2024 年 04 月决赛试题

第十五届全国大学生数学竞赛决赛试题
及参考解答
（非数学类，2024 年 04 月 20 日）

一、 填空题(本题满分 30 分，每小题 6 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2e^x(x-\cos x), & x>0\\ x^2+3x+a, & x\le 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$

所以当且仅当 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此 $a=-2$.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{\sin\pi x}=$ ________ .

(3)设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(2x-\dfrac{z}{y},2y-\dfrac{z}{x})=2024$ 确定的隐函数，其中 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xf_u+yf_v\ne 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________ .

2024 年 04 月决赛试题

（4）在平面$x+y+z=0$上，与直线$\begin{cases}x+y-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$和$\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$都相交的直线的单位方向向量为

二、(本题满分 12 分)已知曲线$L:\begin{cases}x=f(t),\\y=\cos t,\end{cases}\left(0\le t<\frac{\pi}{2}\right)$，其中$f(t)$具有连续导数，且$f(0)=0$．设当$0<t<\frac{\pi}{2}$时，$f'(t)>0$，且曲线$L$的切线与$x$轴的交点到

2024 年 04 月决赛试题

切点的距离恒等于切点与点 $(-\sin t, 0)$ 之间的距离，求函数 $f(t)$ 的表达式.

三、**(本题满分 12 分)** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

四、**(本题满分 12 分)** 设 Σ_1 是以 $(0,4,0)$ 为顶点且与曲面 $\Sigma_2: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ $(y>0)$ 相切的圆锥面，求 Σ_1 与 Σ_2 所围成的空间区域的体积.

2024 年 04 月决赛试题

五、(本题满分 12 分) 设 n 阶实矩阵 A，B 满足 $AB=A+B$，且存在 n 阶可逆实矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵. 证明：$P^{-1}BP$ 也为对角矩阵.

六、(本题满分 12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 定义为：$a_0=0$，$a_1=\frac{2}{3}$，当 $n\geq 1$ 时，满足

$$(n+1)a_{n+1}=2a_n+(n-1)a_{n-1}$$

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ 的收敛域.

2024 年 04 月决赛试题

七、(本题满分 10 分) (1)证明：对于任意的实数$r>0$；存在唯一的$t\in(\pi,2\pi)$，使得$e^{rt}-\cos t+r\sin t=0$；

(2)设(1)中的方程所确定的隐函数为$t=t(r)$；证明：当$r>0$，且$\pi<t<t(r)$时，恒有$r(\sin t-t\cos t)-t\sin t>0$.