8.9 偏导数在经济学中的应用

8.9.1 偏导数的经济意义

边际成本函数

设某企业生产 A, B 两种产品, A 产品的生产数量为 x 单位, B 产品的生产数量为 y 单位, 称总成本函数 $C = f(x, y)$ 为联合成本函数 ,

- 称 $\frac{\partial C}{\partial x}$ 为关于 A 产品的边际成本函数, 表示当 B 产品的产量固定在 y 单位, A 产品的产量在 x 单位的基础上再产生一个单位产品时成本大约增加 $\frac{\partial C}{\partial x}$.
- 称 $\frac{\partial C}{\partial y}$ 为关于 B 产品的边际成本函数, 表示当 A 产品的产量固定在 x 单位, B 产品的产量在 y 单位的基础上再产生一个单位产品时成本大约增加 $\frac{\partial C}{\partial y}$.

边际收益函数、边际利润函数类似可得.

例 9.1. 假设生产两种产品 A, B 的生产数量为 x 单位和 y 单位, 联合成本函数 $C = x\ln(5+y)$, 求产品 A 和 B 的边际成本.

解: 关于产品 A 的边际成本为

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \ln(5+y).$$

关于产品 B 的边际成本为

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{x}{5+y}.$$

例 9.2. 某公司每日由生产 x 台电脑与 y 台键盘所得的利润为

$$P(x, y) = 6x^{\frac{3}{2}} + 4y^{\frac{3}{2}} + xy,$$

求其边际利润函数, 计算 $P_y'(225, 400)$ 并解释其意义.

解:

$$P_x'(x, y) = 9x^{\frac{1}{2}} + y, \quad P_y'(x, y) = 6y^{\frac{1}{2}} + x.$$

$$P_y'(225, 400) = 6 \times 400^{\frac{1}{2}} + 225 = 345.$$

当产量为 225 台电脑与 400 台键盘时, 保持电脑产量不变, 键盘的产量由 400 增为 401 时, 利润约增加 345 元.

边际需求函数

设 A, B 是两种相关商品, 其价格分别为 p_A 和 p_B, 消费者的收入为 y, A, B 的需求函数分别为 $Q_A = f(p_A, p_B, y)$, $Q_B = g(p_B, p_A, y)$, 则其偏导数分别为

$$\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}, \ \frac{\partial Q_A}{\partial p_B}, \ \frac{\partial Q_A}{\partial y}; \quad \frac{\partial Q_B}{\partial p_B}, \ \frac{\partial Q_B}{\partial p_A}, \ \frac{\partial Q_B}{\partial y},$$

其中

- $\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}$ 称为商品 A 的需求函数关于 p_A 的边际需求, 它表示当商品 B 的价格 p_B 及消费者的收入 y 固定时, 商品 A 的价格变化一个单位时, 商品 A 的需求量的近似改变量;
- $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$ 称为商品 A 的需求函数关于 p_B 的边际需求, 它表示当商品 A 的价格 p_A 及消费者的收入 y 固定时, 商品 B 的价格变化一个单位时, 商品 A 的需求量的近似改变量;
- $\frac{\partial Q_A}{\partial y}$ 称为商品 A 的需求函数关于 y 的边际需求, 它表示当商品 A 的价格 p_A 及商品 B 的价格 p_B 固定时, 消费者的收入 y 变化一个单位时, 商品 A 的需求量的近似改变量.

- 当 p_B, y 固定, 而 p_A 上升时, 商品 A 的需求量 Q_A 将减少, 于是有 $\frac{\partial Q_A}{\partial p_A} < 0$, 类似地 $\frac{\partial Q_B}{\partial p_B} < 0$;
- 当 p_B, p_A 固定, 而 y 增加时, 商品 A 的需求量 Q_A 将增大, 于是有 $\frac{\partial Q_A}{\partial y} > 0$, 类似地 $\frac{\partial Q_B}{\partial y} > 0$;
- $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$ 和 $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A}$ 可正可负.

若 $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} > 0$ 且 $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} > 0$, 则称 A 和 B 是相互竞争 (或替代) 的商品. 例如夏天的西瓜与冷饮. 当西瓜价格 p_A 及消费者的收入 y 固定时, 冷饮价格 p_B 的增加将引起西瓜需求量 Q_A 增加, 所以 $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} > 0$. 同理, $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} > 0$.

若 $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} < 0$ 且 $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} < 0$, 则称 A 和 B 是相互补充的商品. 例如汽车与汽油. 当汽车价格 p_A 及消费者的收入 y 固定时, 汽油价格 p_B 的增加将使开车的费用随之增加, 因而汽车的需求量 Q_A 将会减少, 所以 $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} < 0$. 同理, $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} < 0$.

例 9.3. 两种商品 A 与 B, 当其价格分别为 x 与 y 时的需求函数为

$$f(x,y) = 300 - 6x^2 + 10y^2 \ (A\text{的需求函数}),$$

$$g(x,y) = 600 + 6x - 2y^2 \ (B\text{的需求函数}).$$

试问这两种商品为竞争型还是互补型?

解:

$$f'_y(x,y) = 20y > 0, \quad g'_x(x,y) = 6 > 0.$$

由此两种商品为竞争型.

偏弹性

设商品 A 的需求函数为 $Q_A = f(p_A, p_B, y)$, 当 p_B 和 y 保持不变而 p_A 发生变化时, 需求量 Q_A 的相对改变量与自变量 p_A 的相对改变量比的极限, 称为需求的自身 (直接) 价格弹性, 记为 E_{AA}, 即

$$E_{AA} = \lim_{\Delta p_A \to 0} \frac{\Delta Q_A / Q_A}{\Delta p_A / p_A} = \frac{p_A}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_A}.$$

一般情况下, 由于 $\frac{\partial Q_A}{\partial p_A} < 0$, 所以 $E_{AA} < 0$.

设商品 A 的需求函数为 $Q_A = f(p_A, p_B, y)$, 当 p_A 和 y 保持不变而 p_B 发生变化时, 需求量 Q_A 的相对改变量与自变量 p_B 的相对改变量比的极限, 称为需求的交叉价格弹性, 记为 E_{AB}, 即

$$E_{AB} = \lim_{\Delta p_B \to 0} \frac{\Delta Q_A / Q_A}{\Delta p_B / p_B} = \frac{p_B}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_B}.$$

- 当 A 和 B 是相互竞争 (和替代) 的商品时, 由于 $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} > 0$, 所以 $E_{AB} > 0$;

- 当 A 和 B 是相互补充的商品时, 由于 $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} < 0$, 所以 $E_{AB} < 0$.

设商品 A 的需求函数为 $Q_A = f(p_A, p_B, y)$, 当 p_A 和 p_B 保持不变而 y 发生变化时, 需求量 Q_A 的相对改变量与自变量 y 的相对改变量比的极限, 称为需求的收入弹性, 记为 E_{Ay}, 即

$$E_{Ay} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta Q_A / Q_A}{\Delta y / y} = \frac{y}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial y}.$$

一般情况下, 由于 $\frac{\partial Q_A}{\partial y} > 0$, 所以 $E_{Ay} > 0$.

例 9.4. 设需求函数为 $Q_A = f(p_A, p_B, y) = 14 - 2p_A + 5p_B + \frac{1}{10}y$, 求当 $p_A = 4$, $p_B = 2$, $y = 200$ 时 E_{AA}, E_{AB}, E_{Ay} 的值.

解:

$$E_{AA} = \frac{p_A}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_A} = -2\frac{p_A}{Q_A}, \quad E_{AB} = \frac{p_B}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_B} = 5\frac{p_B}{Q_A},$$
$$E_{Ay} = \frac{y}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial y} = \frac{1}{10} \cdot \frac{y}{Q_A}.$$

所以

$$E_{AA}(4,2,200) = -\frac{2}{9}, \quad E_{AB}(4,2,200) = \frac{5}{18}, \quad E_{Ay}(4,2,200) = \frac{5}{9}.$$

由于 $E_{AB}(4,2,200) > 0$, 说明商品 A 和 B 是相互竞争 (和替代) 的商品.

8.9.2 经济应用举例

例 9.5. 假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是

$$p_1 = 18 - 2Q_1, \quad p_2 = 12 - Q_2,$$

其中 p_1 和 p_2 为售价, Q_1 和 Q_2 为销售量. 总成本函数为

$$C = 2(Q_1 + Q_2) + 5.$$

(1) 如果该企业实行价格差别策略, 试确定两个市场上该产品的销售量和价格, 使该企业获得最大利润;

(2) 如果该企业实行价格无差别策略, 试确定两市场上该产品的销售量和统一价格, 使该企业总利润最大化, 并比较两种策略下的总利润大小.

解:

(1) 总利润函数

$$L = R - C = p_1Q_1 + p_2Q_2 - [2(Q_1 + Q_2) + 5] = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5.$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_1} = -4Q_1 + 16 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} = -2Q_2 + 10 = 0, \end{cases}$$

解得唯一驻点 $Q_1 = 4, Q_2 = 5$. 这时 $p_1 = 10, p_2 = 7$. 该实际问题一定存在最大值, 因此当 $p_1 = 10, p_2 = 7$ 时, 取得最大利润

$$L_{\max} = (-2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5)\big|_{\substack{Q_1=4 \\ Q_2=5}} = 52.$$

(2) 若实行价格无差别策略, 则 $p_1 = p_2$, 即约束条件 $2Q_1 - Q_2 = 6$. 将 $Q_2 = 2Q_1 - 6$ 代入原总利润函数得新的总利润函数

$$L_{new} = -2Q_1^2 - (2Q_1 - 6)^2 + 16Q_1 + 10(2Q_1 - 6) - 5 = -6Q_1^2 + 60Q_1 - 101.$$

易得当 $Q_1 = 5, Q_2 = 4$ 时新的总利润函数取得最大值 49. 因此, 企业实行价格差别策略所得利润要大于实行价格无差别策略的利润.

例 9.6. 假设某企业通过电视和报纸做广告, 已知销售收入为

$$R(x, y) = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2,$$

其中 x(万元) 和 y(万元) 为电视广告费和报纸广告费.

(1) 在广告费用不限的情况下, 求最佳广告策略;

(2) 如果广告费用限制为 1.5 万元, 求最佳广告策略.

解:

(1) 利润函数

$$L = R - (x + y) = 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2.$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 13 - 8y - 4x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 31 - 8x - 20y = 0, \end{cases}$$

解得唯一驻点 $x = 0.75, y = 1.25$. 这时最大利润为 $L(0.75, 1.25) = 39.25$(万元).

(2) 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2 + \lambda(x + y - 1.5).$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 13 - 8y - 4x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 31 - 8x - 20y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1.5 = 0, \end{cases}$$

解得唯一驻点 $x = 0, y = 1.5$. 这时最大利润为 $L(0, 1.5) = 39$(万元).

例 9.7. 已知某企业某产品的生产函数是 $f(x, y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, 每个劳动力及每个单位资本的成本分别是 150 元和 250 元, 该企业的总投资预算是 50000 元. 问如何分配这笔资金用于安排劳动力与单位资本投入, 使生产量最高? 并求最高生产量.

解: 问题为求条件 $150x + 250y = 50000$ 下函数 $f(x, y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ 的最大值. 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda(150x + 250y - 50000).$$

解

$$\begin{cases} F'_x = 75x^{\frac{-1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + 150\lambda = 0, \\ F'_y = 25x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{-3}{4}} + 250\lambda = 0, \\ F'_\lambda = 150x + 250y - 50000 = 0, \end{cases}$$

得 $x = 250, y = 50$. 由问题的实际意义知, $(250, 50)$ 为最大值点, 故企业应安排 250 个劳动力, 而把其余的资金作为资本投入方可获得最高生产量, 最高生产量为 $f(250, 50) = 16719$.