

## 12.4 可降阶的微分方程

二阶及二阶以上的微分方程称为**高阶微分方程**. 对于某些高阶微分方程, 可以通过适当的变量代换将它们化成较低阶的方程来求解. 这种类型的方程称为**可降阶的微分方程**, 相应的求解方法也称为**降阶法**.

本节讨论三种可降阶的高阶微分方程和相应的解法:

- $y^{(n)} = f(x)$  型的微分方程
- $y'' = f(x, y')$  型的微分方程
- $y'' = f(y, y')$  型的微分方程

### 12.4.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

$y^{(n)} = f(x)$  型的微分方程

设微分方程  $y^{(n)} = f(x)$ , 两端积分得

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx = f_1(x) + C_1.$$

继续积分得

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1) dx = \int f_1(x) dx + C_1 x = f_2(x) + C_1 x + C_2.$$

连续  $n$  次积分, 即可得到原方程的通解.

**例 4.1.** 求解微分方程

$$y''' = xe^x.$$

**解:**

$$y'' = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C_1.$$

$$y' = \int [xe^x - e^x + C_1] dx = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2.$$

$$y = \int (xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2) dx = xe^x - 3e^x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$$

### 12.4.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

$y'' = f(x, y')$  型的微分方程

这类方程的特点是方程的右端不显含未知函数  $y$ . 令  $y' = p$ , 则方程化为

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

这是一个关于变量  $x, p$  的一阶微分方程. 设其通解为

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(x, C_1),$$

通过两端积分, 可得该方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

**例 4.2.** 求微分方程  $xy'' + y' = x^2$  的通解.

**解:** 设  $p = y'$ , 则  $y'' = \frac{dp}{dx}$ . 代入方程得

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p = x.$$

这是关于  $p$  的一阶非齐次线性微分方程. 利用通解公式得

$$\begin{aligned} p &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( \int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C_1 \right) = \frac{1}{x} \left( \int x^2 dx + C_1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{x^3}{3} + C_1 \right) = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3}. \end{aligned}$$

由此得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3},$$

再通过分部积分即得原方程的通解

$$y = C_1 \ln|x| + \frac{1}{9}x^3 + C_2.$$

**例 4.3.** 求微分方程  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  满足初值条件  $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$  的特解.

**解:** 设  $p = y'$ , 则原方程化为可分离变量方程

$$(1+x^2) \frac{dp}{dx} = 2xp \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2x dx}{1+x^2} \quad (p \neq 0).$$

两边积分得

$$\ln|p| = \ln(1+x^2) + C_0 \Leftrightarrow p = C_1(1+x^2) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2).$$

由条件  $y'|_{x=0} = 3$  得  $C_1 = 3$ . 所以

$$\frac{dy}{dx} = 3(1+x^2).$$

再用分离变量法解得

$$y = 3x + x^3 + C_2.$$

根据条件  $y|_{x=0} = 1$  得  $C_2 = 1$ . 于是所求特解为

$$y = 3x + x^3 + 1.$$

### 12.4.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

#### $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

这类方程的特点是方程的右端不显含自变量  $x$ . 令  $y' = p$ , 并把  $y$  看作自变量, 利用复合函数的求导法则可把  $y''$  化成  $p$  关于  $y$  的导数, 即有

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

则原方程变形为一个关于变量  $y$  和  $p$  的一阶微分方程

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

若能求出它的通解并能把解表示成

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$

则分离变量并积分, 就得到该方程的通解

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

**例 4.4.** 求微分方程  $yy'' - (y')^2 + y' = 0$  的通解 ( $y$  不为常数).

**解:** 设  $p = y'$ , 则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ . 代入方程得

$$\frac{dp}{p-1} = \frac{dy}{y}.$$

两端积分得

$$\ln |p-1| = \ln |y| + C,$$

即

$$p = \frac{dy}{dx} = C_1 y + 1 \quad (C_1 = \pm e^C).$$

对上式分离变量得

$$\frac{dy}{C_1 y + 1} = dx,$$

两端积分变得原方程的通解

$$\frac{1}{C_1} \ln |C_1 y + 1| = x + C_2 \Leftrightarrow C_1 y + 1 = C_3 e^{C_1 x}.$$

**例 4.5.** 求解初值问题

$$\begin{cases} yy'' = 2(y'^2 - y^2), \\ y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2. \end{cases}$$

解: 设  $p = y'$ , 则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ , 原方程化为

$$yp \frac{dp}{dy} = 2(p^2 - y^2).$$

此方程为齐次方程, 再变形为

$$\frac{dp}{dy} = \frac{2(p^2 - y^2)}{yp} = \frac{2\left(\frac{p^2}{y^2} - 1\right)}{\frac{p}{y}}.$$

令  $u = \frac{p}{y}$ , 则有

$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{2(u^2 - 1)}{u}, \text{ 即 } y \frac{du}{dy} = \frac{u^2 - 2}{u}.$$

解得

$$u^2 - 2 = \left(\frac{p}{y}\right)^2 - 2 = Cy^2.$$

由条件得  $C = 2$ . 从而

$$y' = y\sqrt{2(y^2 + 1)},$$

分离变量得

$$\frac{dy}{y\sqrt{y^2 + 1}} = \sqrt{2} dx.$$

该方程的解为

$$\ln(\sqrt{y^2 + 1} - 1) - \ln|y| = \sqrt{2}x + C.$$

再由条件得  $C = \ln(\sqrt{2} - 1)$ . 因此原方程的解为

$$\ln(\sqrt{y^2 + 1} - 1) - \ln y = \sqrt{2}x + \ln(\sqrt{2} - 1).$$

#### 12.4.4 思考与练习

练习 313. 求解微分方程

$$y'' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

解: 两端积分得

$$y' = \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C_1.$$

再积分得

$$\begin{aligned} y &= \int (\arctan x + C_1) dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1 + x^2} dx + C_1 x \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

练习 314. 求解初值问题

$$\begin{cases} xy'' - y' \ln y' + y' \ln x = 0, \\ y|_{x=1} = 2, \quad y'|_{x=1} = e^2. \end{cases}$$

解: 设  $p = y'$ , 则原方程为齐次方程

$$p' - \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x} = 0.$$

令  $u = \frac{p}{x}$ , 则  $u + x \frac{du}{dx} = u \ln u$ , 即

$$\frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \frac{1}{x} dx.$$

两端积分得  $\ln |\ln u - 1| = \ln x + C$ , 即

$$\ln u - 1 = C_1 x \quad (C_1 = \pm e^C).$$

由初始条件  $y'|_{x=1} = e^2$  得  $C_1 = 1$ . 代入原方程得

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x+1}.$$

两端积分得

$$y = (x - 1)e^{x+1} + C_2.$$

由初始条件  $y|_{x=1} = 2$  得  $C_2 = 2$ . 故原方程的特解为

$$y = (x - 1)e^{x+1} + 2.$$