

11.5 函数展开成幂级数

11.5.1 泰勒级数

问题的提出

对给定的函数 $f(x)$, 能否找到一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 使得它在某个区间 $(-R, R)$ 内的和恰为给定的函数 $f(x)$, 即有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \in (-R, R)).$$

泰勒公式

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0, r)$ 内存在直至 $n+1$ 阶的连续导数, 则在该邻域内 $f(x)$ 有泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \quad (11.5.1)$$

这里 $R_n(x)$ 为拉格朗日型余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间.

此时在该邻域内 $f(x)$ 可以用 n 阶泰勒多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

近似表示, 并且误差 $|f(x) - P_n(x)|$ 为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|.$$

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处存在任意阶导数, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

称为函数 $f(x)$ 的泰勒 (Taylor) 级数.

当 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为麦克劳林 (Maclaurin) 级数.

定理 5.1. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, $f(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内的和函数, 则

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

即有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x_0 - R < x < x_0 + R.$$

如果函数 $f(x)$ 是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内的和函数, 则其幂级数是唯一的.

问题

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无穷光滑, 是否存在正常数 R 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上收敛于 $f(x)$?

例 5.1. 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处的泰勒级数.

由于 f 在 $x = 0$ 处的任何阶导数都等于 0, 即

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

因此 f 在 $x = 0$ 处的泰勒级数为

$$0 + 0 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{0}{n!}x^n + \dots$$

显然它在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 且其和函数 $S(x) = 0$. 由此可见, 对一切 $x \neq 0$ 都有 $f(x) \neq S(x)$.

具有任意阶导数的函数, 其泰勒级数并不都能收敛于该函数本身.

如果 $f(x)$ 能在点 x_0 的某邻域上等于其泰勒级数的和函数, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 的这一邻域上可以展开成泰勒级数, 并称等式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

的右边为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒展开式, 或称幂级数展开式.

定理 5.2. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有各阶导数, 且对任意自然数 n , 其泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项. 那么 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是对任意的 $x \in U(x_0)$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

定理 5.3 (充分条件). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有各阶导数, 且导函数所成函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 一致有界, 则函数 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数.

例 5.2. 将函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ 展成 x 和 $x + 1$ 的幂级数.

解:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 3 + x - 2x^2 + x^3,$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 \\ &= -1 + 8(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^3. \end{aligned}$$

11.5.2 初等函数的幂级数展开式

1. 直接展开法

将函数 $f(x)$ 展开成 $x - x_0$ 的幂级数, 可按照下列步骤进行:

- (1) 求出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的各阶导数值 $f^{(n)}(x_0)$;
- (2) 写出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, 并求出其收敛区间 $U(x_0, R)$;
- (3) 验证在区间 $U(x_0, R)$ 内, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0, \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

若上式成立, 则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R);$$

若上式不成立, 幂级数虽然收敛, 但和函数 $s(x)$ 不等于函数 $f(x)$.

- (4) 考察泰勒级数在收敛区间 $U(x_0, R)$ 端点 $x = x_0 \pm R$ 处的敛散性. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n$ (或 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (-R)^n$) 收敛, 且 $f(x)$ 在 $x_0 + R$ 处左连续 (或在 $x_0 - R$ 处右连续), 则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

在 $x_0 + R$ (或 $x_0 - R$) 处也成立; 否则, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ 只在 $U(x_0, R)$ 内成立.

例 5.3. 将 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: 由于 $f^{(n)}(x) = e^x$, 故 $f^{(n)}(0) = 1$ ($n = 1, 2, \dots$). 所以幂级数为

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

收敛半径为 $R = +\infty$, 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$. 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad (|\xi| < |x|).$$

注意到 x 为有限值, 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0.$$

因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. 于是函数 $f(x) = e^x$ 的麦克劳林级数为

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例 5.4. 求函数 $f(x) = \sin x$ 的麦克劳林级数展开式.

解: 由于

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

考察其拉格朗日型余项

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上能展开为麦克劳林级数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

2. 间接展开法

利用已有的展开式, 通过适当的变换

- (1) 代数运算 (加、减、乘);
- (2) 分析运算 (逐项求导、逐项积分);
- (3) 其他变量代换等,

求出未知的展开式的方法, 即称为“[间接展开法](#)”. 由泰勒级数的唯一性, 所得到的级数一定是所求函数的泰勒级数.

应用间接展开法, 需要熟记下面几个基本展开式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1, 1), \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

例 5.5. 求 $\cos x$ 的麦克劳林级数.

解: 由于

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

利用逐项求导, 可得 $\cos x$ 的麦克劳林级数

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例 5.6. 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的麦克劳林级数.

解: 因为 $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, 而

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad x \in (-1, 1),$$

两边积分得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

验证知展开式在点 $x=1$ 处收敛, 因此在区间 $(-1, 1]$ 上展开式成立. 由此可得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots.$$

例 5.7. 求函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 的麦克劳林级数.

解: 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+x-x^2} &= \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (|x| < 1), \end{aligned}$$

因此当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^{n+1}.$$

例 5.8. 求函数 $f(x) = \sin x \cos x$ 的麦克劳林级数.

解: 由于

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

因此

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

例 5.9. 求函数 $\arctan x$ 的麦克劳林级数.

解: 因为 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, 而 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1, 1)$, 故

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad x \in (-1, 1).$$

两边积分得

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 级数是收敛的. 所以

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

例 5.10. 将函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α 是常数) 展开成麦克劳林级数.

解: 当 α 为正整数时, 由二项式展开定理知

$$(1+x)^\alpha = C_\alpha^0 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \cdots + C_\alpha^\alpha x^\alpha.$$

当 α 不为正整数时,

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad n=1, 2, \cdots, \\ f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \quad n=1, 2, \cdots.\end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 的麦克劳林级数是

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots. \quad (11.5.2)$$

由比值判别法可得收敛半径 $R=1$.

为避免研究余项, 设此级数的和函数为 $F(x)$, 即

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

逐项微分得

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n.$$

所以

$$(1+x)F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right) x^n = \alpha F(x).$$

注意到 $F(0)=1$, 解得 $F(x) = (1+x)^\alpha$. 故有展开式

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

此式称为**牛顿 (Newton) 二项式展开**.

- 当 $\alpha \leq -1$ 时, 收敛域为 $(-1, 1)$;
- 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 收敛域为 $(-1, 1]$;
- 当 $\alpha > 0$ 时, 收敛域为 $[-1, 1]$.

取 $\alpha = -1$ 时,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

取 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots, \quad x \in [-1, 1].$$

取 $\alpha = -\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

例 5.11. 求函数 $\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

解: 因为

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3+x} \right),$$

而

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} \quad x \in (-1, 3),$$

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{4+(x-1)} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^{n+1}} \quad x \in (-3, 5),$$

故

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x-1)^n \quad x \in (-1, 3).$$

例 5.12. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ 的和.

解: 作幂级数

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} x^{2n+1},$$

易知收敛区间为 $[-1, 1]$, 则原式为 $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = s(1)$. 由于

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n} \stackrel{y=x^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n = s_1(y),$$

$$s_1'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y},$$

从而

$$s_1(y) = -\ln(1-y), \quad s'(x) = -s_1(x^2) = -\ln(1-x^2).$$

所以

$$\begin{aligned} s(x) &= -\int_0^x \ln(1-t^2) dt = -x \ln(1-x^2) - \int_0^x \frac{2t^2}{1-t^2} dt \\ &= (1-x) \ln(1-x^2) + 2x - 2 \ln(1+x). \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x^2) = 0,$$

所以原式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = s(1) = 2(1 - \ln 2).$$