2021－2022学年第二学期

概率论期末考试

2022年6月13日

上海财经大学

1.设A, B是两个随机事件,若

$$P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{4}, P(A|B)=\frac{1}{6},$$

求(1)$P(\bar{A}|\bar{B})$;(2)$P(B|A\cup\bar{B})$。

解：(1)

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-(P(A)+P(B)-P(B)P(A|B))}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-{}^{13}\!/\!_{24}}{{}^{3}\!/\!_{4}}=\frac{11}{18}\text{。}$$

(2)

$$P(B \mid A \cup \bar{B}) = \frac{P(B(A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})}$$

$$= \frac{P(AB)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})}$$

$$= \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A) + (1 - P(B)) - (P(A) - P(AB))}$$

$$=\frac{P(B)P(A|B)}{1-P(B)+P(B)P(A|B)}$$

$$=\frac{1/24}{3/4+1/24}=\frac{1}{19}\text{。}$$

2.两个箱子放有同一产品,第一箱中有4件次品和6件正品,第二箱中有5件次品和5件正品。现从第一箱中任取2件产品,从第二箱中任取1件产品,放在一起,再从这3件产品中任取1件,求

(1)最后取到次品的概率;

(2)若最后取到的是正品,则第一次取到的3件产品中恰有两件正品的概率。

解：设A_i：第一箱中取出2件中正品的个数，$i = 0, 1, 2$,

B_j：第二箱中取出1件中正品的个数，$j = 0, 1$，A_i，B_j独立。

C：最后取出的是次品。

(1)分割有6个事件,由全概率公式知,

$$P(C)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1}P(A_iB_j)P(C|A_iB_j)$$

$$=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\times\frac{1}{2}\times 1+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$$

$$+\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\times\frac{1}{2}\times 0$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{2}{45}+\frac{8}{45}+\frac{4}{45}+\frac{1}{18}=\frac{13}{30}。$$

(2)

$$P(A_1B_1 + A_2B_0 \mid \bar{C})$$

$$= \frac{P((A_1B_1 + A_2B_0)\bar{C})}{P(\bar{C})}$$

$$= \frac{P(A_1B_1\bar{C}) + P(A_2B_0\bar{C})}{1 - P(C)}$$

$$= \frac{P(A_1B_1)P(\bar{C} \mid A_1B_1) + P(A_2B_0)P(\bar{C} \mid A_2B_0)}{1 - P(C)}$$

$$=\frac{\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{1-\frac{13}{30}}=\frac{26}{51}。$$

3.设离散型随机变量X的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ a & 0.1 & a-a^2 & 0.15 \end{pmatrix}$$

求(1)常数a;(2)X的分布函数;

(3)$P(X < 1 | X \neq 0)$。

解:(1)

$$a+0.1+(a-a^2)+0.15=1,$$

$$a^2-2a+0.75=0$$

$$a=\frac{1}{2},a=\frac{3}{2}(\text{舍去})。$$

(2)

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.5 & 0.1 & 0.25 & 0.15\end{pmatrix},$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<-1 \\ 0.5, -1\le x<0 \\ 0.6, 0\le x<1 \\ 0.85, 1\le x<2 \\ 1, x\ge 2 \end{cases}$$ 。

(3)

$$P(X<1 \mid X\neq 0)=\frac{P(X<1, X\neq 0)}{P(X\neq 0)}$$

$$=\frac{0.5}{0.9}=\frac{5}{9}\text{。}$$

4.若随机变量X的密度函数为

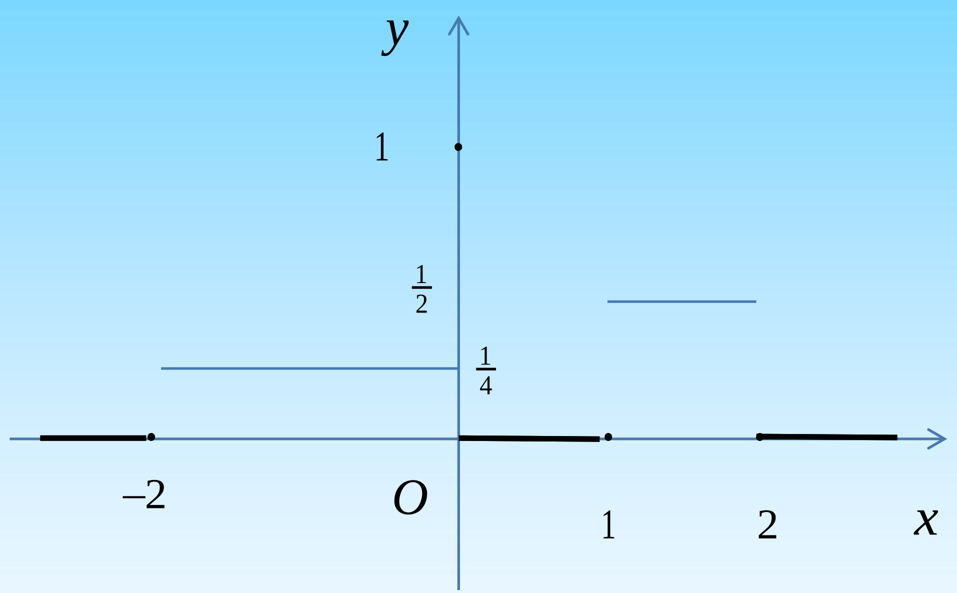
$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},-2<x<0\\ \dfrac{1}{2},1<x<2\\ 0,其他\end{cases},$$

(1)若$P(X \leq k)=\dfrac{1}{2}$,求常数k;

(2)求X的分布函数$F(x)$;

(3)令$Y=X^2$,求Y的密度函数。

解：



(1)当$0 \le k \le 1$时,

$$P(X \le k) = \frac{1}{2};$$

(2)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}0, x<-2\\ \frac{1}{4}(x+2), -2\le x<0\\ \frac{1}{2}, 0\le x<1\\ \frac{x}{2}, 1\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases};$$

(3)

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y),$$

$$y < 0, F_Y(y) = 0; y > 4, F_Y(y) = 1;$$

$$0 \le y \le 4,$$

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p(x)dx,$$

$$0 \le y \le 1,$$

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p(x)dx$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{4}dx + \int_{0}^{\sqrt{y}} 0dx = \frac{\sqrt{y}}{4},$$

$$1 < y \leq 4,$$

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p(x)dx$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{4}dx + \int_{0}^{1} 0dx + \int_{1}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}dx$$

$$= \frac{\sqrt{y}}{4} + \frac{\sqrt{y}-1}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{y} - \frac{1}{2},$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ \dfrac{\sqrt{y}}{4}, 0 \le y < 1 \\ \dfrac{3}{4}\sqrt{y} - \dfrac{1}{2}, 1 \le y < 4 \\ 1, y \ge 4 \end{cases},$$

$$p_Y(y) = F_Y'(y),$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\sqrt{y}}, 0<y<1\\[2ex] \dfrac{3}{8\sqrt{y}}, 1<y<4\\[2ex] 0, \text{其他}\end{cases}。$$

(3)另解：推荐

$Y=X^2$的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}(p_X(\sqrt{y})+p_X(-\sqrt{y})),0<y<4\\ \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad\quad ，\text{其它}\end{cases}。$$

$$0 < y < 1,$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8\sqrt{y}},$$

$$1 < y < 4,$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8\sqrt{y}},$$

所以,

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\sqrt{y}},0<y<1\\ \dfrac{3}{8\sqrt{y}},1<y<4\\ \quad 0,其他\end{cases}。$$

5.设随机变量X与Y的概率分布分别为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

且$P(X^2 = Y^2) = 1$,求

$(1)(X,Y)$的联合概率分布;

$(2)Z=XY$的概率分布;

$(3)X$与Y是否相关？说明理由。

解$:(1)P(X^2=Y^2)=1,$

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\bullet}$
0	0		0	$\frac{1}{3}$
1		0		$\frac{2}{3}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\bullet}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

(2)

X \ Z \ Y	-1	0	1
0	0	0	0
1	-1	0	1

$$Z \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}。$$

(3)

$$E(XY) = EZ = 0,$$

$$EX = \frac{2}{3}, EY = 0,$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = 0,$$

$$DX > 0, DY > 0,$$

$\rho_{XY} = 0$,所以,X与Y不相关。

6.设(X,Y)服从区域G上的二维均匀分布,其中G由直线$y=-x, y=x$与$x=2$所围成。

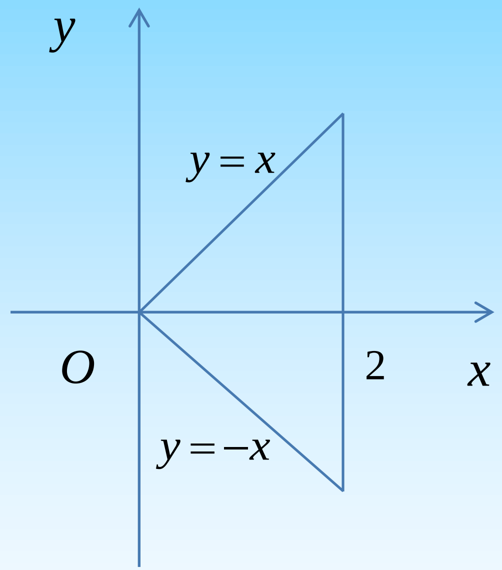
(1)写出(X,Y)的联合密度函数;

(2)求$P(X+Y\le 2)$;

(3)求(X,Y)的边际密度函数;

(4)X与Y是否独立？说明理由。

解:

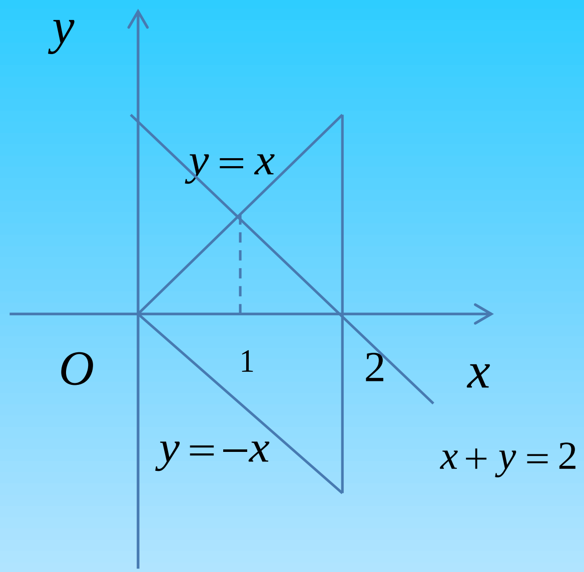


(1)

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, 0<x<2, -x<y<x \\ \qquad 0, \text{其他}\end{cases};$$

(2)先算$P(X+Y>2)$,

$$P(X+Y>2)=\int_1^2 dx\int_{2-x}^{x}\frac{1}{4}dy$$

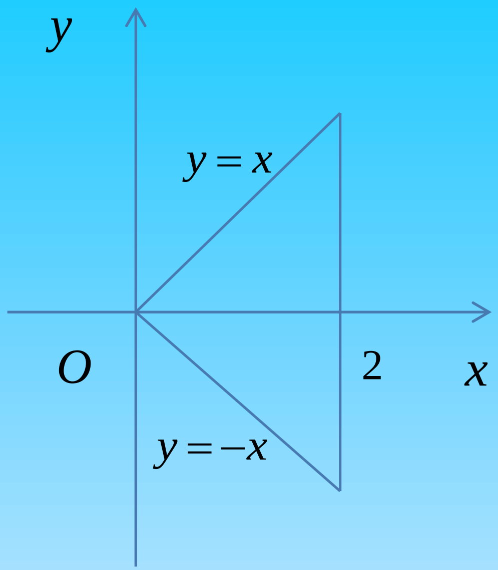


$$= \frac{1}{4}\int_1^2 (2x-2)dx = \frac{1}{4},$$

所以,

$$P(X+Y\le 2) = \frac{3}{4};$$

(3)



$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy,$$

$$0<x<2,$$

$$p_X(x)=\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}dy=\frac{x}{2},$$

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, 0<x<2\\ 0, 其他\end{cases},$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx,$$

$$-2 < y < 0,$$

$$p_Y(y) = \int_{-y}^{2} \frac{1}{4}dx = \frac{2+y}{4},$$

$$0 \le y < 2,$$

$$p_Y(y) = \int_{y}^{2} \frac{1}{4}dx = \frac{2-y}{4},$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2+y}{4},-2<y<0\\ \dfrac{2-y}{4},0\le y<2\;;\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

(4)在区域$0 < x < 2, -x < y < x$中,

$$p(x, y) \neq p_X(x) p_Y(y),$$

所以, X与Y不独立。

7.设随机变量X与Y相互独立,X服从[0,1]上的均匀分布,Y的概率分布为

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

令$Z = XY$,

(1)求Z的分布函数;

(2)当p为何值时,X与Z不相关?

此时X与Z是否独立?说明理由。

解$:(1)\ -1\leq Z\leq 1,$

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(XY\leq z)$$

$$=P(Y=-1, XY\leq z)+P(Y=1, XY\leq z)$$

$$=P(Y=-1, -X\leq z)+P(Y=1, X\leq z)$$

$$=P(Y=-1)P(X\geq -z)+P(Y=1)P(X\leq z)$$

$$=(1-p)P(X\geq -z)+pP(X\leq z),$$

$$-1 < z < 0,$$

$$F_Z(z) = (1-p)(1+z),$$

$$0 \le z < 1,$$

$$F_Z(z) = (1-p) + pz,$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, z < -1 \\ (1-p)(1+z), -1 \le z < 0 \\ (1-p) + pz, 0 \le z < 1 \\ 1, z \ge 1 \end{cases}$$ 。

$$(2)Cov(X,Z)=E(XZ)-EXEZ$$

$$=E(X^2Y)-EXE(XY)$$

$$=E(X^2)EY-EX\times EXEY$$

$$=EY(E(X^2)-(EX)^2)=DXEY$$

$$=\frac{1}{12}(2p-1),$$

$$DX > 0, DZ > 0,$$

当$p=\dfrac{1}{2}$时，$\rho_{XZ}=0$，即X与Z不相关。

当$p=\dfrac{1}{2}$时，

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, z<-1 \\ \dfrac{z+1}{2}, -1 \le z < 1, \\ 1, z \ge 1 \end{cases}$$

即$Z \sim U[-1,1]$。

$$P\left(X \le \frac{1}{2}, Z \le -\frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(X \le \frac{1}{2}, XY \le -\frac{1}{2}\right)$$

$$= P(Y = -1, \left(X \le \frac{1}{2}, XY \le -\frac{1}{2}\right))$$

$$+ P(Y = 1, \left(X \le \frac{1}{2}, XY \le -\frac{1}{2}\right))$$

$$= P(Y = -1, X \leq \frac{1}{2}, -X \leq -\frac{1}{2})$$

$$+ P(Y = 1, X \leq \frac{1}{2}, X \leq -\frac{1}{2})$$

$$= P(Y = -1, X = \frac{1}{2}) + P(Y = 1, X \leq -\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2} P\left(X = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} P\left(X \leq -\frac{1}{2} \right)$$

$$= 0,$$

又

$$P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},P\left(Z\le-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$

从而

$$P\left(X\le\frac{1}{2},Z\le-\frac{1}{2}\right)$$

$$\neq P\left(X\le\frac{1}{2}\right)P\left(Z\le-\frac{1}{2}\right),$$

即X与Z不独立。

另感谢同学们课上提醒，以下取点更简单。

$$P\left(X \le \frac{1}{2}, Z \le \frac{1}{2}\right) = P\left(X \le \frac{1}{2}, XY \le \frac{1}{2}\right)$$

由于$X \ge 0$，Y取± 1，所以$X \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow XY \le \dfrac{1}{2}$，

故$P\left(X \le \dfrac{1}{2}, Z \le \dfrac{1}{2}\right) = P\left(X \le \dfrac{1}{2}, XY \le \dfrac{1}{2}\right)$

$= P\left(X \le \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \ne P\left(X \le \dfrac{1}{2}\right) P\left(Z \le \dfrac{1}{2}\right)$。

8.已知某百货公司每年顾客对某种型号电视机的需求量X是一个随机变量, X取值为整数$101, 102, \cdots, 200$且是等可能的。假设每出售一台电视机可获利300元;如果年终库存积压,那么每台电视机的损失是100元。试问:年初百货公司应进

多少台电视机,才能使年终的平均利润最大？假定百货公司年内不再进货。

解:设年初进t台电视机。

$$X \sim \begin{pmatrix} 101 & 102 & \cdots & 200 \\ \dfrac{1}{100} & \dfrac{1}{100} & \cdots & \dfrac{1}{100} \end{pmatrix},$$

利润Y为

$$Y = f(X) = \begin{cases} 300X - 100(t - X), X \le t \\ 300t, X > t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 400X - 100t, X \le t \\ 300t, X > t \end{cases},$$

$$EY=\sum_{k=101}^{200} f(k)P(X=k)$$

$$=\frac{1}{100}\sum_{k=101}^{t}(400k-100t)+\frac{1}{100}\sum_{k=t+1}^{200}300t$$

$$=\sum_{k=101}^{t}(4k-t)+\sum_{k=t+1}^{200}3t$$

$$=4\left(\frac{t(t+1)}{2}-5050\right)-t(t-100)+3t(200-t)$$

$$= 2t^2 + 2t - 20200 - t^2 + 100t + 600t - 3t^2$$

$$= -2t^2 + 702t - 20200,$$

$$(EY)_t' = -4t + 702 = 0,$$

$$t = 175.5,$$

当$t = 176$时，年终平均利润最大。

9.设某失业保险公司开办了一个农业保险项目,农户参加该项目保险,每户需交保险费106元,一旦农户因病虫害等因素遭受损失可获得1000元的赔付。假设各农户是否遭受损失相互独立,且各农户因病虫害等因素遭受损失的概率均为0.1。不计营销和管理费用。

(1)若有10000农户参加了这项保险,求保险公司在该险种上亏本的概率;

(2)若要使保险公司在该险种上盈利不少于3万元的概率不小于90%,则至少需要多少农户参加保险?

(要求使用中心极限定理解题)

参考数据:

$$\Phi(1)=0.8413, \Phi(1.282)=0.9,$$

$$\Phi(1.645)=0.95, \Phi(1.96)=0.975,$$

$$\Phi(2)=0.9772$$

解：(1) X：10000个农户中受损失的户数，

$$X \sim B(10000, 0.1) \underset{\sim}{\overset{\text{近似}}{\quad}} N(1000, 900),$$

Y：保险公司的利润，

$$Y = 10000 \times 106 - 1000X,$$

$$P\left(Y<0\right)=P(X>1060)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{1060-1000}{\sqrt{900}}\right)=1-\Phi(2)$$

$$=1-0.9772=0.0228\text{。}$$

(2)设需要n个农户参加,

X_n : n个农户中受损失的户数,

$$X_n \sim B(n, 0.1) \overset{\text{近似}}{\sim} N(0.1n, 0.09n),$$

Y : 保险公司的利润,

$$Y = 106n - 1000X_n,$$

$$P\left(Y \ge 30000\right) = P\left(X_n \le 0.106n - 30\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{0.106n - 30 - 0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{0.006n - 30}{0.3\sqrt{n}}\right) \ge 0.9,$$

$$\frac{0.006n-30}{0.3\sqrt{n}} \geq 1.282,$$

$$n-64.1\sqrt{n}-5000 \geq 0,$$

$\sqrt{n} \geq 109.69$(负的舍去),

$n \geq 12030.81,$

则至少需要12031个农户。

$$\sqrt{n} = \frac{64.1 \pm \sqrt{64.1^2 + 4 \times 5000}}{2}$$

$$= \frac{64.1 \pm 155.27}{2},$$

$\sqrt{n} = 109.69$(负的舍去),

$n = 12030.81$,

则至少需要12031个农户。

完