11.4 幂级数

11.4.1 函数项级数的概念

函数项级数

如果 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 均为定义在区间 I 上的函数, 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为区间 I 上的 函数项级数. 称

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

为函数项级数的部分和.

例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2n} = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + \cdots + \frac{\cos nx}{2n} + \cdots$$

均为区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数项级数.

设点 $x_0 \in I$, 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称点 x_0 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的 收敛点, 否则称 x_0 是函数项级数的发散点. 由收敛点全体构成的集合称为函数项级数的收敛域.

例如函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

的收敛域为$(-1,1)$.

若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为集合 D, 则对 D 中的每一点 x, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为收敛的常数项级数, 因而有确定的和 s. 如此在收敛域 D 上, 级数的和是定义在收敛域 D 上的函数 $s(x)$, 称其为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的 和函数, 并且它的定义域就是级数的收敛域 D, 即有

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in D).$$

而

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$$

为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的余项. 于是

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall\ x \in D.$$

例如函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ 的收敛域为$(-1,1)$, 和函数是$\frac{1}{1-x}$, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

11.4.2 幂级数及其收敛性

幂级数

设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为一常数列, $x_0 \in I$, 称函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

为 $x - x_0$ 的幂级数, 其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 的系数. 当 $x_0 = 0$ 时, 相应的幂级数变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots. \tag{11.4.1}$$

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, 通过变换 $t = x - x_0$, 即可将它化为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

定理 4.1 (阿贝尔 (Abel) 定理). 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 \neq 0$ 处收敛, 则对满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的任何 x, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散, 则对满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的任何 x, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

推论 4.2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间, 其收敛性必为下列三种情形之一:

(1) 仅在 $x = 0$ 处收敛;

(2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处绝对收敛;

(3) 存在确定的正数 R, 当 $|x| < R$ 时绝对收敛, 当 $|x| > R$ 时发散.

定理所列情形 (3) 中的正数 R 称为幂级数(11.4.1)的收敛半径, $(-R, R)$ 称为收敛区间. 在情形 (1), 规定收敛半径 $R = 0$, 这时幂级数没有收敛区间, 收敛域为一个点 $x = 0$. 在情形 (2), 规定收敛半径为 $+\infty$, 收敛区间是整个实数轴 $(-\infty, +\infty)$.

如果求得幂级数的收敛半径 $0 < R < +\infty$, 即得收敛区间 $(-R, R)$. 进一步只需讨论它在 $x = -R$ 和 $x = R$ 两点处的收敛性. 判定了这两点处的收敛性, 即可知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域必为下列四种区间之一: $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$ 或 $[-R, R]$.

收敛半径的求法

定理 4.3. 设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 其收敛半径为 R, 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ (ρ 为常数或 $+\infty$), 则

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

定理 4.4. 设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 其收敛半径为 R, 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ (ρ 为常数或 $+\infty$), 则

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

例 4.1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 2^{n-1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$.

解:

(1) 由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 因此收敛区间是$(-1,1)$.

(2) 由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{n2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2},$$

所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 2$, 因此收敛区间是$(-2,2)$.

(3) 由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

所以收敛半径$R = +\infty$, 因此收敛区间是$(-\infty, +\infty)$.

例 4.2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域.

解: 因

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1,$$

所以收敛半径$R = 1$, 收敛区间为$(-1,1)$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原幂级数的收敛域为$[-1,1)$.

例 4.3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 的收敛域.

解: 令 $t = x-1$, 则原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} t^n$. 因

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}} = 1,$$

所以收敛半径$R = 1$, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} t^n$ 的收敛区间为$(-1,1)$. 易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 均收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} t^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$. 再由 $t = x-1$ 推得原级数的收敛域为$[0,2]$.

例 4.4. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} x^{2n}$ 的收敛域.

解: 该级数缺少奇数次幂的项, 即 $a_{2m-1} = 0$. 因此 $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 当 $n = 2m - 1$ 时没有意义.

作变量代换 $y = x^2$, 则原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} y^n$, 容易求得其收敛半径为$R_1 = 2$. 于是原级数的收敛半径为$R = \sqrt{2}$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} (\pm\sqrt{2})^{2n}$ 均收敛 , 从而得原级数的收敛域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

例 4.5. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n n} (x-1)^{3n+1}$ 的收敛域.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x-1|^{3(n+1)+1}}{8^{n+1}(n+1)}}{\frac{|x-1|^{3n+1}}{8^n n}} = \frac{|x-1|^3}{8},$$

当 $|x-1| < 2$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n n} (x-1)^{3n+1}$ 收敛. 当 $x - 1 = 2$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; 当 $x - 1 = -2$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}$ 发散. 故原幂级数的收敛域为 $(-1, 3]$.

11.4.3 幂级数的运算

定理 4.5. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b, 则有

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n,\ |x| < R_a,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n,\ |x| < R,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ |x| < R,$$

式中 λ 为常数, $R = \min\{R_a, R_b\}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

例 4.6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 3^n}{n^2} x^n$ 的收敛区间.

解: 因幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ 的收敛区间分别为 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 故原级数的收敛区间为$\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

幂级数和函数的性质

性质 4.6 (连续性). 幂级数的和函数 $s(x)$ 在其收敛域上连续.

性质 4.7 (逐项可积性). 设 a, b 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域上的任意两点, 则

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \,\mathrm{d}x.$$

特别地, 对任意收敛域中的 x, $\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, 且右边的收敛半径等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 (积分后, 收敛域有可能扩大).

性质 4.8 (逐项可导性). 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$, 则其和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导, 并且有逐项求导公式:

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

且收敛半径不变 (求导后, 收敛域有可能缩小).

幂级数的和函数在其收敛区间内有任意阶导数.

例 4.7. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在其收敛区间内的和函数.

解: 由于收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

所以幂级数的收敛区间为$(-1,1)$.

设和函数为 $s(x)$, 利用函数的可导性和逐项求导公式

$$s'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (x\in(-1,1)).$$

因为当 $-1<x<1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$, 故有

$$s'(x)=\frac{1}{1-x}.$$

注意到 $s(0)=0$, 于是

$$s(x)=s(0)+\int_0^s s'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=-\ln(1-x)\quad (x\in(-1,1)).$$

例 4.8. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 在其收敛区间内的和函数.

解: 计算可得收敛区间为 $(-1,1)$. 设和函数为 $s(x)$, 利用上题结果, 当 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
s(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\\
&=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-x\right)=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1\\
&=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x).
\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, $s(0)=0$. 从而

$$s(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

例 4.9. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 的收敛域及和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解: 收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}$ 均发散. 所以原幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

设和函数为 $s(x)$, 利用逐项求积公式

$$\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

所以

$$s(x) = \left(\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1).$$

取 $x = \frac{1}{2}$, 代入上式有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

11.4.4 思考与练习

练习 289. 已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛, 求该级数收敛半径.

$R = |x_0|$

练习 290. 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 在 $x = -2$ 处收敛, 则此级数在 $x = 6$ 处 (　　)

(A) 一定发散　　　　(B) 一定条件收敛

(C) 一定绝对收敛　　　　(D) 敛散性不能确定

C

练习 291. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛, 在 $x = 2b$ 处发散, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ____, 收敛域为 ____. $(b > 0)$

$R = b, [-b, b)$

练习 292. 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 无界, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 ____.

$[0, 2)$

练习 293. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n - 3^{2n}}$ 的收敛域.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{|n - 3^{2n}|}} = \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{1 - \frac{n}{3^{2n}}}} = \frac{x^2}{9},$$

则当 $|x| < 3$ 时级数收敛，所以原级数的收敛半径为 $R = 3$. 又当 $x = \pm 3$ 时，相应的级数都是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n - 3^{2n}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{2n}}{n - 3^{2n}} = -1 \neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n - 3^{2n}}$ 发散. 因此原级数的收敛域为 $(-3, 3)$.

练习 294. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$ 在其收敛区间内的和函数.

解:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = \frac{1}{(1-x^2)^2} \quad (x \in (-1,1)).$$

练习 295. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} =$ ____.

解: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = e-1$.

练习 296. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$, 其中 $a>1$.

解: $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right) = \frac{a}{(1-a)^2}$.

练习 297. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解: $s(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x) + \frac{2+x}{4}(x\neq 0)$, 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n} = s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.