 称为引力场, 而函数 $\frac{m}{r}$ 称为引力势.

8.5.4 思考与练习

练习 224. 求 $f(x,y)=x^2+2xy-y$ 在点 $(2,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(2,-1)$ 的方向导数.

解: 由于

$$f_x=2x+2y,\quad f_y=2x-1,$$

所以

$$f_x(2,1)=6,\quad f_y(2,1)=3,\quad \boldsymbol{e}_l=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1).$$

故

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{2}{\sqrt{5}}f_x(2,1)-\frac{1}{\sqrt{5}}f_y(2,1)=\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

练习 225. 求 $f(x,y)=\sin(x+y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$ 的方向导数.

解: 由于

$$f_x(0,0)=\cos(x+y)|_{(0,0)}=1,\quad f_y(0,0)=\cos(x+y)|_{(0,0)}=1,$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x(0,0)\cos\theta+f_y(0,0)\sin\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

练习 226. 求函数 $z=x^y$ 在任意点处的梯度.

解: 由于

$$z_x=yx^{y-1},\quad z_y=x^y\ln x,$$

所以

$$\nabla z=(yx^{y-1},x^y\ln x).$$

练习 227. 设 $z=f(x,y)=xe^y$.

(1) 求出 f 在点 $P(2,0)$ 处沿从 P 到 $Q\left(\frac{1}{2},2\right)$ 方向的变化率;

(2) f 在点 $P(2,0)$ 处沿什么方向具有最大的增长率, 最大增长率为多少?

解:

(1) 设 $\boldsymbol{e}_l$ 是与 $\overrightarrow{PQ}$ 同向的单位向量, 即 $\boldsymbol{e}_l=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, 又 $\mathbf{grad}f(x,y)=(e^y,xe^y)$, 所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(2,0)}=\mathbf{grad}f(2,0)\cdot\boldsymbol{e}_l=(1,2)\cdot\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=1.$$

(2) $f(x,y)$ 在点 $P(2,0)$ 处沿 $\mathbf{grad}f(2,0)=(1,2)$ 方向具有最大的增长率, 最大增长率为

$$|\mathbf{grad}f(2,0)|=\sqrt{5}.$$

练习 228. 设 $f(x,y,z)=x\sin(yz)$, 求 $\mathbf{grad}f(1,3,0)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,3,0)}$, 其中 $\boldsymbol{l}=(1,2,-1)$.

解: 由于

$$f_x=\sin(yz),\quad f_y=xz\cos(yz),\quad f_z=xy\cos(yz),$$

所以

$$\mathbf{grad}f(1,3,0)=(f_x,f_y,f_z)|_{(1,3,0)}=(0,0,3).$$

又因为

$$\boldsymbol{e}_l=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2-1),$$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,3,0)}=0\times\frac{1}{\sqrt{6}}+0\times\frac{2}{\sqrt{6}}+3\times\frac{-1}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}.$$