# 第七章 空间解析几何

## 7.1 空间直角坐标系

### 空间直角坐标系

**空间直角坐标系的建立**

在空间取一个定点 $O$, 作三条以 $O$ 点为原点的相互垂直的数轴, 依次叫作 $x$ 轴（横轴）, $y$ 轴（纵轴）和 $z$ 轴（竖轴）. 这三条数轴具有相同的长度单位, 它们的正方向符合右手法则. 由此建立了空间直角坐标系. 点 $O$ 叫做空间直角坐标系的原点.

**卦限**

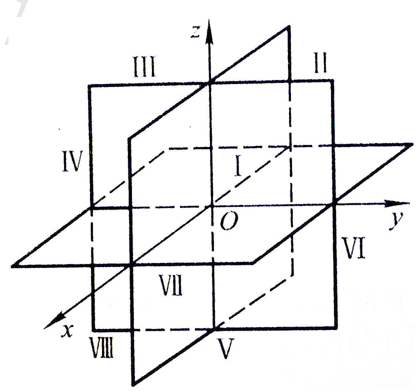
过两两垂直的坐标轴, 可以得到三个互相垂直的平面 (坐标面), 分别称为$xOy$ 面、$yOz$ 面和$zOx$ 平面, 这三个平面把整个空间分成八个部分, 每一部分叫作一个卦限.

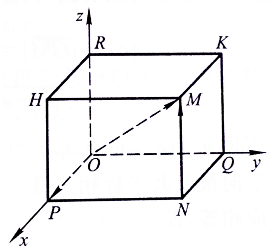
### 点的坐标

设 $M$ 是空间的一点, 过 $M$ 作三个平面分别垂直于 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴并交 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴于 $P, Q, R$ 三点. 点 $P$, $Q, R$ 分别称为点 $M$ 在 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴上的投影. 设这三个投影在 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴上的坐标依次为 $x, y$ 和 $z$, 则空间一点 $M$ 就唯一地确定了一个有序数组 $(x, y, z)$.

反之, 对给定的有序数组 $(x, y, z)$, 在空间也得到一个点与之对应. 这样建立了空间的点与有序数组 $(x, y, z)$ 之间的一一对应关系. 称 $(x, y, z)$ 为点 $M$ 的坐标, 记作 $M(x, y, z)$, 其中 $x, y, z$ 分别称为点 $M$ 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

**推论 1.1.** 过点 $M(x, y, z)$ 分别垂直于 $x, y, z$ 轴的平面与三个坐标轴的交点坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$.






**推论** 1.2. $xOy$ 面上点的坐标为 $(x,y,0)$, $xOz$ 面上点的坐标为 $(x,0,z)$, $yOz$ 面上点的坐标为 $(0,y,z)$.

**推论** 1.3. $x$ 轴上点的坐标是 $(x,0,0)$, $y$ 轴上点的坐标是 $(0,y,0)$, $z$ 轴上点的坐标是 $(0,0,z)$.

**空间中两点的距离公式**

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点, 则 $M_1, M_2$ 两点的距离为

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间中两点的距离公式.

一般地, $n$ 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $n$ 维空间的点, 并用 $\mathbb{R}^n$ 表示 $n$ 维空间. 特别地, $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ 为实数轴, $\mathbb{R}^2$ 表示平面.

**例** 1.1. 求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

**解**: 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$, 即 $\Delta M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

**例** 1.2. 求到点 $A(1,2,1)$, $B(2,-1,3)$ 等距离的点的轨迹.

**解**: 设动点坐标为 $M(x,y,z)$, 则由条件得

$$|MA|^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2,$$

$$|MB|^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2,$$

由 $|MA|=|MB|$ 得

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2.$$

化简得到点 $A, B$ 等距离的点的轨迹为

$$x-3y+2z=4.$$

该动点的轨迹为一平面.