

上海财经大学《高等数学 II(工科类)》课程考试卷 (A) 闭卷

课程代码 102544 课程序号 0486,0487, 0477

2020 —2021 学年第二学期

姓名 _____ 学号 _____ 班级 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

得分	
----	--

一. 填空题(本题共 8 小题, 每小题 2 分, 满分 16 分. 把答案填在各题中横线上.)

1. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在 $(2, 4, 5)$ 处切线关于 x 轴的倾角为 $\frac{\pi}{4}$.

2. 函数 $u = x^2y + z^2 - 2xyz$ 在点 $(2, -1, 1)$ 处取得的最大增长率为 $2\sqrt{10}$.

3. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是函数 $z = f(x, y)$ 在该点可微的必要条件.

4. 设二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域上连续, 并且有函数 $z = x^2y + \iint_D f(x, y) dx dy$, 则函数 z 关于 y 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$.

5. 变换二次积分 $I = \int_1^e dy \int_0^{\ln x} f(x, y) dx$ 的积分次序后 $I = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$.

6. 已知曲线 $y = x^2$, 其中 $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, 则 $\int_L x ds = \frac{13}{6}$.

7. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{x^n}$ 的收敛区间为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

8. 方程 $2y'' - 6y' + 5y = 0$ 的通解为 $y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{1}{2}x + C_2 \sin \frac{1}{2}x \right)$.

得分	
----	--

二. 选择题(本题共 8 小题, 每小题 2 分, 满分 16 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在括号内.)

1. 函数 $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ 的极小值是 (D).

A. 0 B. -3 C. -8 D. -9

2. 已知 $z = f(xy, x - y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ (C).

A. $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ B. $f'_1 + f'_2$ C. $(x + y)f'_1$ D. 0

其中, 令 $u = xy$, $v = x - y$, $f'_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$, $f'_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$.

3. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则下列选项中一定正确的是 (B).

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散 B. 其部分和数列发散 C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 也发散 D. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$

4. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 可以写成 (D).

A. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

C. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ D. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$

5. 设 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限部分, 则 $\iint_{\Sigma} \left(2x + \frac{4y}{3} + z \right) dS =$ (C).

A. $4 \int_0^2 dx \int_0^{3(1-\frac{x}{2})} dy$

B. $\frac{4\sqrt{61}}{3} \int_0^2 dx \int_0^3 dy$

C. $\frac{4\sqrt{61}}{3} \int_0^2 dx \int_0^{3(1-\frac{x}{2})} dy$

D. $\frac{4\sqrt{61}}{3} \int_0^2 dx \int_0^{2(\frac{y}{3}-1)} dy$

6. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $P(2, 1, 0)$ 处的法线方程为 (C).

A. $\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} \\ z=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} \\ z=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} \\ z=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} \\ z=0 \end{cases}$

7. 微分方程 $x^2 y dx = (1 - y^2 + x^2 - x^2 y^2) dy$ 是 (B) 微分方程.

A. 齐次 B. 可分离变量 C. 一阶线性齐次 D. 一阶线性非齐次

8. 函数 $f(x, y, z) = \sqrt{3 + x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的梯度是 (A).

A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ B. $2 \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ C. $\left(\frac{1}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{2}{9} \right)$ D. $2 \left(\frac{1}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{2}{9} \right)$

得分

三. 计算题 (本题共 7 小题, 每小题 9 分, 满分 63 分.)

1. 已知函数 $z = f(x, y)$ 可微, 且 $dz = x dx + y dy$, 求函数 $z = f(x, y)$ 的极值.

解: 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y,$$

于是得驻点 $(0, 0)$. 又

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1,$$

由于 $AC - B^2 > 0$, 且 $A > 0$, 因此, 函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处取得极小值.

2. 计算 $I = \oint_L \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2+4y^2}$, 其中 L 为圆心在原点的单位圆周, 取逆时针方向.

解: 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2+4y^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

取 l 为椭圆 $x^2+4y^2 = \frac{1}{4}$ (也可取 $x^2+4y^2 = \varepsilon^2$, $\varepsilon > 0$), 取逆时针方向, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_l \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2+4y^2} = 4 \oint_l (x-y)dx + (x+4y)dy \quad (\text{格林公式}) \\ &= 4 \iint_D (1+1)dxdy = 4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \pi. \end{aligned}$$

3. 求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 的通解及初始条件为 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 时的特解.

解: 特征方程为 $r^2 - 2r = 0$, 特征根为 $r_1 = 0, r_2 = 2$, 则齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

设非齐次方程的特解为 $y^* = axe^{2x}$, 则代入方程比较两端同次项系数的 $a = \frac{1}{2}$, 特解为

$$y^* = \frac{1}{2} xe^{2x}.$$

因此非齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} xe^{2x}.$$

由初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 解得 $C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}$, 因此原方程的特解为

$$y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} xe^{2x}.$$

4. 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

解: $I = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} axdydz + (z+a)^2 dxdy$, 记 $I_1 = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} axdydz, I_2 = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dxdy$, 于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} axdydz = -2 \iint_{y^2+z^2 \leq a^2} \sqrt{a^2-(y^2+z^2)} dydz \\ &= -2 \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2-r^2} r dr = -\frac{2}{3} \pi a^3, \\ I_2 &= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dxdy = \frac{1}{a} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} [a - \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]^2 dxdy \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a^2 - 2a\sqrt{a^2-r^2} - r^2) r dr = \frac{\pi}{6} a^3. \end{aligned}$$

因此

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2} a^3.$$

注: 可用高斯公式计算.

5. 设积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, a > 0\}$, 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} x e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}} dxdydz.$$

解: 使用球面坐标变换可得

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}} dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r \sin \varphi \cos \theta \cdot e^{\frac{r^2}{a^2}} r^2 \sin \varphi dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \cdot \int_0^a r^3 e^{\frac{r^2}{a^2}} dr \\ &= 1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 r^2 e^{\frac{r^2}{a^2}} d(r^2) \\ &= \frac{\pi a^4}{8}.\end{aligned}$$

6. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域及其和函数.

解: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1$, 则其收敛半径为 $R=1$. 显然, 当 $x = \pm 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 收敛域为发散, 故此幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$, 则

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 2x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.\end{aligned}$$

7. 在曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l} = (1, -1, 0)$ 的方向导数最大.

解: $\vec{l} = (1, -1, 0)$ 方向的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \gamma = 0.$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma = \sqrt{2}(x - y).$$

构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1),$$

可求得可能取极值的点为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ 及 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

因为所求的最大值一定存在, 比较 $\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \right|_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)} = \sqrt{2}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \right|_{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)} = -\sqrt{2}$ 知所求的点为

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

得分	
----	--

四. (本题满分 5 分) 设数列 u_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$, 证明:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$ 收敛.

证明: 记 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$ 的前 n 项和为 S_n , 则

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (u_k + u_{k+1}) = u_1 + (-1)^{n+1} u_{n+1}.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_1$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$ 收敛.