专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(非数学 A 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^3+9}-6}{2-\sqrt{x^3-23}}=$ ______________.

(2) 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$, 且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y}=$ ______________.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, 则 $f^{(n)}(0)=$ ______________.

(4) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域为 ______________.

(5) 设曲面 Σ 是平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分, 则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{dS}=$ ______________.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 解方程

$$(x^2+y^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\left(2y-\frac{x^2}{y}\right).$$

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 设 Σ_1 是以 $(0,4,0)$ 为顶点且与曲面 $\Sigma_2:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1(y>0)$ 相切的圆锥面，求曲面 Σ_1 与 Σ_2 所围成的空间区域的体积.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、(本题 14 分)

设 $I_n = n\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$, 其中 $a>1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$. 求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0 = \dfrac{1}{3}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1-x_n+x_n^2}, n \geqslant 0$. 证明：无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛并求其和.