# 第八章　多元函数的微分法及其应用

## 8.1　多元函数的基本概念

### 8.1.1　点集和区域

**点集**

平面上所有点的集合记为 $\mathbb{R}^2$, 即

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

- 在平面上, 集合 $\{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$ 是一开长方形, 也记为 $(a,b) \times (c,d)$.
- 集合 $\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < a^2\}$ 是以 $(x_0,y_0)$ 为圆心, $a$ 为半径的开圆盘.

三维空间中所有点的集合记为 $\mathbb{R}^3$, 即

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

**$n$ 维欧式空间**

$n$ 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体所构成的集合记作 $\mathbb{R}^n$, 即

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的每一个元素用单个粗体字母 $\boldsymbol{x}$ 表示, 即 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

**$n$ 维空间**

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个元素, $\lambda \in \mathbb{R}$, 如下定义 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n),$$

这样定义了线性运算的集合 $\mathbb{R}^n$ 称为 $n$ 维空间.

**欧式空间中的距离**

$\mathbb{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离记作 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 $\mathbf{0}$ 之间的距离 $\rho(\boldsymbol{x},\mathbf{0})$ 记作 $\|\boldsymbol{x}\|$(通常也记为 $|\boldsymbol{x}|$), 即

$$\|\boldsymbol{x}\|=|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

因此 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

**$\mathbb{R}^n$ 中距离的性质**

(1) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geq 0$;

(2) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$;

(3) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$;

(4) $\mathbb{R}^n$ 中任意三点 $P_1,P_2,P_3$, 有三角不等式

$$|P_1P_2|\leq|P_1P_3|+|P_3P_2|.$$

**邻域**

**定义** 1.1 (邻域). 设点 $P_0\in\mathbb{R}^n$, 实数 $\delta>0$, 则 $U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbb{R}^n:|PP_0|<\delta\}$ 称为点 $P_0$ 的 $\delta$ 邻域.

- 在平面上, $U(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心, 以 $\delta$ 为半径的圆盘 (不包括圆周).
- 在三维空间中, $U(P_0,\delta)$ 就是以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为中心, 以 $\delta$ 为半径的球 (不包括球面).

**去心邻域**

点 $P_0$ 的去心 $\delta$ 邻域 $\{P\in\mathbb{R}^n:0<|PP_0|<\delta\}$ 记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

如果不需要强调邻域的半径, 通常就用 $U(P_0)$ 或 $\mathring{U}(P_0)$ 分别表示点 $P_0$ 的某个邻域或某个去心邻域.

**方邻域**

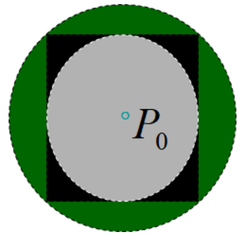
在讨论实际问题中也常使用方邻域, 因为方邻域与圆邻域可以互相包含.

平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y):|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}.$$

**内点、外点及边界点**

设有非空点集 $E$ 及一点 $P$,




- 若存在点 $P$ 的某邻域 $U(P)\subset E$, 则称 $P$ 是 $E$ 的内点;
- 若存在点 $P$ 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$, 则称 $P$ 是 $E$ 的外点;
- 若在点 $P$ 的任一邻域内, 都既有集合 $E$ 中的点, 又有 $E$ 的补集中的点, 则称 $P$ 是 $E$ 的边界点. $E$ 的边界点的全体称为 $E$ 的边界, 记作 $\partial E$.

显然, $E$ 的内点必属于 $E$, $E$ 的外点必不属于 $E$, $E$ 的边界点可以属于 $E$ 也可以不属于 $E$.

**例 1.1.** 集合 $E=\{(x,y)|0\le x<1,0\le y<1\}$, 则内点的集合为$E_1=\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}$, 相应的边界为

$$\begin{aligned}\partial E=&\{(0,y)|0\le y\le 1\}\cup\{(1,y)|0\le y\le 1\}\\&\cup\{(x,0)|0\le x\le 1\}\cup\{(x,1)|0\le x\le 1\}.\end{aligned}$$

设有非空点集 $E$ 及一点 $P$, 若 $P$ 的任一邻域内都含有无穷多个属于 $E$ 的点, 则称 $P$ 为 $E$ 的聚点. 聚点可以属于 $E$, 也可以不属于 $E$(因为聚点可以为 $E$ 的边界点). 所有聚点所成的点集称为 $E$ 的导集.

$E$ 的内点必为 $E$ 的聚点, 但 $E$ 的聚点不一定是 $E$ 的内点.

**例 1.2.** 考察点集 $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ 的聚点.

0.

**开集和闭集**

若 $E$ 中每一点都是 $E$ 的内点, 则称 $E$ 是开集; 若 $E$ 的每一个聚点都属于 $E$, 则称 $E$ 是闭集. 约定空集 $\varnothing$ 既是开集又是闭集.

在实数轴上, 开区间 $(a,b)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 闭区间 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的闭集.

**例 1.3.** 集合 $\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ 是开集, $\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$ 是闭集, $\{(x,y)|1\le x^2+y^2<2\}$ 既不是开集, 也不是闭集.

**注 1.1.** 在所有 $n$ 维点集中, 只有 $\mathbb{R}^n$ 与 $\varnothing$ 是既开又闭的点集.

**连通集**

如果对于 $E$ 中任意两点 $P_1$ 与 $P_2$, 总存在 $E$ 中的折线把 $P_1$ 与 $P_2$ 联结起来, 则称 $E$ 是 连通的.

**区域**

连通的非空开集称为区域(或开区域), 区域连同其边界一起称为 闭区域.

若平面区域 $E$ 中的任意闭曲线所围成的有界区域均为 $E$ 的子集, 则称 $E$ 为单连通区域, 否则称为多连通区域.

**例 1.4.** (1) 在空间中, 集合 $\{(x,y,z): x^2+y^2<z<4-x^2-y^2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域.

(2) 在平面上, 点集 $\{(x,y): |x|>1\}$ 是开集, 但非区域.

(3) 在平面上, 集合 $\{(x,y): x^2+y^2<1\}$ 是单连通区域, 集合 $\{(x,y): 0<x^2+y^2<1\}$ 是多连通区域.

**有界集**

如果存在常数 $k>0$, 使得对所有的点 $P\in E$(其中 $O$ 为原点), 都有 $|OP|<k$, 则称 $E$ 为有界集. 一个集合若不是有界集, 就称其为 无界集.

**例 1.5.** 集合 $\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ 是有界区域, $\{(x,y)|x+y>0\}$ 是无界区域, $\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$ 是有界闭区域, $\{(x,y)|x+y\ge 0\}$ 是无界闭区域.

**定义 1.2.** 设 $E$ 是有界区域, 正数

$$d(E)=\sup\{|P_1-P_2|: P_1,P_2\in E\}$$

称为区域的直径.

### 8.1.2 多元函数的概念

**多元函数**

**定义 1.3.** 设 $D$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集, 如果对于 $D$ 中的任意一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 按照某种规则 $f$, 变量 $z$ 都有确定的实数值与它对应, 则称 $z$ 为变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的$n$ 元函数, 记为

$$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad 或 \quad z=f(P).$$

集合 $D$ 称为映射 $f$ 的定义域, 记为 $D_f=D$. $\{f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n): P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$ 称为函数的值域, 记为 $R_f$ 或 $f(D)$.

当 $n=1$ 时, 称 $f$ 为一元函数; $n\ge 2$ 时, 称 $f$ 为多元函数.

与一元函数相仿, 当我们用某个算式表达多元函数时, 凡是使算式有意义的自变量所组成的点集称为该多元函数的自然定义域.

函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为 $D=\{(x,y)|x+y>0\}$.
函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

一个二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的图形是 $Oxyz$ 空间中的集合

$$G=\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

在几何上二元函数的图形是 $Oxyz$ 空间的一张曲面.

在直角坐标下,这张曲面在 $xOy$ 坐标平面上的投影就是函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D$.

函数 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ 的定义域是$xOy$ 平面上的单位圆域 $\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$, 值域为区间 $[0,1]$,它的图形是以原点为中心的单位球面的上半部分,在 $xOy$ 面上的投影区域是$\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

### 8.1.3 多元函数的极限

**定义** 1.4. 设函数 $f(P)$ 在区域 $D$ 有定义, $P_0$ 是 $D$ 的聚点, 若存在常数 $A$, 对任意 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|P-P_0|<\delta$(或 $P\in\mathring{U}(P_0,\delta)$) 时就有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称 $A$ 为函数 $f(P)$ 当 $P$ 趋于 $P_0$ 时的 极限, 记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

或者

$$f(P)\to A \quad (P\to P_0).$$

为区别于一元函数的极限, 我们把 $n$ 元函数的极限称为$n$ 重极限.

二元函数的极限可写作:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A,$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

#### $n$ 重极限的性质

**性质** 1.2 (唯一性). 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在, 则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 唯一.

**性质** 1.3 (局部有界性). 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在, 则存在 $\delta>0$, 使得 $f(P)$ 在 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内有界.

**性质** 1.4 (保号性). 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得在 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内 $f(P)>0$.

**性质** 1.5 (比较性). 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$, $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)=B$, 并且当 $P\in\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时有 $f(P)\ge g(P)$, 则 $A\ge B$.

**性质** 1.6 (四则运算). 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$, $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)=B$, 则 $f\pm g$, $fg$, $f/g$(若 $B\ne 0$), 当 $P\to P_0$ 时极限都存在, 并且

$$\lim_{P\to P_0}(f(P)\pm g(P))=A\pm B,\qquad \lim_{P\to P_0} f(P)g(P)=AB,$$

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)}=\frac{A}{B}\quad (B\ne 0).$$

**例 1.6.** 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$ 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

**证明**: 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时, 有

$$|f(x,y)-0|=\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leq |x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 要使 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$, 只要 $2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$. 因此取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

**例 1.7.** 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy+1}{x^2+y}$.

**解**: 由极限的运算法则得

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy+1}{x^2+y}=\frac{3}{3}=1.$$

**例 1.8.** 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{y}\sin(xy)$.

**解**:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{y}\sin(xy)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}=0.$$

**例 1.9.** 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+xy)}{y}$.

**解**: 由极限的运算法则得

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+xy)}{y}&=\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy}x\\ &=\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy}\lim_{x\to 1} x=1.\end{aligned}$$

**例 1.10.** 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{\sqrt[3]{1+\sin^2(x+y)}-1}$.

**解**:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{\sqrt[3]{1+\sin^2(x+y)}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sqrt[3]{1+\sin^2 t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\frac{1}{3}\sin^2 t}=3.$$

**例 1.11.** 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

**解**: 易知

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)| \le -\frac{1}{2}[x^2+y^2]^2\ln(x^2+y^2).$$

由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{2}[x^2+y^2]^2\ln(x^2+y^2) = -\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2}t^2\ln t = 0,$$

则根据夹逼定理知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0.$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)} = e^0 = 1.$$

**例 1.12.** 求 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(xy+yz)^2}{x^2+y^2+z^2}$.

**解**: 由

$$(xy+yz)^2 = y^2(x+z)^2 \le 2y^2(x^2+z^2)$$

知当 $(x,y,z)\ne(0,0,0)$ 时,

$$0 \le \frac{(xy+yz)^2}{x^2+y^2+z^2} \le 2y^2.$$

又 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 2y^2 = 0$, 由夹逼定理可得

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(xy+yz)^2}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

**例 1.13.** 求 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

**解**: 因为 $x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 故

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6},$$

其中 $r^2 = x^2+y^2$. 又

$$\lim_{r\to0}\frac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim_{r\to0}\frac{2r^4}{r^6} = +\infty,$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = +\infty.$$

**注: 定义中 $P\to P_0$ 的方式是任意的.**

- 若点 $P$ 以某种特殊的方式, 如沿一条定直线或曲线趋近于点 $P_0$ 时, 即使 $f(P)$ 无限接近于某个常数 $A$, 我们也不能断定函数的极限存在.

- 反之, 如果点 $P$ 以不同方式趋近于点 $P_0$ 时, $f(P)$ 趋于不同的值, 那么就可以断定这个函数的极限不存在.

**例 1.14.** 讨论 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限.

**解:** 当动点 $(x,y)$ 沿着直线 $y=mx$ 而趋于定点 $(0,0)$ 时，由于此时 $f(x,y)=f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}$，因而有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}.$$

此式说明动点沿不同斜率 $m$ 的直线趋于原点时，对应的极限值也不同，因此所讨论的极限不存在.

**例 1.15.** 证明 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{2x^6+3y^2}$ 极限不存在.

**解:** 取 $y=kx^3$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{2x^6+3y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{kx^6}{2x^6+3k^2x^6}=\frac{k}{2+3k^2}.$$

上式随着 $k$ 的不同而变化，因此原极限不存在.

### 8.1.4 累次极限

**定义 1.5** (二元函数的累次极限). 设 $E_x,E_y\subset\mathbb{R}$, $x_0$ 是 $E_x$ 的聚点, $y_0$ 是 $E_y$ 的聚点, 二元函数 $f(P)$ 在集合 $D=E_x\times E_y$ 上有定义, 若对每一个 $y\in E_y$, $y\neq y_0$, 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)$ 存在, 此极限记作 $\varphi(y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)$, 而且进一步极限 $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}}\varphi(y)$ 存在, 则称此极限为二元函数 $f(P)$先对 $x$ 后对 $y$ 的累次极限, 并记为 $A=\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}}\left[\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)\right]$, 或简记为 $A=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

类似可定义先对 $y$ 后对 $x$ 的累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

**例 1.16.** 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个累次极限.

**解:**

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0} 0=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0} 0=0.$$

两个累次极限存在 (甚至相等) 并不能得到二重极限存在.

**例 1.17.** 设 $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$, 求函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个累次极限.

**解:** 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ 不存在, 所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个累次极限均不存在.

即使函数的二重极限存在, 两个累次极限也可能不存在.

**重极限与累次极限之间的联系**

**定理 1.7.** 若二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 和累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ (或另一次序) 都存在, 则必相等.

**推论 1.8.** 若累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 和二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 都存在, 则三者相等.

**推论 1.9.** 若累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在但不相等, 则二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 必不存在.

### 8.1.5 多元连续函数及其性质

**定义 1.6.** 设 $n$ 元函数 $f(P)$ 的定义域为 $D$, 聚点 $P_0\in D$, 若

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0),$$

则称 $n$ 元函数 $f(P)$ 在点 $P_0$ 处连续. 如果函数 $f(P)$ 在 $D$ 的每一点处都连续, 则称函数 $f(P)$ 在 $D$ 上 连续, 或称 $f(P)$ 是 $D$ 上的 连续函数, 记为 $f(P)\in C(D)$.

设 $n$ 元函数 $f(P)$ 的定义域为 $D$, 聚点 $P_0\in D$, 若 $f(P)$ 在点 $P_0$ 处不连续, 则称 $P_0$ 为 间断点.

函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在, 故 $(0,0)$ 为其间断点.

函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

区域 $D$ 上的多元连续函数的和、差、积、商（在分母不为零处）仍是 $D$ 上的连续函数; 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

**多元初等函数**

一个多元初等函数是指能用一个算式表示的多元函数, 这个算式由常量及其不同自变量的一元基本初等函数经有限次的四则运算和复合运算而得到的.

多元初等函数在其定义域内的任一区域或闭区域上是连续的.

**例 1.18.** 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

**解**:

$$\text{原式}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

**例 1.19.** 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在全平面连续.

**证明**: 在 $(x,y) \neq (0,0)$ 处, $f(x,y)$ 为初等函数, 故连续. 又

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0).$$

故函数在全平面连续.

**有界闭区域上多元连续函数的性质**

**性质** 1.10 (最值定理). 如果多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 那么在 $D$ 上至少存在一个 $P_1$、至少存在一个 $P_2$, 使得 $f(P_1) = \max\limits_{P\in D}\{f(P)\}$, $f(P_2) = \min\limits_{P\in D}\{f(P)\}$.

**推论** 1.11. 有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数是 $D$ 上的有界函数, 即存在常数 $M$, 使得对一切 $P \in D$, 有 $|f(P)| \leq M$.

**性质** 1.12 (介值定理). 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, $P_1, P_2 \in D$ 且 $f(P_1) < f(P_2)$, 如果数值 $\mu$ 满足 $f(P_1) < \mu < f(P_2)$, 那么在 $D$ 上至少存在一个 $P_0$, 使得 $f(P_0) = \mu$.

**推论** 1.13. 有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数可以取到介于最大值和最小值之间的一切值.

### 8.1.6 思考与练习

**练习** 203. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\sqrt{1+xy}}{xy}$.

**解**: 由于

$$\frac{1-\sqrt{1+xy}}{xy} = \frac{(1-\sqrt{1+xy})(1+\sqrt{1+xy})}{xy(1+\sqrt{1+xy})} = \frac{-1}{1+\sqrt{1+xy}},$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\sqrt{1+xy}}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{1+\sqrt{1+xy}} = -\frac{1}{2}.$$

**练习** 204. 设 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

**证明**: 此时 $(x_0,y_0) = (0,0)$, $A = 0$. 由于

$$0 \leq |f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq |y|,$$

又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, 故由夹逼准则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - 0| = 0.$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

**练习** 205. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在?

**解**: 取 $y = x^\alpha - x\ (\alpha > 0)$, 则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^\alpha - x}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y} = \lim_{x\to0} x\frac{\ln(1+x(x^\alpha - x))}{x^\alpha} = \lim_{x\to0}(x^2 - x^{3-\alpha})$$

$$= \begin{cases} -1, & \alpha = 3, \\ 0, & 0 < \alpha < 3, \\ \infty, & \alpha > 3. \end{cases}$$

所以不存在.