

作业 3

1. 设 X_1, X_2 是来自总体为正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，试求 $Y = \left(\frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2}\right)^2$ 的分布。
2. 设总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，且 X_1, \dots, X_{2n} 为来自该总体的简单随机样本且 $n \geq 2$ ，其样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$ ，另有统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ ，求常数 c 使得统计量 $\frac{c(\bar{X} - \mu)^2}{Y}$ 服从 F 分布，并给出 F 分布的自由度。
3. 设 X_1, \dots, X_n 是来自总体概率函数为 $P(X = x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}$ ，其中 $x = 0, 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ 的一组简单随机样本。
 - (1) 求 θ 的矩估计和极大似然估计；
 - (2) 求(1)中两种估计的均方误差；
 - (3) 优先选用以上哪个估计？请给出论证说明。
4. 设总体

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x - \theta}{\lambda}\right), x \geq \theta, \lambda > 0$$

其中 θ 未知， λ 已知。 X_1, \dots, X_n 是简单随机样本，求

- (1) θ 的矩估计及其均方误差，该估计是否是相合估计（请说明）；
 - (2) θ 的极大似然估计及其均方误差，该估计是否是相合估计（请说明）；
 - (3) 给出 θ 的 $100(1 - \alpha)\%$ 置信区间。
5. 设总体 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ，且有 X_1, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本， $P(X \leq 2)$ 的极大似然估计是？
 6. 假设某品牌轮胎的寿命服从正态分布，为估计某品牌轮胎的平均寿命，现随机抽取100只轮胎测试，得到样本均值为5.21年，样本标准差为0.23年。
 - (1) 该品牌轮胎寿命均值的95%置信区间为？
 - (2) 该品牌轮胎寿命标准差的95%置信区间为？
 7. 设总体 $X \sim N(\mu, 4)$ ，且有 X_1, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本，为保证 μ 的90%置信区间长度不超过0.8，则样本容量 n 至少应该为？