8.6 隐函数的求导法则

8.6.1 单个方程的情形

引例

设方程 $x^2+y^2=1, \forall y_0 \neq 0$, 则一定存在相应的邻域, 在该邻域中, 可以将 y 写成 x 的函数. 当 $y_0>0$ 时,

$$y=\sqrt{1-x^2};$$

当 $y_0<0$ 时,

$$y=-\sqrt{1-x^2}.$$

定理 6.1 (二元方程确定的一元隐函数存在定理). 设二元函数 $F(x,y)$ 满足下列条件:

(1) $F(x_0,y_0)=0$;

(2) 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)\subset\mathbb{R}^2$ 内, 函数 $F(x,y)$ 连续且具有连续的偏导数;

(3) $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$,

则

(i) 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $V(P_0)\subset U(P_0)\subset\mathbb{R}^2$ 内, 方程 $F(x,y)=0$ 唯一确定了一个定义在某区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内的隐函数 $y=f(x)$, 满足 $y_0=f(x_0)$ 且 $F(x,f(x))\equiv 0$;

(ii) $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内单值连续;

(iii) $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内具有连续的导数, 满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

注 6.2. (1) 定理中的条件 "$F_y(x_0,y_0)\neq 0$" 对定理结论的成立时很重要的. 在这一条件下, 由于 F_y 的连续性, 使得在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内的每一点 (x,y) 处都有 $F_y(x,y)\neq 0$. 于是对 x_0 近旁的每一固定的 x 值, 以 "适合方程 $F(x,y)=0$" 为对应法则, 必定对应唯一的 y 值. 相反, 如果 $F_y(x_0,y_0)=0$, 则可能使方程在点 (x_0,y_0) 的任何邻域内都不能唯一地确定隐函数.

(2) 若把条件 "$F_y(x_0,y_0)\neq 0$" 改为 "$F_x(x_0,y_0)\neq 0$", 则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内确定唯一的有连续导数的一元函数 $x=x(y)$, 它满足条件 $x_0=x(y_0)$, 且有 $\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y}{F_x}$.

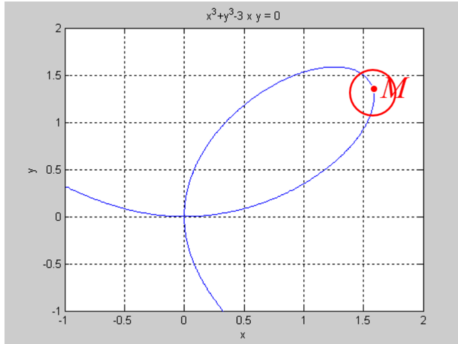
定理的条件充分不必要. 如 $y^3+x^3=0$ 在点 $(0,0)$ 处有 $F_y'=0$, 不满足条件 (3), 但仍有 $y=-x$.

定理 6.3 ($n+1$ 元方程确定的 n 元隐函数存在定理). 设 $n+1$ 元函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 满足下列条件:

(1) $F(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)=0$;

(2) 在点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)$ 的某个邻域 $U(P_0)\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 内, 函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 连续且具有连续的偏导数 F_y', F_{x_i}', $i=1,2,\cdots,n$;

(3) $F_y'(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq 0$,



则

(i) 在点 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)$ 的某个邻域 $V(P_0) \subset U(P_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 内, 方程 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$ 唯一确定了一个定义在点 $R_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 某邻域 $U(R_0) \subset \mathbb{R}^n$ 内的隐函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 满足 $y_0 = f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 且 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \equiv 0$;

(ii) $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在邻域 $U(R_0) \subset \mathbb{R}^n$ 内单值连续;

(iii) $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在邻域 $U(R_0) \subset \mathbb{R}^n$ 内具有连续的导数, 满足

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

例 6.1. 验证方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 在点 $M(4^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$ 的某个邻域内能唯一地确定有连续导数的函数 $x = \varphi(y)$, 并求 $\frac{dx}{dy}$.

解: 令 $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, 则函数 $F(x, y)$ 具有连续偏导数, 且 $F(4^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}) = 0$.

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad F'_y(x, y) = 3y^2 - 3x,$$

由于 $F'_x(4^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}) = 3(4^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) \neq 0$. 因此由隐函数存在定理知, 方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 在点 M 的某个邻域内能唯一地确定有连续导数的函数 $x = \varphi(y)$, 满足 $4^{\frac{1}{3}} = \varphi(2^{\frac{1}{3}})$, 且

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} = -\frac{y^2 - x}{x^2 - y}.$$

方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 所表示的平面曲线称为叶形线.

例 6.2. 设 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$, 则当 $F'_z = 2z - 4 \neq 0$ 时, 方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定了隐函数 $z = z(x, y)$. 由于

$$F'_x = 2x,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{x}{2 - z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2 - z}\right) = \frac{2 - z + x z_x}{(2 - z)^2} = \frac{(2 - z)^2 + x^2}{(2 - z)^3}.$$

例 6.3. 设 $xy + yz + zx = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解: 令 $F(x,y,z) = xy + yz + zx - 1$, 则

$$F'_x = y + z, \quad F'_y = z + x, \quad F'_z = x + y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y+z}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z+x}{x+y},$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y+z}{x+y}\right) = -\frac{(x+y)z_x - (y+z)}{(x+y)^2} = \frac{2(y+z)}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y+z}{x+y}\right) = -\frac{(x+y)(1+z_y) - (y+z)}{(x+y)^2} = \frac{2z}{(x+y)^2}.$$

例 6.4. 设 $x + y + z = e^{xyz}$, 求 $\mathrm{d}z$.

解: 令 $F(x,y,z) = x + y + z - e^{xyz}$, 则

$$F'_x = 1 - yze^{xyz}, \quad F'_y = 1 - zxe^{xyz}, \quad F'_z = 1 - xye^{xyz},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{yze^{xyz} - 1}{1 - xye^{xyz}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{zxe^{xyz} - 1}{1 - xye^{xyz}}.$$

所以

$$\mathrm{d}z = \frac{yze^{xyz} - 1}{1 - xye^{xyz}}\,\mathrm{d}x + \frac{zxe^{xyz} - 1}{1 - xye^{xyz}}\,\mathrm{d}y.$$

例 6.5. 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 证明函数 $z = z(x,y)$ 满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

解: 令 $G(x,y,z) = F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right)$, 则

$$G'_x = F'_1 - \frac{z}{x^2}F'_2, \quad G'_y = -\frac{z}{y^2}F'_1 + F'_2, \quad G'_z = \frac{1}{y}F'_1 + \frac{1}{x}F'_2,$$

故

$$z'_x = -\frac{G'_x}{G'_z} = -\frac{y(x^2F'_1 - zF'_2)}{x(xF'_1 + yF'_2)}, \quad z'_y = -\frac{G'_y}{G'_z} = -\frac{x(-zF'_1 + y^2F'_2)}{y(xF'_1 + yF'_2)}.$$

代入化简得证.

例 6.6. 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续的偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$.

解: 令 $F(x,y,z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$, 则

$$F'_x = c\Phi'_1, \quad F'_y = c\Phi'_2, \quad F'_z = -a\Phi'_1 - b\Phi'_2,$$

故

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{c\Phi'_1}{a\Phi'_1 + b\Phi'_2}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{c\Phi'_2}{a\Phi'_1 + b\Phi'_2}.$$

代入化简得证.

8.6.2 方程组情形

定理 6.4 (方程组情形的隐函数存在定理). 设 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 是点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)\subset\mathbb{R}^4$ 上函数组方程, 若下列条件成立:

(1) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

(2) 函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 在 $U(P_0)$ 上连续且具有连续的一阶偏导数;

(3) 函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 关于变量 u,v 的雅可比 (Jacobi) 行列式 $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零,

则

(i) 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某个邻域 $V(P_0)\subset U(P_0)\subset\mathbb{R}^4$ 内, 方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 唯一确定了一个定义在点 $R_0(x_0,y_0)$ 某邻域 $U(R_0)\subset\mathbb{R}^2$ 内的两个二元函数

$$u=f(x,y),\quad v=g(x,y)$$

满足 $u_0=f(x_0,y_0), v_0=g(x_0,y_0)$ 且 $\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0, \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0; \end{cases}$

(ii) $u=f(x,y), v=g(x,y)$ 在邻域 $U(R_0)\subset\mathbb{R}^2$ 内单值连续;

(iii) $u=f(x,y), v=g(x,y)$ 在邻域 $U(R_0)\subset\mathbb{R}^2$ 内具有连续的一阶偏导数, 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

例 6.7. 设方程组 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \end{cases}$

(1) 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$;　　(2) 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解:

(1) 以 z 为自变量, 方程组关于 z 求导得

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-1, \\ x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-z. \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}=y-x\neq 0$ 时, 解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{y-z}{x-y},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{z-x}{x-y}.$$

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-z}{z-y}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x}{z-y}$.

例 6.8. 设函数 $x=f(u,v), y=g(u,v)$ 在点 (u,v) 的某邻域内连续且有连续偏导数, 又 $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\neq 0$.

(1) 证明方程组 $\begin{cases} x=f(u,v), \\ y=g(u,v) \end{cases}$ 在点 (x,y,u,v) 的某邻域内唯一确定一组单值连续且有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$;

(2) 求反函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 关于 x,y 的偏导数.

解: 将方程组改写成

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - f(u,v), \\ G(x,y,u,v) = y - g(u,v). \end{cases}$$

由假设

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \neq 0,$$

由隐函数组存在定理知结论成立.

将方程组 $\begin{cases} x = f(u,v), \\ y = g(u,v) \end{cases}$ 确定的反函数 $u = u(x,y), v = v(x,y)$ 代入此方程组得

$$\begin{cases} x \equiv f[u(x,y), v(x,y)], \\ y \equiv g[u(x,y), v(x,y)]. \end{cases}$$

对 x 求偏导得

$$\begin{cases} 1 \equiv \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 \equiv \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial u}.$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

例 6.9. 设方程组 $\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v \end{cases}$ 确定了函数 $u = u(x,y)$ 与 $v = v(x,y)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解: 在恒等式组 $\begin{cases} x \equiv u\cos v, \\ y \equiv u\sin v \end{cases}$ 两端分别对 x 与 y 求偏导, 可得

$$\begin{cases} 1 = \cos v\frac{\partial u}{\partial x} - u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \sin v\frac{\partial u}{\partial x} + u\cos v\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} 0 = \cos v\frac{\partial u}{\partial y} - u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = \sin v\frac{\partial u}{\partial y} + u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos v, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\sin v}{u}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \sin v, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos v}{u}. \end{cases}$$

8.6.3 思考与练习

练习 229. 验证方程 $x^4 + y^4 = 1$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个有连续导数的函数 $y = y(x)$, 并求 $y'(0)$ 与 $y''(0)$ 的值.

解: 令 $F(x,y) = x^4 + y^4 - 1$, 则 $F(0,1) = 0$, $F_y(0,1) = 4 \neq 0$. 因此由隐函数存在定理知, 方程 $x^4 + y^4 = 1$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个有连续导数的函数 $y = y(x)$, 它满足条件 $y(0) = 1$, 且

$$y'(x) = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{x^3}{y^3},$$

$$y''(x) = \left(-\frac{x^3}{y^3}\right)' = -\frac{3x^2y^3 - 3y^2x^3y'}{y^6} = -\frac{3x^2y^4 + 3x^6}{y^7},$$

所以

$$y'(0) = y''(0) = 0.$$

练习 230. 设 $y = y(x)$ 与 $z = z(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ y = 2x^2 + z^2 \end{cases}$ 所确定的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{dz}{dx}$.

解: 由于方程组确定了函数 $y = y(x)$ 与 $z = z(x)$, 故有恒等式组

$$\begin{cases} z(x) = x^2 + 2y^2(x), \\ y(x) = 2x^2 + z^2(x). \end{cases}$$

在每个等式的两边对 x 求导, 可得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 4y\frac{dy}{dx}, \\ \frac{dy}{dx} = 4x + 2z\frac{dz}{dx}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 4y\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2x, \\ \frac{dy}{dx} - 2z\frac{dz}{dx} = 4x, \end{cases}$$

解得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x(z+1)}{1-8yz}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{4x(8y+1)}{1-8yz}.$$

练习 231. 设 $y = y(x)$ 与 $z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的函数, 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(f + xf')F_y' - xf'F_x'}{F_y' + xf'F_z'}.$$