12.5 线性微分方程解的结构

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{12.5.1}$$

当 $f(x) \neq 0$ 时, 方程(12.5.1)称为非齐次线性微分方程. 当 $f(x) = 0$ 时, 方程(12.5.1), 即

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{12.5.2}$$

称为齐次线性微分方程. 当 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ 均为常数时, 方程(12.5.1)称为常系数线性微分方程.

二阶线性微分方程的一般形式为

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x). \tag{12.5.3}$$

微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{12.5.4}$$

是对应于二阶非齐次线性微分方程(12.5.3)的齐次线性微分方程

定理 5.1 (齐次线性微分方程的叠加原理). 设函数 $y = y_1(x)$ 及 $y = y_2(x)$ 是齐次线性微分方程(12.5.4)的解, 则对于任何常数 C_1 和 C_2, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是方程(12.5.4)的解.

定义 5.1. 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为定义在区间 (a, b) 内的 n 个函数. 如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得当 $x \in (a, b)$ 时恒等式

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n = 0$$

成立, 则称这 n 个函数在区间 (a, b) 内线性相关; 否则称为线性无关.

例如, $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在任何区间 (a, b) 内都是线性相关的.
$1, x, x^2$ 在任何区间 (a, b) 内都是线性无关的.

定理 5.2. 设 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程(12.5.4)的两个线性无关的特解, 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程(12.5.4)的通解 (其中 C_1, C_2 是任意常数).

例如, 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x$ 和 $y_2 = \sin x$, 且 $\frac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

定理 5.3. 设 y^* 是二阶非齐次线性微分方程(12.5.3)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

的一个特解, Y 是齐次线性微分方程(12.5.4)的通解, 则

$$y = Y + y^*$$

是二阶非齐次线性微分方程(12.5.3)的通解.

例如, 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$, 对应的齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

因此所给方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x.$$

定理 5.4. 设二阶非齐次线性微分方程(12.5.3)右端 $f(x)$ 是几个函数之和, 如

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x),$$

而 y_1^* 和 y_2^* 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则 $y_1^* + y_2^*$ 是方程(12.5.3)的特解.

例如, 考察方程 $y'' + y = x + \cos 2x$.

方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y_1^* = x$, 方程 $y'' + y = \cos 2x$ 有特解 $y_2^* = -\frac{1}{3}\cos 2x$, 所以方程 $y'' + y = x + \cos 2x$ 有特解 $y^* = x - \frac{1}{3}\cos 2x$.

例 5.1. 设 y_1, y_2, y_3 是二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

的解, 且 $\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \neq k$. 证明: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$ 是该方程的通解, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 5.2. 已知 $y_1 = 3, y_2 = x^2 + 3, y_3 = e^x + x^2 + 3$ 都是二阶非齐次线性方程 $(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x - 2)y = 6x - 6$ 的解, 其中 C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是(　　).

(A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1$

(B) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_1 - y_3) + y_2 + y_3$

(C) $C_1(y_1 + y_2) + C_2(y_1 + y_3) + y_1$

(D) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_1 - y_3) + \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$

D

例 5.3. 已知微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 有三个特解 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$, 求此方程满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 3$ 的特解.

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq 常数.$$

因而 $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 线性无关. 故原方程的通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x.$$

代入初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 3$, 得 $C_1 = -1, C_2 = 2$. 所以所求特解为 $y = 2e^{2x} - e^x$.