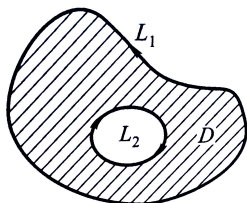


(a) 单连通区域

(b) 复连通区域



## 10.3 格林公式

### 10.3.1 格林公式

若区域  $D$  中的任意一条封闭曲线的内部的所有的点都属于  $D$ , 则  $D$  是单连通区域, 否则是复连通区域.

#### 边界曲线的正向

设平面有界闭区域  $D$  的边界曲线为  $L$ , 规定  $L$  正向如下: 当观察者沿  $L$  的正向行进时,  $D$  内在他近处的部分总在他的左边.

在上图中,  $D$  的正向边界  $L$  由  $L_1$  和  $L_2$  组成, 方向如图所示.

- 当区域  $D$  是单连通区域时, 其边界曲线的正方向是逆时针方向.
- 当区域  $D$  是复连通区域时, 其外边界曲线的正方向是逆时针方向, 内边界曲线的正方向是顺时针方向.

若以  $L$  记正向边界, 则用  $L^-$  表示反向 (或称为负向) 边界.

**定理 3.1** (格林公式). 若平面上闭区域  $D$  的边界由逐段光滑的曲线  $L$  所组成, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  上具有一阶连续偏导数, 则有

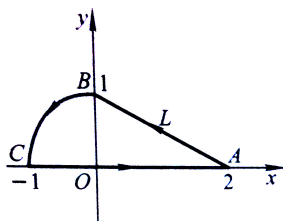
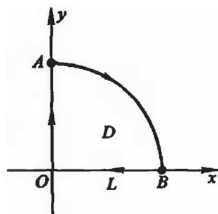
$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_L P dx + Q dy,$$

其中  $L$  是  $D$  取正向的边界曲线.

格林公式又可记为

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} d\sigma = \oint_L P dx + Q dy.$$

**例 3.1.** 计算曲线积分  $\oint_L (x+y) dx - (x-y) dy$ , 其中  $L$  为正向椭圆周  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



解: 令  $P = x + y$ ,  $Q = y - x$ , 从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - 1 = -2.$$

设  $D$  为由  $L$  所围的椭圆形区域  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , 则由格林公式得

$$\oint_L (x + y) dx - (x - y) dy = \iint_D -2 d\sigma = -2|D| = -2\pi ab.$$

例 3.2. 计算  $\int_{AB} x dy$ , 其中曲线  $AB$  是半径为  $r$  的圆在第一象限部分.

解: 对区域  $D$  应用格林公式有

$$-\iint_D d\sigma = \oint_{-L} x dy = \int_{OA} x dy + \int_{AB} x dy + \int_{BO} x dy = \int_{AB} x dy.$$

于是

$$\int_{AB} x dy = -\iint_D d\sigma = -\frac{1}{4}\pi r^2.$$

例 3.3. 计算  $\int_L (x^2 - 2y) dx + (3x + ye^y) dy$ , 其中  $L$  是由直线  $x + 2y = 2$  上从  $A(2, 0)$  到  $B(0, 1)$  的一段及圆弧  $x = -\sqrt{1 - y^2}$  上从  $B(0, 1)$  到  $C(-1, 0)$  的一段连接而成的有向曲线.

解: 利用格林公式计算. 为此添加有向线段  $\overline{CA}$ . 设由  $L + \overline{CA}$  所围成的闭区域为  $D$ , 则根据格林公式有

$$\begin{aligned} & \oint_{L+\overline{CA}} (x^2 - 2y) dx + (3x + ye^y) dy \\ &= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (3x + ye^y) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y) \right] d\sigma = \iint_D 5 d\sigma = 5 \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right). \end{aligned}$$

而由于  $\overline{CA}$  的方程是  $y = 0$  ( $x$  从  $-1$  变到  $2$ ), 故

$$\int_{\overline{CA}} (x^2 - 2y) dx + (3x + ye^y) dy = \int_{-1}^2 x^2 dx = 3.$$

从而有

$$\int_L (x^2 - 2y) dx + (3x + ye^y) dy = 5 \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) - 3 = \frac{5\pi}{4} + 2.$$

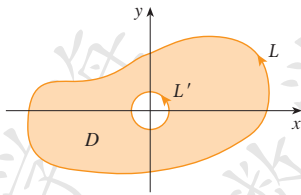
例 3.4. 计算  $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是平面上一条不经过原点的光滑闭曲线, 方向为逆时针方向.

解: 令  $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ , 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

设  $L$  所围的区域为  $D$ . 若  $(0, 0) \notin D$ , 则

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0.$$



若  $(0, 0) \in D$ , 则  $P(x, y), Q(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处不可微, 所以不能直接用格林公式. 取点  $(0, 0)$  的一个充分小的邻域  $D_\varepsilon$ , 即半径为  $\varepsilon$  为圆 (其边界为  $L'$ ), 使得  $D_\varepsilon \subset D$ . 显然  $P(x, y), Q(x, y)$  在区域  $D - D_\varepsilon$  内是可微的, 所以

$$\oint_{L-L'} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_{D-D_\varepsilon} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0.$$

从而

$$I = \oint_{L'} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos t d(\varepsilon \sin t) - \varepsilon \sin t d(\varepsilon \cos t)}{\varepsilon^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

设  $P(x, y) = -y, Q(x, y) = x$ , 则由格林公式得

$$\oint_L x dy - y dx = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 2 \iint_D d\sigma.$$

所以区域  $D$  的面积为

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx,$$

其中  $L$  是区域  $D$  的边界曲线, 取正向.

例 3.5. 计算  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  ( $a > 0$ ) 所围成的有界区域的面积.

解: 区域边界可写成  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$ . 于是所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos^3 t d(a \sin^3 t) - a \sin^3 t d(a \cos^3 t) \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3a^2}{8} \pi. \end{aligned}$$

### 10.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

**定义 3.1.** 设  $D$  是一个开区域, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在区域  $D$  具有一阶连续偏导数. 如果对于  $D$  内任意指定的两点  $A, B$ , 以及  $D$  内从点  $A$  到点  $B$  的任意两条曲线  $L_1, L_2$ , 下列等式恒成立:

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L_2} P dx + Q dy,$$

则称曲线积分  $\int_L P dx + Q dy$  在区域  $D$  内与路径无关, 否则称该曲线积分与路径有关.

**定理 3.2.** 设  $D$  是单连通区域. 若函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  内有连续的偏导数, 则以下四个条件等价:

(i) 在  $D$  内处处成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

(ii) 沿  $D$  内任一按段光滑封闭曲线  $L$ , 有

$$\oint_L P dx + Q dy = 0;$$

(iii) 对  $D$  中任一按段光滑曲线  $L$ , 曲线积分  $\int_L P dx + Q dy$  与路径无关, 只与  $L$  的起点及终点有关;

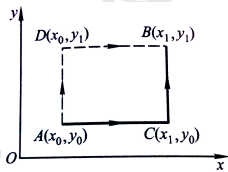
(iv)  $P dx + Q dy$  是  $D$  内某一函数  $u(x, y)$  的全微分, 即在  $D$  内有

$$du = P dx + Q dy.$$

当曲线积分  $\int_{\overline{AB}} P dx + Q dy$  在区域  $D$  内与路径无关时, 由于曲线积分的值仅与积分弧段  $\overline{AB}$  的起点  $A(x_0, y_0)$  和终点  $B(x_1, y_1)$  的位置有关, 因此可把此积分记作

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy.$$

实际计算时, 可取一条从  $A$  到  $B$  的便于计算的积分路径. 通常可取上图中的有向折线路径  $\overline{AC} + \overline{CB}$ , 则得



$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy.$$

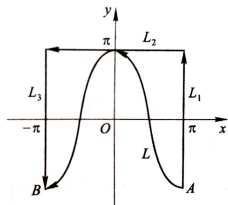
类似地, 若取有向折线  $\overline{AD} + \overline{DB}$ , 则得

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy = \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1) dx.$$

**例 3.6.** 计算  $\int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ , 其中曲线  $L$  是沿曲线  $y = \pi \cos x$  从  $A(\pi, -\pi)$  到  $B(-\pi, -\pi)$  的曲线弧.

**解:** 令  $P = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ ,  $Q = -\frac{x-y}{x^2+y^2}$ , 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  在除去原点的单连通区域内处处成立. 故

$$\begin{aligned} \int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} &= \left[ \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} \right] \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_{L_1} \frac{-(x-y)dy}{x^2 + y^2} + \int_{L_2} \frac{(x+y)dx}{x^2 + y^2} + \int_{L_3} \frac{-(x-y)dy}{x^2 + y^2} = -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$



**例 3.7.** 设曲线积分  $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x) dy$  与路径无关, 其中函数  $\varphi(x)$  具有连续导数, 且  $\varphi(0) = 0$ , 试计算  $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ .

**解:**

$$\begin{aligned} I &= \int_{(0,0)}^{(0,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy + \int_{(0,1)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy \\ &= \int_{(0,0)}^{(0,1)} y\varphi(x) dy + \int_{(0,1)}^{(1,1)} xy^2 dx \\ &= \int_0^1 y\varphi(0) dy + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

另一种方法为先求出  $\varphi = x^2$ .

### 10.3.3 思考与练习

**练习 262.** 计算  $\int_L (x^2y - y) dx + \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - x\right) dy$ , 其中  $L$  为由  $x = 1, y = x, y = 2x$  所围区域的正向边界.

**解:** 由格林公式得

$$\begin{aligned} \int_L (x^2y - y) dx + \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - x\right) dy &= \iint_D (x^2 - 4x - 1 - x^2 + 1) d\sigma \\ &= - \iint_D 4x d\sigma = - \int_0^1 dx \int_x^{2x} 4x dy = - \int_0^1 4x^2 dx = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**练习 263.** 计算  $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2) dy$ , 其中  $L$  为抛物线  $2x = \pi y^2$  上从点  $(0, 0)$  到  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  的弧段.

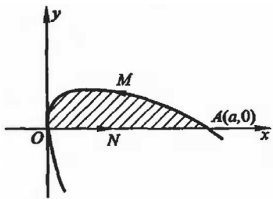
**解:** 因曲线是非封闭的, 故需添加辅助线. 令

$$L_1: x = \frac{\pi}{2}, \quad y \text{ 从 } 1 \text{ 到 } 0;$$

$$L_2: y = 0, \quad x \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } 0.$$

从而

$$\begin{aligned} &\int_{L_1} (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2) dy \\ &= \int_{L_1} (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2) dy = \int_1^0 \left(1 - 2y + \frac{3\pi^2}{4}y^2\right) dy = -\frac{1}{4}\pi^2. \end{aligned}$$



因  $L_2$  在  $x$  轴上, 故

$$\int_{L_2} (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy = 0.$$

又由格林公式得

$$\begin{aligned} & \int_{L+L_1+L_2} (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy \\ &= - \iint_D (6xy^2 - 2y \cos x - 6xy^2 + 2y \cos x) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

因此

$$\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy = 0 - \left(-\frac{1}{4}\pi^2\right) - 0 = \frac{1}{4}\pi^2.$$

**练习 264.** 计算抛物线  $(x+y)^2 = ax$  ( $a > 0$ ) 与  $x$  轴所围的面积.

**解:** 曲线  $\widehat{AMO}$  由函数  $y = \sqrt{ax} - x$ ,  $x \in [0, a]$  表示,  $\widehat{ONA}$  为直线  $y = 0$ , 于是

$$\begin{aligned} S_D &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \oint_{\widehat{ONA}} x dy - y dx + \frac{1}{2} \oint_{\widehat{AMO}} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\widehat{AMO}} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_a^0 \left[ x \left( \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} - 1 \right) - (\sqrt{ax} - x) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^0 -\frac{1}{2} \sqrt{ax} dx = \frac{\sqrt{a}}{4} \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{1}{6} a^2. \end{aligned}$$

**练习 265.** 证明: 在整个  $xOy$  平面内, 曲线积分

$$\int_L xy^2 dx + x^2 y dy$$

与路径无关, 并计算曲线积分  $\int_{(1,1)}^{(2,3)} xy^2 dx + x^2 y dy$ .

**解:** 令  $P = xy^2$ ,  $Q = x^2 y$ , 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 2xy = 0,$$

也即  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ . 因此在整个  $xOy$  平面内, 所给的曲线积分与路径无关. 并有

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)} xy^2 dx + x^2 y dy = \int_1^2 x dx + \int_1^3 4y dy = \frac{3}{2} + 16 = \frac{35}{2}.$$

练习 266. 计算曲线积分

$$\int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy,$$

其中  $L$  是圆周  $y = \sqrt{2x - x^2}$  自  $O(0, 0)$  到  $A(2, 0)$  的一段弧.

解: 令  $P = x^2 - y$ ,  $Q = -(x + \sin^2 y)$ , 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - (-1) = 0,$$

因此所给的曲线积分与路径无关. 为方便计算, 改取有向线段  $\overline{OA}$  为积分路径. 在  $\overline{OA}$  上,  $y = 0$ ,  $x$  自 0 至 2. 于是

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy &= \int_{\overline{OA}} (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy \\ &= \int_0^2 [(x^2 - 0) - (x + \sin^2 0) \cdot 0] dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

练习 267. 试用曲线积分求

$$(2x + \sin y) dx + (x \cos y) dy$$

的一个原函数.

解: 由于

$$\frac{\partial}{\partial y} (2x + \sin y) = \frac{\partial}{\partial x} (x \cos y) = \cos y,$$

所以原函数存在. 取  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  时, 有

$$u(x, y) = \int_0^x 2x dx + \int_0^y x \cos y dy = x^2 + x \sin y.$$