第九章　重积分

9.1　二重积分的概念与性质

9.1.1　二重积分的定义

1. 曲顶柱体的体积

设有一立体, 它的底是 xOy 面上的闭区域 D, 侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面的一部分, 顶是曲面 $z = f(x,y)$ $((x,y) \in D)$, 这里 $f(x,y) \geq 0$ 且在 D 上连续. 这种立体称为曲顶柱体.

如何计算曲顶柱体的体积 V?

第一步: 划分 用一组曲线网把 D 分成 n 个小闭区域

$$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n,$$

分别以这些小闭区域的边界曲线为准线, 作母线平行于 z 轴的柱面, 这些柱面把原来的曲顶柱体分为 n 个细曲顶柱体, 设这些细曲顶柱体的体积为 $\Delta V_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

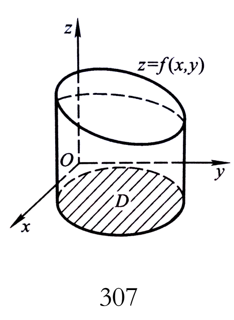
$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i.$$

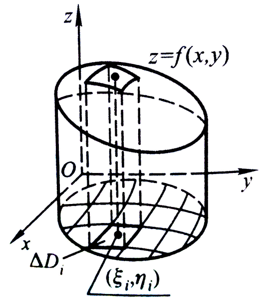
第二步: 近似 当小区域 $\Delta D_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的直径很小时, 由于 $f(x,y)$ 连续, 在同一个小闭区域上, $f(x,y)$ 变化很小, 这时细曲顶柱体可近似看作平顶柱体. 在 ΔD_i(此小闭区域的面积记作 $\Delta\sigma_i$) 中任取一点 (ξ_i, η_i), 以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高而底为 ΔD_i 的平顶柱体的体积为 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, 于是

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

第三步: 求和 将这 n 个细平顶柱体体积相加, 即得曲顶柱体体积的近似值

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$





第四步: 逼近 令 n 个小闭区域的直径中的最大值 (记作 λ) 趋于零, 取上述和的极限, 便得所求的曲顶柱体的体积 V, 即

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D, 它在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$, 这里 $\mu(x, y) > 0$ 且在 D 上连续. 现计算该薄片的质量 M.

第一步: 划分 用一组曲线网把 D 分成 n 个小闭区域 ΔD_i, 其面积记为 $\Delta \sigma_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.

第二步: 近似 当小区域 $\Delta D_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的直径很小时, 这些小块可以近似地看作均匀薄片. 在 ΔD_i 上任取一点 (ξ_i, η_i), 于是每个小块的质量 ΔM_i 可近似为 $\mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

第三步: 求和 求和即得平面薄片的质量 M 的近似值

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

第四步: 逼近 通过取极限可得到所求的平面薄片的质量

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

二重积分的定义

设 $f(x, y)$ 是平面有界闭区域 D 上的有界函数. 将闭区域 D 任意划分成 n 个可求面积的小闭区域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$, 并用 $\Delta \sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域 ΔD_i 的面积. 在每个 ΔD_i 上任取一点 (ξ_i, η_i), 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$(称为积分和). 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 这和的极限存在, 则称 函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 此极限称为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint\limits_D f(x, y) \, \mathrm{d}\sigma$, 即

$$\iint\limits_D f(x, y) \, \mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i,$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 称为 被积表达式, $\mathrm{d}\sigma$ 称为 面积微元, x 与 y 称为 积分变量, D 称为 积分区域.

曲顶柱体的体积可表示为$V = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 平面薄片的质量可表示为$M = \iint\limits_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

当被积函数为常数 1 时, $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$ (区域 D 的面积).

在直角坐标系中, 可用平行于坐标轴的直线网来划分 D, 则 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 因此二重积分可写作

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 叫作直角坐标系中的面积微元.

有界闭区域上的连续函数一定可积.

9.1.2 二重积分的性质

性质 1.1. 设 $f(x,y)$ 是定义在闭区域 D 上的可积函数, k 是常数, 则 $kf(x,y)$ 在 D 上可积, 且有

$$\iint\limits_D kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

性质 1.2 (二重积分对于被积函数的可加性). 设 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都是定义在闭区域 D 上的可积函数, 则 $f(x,y)\pm g(x,y)$ 在 D 上可积, 且有

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

性质 1.3 (二重积分对于积分区域的可加性). 若区域 D 由两个闭区域 D_1 与 D_2 合并而成 ($D = D_1\cup D_2$, D_1, D_2 无公共内点), $f(x,y)$ 是定义在闭区域 D 上的可积函数, 则 $f(x,y)$ 在 D_1 与 D_2 上均可积, 且

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

性质 1.4. 设 $f(x,y)$ 是定义在闭区域 D 上的可积函数, 且在 D 上有 $f(x,y)\ge 0$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \ge 0.$$

推论 1.5. 设 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都是定义在闭区域 D 上的可积函数, 且在 D 上 $f(x,y)\le g(x,y)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

推论 1.6. 设 $f(x,y)$ 是定义在闭区域 D 上的可积函数, 则

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma.$$

推论 1.7. 设 $f(x,y)$ 是定义在闭区域 D 上的可积函数, 且 $m \le f(x,y) \le M$, 则

$$m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma.$$

性质 1.8 (二重积分的中值定理). 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数, 则至少存在一点 $(\xi,\eta) \in D$, 使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma,$$

其中 σ 为 D 的面积.

积分中值定理的几何意义

任意曲顶柱体的体积必等于某同底、高为 $f(\xi,\eta)$ 的平顶柱体的体积. 值 $f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 也称为函数 $f(x,y)$ 在 D 上的平均值.

性质 1.9 (对称区域上奇偶函数的积分性质). 设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的连续函数,

(1) 区域 D 关于 x 轴对称, $f(x,y)$ 为 y 的奇、偶函数

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D^*} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y) = f(x,y), \end{cases}$$

其中 D^* 为 D 的上半平面.

(2) 区域 D 关于 y 轴对称, $f(x,y)$ 为 x 的奇、偶函数

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x,y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D^*} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y) = f(x,y), \end{cases}$$

其中 D^* 为 D 的右半平面.

性质 1.10 (对称区域上奇偶函数的积分性质). 设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的连续函数,

(1) 区域 D 关于原点对称, $f(x,y)$ 同时为 x,y 的奇、偶函数

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x,-y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D^*} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(-x,-y) = f(x,y), \end{cases}$$

其中 $D^* = \{(x,y) \in D : x \ge 0\}$ 或 $\{(x,y) \in D : y \ge 0\}$.

(2) 区域 D 关于 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,y) = -f(y,x), \\ 2\iint_{D^*} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(x,y) = f(y,x), \end{cases}$$

其中 $D^* = \{(x,y) \in D : y \ge x\}$.

性质 1.11. 设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的连续函数,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D^*} f(y,x)\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 D^* 是与 D 关于 $y=x$ 对称的区域.

例 1.1. 试利用重积分的性质比较下面两个重积分的大小

$$\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \text{ 与 } \iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D 是由直线 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的闭区域.

解: 由于在 D 上有 $0 \le x+y \le 1$, 所以

$$(x+y)^2 \le x+y,$$

故有

$$\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

例 1.2. 试利用重积分的性质比较下面两个重积分的大小

$$\iint\limits_D (x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma \text{ 与 } \iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D 是以 $(0,0),(1,-1),(1,1)$ 为顶点的三角形闭区域.

解: 由于在 D 上有 $0 \le x^2-y^2 \le 1$, 所以

$$0 \le x^2-y^2 \le \sqrt{x^2-y^2},$$

故有

$$\iint\limits_D (x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

例 1.3. 试利用重积分的性质估计二重积分 $\iint\limits_D e^{\sin x\cos y}\,\mathrm{d}\sigma$ 的值, 其中 D 为圆形区域 $x^2+y^2 \le 4$.

解: 对任意的 $(x,y)\in D$, 由于 $-1 \le \sin x\cos y \le 1$, 所以

$$\frac{1}{e} \le e^{\sin x\cos y} \le e,$$

又区域 D 的面积 $\sigma = 4\pi$, 故有

$$\frac{4\pi}{e} \le \iint\limits_D e^{\sin x\cos y}\,\mathrm{d}\sigma \le 4\pi e.$$

例 1.4. 求 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 在区域 $D: x^2+y^2 \le R^2$ 上的平均值.

解: 由二重积分的几何意义知, $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 是半个球体的体积, 其值为 $\frac{2}{3}\pi R^3$. 又 D 面积为 πR^2, 故 $f(x,y)$ 在区域 D 上的平均值为

$$\frac{1}{\pi R^2}\cdot\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}R.$$

9.1.3 思考与练习

练习 237. 已知积分区域 $D:(x-1)^2+(y+1)^2\le 2\pi$, 则 $\iint_D \mathrm{d}\sigma=$ ____.

$2\pi^2$

练习 238. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1=\iint_{x^2+y^2\le 1}|xy|\,\mathrm{d}\sigma,\ I_2=\iint_{|x|+|y|\le 1}|xy|\,\mathrm{d}\sigma,\ I_3=\iint_{-1\le x,y\le 1}|xy|\,\mathrm{d}\sigma.$$

$I_2<I_1<I_3$

练习 239. 设 D 是第二象限的一个有界闭域, 且 D 在 y 轴上的投影包含于闭区间 $[0,1]$, 则

$$I_1=\iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\ I_2=\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\ I_3=\iint_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (　　)

(A) $I_1\le I_2\le I_3$　　(B) $I_2\le I_1\le I_3$

(C) $I_3\le I_2\le I_1$　　(D) $I_3\le I_1\le I_2$

D. 因为 $0\le y\le 1$, 故 $y^2\le y\le y^{1/2}$. 又 $x^3<0$.