# 9.3 三重积分及其计算

## 9.3.1 三重积分的定义

**定义 3.1.** 设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 $\Omega$ 上的有界函数. 将 $\Omega$ 任意分成 $n$ 个可求体积的小闭区域 $V_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 其体积记作 $\Delta V_i$, 直径为 $d_i$. 设 $\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$. 在每个 $V_i$ 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

若当各小闭区域直径中的最大值 $\lambda$ 趋于零时, 上述和的极限存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 $\Omega$ 上的三重积分, 记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$, 即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i,$$

其中 $\mathrm{d}V$ 称为体积微元, $f(x,y,z)$ 称为被积函数, $x,y,z$ 称为积分变量, $\Omega$ 称为积分区域. 并称函数 $f(x,y,z)$在区域 $\Omega$ 上可积.

在直角坐标系中, $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 从而三重积分可写成

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 称为直角坐标系中的体积微元.

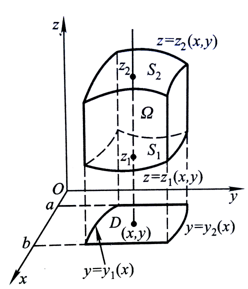
当 $f(x,y,z)\equiv 1$ 时, $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 表示 $\Omega$ 的体积.

若 $f(x,y,z)$ 是有界闭区域上的连续函数, 则 $f(x,y,z)$ 可积.

若连续函数 $f(x,y,z)$ 表示某物体在点 $(x,y,z)$ 处的体密度, $\Omega$ 是该物体所占有的空间闭区域, 则其质量为 $M=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$.

## 9.3.2 三重积分的计算

**利用直角坐标计算三重积分 (投影法——先一后二)**




设平行于 $z$ 轴且穿过 $\Omega$ 内部的直线与 $\Omega$ 的边界曲面 $S$ 相交不多于两点. 把区域 $\Omega$ 投影到 $xOy$ 面上, 投影区域记作 $D$. 此时 $\Omega$ 的边界曲面 $S$ 可分割为三部分: 下曲面 $S_1$、上曲面 $S_2$ 以及侧面, 设 $S_1$ 和 $S_2$ 的方程分别为

$$S_1: z=z_1(x,y),\quad S_2: z=z_2(x,y),$$

其中 $z_1(x,y)$ 和 $z_2(x,y)$ 都是 $D$ 上的连续函数, 且 $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$. 区域 $\Omega$ 可表示为

$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

先把 $x, y$ 看作定值, 把 $f(x,y,z)$ 只看作 $z$ 的函数, 在区间 $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$ 上对 $z$ 作定积分, 积分结果记作 $F(x,y)$, 即

$$F(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

然后计算 $F(x,y)$ 在 $D$ 上的二重积分, 便得所求的三重积分, 即有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint\limits_{D} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

上式也可写成

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z. \tag{9.3.1}$$

若投影区域 $D$ 可表示为

$$y_1(x) \le y \le y_2(x), \quad a \le x \le b,$$

则(9.3.1)式可进一步写成

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

这样三重积分就化成了先对 $z$, 再对 $y$, 最后对 $x$ 的三次积分.

如果平行于 $x$ 轴或 $y$ 轴且穿过 $\Omega$ 内部的直线与 $\Omega$ 的边界曲面 $S$ 相交不多于两点, 则可把区域 $\Omega$ 投影到 $yOz$ 面或 $zOx$ 面上, 类似地得到其他顺序的三次积分.

**例 3.1.** 化三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为三次积分, 其中 $\Omega$ 是由 $x=0, y=0, z=0$ 及 $6x+2y+3z=6$ 所围成的闭区域.

**解:**

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{3-3x} \mathrm{d}y \int_0^{2-2x-\frac{2}{3}y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

**例 3.2.** 化三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为三次积分, 其中 $\Omega$ 是由 $z=xy, x+y=1$ 及 $z=0$ 所围成在第一卦限的部分.

**解:**

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{xy} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

**例 3.3.** 化三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为三次积分, 其中 $\Omega$ 是由 $z=3x^2+y^2$ 和 $z=1-x^2$ 所围成的闭区域.

**解**: $z = 3x^2 + y^2$ 为抛物面, $z = 1 - x^2$ 母线平行于 $y$ 的抛物柱面, 其交线在 $xOy$ 面上的投影为

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

所以相应的三次积分为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} \mathrm{d}y \int_{3x^2+y^2}^{1-x^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

**例 3.4.** 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega$ 是由 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

**解**:

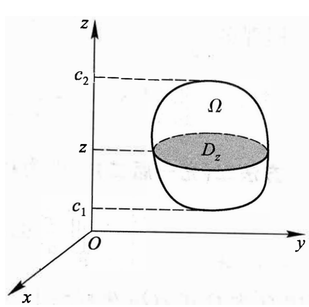
$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} xy\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{2}} xy(1-x-2y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{480}.\end{aligned}$$

**例 3.5.** 计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{x+y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega$ 是由 $x=1, y=0, y=x, z=x$ 及 $z=0$ 所围成的闭区域.

**解**:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} e^{x+y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^x e^{x+y+z}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \left(e^{2x+y} - e^{x+y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (e^{3x} - 2e^{2x} + e^x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^3 - e^2 + e - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

**截面法——先二后一**




设有界闭区域

$$\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_z, c_1 \le z \le c_2\},$$

其中 $D_z$ 是竖坐标为 $z$ 的平面截闭区域 $\Omega$ 所得的一个平面闭区域, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

**例 3.6.** 计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

**解**: 被积函数仅为 $z$ 的函数, 考虑用截面法. 截面 $D_z : x^2+y^2 \le 1-z^2$.

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{-1}^{1} e^{|z|}\,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi \int_{-1}^{1} (1-z^2)e^{|z|}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^1 (1-z^2)e^z\,\mathrm{d}z = 2\pi.\end{aligned}$$

**例 3.7.** 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$.

**解**: $\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_{\Omega} \frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_{\Omega} \frac{z^2}{c^2}\,\mathrm{d}V$.

截面法. 令 $D_x$ 为椭圆域 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1-\frac{x^2}{a^2}$.

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}V = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x \iint_{D_x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{15}\pi abc.$$

同理可得

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} \frac{z^2}{c^2}\,\mathrm{d}V = \frac{4}{15}\pi abc.$$

故 $\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{4}{5}\pi abc$.

投影法.

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}V &= 2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \mathrm{d}z \\ &= 2c\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \frac{x^2}{a^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

令 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}V = 2abc\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4}{15}\pi abc.$$

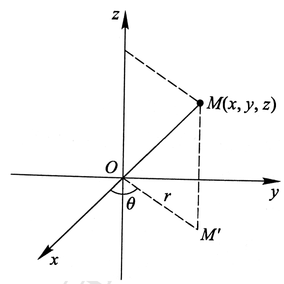
由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{4}{5}\pi abc$.

### 利用柱面坐标计算三重积分

#### 柱面坐标

设 $M(x,y,z)$ 为空间任一点, 若点 $M$ 在 $xOy$ 平面上的投影 $(x,y)$ 的极坐标为 $(r,\theta)$ , 则称 $(r,\theta,z)$ 为点 $M$ 的柱面坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系为

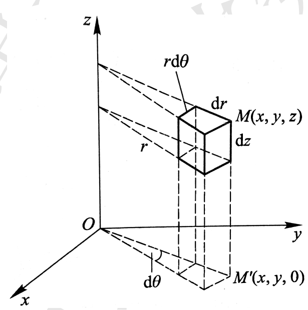
$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases} \qquad (0 \le r < +\infty, 0 \le \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty).$$




柱面坐标系中的体积微元为

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

由此得到三重积分的柱面坐标形式




$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

**化三重积分为柱面坐标的三次积分公式**

如果区域 $\Omega$ 的上、下边界曲面的柱面坐标的方程分别为

$$z = z_2(r,\theta), \quad z = z_1(r,\theta),$$

而 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域可表示为

$$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta,$$

则区域 $\Omega$ 在柱面坐标系中可表示为

$$z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta), \quad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \mathrm{d}r \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}z.$$

**例 3.8.** 计算 $\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega$ 是由旋转抛物面 $z = x^2+y^2$ 及平面 $z = 4$ 所围成的闭区域.

**解**: 易知 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域 $D$ 为$xOy$ 面上的圆形闭区域 $x^2+y^2 \le 4$, 因此 $\Omega$ 可表示为

$$x^2+y^2 \le z \le 4, \quad (x,y) \in D.$$

在柱面坐标系下 $\Omega = \{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r^2 \le z \le 4\}$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{d}r \int_{r^2}^4 r^3 \sin^2\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^3(4-r^2)\sin^2\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{16}{3}\pi.$$

**例 3.9.** 利用柱面坐标计算 $\iiint\limits_{\Omega} (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega$ 是由 $z = x^2+y^2$ 及 $z = 1$ 所围成的闭区域.

**解**: 设 $\Omega$ 在第一卦限部分的区域为 $\Omega_1$, 由对称性得

$$\iiint\limits_{\Omega} (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\iiint\limits_{\Omega_1} (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 8\iiint\limits_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \int_{r^2}^1 r^2\cos\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^2(1-r^2)\cos\theta\,\mathrm{d}r = \frac{16}{15}.$$

**例 3.10.** 利用柱面坐标计算 $\iiint\limits_{\Omega} \sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega$ 是由 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z = \pi$ 所围成的闭区域.

**解**:

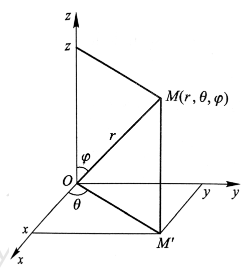
$$\iiint\limits_{\Omega} \sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}r \int_r^{\pi} r\sin z\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} r(1+\cos r)\,\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} r(1+\cos r)\,\mathrm{d}r = \pi^3 - 4\pi.$$

## 利用球面坐标计算三重积分

**球面坐标**

设 $M(x,y,z)$ 为空间任一点, 点 $M$ 在 $xOy$ 平面上的投影为 $M'$. 现用向量 $(r,\theta,\varphi)$ 来表示这个点, 其中 $r=|OM|$, $\theta$ 为 $x$ 轴的正半轴到射线 $OM'$ 的转角, $\varphi$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 $z$ 轴的正半轴的夹角. 称 $(r,\theta,\varphi)$ 为空间点 $M$ 的球面坐标. 直角坐标与球面坐标的关系为

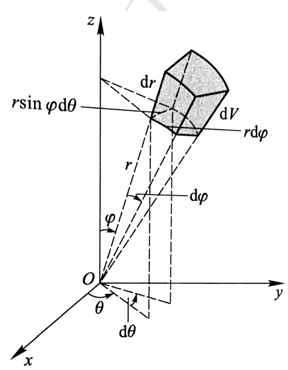
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases} \qquad (0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi).$$




球面坐标系中的体积微元为

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

由此得到三重积分的球面坐标形式




$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

**例 3.11.** 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega$ 由右半球面 $x^2+y^2+z^2 \le a^2, y \ge 0$ 所围.

**解**: 在球面坐标下, 积分区域 $\Omega$ 可表示为

$$\Omega = \{(r,\theta,\varphi) : 0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le \pi\}.$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} r^4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{4}{15}\pi a^5.$$

**例 3.12.** 求 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega$ 由 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 和 $z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成.

**解:** 在球面坐标下, 积分区域 $\Omega$ 可表示为

$$\Omega = \{(r,\theta,\varphi): 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi/6\}.$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{1} r^4\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{20}.$$

### 9.3.3 三重积分的积分变换

**定理 3.1.** 设 $\Omega$ 是 $O-uvw$ 空间 $\mathbb{R}^3$ 中的有界可求体积的闭区域, $T: x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$ 是 $\Omega$ 到 $O-xyz$ 空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一一映射, 它们有一阶连续偏导数, 并且雅可比行列式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \ne 0, \quad (u,v,w)\in\Omega.$$

如果 $f(x,y,z)$ 是 $T(\Omega)$ 上的可积函数, 那么

$$\iiint\limits_{T(\Omega)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

**柱面坐标变换**

$$T: \begin{cases} x = r\cos\theta, & 0\le r<+\infty, \\ y = r\sin\theta, & 0\le\theta\le 2\pi, \\ z = z, & -\infty<z<+\infty. \end{cases}$$

变换 $T$ 的函数行列式为

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

三重积分的柱面坐标换元公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,$$

这里 $\Omega'$ 为 $\Omega$ 在柱面坐标变换下的原象.

**球坐标变换**

$$T: \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = r\cos\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

变换 $T$ 的函数行列式为

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi.$$

三重积分的球坐标换元公式为

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ =&\iiint_{\Omega'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

这里 $\Omega'$ 为 $\Omega$ 在球坐标变换下的原象.

**例 3.13.** 设 $\Omega$ 为由 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 和 $z \ge 0$ 所围成的空间区域, 在 $\Omega$ 中分布有某种物质, 其密度与该处到球心的距离 $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 成正比, 比例系数为 $k$, 求该物体的总质量.

**解**: 总质量

$$m = \iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V.$$

利用球坐标变换可得

$$m = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^R kr\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{k\pi}{2}R^4.$$

**例 3.14.** 求 $I = \iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $V$ 为由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$ 与 $z \ge 0$ 所围区域.

**解**: 作广义球坐标变换

$$T: \begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\varphi, \end{cases}$$

于是 $J = abcr^2\sin\varphi$. $V$ 在广义球坐标变换下的原象为

$$V' = \{(r,\varphi,\theta) | 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_{V'} abc^2r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi \int_0^1 abc^2r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi abc^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi abc^2}{4}. \end{aligned}$$