《数理统计》模拟试卷三答案

一、单选题(每小题 3 分，共计 15 分)

1. B
2. D
3. D
4. A
5. B

二、填空题(每小题 2 分，共计 10 分)

1. $\underline{\quad t \quad}$，$\underline{\quad n \quad}$
2. $\underline{\quad 1/7 \quad}$
3. $\underline{\quad 9604 \quad}$
4. $\underline{0.05 < \text{p 值} < 0.10}$
5. $\underline{[9.7\%,\ \ 14.32\%]}$

三、计算题(共计 75 分)

1.

解：（1）由于均匀分布的均值为：$EX=\dfrac{\theta}{2}$（**2 分**），因此参数θ的矩估计为：$\hat{\theta}=2\bar{x}$。（**2 分**）

似然函数为：$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{\theta} I_{[0,\theta]}(x_i)=\dfrac{1}{\theta^n}I(\min_{1\le i\le n}x_i\ge 0)I(\max_{1\le i\le n}x_i\le\theta)$。（**3 分**）

在 θ 的可能取值范围内，为了使似然函数达到最大值，需要满足：$\hat{\theta}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x_i=x_{(n)}$，即$\theta$的极大似然估计为：$MLE\hat{\theta}=x_{(n)}$。（**2 分**）

（2）$\because E(\hat{\theta})=2E(\bar{x})=2\ \dfrac{\theta}{2}=\theta$（**2 分**），因此，参数$\theta$的矩估计$\hat{\theta}=2\bar{X}$是无偏的。（**1 分**）

又$x_{(n)}$的分布密度函数为：$n\cdot(\dfrac{x}{\theta})^{n-1}\cdot\dfrac{1}{\theta}I_{[0,\theta]}(x)$，则：

$E(x_{(n)})=\int_0^\theta x\ \ n\ \ (\dfrac{x}{\theta})^{n\ \ 1}\ \ \dfrac{1}{\theta}dx=\dfrac{n}{n+1}\theta$（**2 分**），所以$\theta$的极大似然估计$MLE\hat{\theta}=x_{(n)}$不是无偏的。

而$\hat{\theta}_1=\dfrac{n+1}{n}x_{(n)}$是参数$\theta$的无偏估计。（**1 分**）

$\because Var(\hat{\theta})=Var(2\bar{x})=\dfrac{\theta^2}{3n}$，（**2 分**）

$$Var(\hat{\theta}_1)=E(\frac{n+1}{n}x_{(n)})^2-[E(\hat{\theta}_1)]^2=\frac{\theta^2}{n(n+2)}\leqslant\frac{\theta^2}{3n}=Var(\hat{\theta})$$，**（2 分）**

所以 $\hat{\theta}_1=\frac{n+1}{n}x_{(n)}$ 比 $\hat{\theta}=2\bar{x}$ 更有效。**（1 分）**

2. 解：

（1）$H_0: \sigma_x^2=\sigma_y^2$　　$H_1: \sigma_x^2\neq\sigma_y^2$（1 分）

检验统计量的值：

$$F=\frac{{s_x}^2}{{s_y}^2}=\frac{26.4}{12.7}(1\text{ 分})=2.079(1\text{ 分})$$

拒绝域：拒绝 H_0 如果 $F\geq F_{0.95}(5,6)=4.39$ （1 分）

或 $F\leq F_{0.05}(5,6)=\frac{1}{F_{0.95}(6,5)}=\frac{1}{4.95}$（1 分） $=0.2020$

因为 $0.2020<F=2.079<4.3$（1 分），不落入拒绝域，因此我们不拒绝原假设。（1 分）

（2）正态总体，总体方差未知但相等。

$s_w=\sqrt{\frac{(6-1)\times26.4+(7-1)\times12.7}{6+7-2}}(2\text{ 分})=4.3505$（1 分）

$t_{0.975}(11)=2.201$ （1 分）

$t_{0.975}(11)s_w\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}=2.201\times4.3505\times\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}=5.33$ （1 分）

95%置信区间为：$13.5-11.2\pm5.33=[-3.03,7.63]$ （1 分）

3. 解：（1）成对数据检验。（2 分）

（2）$H_0: \mu=0,\ H_1: \mu\neq0$（1 分）

快递时间差值为：7， 6， 4， 1， 2， 3， -1， 2， -2， 5 （1 分）

$$n=10,\qquad \bar{d}=\frac{\sum d_i}{n}=2.7\ (1\text{ 分}),\qquad s_d=\sqrt{\frac{76.1}{9}}=2.9(1\text{ 分})$$

检验统计量的值为：$t=\frac{\bar{d}-\mu}{s_d/\sqrt{n}}=\frac{2.7-0}{2.9/\sqrt{10}}=2.94$（2 分）

拒绝域：$t_{0.975}(9)=2.2622$. 如果 $t<-2.2622$ 或者 if $t>2.2622$ 则拒绝原假设（1 分）

由于 2.94>2.2622，拒绝原假设，认为有足够的证据表明两家快递公司的平均递送时间存在差异。（1 分）

4. 解：

H_0：接受注射的类型与居民是否患有感冒之间独立

H_1：接受注射的类型与居民是否患有感冒之间不独立 （1 分）

期望频数：（0.5 分 1 个，计 3 分）

状态	没有注射疫苗	注射疫苗 1 次	注射疫苗 2 次
患过感冒	14．398	5.014	26.588
没有感冒	298.602	103.986	551.412

检验统计量

$$\chi^2=\frac{(24-14.398)^2}{14.398}+\frac{(9-5.014)^2}{5.014}+\cdots+\frac{(565-551.412)^2}{551.412}$$ （1 分）

$=17.31$（2 分）

拒绝域：$\chi^2>\chi^2{}_{0.95}(2)=5.9915$ （1 分）

因为$\chi^2=17.31>5.9915$，落在拒绝域。（1 分）

因此，拒绝原假设，认为接受注射的类型与居民是否患有感冒之间独立。（1 分）

5. 解：

（1）$\bar{x}=65$（1 分）

$s^2=\frac{1}{2}[(41-65)^2+(52-65)^2+(102-65)^2]$（2 分） $=1057$（1 分）

自由度为 n-1=2（1 分）

$\chi^2{}_{0.95}(2)=5.9915$ and $\chi^2{}_{0.05}(2)=0.1026.$

总体方差$\sigma^2$0.90 的置信区间为：

$[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2{}_{0.95}(2)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2{}_{0.05}(2)}]$ 即 $[\frac{2\times1057}{5.9915},\frac{2\times1057}{0.1026}]$ （列出计算公式：下限 1 分，上限 1 分），

[352.83，20604.29]（1 分）

（2）总体标准差σ置信度为 0.90 的置信区间为：$[\sqrt{352.83},\sqrt{20604.29}]$ （2 分）

即：[18.78， 143.54]（2 分）

6. 解：

记$y_i=x_i+x_{n+i},i=1,2,\cdots n$，则$y_1,y_2,\cdots,y_n$可看成来自$N(2\mu,2\sigma^2)$的样本（3 分）

$y=\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{n+i}-2\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$ （2 分）

则：$\frac{y}{2\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$， （3 分），从而

$E(y)=2(n-1)\sigma^2$ （2 分）