概率论试卷

2018至2019学年第二学期

2019年5月28日

杨勇制作

一. 填空题(共10小题，每空2分，共24分)

1.从6双不同尺码的鞋子中任取2只，

2只都不配对的概率为______________。

解：

$$\frac{C_6^2C_2^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{10}{11}。$$

2.事件A, B, C相互独立，且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

则$P(AC|A\cup B)=$ ______________。

解：
$$P(AC|A\cup B)=\frac{P(AC(A\cup B))}{P(A\cup B)}$$

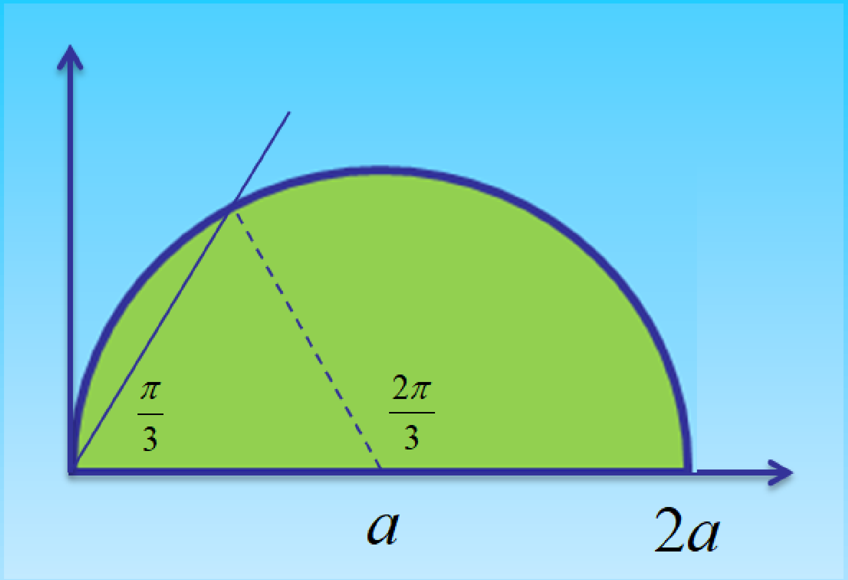
$$=\frac{P(CA))}{P(A\cup B)}=\frac{P(C)P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

注：$A\subset A\cup B$。

3.随机地向半圆$0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$(a为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何地方的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与x轴的夹角小于$\dfrac{\pi}{3}$的概率为______________。

解:

该半圆为圆$(x-a)^2 + y^2 = a^2$的上半部分,



$$p=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{2}{3}\times\left(\pi a^2/2\right)}{\pi a^2/2}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{2}{3}$$

4.三重贝努利试验,至少一次成功的概率为$\frac{37}{64}$,则每次试验成功的概率为________________。

解:

$$1-C_3^0 p^0 (1-p)^3=\frac{37}{64},$$

$$(1-p)^3=\frac{27}{64}, p=\frac{1}{4}\quad。$$

5.设某批电子元件的正品率为$\frac{9}{10}$,现对这批元件测试,只要测得一个次品就停止测试工作,则测试次数X的概率分布是________________。

解: $X \sim G(p), p=\frac{1}{10},$

$$P(X=k)=\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{1}{10}, k=1,2,\cdots。$$

6.设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<-\dfrac{\pi}{2} \\ A(1+\sin x), -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

则$P\left(|X|<\dfrac{\pi}{3}\right)=$________________,密度函数$p(x)=$________________。

解：

先证明X是连续型的,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} A(1+\sin x) = 2A,$$

由于分布函数是右连续的,

所以, $2A=1$, 即 $A=\dfrac{1}{2}$, 否则如果 $2A<1$, 则不可能右连续。

$$P\left(|X|<\frac{\pi}{3}\right)=F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, \text{其它}\end{cases}$$。

7.若$X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{1}{2C} & \dfrac{3}{4C} & \dfrac{5}{8C} & \dfrac{2}{16C} \end{pmatrix}$,

则X的概率分布为__________________;

Y^2的概率分布为__________________。

解：

$$\frac{1}{2C}+\frac{3}{4C}+\frac{5}{8C}+\frac{2}{16C}=1,$$

$$C=2,$$

$$X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix},$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<-1 \\ \frac{1}{4}, -1\le x<0 \\ \frac{5}{8}, 0\le x<1 \\ \frac{15}{16}, 1\le x<2 \\ 1, x\ge 2 \end{cases}$$

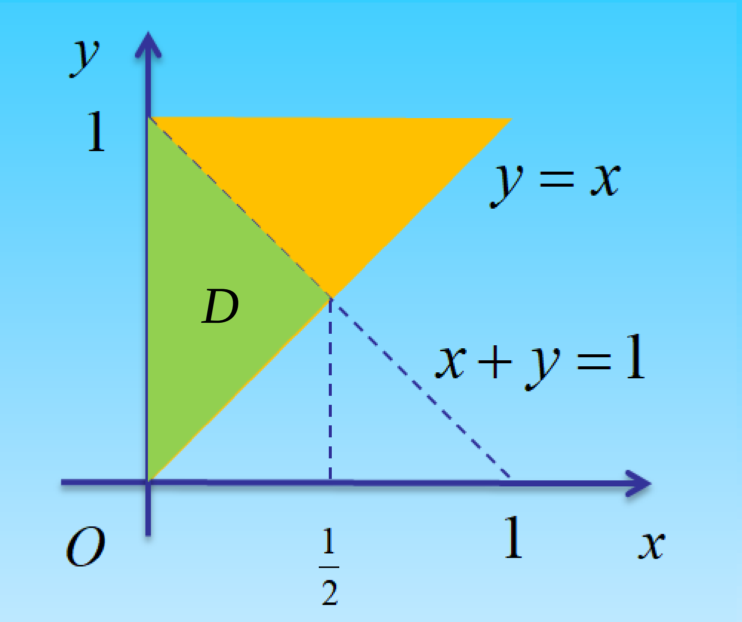
$$Y=X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{3}{8} & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}。$$

8.设随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}6x, 0\le x\le y\le 1\\ 0, otherwise\end{cases},$$

则$P(X+Y\le 1)=$______________。

解：



$$P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1} p(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} 6xdxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_x^{1-x} 6xdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} 6x(1-2x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} (6x-12x^2)dx=\frac{1}{4}。$$

9.已知$EX=3, DX=5$,则

$E((X+2)^2)=$ ______________。

解：

$$D(X+2)=E((X+2)^2)-(E(X+2))^2$$

$$E((X+2)^2)=D(X+2)+(E(X+2))^2$$

$$=5+25=30$$

10.设$DX=25, DY=36, \rho_{XY}=0.6,$

则$D(X+Y)=$ ________________。

解:

$$D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$$

$$=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX}\bullet\sqrt{DY}$$

$$=25+36+2\times0.6\times5\times6=97$$

二.单选题(共5题，每小题2分，共10分)

11.设A, B, C是三个随机事件, 且A, C相互独立, B, C相互独立, 则$A\cup B$与C相互独立的充分必要条件是________________。

(A)A, B相互独立, (B)A, B互不相容,

(C)AB, C相互独立, (D)AB, C互不相容。

解:

$$P((A\cup B)C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC)$$

$$P(A\cup B)P(C)=(P(A)+P(B)-P(AB))P(C)$$

$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C)$$

$P((A \cup B)C) = P(A \cup B)P(C)$成立的充分必要条件是

$$P(ABC) = P(AB)P(C),$$

所以,C正确。

12.设X的密度函数与分布函数分别为$p(x)$和$F(x)$,则下列选项正确的是

________________。

(A)$0 \le p(x) \le 1$;(B)$P(X = x) \le F(x)$;

(C)$P(X = x) = F(x)$;(D)$P(X = x) = p(x)$。

解: 由于X是连续型随机变量,

$P(X = x) = 0$,所以,B是对的。

13.设随机变量X和Y独立同分布，且$X \sim B(1,p)$，则下列各式不正确的是

______________。

(A) $X^2 \sim B(1,p^2)$; (B) $XY \sim B(1,p^2)$;

(C) $\min\{X,Y\} \sim B(1,p^2)$; (D) $X+Y \sim B(2,p)$。

解：

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

(A)

14.将长度为1米的木棒随机地截成两段,则两段长度的相关系数为_______________。

$$(A)1;(B)\frac{1}{2};(C)-\frac{1}{2};(D)-1$$

解: 两段分别记为X和Y,

则$X+Y=1$,即相关系数为-1, D对

15.设随机变量$X \sim B(n, p)$,对任意$0 < p < 1$,利用切比雪夫不等式估计有$P(|X - np| \geq \sqrt{2n}) \leq$ ______________。

(A)$\frac{1}{2}$;(B)$\frac{1}{4}$;(C)$\frac{1}{8}$;(D)$\frac{1}{16}$

解: $EX = np, DX = npq,$

$$P(|X - np| \geq \sqrt{2n}) = P(|X - EX| \geq \sqrt{2n})$$

$$\leq \frac{DX}{2n} = \frac{np(1-p)}{2n} \leq \frac{1}{8}, (C)\text{对}$$

三. 简答题（共1小题, 5分）

$F(x) = P(X \le x)$。

分布函数$F(x)$具有下列四个基本性质:

(1) $0 \le F(x) \le 1, x \in \mathbb{R}$,

(2)若$x_1 < x_2$,则$F(x_1) \le F(x_2)$,即单调不减,

(3)$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

(4) $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,即右连续。

四. 分析判断题（共1小题, 5分）

17. $E(XY)=EX\cdot EY$是X与Y相互独立的充要条件。

解：　错。

$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$,即

X与Y不相关,

不相关不一定独立,独立一定不相关。

五. 计算题（共5小题, 共56分）

18.（12分）有两个盒子,第一个盒子中装有2个红球,1个白球,第二个盒子装有一半红球,一半白球。现从两盒中各任取一球放在一起,再从中任取一球,

求(1)这个球是红球的概率;

(2)若发现这个球是红球,则第一个盒子中取出的球是红球的概率。

解： (1)

设A_i：第一个盒子中取到i个红球，$i=0,1$;

B_j：第二个盒子中取到j个红球，$j=0,1$

C：这个球是红球， 由全概率公式，

$$P(C)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}P(A_iB_j)P(C\mid A_iB_j)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{7}{12}$$

(2) 由贝叶斯公式,

$$P\left(\left(A_1B_0+A_1B_1\right)|C\right)$$

$$=\frac{P(A_1B_0)P(C|A_1B_0)+P(A_1B_1)P(C|A_1B_1)}{P\left(C\right)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{7}{12}}=\frac{6}{7}$$

19.（12分）设袋中装有3个白球,2个黑球及1个黄球,从中任取4个球,其中白球数记为X,黑球数记为Y。求(1)(X,Y)的联合概率分布;(2)(X,Y)的边际概率分布;(3)X与Y是否独立？

解： (1)

$$X:1,2,3,Y:0,1,2,$$

$$P(X=1, Y=0)=0,$$

$$P(X=1, Y=1)=0,$$

$$P(X=1, Y=2)=\frac{C_3^1 C_2^2 C_1^1}{C_6^4}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=2,Y=0)=0,$$

$$P(X=2,Y=1)=\frac{C_3^2C_2^1C_1^1}{C_6^4}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=2,Y=2)=\frac{C_3^2C_2^2C_1^0}{C_6^4}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=3,Y=0)=\frac{C_3^3C_2^0C_1^1}{C_6^4}=\frac{1}{15},$$

$$P(X=3,Y=1)=\frac{C_3^3 C_2^1 C_1^0}{C_6^4}=\frac{2}{15},$$

$$P(X=3,Y=2)=0,$$

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0	0	$\frac{1}{5}$
2	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

(2)

$X \backslash Y$	0	1	2	
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{5}$
	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$	

(3) 因为

$$P(X=1, Y=0)=0 \neq P(X=1)P(Y=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{15},$$

所以, X和Y不独立。

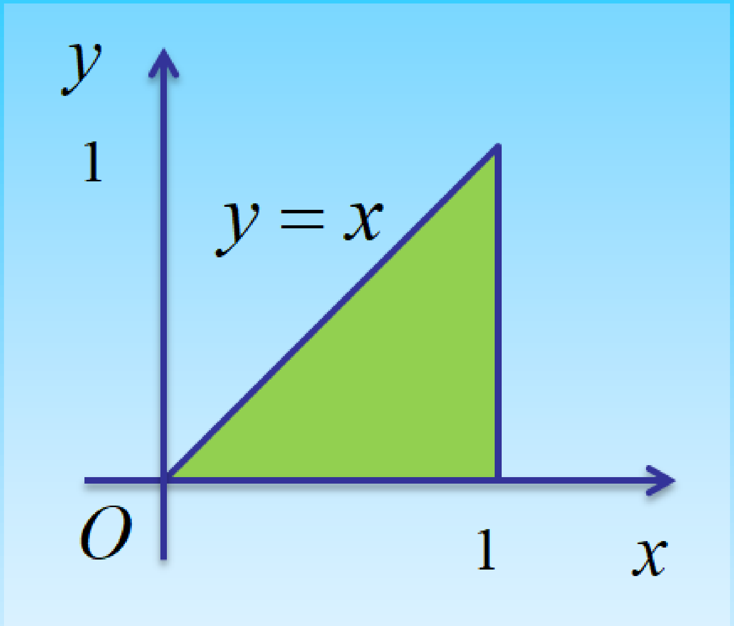
20.(12分)设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, 0<x<1, 0<y<x \\ 0, 其他\end{cases},$$

(1)求(X,Y)的边际密度函数$p_X(x), p_Y(y)$;

(2)$Z=X+Y$的密度函数$p_Z(z)$。

解：　(1)

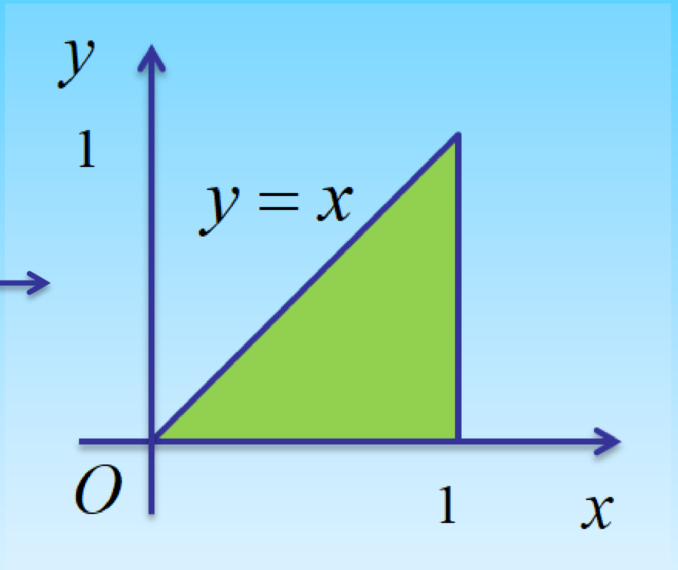


$0 < x < 1,$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$$

$$= \int_0^x 3xdy = 3x^2,$$

$$p_X(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases},$$



$0<y<1,$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

$$=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2),$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-y^2), 0<y<1\\ \quad 0, \text{其他}\end{cases}$$。

(2) 当$z\le 0$或者$z\ge 2$时, $p_Z(z)=0$,

$0<z<2$,

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx$$

$$0 < x < 1, 0 < z - x < x,$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{z}{2} < x < z \end{cases}$$ 取交集,

当$0 < z < 1$时, $\frac{z}{2} < x < z$,

当$1 \le z < 2$时, $\frac{z}{2} < x < 1$,

当$0<z<1$时, $\frac{z}{2}<x<z$,

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx$$

$$=\int_{\frac{z}{2}}^{z}3x\,dx=\frac{9}{8}z^2,$$

当$1\le z<2$时, $\frac{z}{2}<x<1$,

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)dx$$

$$= \int_{\frac{z}{2}}^{1} 3xdx = \frac{3}{2} - \frac{3}{8}z^2,$$

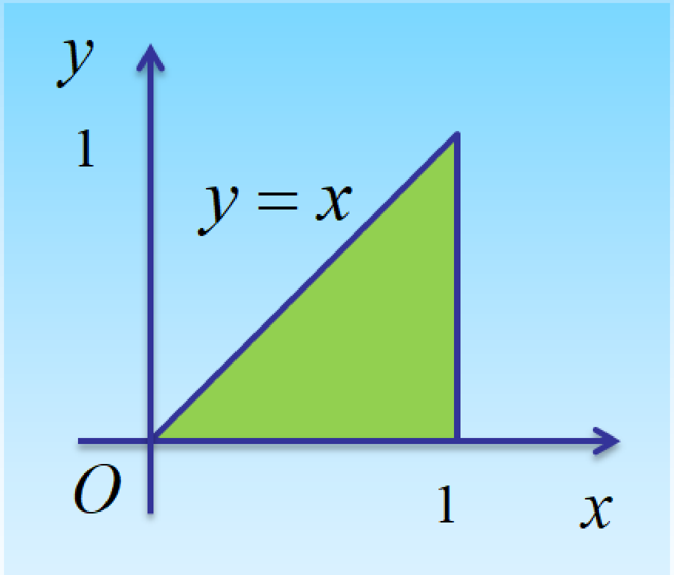
$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{9}{8}z^2, 0 < z < 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{8}z^2, 1 \le z < 2 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$ 。

另解：

只要讨论$0 < z < 2$，在其他地方$p_Z(z) = 0$，

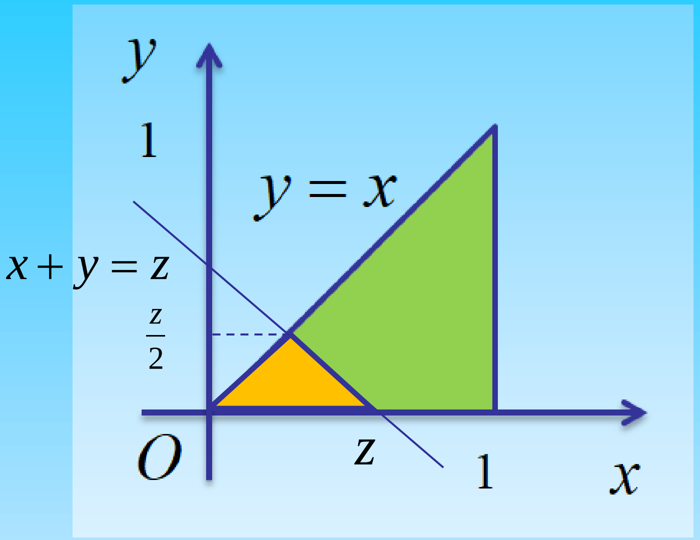
$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$$

$$= \iint_{x+y \le z} p(x, y)dxdy$$



$$0 < z < 1,$$

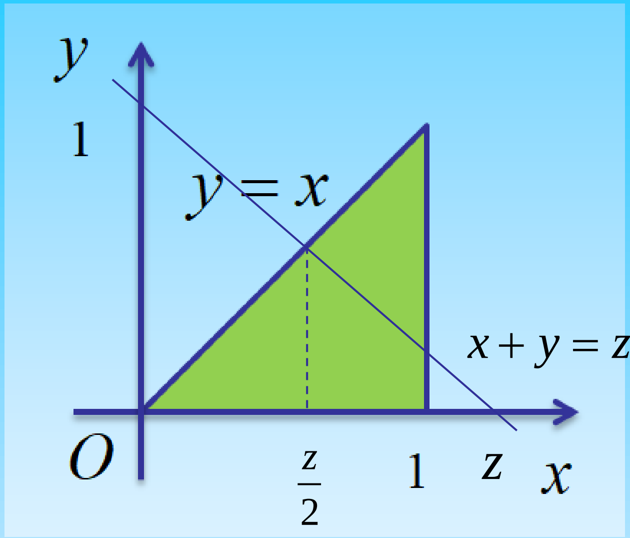
$$F_Z(z) = \iint\limits_{x+y\le z} p(x,y)\,dxdy$$



$$= \int_0^{\frac{z}{2}} dy \int_y^{z-y} 3x\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{z}{2}} (z^2 - 2yz)\,dy = \frac{3}{8}z^3,$$

$$1 \le z < 2,$$



$$F_Z(z) = \iint\limits_{x+y\le z} p(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_0^x 3xdy + \int_{\frac{z}{2}}^1 dx \int_0^{z-x} 3xdy$$

$$= \frac{1}{8}z^3 + \frac{3}{2}z\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) - \left(1 - \frac{z^3}{8}\right)$$

$$= -\frac{z^3}{8} + \frac{3}{2}z,$$

再由 $p_Z(z)=F_Z'(z)$,得

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{9}{8}z^2, 0<z<1\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{8}z^2, 1\le z<2\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$。

21.(12分)已知随机变量X,Y相互独立,

且$P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$,$Y$服从参

数为λ的普阿松分布,$Z=XY$。

(1)求$Cov(X,Z)$;(2)求Z的概率分布。

解:

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},EX=0,DX=E(X^2)-(EX)^2=1,$$

$$Y \sim P(\lambda), EY = \lambda, DY = \lambda = E(X^2) - (EX)^2,$$

$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$, X, Y独立。

(1)

$$Cov(X, Z) = E(X - EX)(Z - EZ)$$

$$= E(X - EX)(XY - E(XY))$$

$$= E(X - EX)(XY - E(X)E(Y))$$

$$= E(X^2Y) = E(X^2)EY = \lambda \text{。}$$

(2)

$$P(Z=0) = P(XY=0) = P(X=-1)P(XY=0 \mid X=-1)$$
$$+ P(X=1)P(XY=0 \mid X=1)$$

$$= P(X=-1)P(Y=0) + P(X=1)P(Y=0)$$

$$= P(Y=0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda},$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$P(Z = k) = P(XY = k) = P(X = 1, Y = k)$$

$$= P(X = 1)P(Y = k) = \frac{1}{2} \times \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

同理,

$$P(Z = -k) = \frac{1}{2} \times \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

$$P(Z=j)=\begin{cases} e^{-\lambda}, j=0 \\ \dfrac{\lambda^{|j|}}{2(|j|!)}e^{-\lambda}, j=\pm1,\pm2,\cdots \end{cases}$$ 。

注：

$$Z\sim\begin{pmatrix} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \cdots & \dfrac{\lambda^2}{2\times2!}e^{-\lambda} & \dfrac{\lambda}{2\times1!}e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & \dfrac{\lambda}{2\times1!}e^{-\lambda} & \dfrac{\lambda^2}{2\times2!}e^{-\lambda} & \cdots \end{pmatrix}$$

22.（8分）一加法器同时收到48个噪声电压$V_k\ (k=1,2,\cdots,48)$，它们相互独立且都在区间$[0,\ 12]$上服从均匀分布，噪声电压总和$V=\sum_{k=1}^{48}V_k$，求

$P(V>300)$的近似值。

附表：$\Phi(0.5)=0.6915, \Phi(1)=0.8413,$
$\Phi(2)=0.9773, \Phi(2.5)=0.0.9938$

解:

$V_k, k=1,2,\cdots,48$独立同分布,

$V_k \sim U[0,12], EV_k = 6, DV_k = 12,$

由中心极限定理,

$$P(V>300)=P\left(\sum_{k=1}^{48} V_k > 300\right)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{300-48\times 6}{\sqrt{48\times 12}}\right)=1-\Phi(0.5)=0.3085$$

完