# 2021-2022第一学期

# 概率论期末考试

2021.12.07, 下午1点 ~ 3点

杨勇制作

上海财经大学
SHANGHAI UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

一. 选择题(共5题, 每题3分, 共计15分)

1.已知$A, B$为两事件, $P(A)=0.2$, $P(B)=0.4, P(A|B)=0.25$,则 $P(\bar{A}\cap\bar{B})=($　　　$)$。

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{1}{2}$

$$解: P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B})$$

$$=1-P(A\cup B)$$

$$=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$$

$$=1-(P(A)+P(B)-P(B)P(A|B))$$

$$=1-(0.2+0.4-0.4\times 0.25)=0.5。$$

选(D)

2.设随机变量$X \sim N\left(\frac{1}{3}, 2\right)$,以$Y$表示对$X$的3次独立观测中事件$\left\{X \geq \frac{1}{3}\right\}$出现的次数,则$P\{Y=2\}=($　　$)$。

(A) $\frac{1}{8}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $\frac{3}{8}$　(D) $\frac{1}{2}$

$$解: p = P\left\{X \geq \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2},$$

$$Y \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right),$$

$$P\{Y = 2\} = C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}。$$

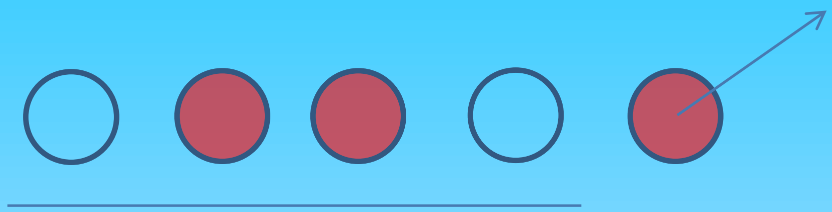
选(C)

3.设每次试验成功的概率为$p=\frac{1}{2}$，独立地重复进行到第5次试验才取得3次成功的概率为(　　)。

(A) $\frac{1}{16}$　(B) $\frac{3}{16}$　(C) $\frac{3}{8}$　(D) $\frac{1}{8}$

解：

成功



4次成功2次

$$C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}。$$

选(B)

4.设随机变量$X,Y$相互独立，

$X \sim N(2,2), Y \sim N(2,1)$，则(　　　)。

(A)$P\{X+Y \geq 2\} = \dfrac{1}{4}$,

(B)$P\{X-Y \geq 0\} = \dfrac{1}{2}$,

(C)$P\{\max\{X,Y\} \geq 2\} = \dfrac{1}{4}$,

(D)$P\{\min\{X,Y\} \geq 0\} = \dfrac{1}{4}$。

解:

$$X+Y\sim N(4,3),\ X-Y\sim N(0,3),$$

$$P\{X-Y\geq 0\}=\frac{1}{2}。$$

选(B)

5.若随机变量$X,Y$的相关系数为$\rho$,

$Z=aX+b$,则$Y$与$Z$的相关系数仍为

$\rho$的充分必要条件为(　　　)。

(A)$a=1$,$b$为任意实数,

(B)$a>0$,$b$为任意实数,

(C)$a<0$,$b$为任意实数,

(D)$a\neq 0$,$b$为任意实数。

解：$$Cov(Y,Z)=Cov(Y,aX+b)$$
$$=aCov(Y,X)+Cov(Y,b)$$
$$=aCov(Y,X)=a\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY},$$

$$DZ=a^2DX,$$

$$\rho_{YZ}=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}}$$

$$=\frac{a\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}}{\sqrt{DY}\,|a|\sqrt{DX}}=\frac{a}{|a|}\rho$$ 。选(B)

二.填空题(共6题,1–3题每题4分(每空2分),4–6题每题3分,共计21分)

1.袋中有大小相同的红球4只,白球6只,从中随机一次抽取2只,则此两球颜色不同的概率为_____________;

从4阶行列式的一般展开式中任取一项,则这项包含主对角线元素的概率为_______________。

$$解: \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{\underline{15}};$$

$$A_k: 含 a_{kk} 的项, k = 1, 2, 3, 4,$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

$$= C_4^1 \times \frac{3!}{4!} - C_4^2 \times \frac{2!}{4!} + C_4^3 \times \frac{1!}{4!} - C_4^4 \times \frac{1}{4!}$$

$$= 1 - \frac{12}{24} + \frac{4}{24} - \frac{1}{24} = \frac{5}{\underline{8}}。$$

2.随机变量$X$的概率分布为

$P\{X=k\}=(2-3a)a^k, k=0,1,2,\cdots,$

则常数$a=$ ________, $EX=$ ________。

$$解:(2-3a)\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (2-3a)\frac{1}{1-a} = 1,$$

$$a = \frac{1}{2}, P\{X = k\} = \frac{1}{2^{k+1}}, k = 0,1,2,\cdots,$$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1/2} = 1。$$

3.设随机变量$X$的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{3+x^2}, 0\le x\le 1\\ 0, otherwise\end{cases},$$

那么$k=$ ________, $X$的分布函数

$F(x)=$ ____________。

解:

$$k\int_0^1 \frac{1}{3+x^2}dx = \frac{k}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{k}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{k}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{6} = 1,$$

$$k = \frac{6\sqrt{3}}{\pi},$$

$$0 \le x < 1,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}\int_{0}^{x}\frac{1}{3+x^{2}}dx$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{x}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2}}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{0}^{x} = \frac{6}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right),$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \dfrac{6}{\pi}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right), 0\le x<1 \\ 1, x\ge 1 \end{cases}$$。

4.设$X$服从参数为2的指数分布,则$Y=1-e^{-2X}$的密度函数为__________。

解:

$$y=1-e^{-2x}=f(x),\text{严格单调,}$$

$$x=-\frac{\ln(1-y)}{2}=h(y),$$

$$p_Y(y)=p_X(h(y))\left|h'(y)\right|$$

$$=\begin{cases} =2e^{-2\left(-\frac{\ln(1-y)}{2}\right)}\dfrac{1}{2(1-y)}=1, -\dfrac{\ln(1-y)}{2}>0 \\ 0\times\dfrac{1}{2(1-y)}, -\dfrac{\ln(1-y)}{2}\le 0 \end{cases},$$

其中$-\dfrac{\ln(1-y)}{2}>0,$

$\ln(1-y)<0,$

则$1-y>0, 1-y<1$,即$0<y<1$,

所以,

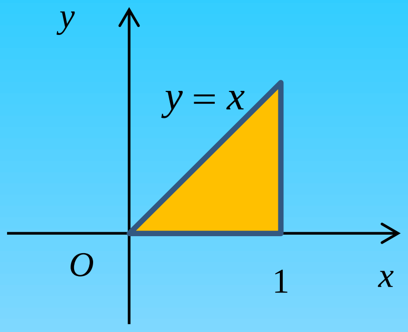
$$p_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}。$$

5.设二维连续型随机变量$(X,Y)$的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} ky(1-x), 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0, otherwise \end{cases},$$

则$k=$__________。

解：




$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

$$=k\int_0^1 dx\int_0^x y(1-x)dy=\frac{k}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx$$

$$=\frac{k}{2}\times\frac{1}{12},k=\underline{\underline{12}}。$$

$$6.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-2x)\exp\left\{-\frac{(x-2)^2}{2}\right\}dx$$

$= \underline{\qquad\qquad\qquad}$。

解：设$X \sim N(2,1)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-2x)\exp\left\{-\frac{(x-2)^2}{2}\right\}dx$$

$$=E(X^2-2X)=E(X^2)-2EX$$

$$=(DX+(EX)^2)-2EX=\underline{1}。$$

## 三.论述证明题(8分)

(1)试述切比雪夫大数定律的内容。

(2)设$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$为独立随机变量序列,且其概率分布如下:

当$n=1$时,$P\{X_1=0\}=1$,

当$n=2,3,\cdots$时,$P\{X_n=0\}=1-\dfrac{2}{n^2}$,

$P\{X_n=\pm n\}=\dfrac{1}{n^2}$，证明这个随机变量序列$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$服从切比雪夫大数定律。

论述证明：

(1)切比雪夫大数定律

设$X_1, X_2, \cdots$是由相互独立的随机变量所构成的序列,各自有数学期望$EX_1, EX_2, \cdots$及有限方差$DX_1, DX_2, \cdots$,并且它们的方差有公共上界,即$DX_i \le C, i = 1, 2, \cdots$,其中$C$是与$i$无关的常数,那么对任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k\right| < \varepsilon\right) = 1。$$

$$(2) DX_1 = 0,$$

$$n \geq 2, X_n \sim \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{n^2} & 1-\frac{2}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix},$$

$$EX_n = 0,$$

$$E(X_n^2) = (-n)^2 \times \frac{1}{n^2} + n^2 \times \frac{1}{n^2} = 2,$$

$$DX_n = E(X_n^2) - (EX_n)^2 = 2,$$

当$n \geq 1$时，$DX_n \leq 2$，其中2与$n$无关，

即有公共上界，所以，$\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$

服从切比雪夫大数定律。

四.计算题(共5题,其中第1题10分,第2题13分,第3题15分,第4题10分,第5题8分,共计56分)

1.袋中有两个球(每个球可能是黑的,也可能是白的),这两个球都是白球或者黑球的概率皆为$1/3$,现在往袋中加入一个黑球,搅和后再任取一球,已知取出的是黑球,求剩下的球为一黑一白的概率。

解$:A_k:$表示原来袋中有$k$个黑球,

$k=0,1,2,B$:搅和后取出的是黑球。

$$P(A_k)=\frac{1}{3},k=0,1,2,$$

$$P(B|A_0)=\frac{1}{3},P(B|A_1)=\frac{2}{3},$$

$$P(B|A_2)=1。$$

$$P(B)=\sum_{k=0}^{2}P(A_k)P(B|A_k)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{2}{3},$$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{2/3}=\frac{1}{3}。$$

2.设二维随机向量$(X,Y)$的联合密度函数为

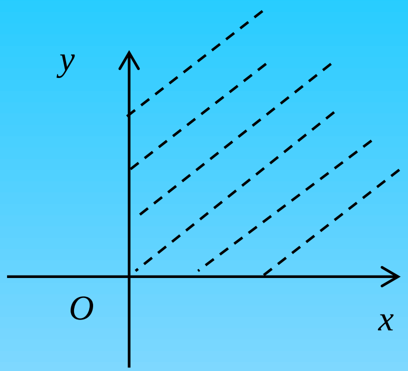
$$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, x>0, y>0 \\ 0, otherwise \end{cases},$$

(1)求$X,Y$得边际密度函数;

(2)$X$与$Y$相互独立吗？请给出证明;

(3)求$E(XY)$。

解:




(1) $x > 0,$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dy$$

$$= -e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xy}d(-xy)$$

$$= -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)_0^{+\infty} = e^{-x},$$

$$p_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases},$$

$$y>0,$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

$$=\int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dx=-\frac{1}{1+y}\int_0^{+\infty} xde^{-x(1+y)}$$

$$=-\frac{1}{1+y}\left(xe^{-x(1+y)}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y)}dx\right)$$

$$= \frac{1}{1+y}\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y)}dx$$

$$= -\frac{1}{(1+y)^2}\left(e^{-x(1+y)}\right)_0^{+\infty} = \frac{1}{(1+y)^2},$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+y)^2}, y > 0 \\ 0, y \le 0 \end{cases} 。$$

(2)当$x>0, y>0$时,

$$p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y),$$

所以, $X$与$Y$不独立。

(3)

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp(x,y)dxdy$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}xy\bullet xe^{-x(1+y)}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty} x^2\left(\int_0^{+\infty} ye^{-x(1+y)}dy\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty} x\left(\int_0^{+\infty} yde^{-x(1+y)}\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty} x\left(ye^{-x(1+y)}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y)}dy\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty} x\left(\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y)}dy\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}\left(e^{-x(1+y)}\right)_0^{+\infty}dx=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1。$$

3.二维随机向量$(X,Y)$的联合概率分布如下表所示:

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.25 | 0.15 |
| 1 | 0.35 | 0.25 |

(1)求$U=\max\{X,Y\}$和$V=\min\{X,Y\}$的概率分布;

(2)求$U$和$V$的相关系数;

(3)已知Z的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}2z, 0<z<1\\ 0, 其他\end{cases},$$

且$Z$与$U$独立,求$W=U+Z$的密度函数。

解:(1)

| $U$: $X \backslash Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $V$: $X \backslash Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$$U \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

(2)

$$P(U=0,V=0)=P(U=0)$$

$$=P(\max\{X,Y\}=0)$$

$$=P(X=0,Y=0)=\frac{1}{4},$$

$$P(U=0,V=1)=0,$$

$$P(U=1,V=1)=P(V=1)$$

$$=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4},$$

$$P(U=1,V=0)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

| $U \backslash V$ | 0 | 1 | $p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $p_{\cdot j}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

$$E(UV)=1\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

$$EU=\frac{3}{4},DU=\frac{3}{16},EV=\frac{1}{4},DV=\frac{3}{16},$$

$$Cov(U,V)=E(UV)-EUEV$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16},$$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\frac{1/16}{3/16}=\frac{1}{3}。$$

$$(3)\, U \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

$$w < 0, F_W(w) = 0, w \geq 2, F_W(w) = 1,$$

$$0 \leq w < 2,$$

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(U + Z \leq w)$$

$$= P(U = 0, U + Z \leq w) + P(U = 1, U + Z \leq w)$$

$$= P(U = 0, Z \leq w) + P(U = 1, Z \leq w - 1)$$

$$= P(U=0)P(Z \le w) + P(U=1)P(Z \le w-1)$$

$$= \frac{1}{4}P(Z \le w) + \frac{3}{4}P(Z \le w-1)$$

$$= \frac{1}{4}F_Z(w) + \frac{3}{4}F_Z(w-1),$$

$$p_W(w) = \frac{1}{4}p_Z(w) + \frac{3}{4}p_Z(w-1),$$

$$0 < w < 1,$$

$$p_W(w) = \frac{w}{2},$$

$$1 < w < 2,$$

$$p_W(w) = \frac{3}{2}(w-1),$$

$$p_W(w)=\begin{cases}\dfrac{w}{2},0<w<1\\ \dfrac{3}{2}(w-1),1<w<2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$ 。

4.若你现在准备从家出发到一个地点去赴约,约会时间是上午10点钟。如果提前$s$分钟赴约,花费为$cs$(即提前每分钟花费为$c$元),若迟到$s$分钟赴约,花费为$ks$元(即迟到每分钟花费为$k$元)。假设从家到赴约地点路上所用的时间$X \sim U[10,30]$(单位:分钟),欲使平均花费最小,试确定应该出发的时间。

解：

设离赴约时提前$t$分钟出发。

$Y$表示所需的花费，

$$Y = f(X) = \begin{cases} c(t-X), X \le t \\ k(X-t), X > t \end{cases},$$

$$EY = Ef(X) = \int_{10}^{30} f(x)p(x)dx$$

$$= \frac{1}{20}\left(\int_{10}^{t} c(t-x)dx + \int_{t}^{30} k(x-t)dx\right)$$

$$令(EY)' = 0求得$$

$$t = \frac{10c + 30k}{c + k}.$$

5.上海市某新冠疫苗接种点预约接种疫苗的人数$X$服从参数为81的泊松分布,如果某批接种报名的人数超过100人,就分两天接种,否则就一天完成,问一天完成的概率是多少?

解：设$X_k \sim P(1), k=1,2,\cdots,81,$

$X_1,\cdots,X_{81}$独立，由可加性知，

$$X=\sum_{k=1}^{81} X_k \sim P(81),$$

$EX_1=1, DX_1=1,$独立同分布，

由中心极限定理知，

$\sum_{k=1}^{81} X_k$近似服从$N(81,81)$，则

$$P(X \le 100) = P\left(\sum_{k=1}^{81} X_k \le 100\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{100-81}{\sqrt{81}}\right) = \Phi(2.11) = 0.9826\text{。}$$

完