

11.6 傅里叶级数

11.6.1 三角级数及三角函数系的正交性

周期运动是自然界中广泛存在的一种运动形态,对周期运动可用周期函数来近似描述.例如反映简谐震动的函数

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

是一个以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的正弦函数.

值得注意的是:并非所有的周期过程都能用简单的正弦函数来表示.

例如电子技术中常用矩形波作为开关电路中电子流动的模型,矩形波就不是正弦波.图中的矩形波可用下式来表示

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [(2k-1)\pi, 2k\pi), \\ 1, & t \in [2k\pi, (2k+1)\pi), \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

可以看到,函数 $f(t)$ 是以 2π 为周期的、由无穷多段构成的分段函数,它在很多点处不连续,不可导.

为了深入研究这类周期函数,我们设法用一系列以 2π 为周期的正弦和余弦函数组成的级数去表示它.具体而言,对以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$,研究是否可以把它展开成形如

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的三角级数.

如同幂级数的讨论,我们将讨论:

- (1) 三角级数的具体形式,即系数 a_n 和 b_n 怎么确定;
- (2) 三角级数中的收敛问题,即收敛域是什么,在收敛域内其和函数是否为函数 $f(x)$?

三角函数系与函数的傅里叶级数

所谓三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上正交,是指函数系中的任意两个不同的函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零,即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx \, dx &= 0 \quad k, n = 1, 2, 3, \dots, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx \, dx &= 0 \quad k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx \, dx &= 0 \quad k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n.\end{aligned}$$

另外, 在三角函数系中, 两个相同函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分分别为

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx &= 2\pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots.\end{aligned}$$

11.6.2 函数的傅里叶级数

傅里叶系数的确定

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且能展开成三角级数, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (11.6.1)$$

并进一步假设级数(11.6.1)可以逐项积分.

对(11.6.1)式作下面的积分, 并注意到函数系的正交性, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx = a_0 \pi.\end{aligned}$$

从而得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

用 $\cos nx$ 乘(11.6.1)式的两端, 再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分, 有

$$\begin{aligned}& \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx \right).\end{aligned}$$

再由三角函数系的正交性, 上式右端仅有一项不为零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = a_n \pi,$$

所以

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

类似地, 用 $\sin nx$ 乘(11.6.1)式的两端, 再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分, 有

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

由于当 $n = 0$ 时, a_n 的表达式与 a_0 一致, 因此上面的结果可合并成

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned} \quad (11.6.2)$$

(11.6.2)式确定的系数 a_0, a_1, b_1, \dots 称为函数 $f(x)$ 的傅里叶 (Fourier) 系数, 将这些系数代入(11.6.1)式右端, 所得三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

如果函数 $f(x)$ 的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (系数由(11.6.2)式确定) 收敛到 $f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 能展成傅里叶级数.

定理 6.1 (Dirichlet 收敛定理). 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 如果它满足:

- (1) 在一个周期内分段单调;
- (2) 在一个周期内除有限个第一类间断点外是连续的,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛, 并且

- (1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;
- (2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$.

函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

例 6.1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

把 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解: 所给函数满足收敛定理的条件, 点 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是函数的第一类间断点, 其余点均为连续点, 因此函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = k\pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(0-0) + f(0+0)] = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2},$$

在其余点收敛到 $f(x)$, 其相应的傅里叶系数为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n\pi} [1 + (-1)^{n-1}] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right) \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

例 6.2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

把 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解: 所给函数满足收敛定理的条件, 点 $x = (2k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是函数的第一类间断点, 其余点均为连续点, 因此 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = (2k+1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0) + f(\pi+0)] = \frac{1}{2}(\pi+0) = \frac{\pi}{2},$$

在其余点收敛到 $f(x)$, 其相应的傅里叶系数为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right] \quad (x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

在具体讨论函数的傅里叶级数展开式时, 常只给出函数 f 在 $(-\pi, \pi]$ (或 $[-\pi, \pi)$) 上的解析表达式, 但应理解为它是定义在整个数轴上以 2π 为周期的函数. 即在 $(-\pi, \pi]$ 以外的部分按函数在 $(-\pi, \pi]$ 上的对应关系作周期延拓.

如 $f(x)$ 为 $(-\pi, \pi]$ 的解析表达式, 那么周期延拓后的函数为

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi], \\ f(x - 2k\pi), & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi], k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

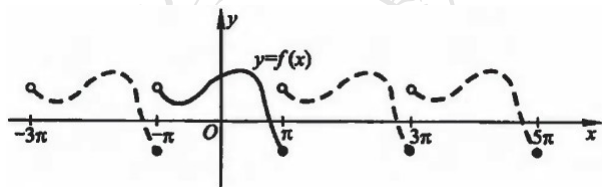


图 11.1: 实线与虚线的全体表示 $y = F(x)$

例 6.3. 将函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数, 并由此求正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

解: 因所给函数 $f(x)$ 仅定义在 $[-\pi, \pi)$ 上, 它不是周期函数, 故首先将函数作周期延拓, 即在 $[-\pi, \pi)$ 外补充 $f(x)$ 的定义, 使其拓展成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$, 且当 $x \in [-\pi, \pi)$ 时, $F(x) \equiv f(x)$.

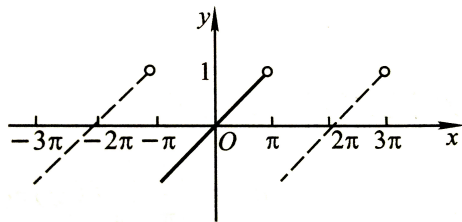
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

由于 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 所以

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$



在区间 $[-\pi, \pi)$ 上, $F(x) = f(x)$, 所以对于任意的 $x \in [-\pi, \pi)$, 有

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

在上式中令 $x = 0$, 则 $f(0) = 0$. 于是

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

记 $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots)$, 则有

$$A = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \right),$$

即 $A = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} A$. 解得 $A = \frac{\pi^2}{24}$. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

例 6.4. 设函数 $f(x) = x$ ($-\pi \leq x < \pi$), 将函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解: 因所给函数 $f(x)$ 仅定义在 $[-\pi, \pi)$ 上, 它不是周期函数, 故首先将函数作周期延拓, 即在 $[-\pi, \pi)$ 外补充 $f(x)$ 的定义, 使其拓展成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$, 且当 $x \in [-\pi, \pi)$ 时, $F(x) \equiv f(x)$.

由于 $F(x)$ 是奇函数, 故 $F(x) \cos nx$ 是奇函数, 因此

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

又函数 $F(x)$ 满足收敛定理的条件, 并且函数仅在 $x = (2k+1)\pi$ 处间断, 由此得函数 $F(x)$ 的傅里叶级数为

$$F(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \cdots \right) \quad x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

由于当 $x \in (-\pi, \pi)$ 时, $F(x) \equiv f(x)$, 故得

$$f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \cdots \right) \quad x \in (-\pi, \pi).$$

当 $x = -\pi$ 时, $f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 0.

11.6.3 正弦级数和余弦级数

当函数 $f(x)$ 为奇函数时, 它的傅里叶系数中, $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 因而函数的傅里叶级数仅含有正弦函数的各项, 此时的傅里叶级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

称为**正弦级数**, 且因 $f(x) \sin nx$ 是偶函数, 故正弦级数的系数

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

当 $f(x)$ 为偶函数时, 它的傅里叶系数中, $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 因而函数的傅里叶级数仅含有常数项与余弦函数的各项, 此时的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

称为**余弦级数**, 且因 $f(x) \cos nx$ 是偶函数, 故余弦级数的系数

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上有定义, 如果 $f(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上满足收敛定理的条件, 根据实际情况的需要, 在 $[0, \pi)$ 外补充定义到 $[-\pi, 0)$ 上, 使之在 $[-\pi, \pi]$ 上成为偶函数或奇函数 $F(x)$, 在 $[0, \pi)$ 上 $F(x) \equiv f(x)$, 这种方法称为**偶延拓**或**奇延拓**.

• 奇延拓

$$F(x) = \begin{cases} -f(-x), & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ f(x), & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

• 偶延拓

$$F(x) = \begin{cases} f(-x), & -\pi \leq x < 0, \\ f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

例 6.5. 设函数 $f(x) = \pi x - x^2$, $0 < x < \pi$, 又设 $s(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数, 求当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时 $s(x)$ 的表达式.

解: 由题设对函数作奇延拓

$$F(x) = \begin{cases} \pi x - x^2, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \\ \pi x + x^2, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

在 $(-\pi, \pi)$ 上, $s(x) = F(x)$. 在 $(\pi, 2\pi)$ 上由周期性知

$$s(x) = s(x - 2\pi) = \pi(x - 2\pi) + (x - 2\pi)^2 = x^2 - 3\pi x + 2\pi^2.$$

例 6.6. 将函数 $f(x) = x + 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) 分别展开成正弦级数与余弦级数.

解: 正弦级数. 先对函数作奇延拓

$$F(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x = 0, \\ x - 1, & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

再以 2π 为周期作周期延拓.

因延拓后的函数为奇函数, 所以 $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 又

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x + 1) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^\pi = \frac{2}{n\pi} (1 - \pi \cos n\pi - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{2(\pi+2)}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ -\frac{2}{n}, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases} \end{aligned}$$

因延拓后的函数满足收敛定理, 且当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) \equiv F(x)$. 故

$$x + 1 = \frac{2}{\pi} \left((\pi + 2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{\pi + 2}{3} \sin 3x - \frac{\pi}{4} \sin 4x + \dots \right), \quad 0 < x < \pi.$$

余弦级数. 先对函数作偶延拓

$$F(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -x + 1, & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

再以 2π 为周期作周期延拓.

因延拓后的函数为偶函数, 所以 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 又 $a_0 = \pi + 2$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x + 1) \cos nx \, dx = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$$

偶延拓后 $F(x)$ 处处连续, 则

$$x + 1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 2x}{3^2} + \frac{\cos 3x}{5^2} + \dots \right), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

例 6.7. 把定义在 $[0, \pi]$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < h, \\ \frac{1}{2}, & x = h, \\ 0, & h < x \leq \pi \end{cases}$$

(其中 $0 < h < \pi$) 展开成正弦级数.

解: 函数 f 是分段光滑的, 因此可以展开成正弦级数.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos nh).$$

所以

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nx, \quad 0 < x < h, \quad h < x < \pi.$$

当 $x = 0, \pi$ 时, 级数的和为 0; 当 $x = h$ 时, 有

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nh = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

11.6.4 一般周期函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的连续周期函数. 作变换 $t = \frac{\pi}{l}x$, 则当 x 在区间 $[-l, l]$ 上变化时, t 就在区间 $[-\pi, \pi]$ 上变化, $g(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ 是以 2π 为周期的周期函数.

对于周期为 $2l$ 的一般周期函数, 可以定义 $f(x)$ 的傅立叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (11.6.3)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

定理 6.2. 设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足:

(1) 在一个周期内分段单调;

(2) 在一个周期内除有限个第一类间断点外是连续的,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数(11.6.3)处处收敛, 并且

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$.

当 $f(x)$ 为奇函数时, 其傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

当 $f(x)$ 为偶函数时, 其傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

例 6.8. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

把 $f(x)$ 展开成相应的傅里叶级数.

解: 函数 $f(x)$ 的周期为 2, 即 $l = 1$. 从而

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 (x+1) dx = \int_0^1 1 dx = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^0 x \cos n\pi x dx + \int_0^1 (x+1) \cos n\pi x dx \\ &= \int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^0 x \sin n\pi x dx + \int_0^1 (x+1) \sin n\pi x dx \\ &= 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx + \int_0^1 \sin n\pi x dx \\ &= 2 \left(\frac{\sin n\pi x}{n^2 \pi^2} - \frac{x \cos n\pi x}{n\pi} \right) \Big|_0^1 - \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1 + 3(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 并且除了 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外处处连续, 故有

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(4 \sin \pi x - \sin 2\pi x + \frac{4}{3} \sin 3\pi x - \frac{1}{2} \sin 4\pi x + \dots \right),$$

$x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

例 6.9. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1]$ 上的表达式为 $f(x) = |x|$, 求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解: 函数 $f(x)$ 的周期为 2, 即 $l = 1$. 由于 $f(x)$ 是偶函数, $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{-4}{n^2 \pi^2}, & n = 1, 3, 5, \dots. \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故有傅里叶展开式

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

例 6.10. 将 $f(x) = x$ 在 $[-\pi, \pi)$ 和 $[-3, 3)$ 上展开为傅里叶级数.

解: $[-\pi, \pi)$. 对 $f(x) = x$ 进行周期延拓 ($T = 2\pi$), 得到的函数为奇函数. 所以 $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

故 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上展成的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi. \end{cases}$$

[-3, 3]. 对 $f(x) = x$ 进行周期延拓 ($T = 6$), 得到的函数为奇函数. 所以 $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 x \sin \frac{n\pi x}{3} dx = (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

故 $f(x)$ 在 $[-3, 3)$ 上展成的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} = \begin{cases} x, & -3 < x < 3, \\ 0, & x = -3. \end{cases}$$

11.6.5 思考与练习

练习 298. 写出函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上傅里叶级数的和函数.

解:

$$s(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

练习 299. 把下列函数开展成傅里叶级数:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = \pi, \\ -x^2, & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

解: 对 f 进行周期延拓后得到的函数是按段光滑的, 因此可以展开成傅里叶级数. 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-x^2) dx = -2\pi^2.$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{4}{n^2} [(-1)^n - 1],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{n} + \left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3} \right) (1 - (-1)^n) \right].$$

所以当 $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ 时,

$$f(x) = -\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{n^2} [(-1)^n - 1] \cos nx + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{n} + \left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3} \right) (1 - (-1)^n) \right] \sin nx \right\}.$$

当 $x = \pi$ 时, 由于

$$\frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = 0,$$

所以

$$0 = -\pi^2 + 8 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right).$$

当 $x = 0$ 或 $x = 2\pi$ 时, 由于

$$\frac{1}{2}(f(0-0) + f(0+0)) = \frac{1}{2}(-4\pi^2 + 0) = -2\pi^2,$$

因此

$$-2\pi^2 = -\pi^2 - 8 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right).$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots.$$

练习 300. 在电子技术中经常用到矩形波, 用傅里叶级数展开后, 就可以将矩形波看成一系列不同频率的简谐振动的叠加, 在电工学中称为谐波分析. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的矩形波函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

求该矩形波函数的傅里叶展开式.

解: 由于 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上是奇函数, 所以

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx dx = \frac{1}{2n} [1 - (-1)^n].$$

于是当 $x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时,

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots + \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x + \cdots;$$

当 $x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时, 级数收敛于 0.

练习 301. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < \pi \end{cases}$ 的正弦级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 则等式 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 成立的区间为 ____.

$f(0) = 0$, 故区间为 $[0, \pi)$.

练习 302. 把 $f(x) = x$ 在 $(0, 2)$ 内展开成:

(i) 正弦级数; (ii) 余弦级数.

解: (i) 对 f 作奇式周期延拓,

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi = \frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

所以当 $x \in (0, 2)$ 时, 有

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right).$$

但当 $x = 0, 2$ 时, 右边级数收敛于 0.

(ii) 对 f 作偶式周期延拓,

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$a_0 = \int_0^2 x dx = 2,$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1],$$

$n = 1, 2, \dots$. 所以当 $x \in (0, 2)$ 时, 有

$$f(x) = x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right).$$

但当 $x = 0, 2$ 时, 右边级数分别收敛于 0 和 2.