第十章　曲线积分与曲面积分习题课

黄学海

Email: huang.xuehai@sufe.edu.cn

上海财经大学　数学学院

目录

1. 曲线积分计算的基本方法

$$\text{曲线积分}\begin{Bmatrix}\text{第一类 (对弧长)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{Bmatrix}\xrightarrow{\text{转化}}\text{定积分}$$

1. 统一积分变量 $\begin{cases}\text{用参数方程}\\ \text{用直角坐标方程}\\ \text{用极坐标方程}\end{cases}$

2. 确定积分上下限 $\begin{cases}\text{第一类: 下小上大}\\ \text{第二类: 下始上终}\end{cases}$

对弧长的曲线积分解题步骤

1. 写出曲线 L 方程及相应弧微分公式 $\mathrm{d}s$
   1. L 为参数方程: $\begin{cases} x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\le t\le\beta \\ \mathrm{d}s=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$
   2. L 为直角坐标方程: $\begin{cases} y=g(x), a\le x\le b \\ \mathrm{d}s=\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$
   3. L 为极坐标方程: $\begin{cases} r=r(\theta), \theta_1\le\theta\le\theta_2 \\ \mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$
2. 将 L 的表达式及弧微分公式直接代入曲线积分式, 化为定积分, 定出积分限. (下限小于上限)
   1. $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$
   2. $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$
   3. $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$

对坐标的曲线积分计算方法

1. 直接化为对参变量的定积分: $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \le t \le \beta$,

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

下限对起点, 上限对终点.

2. 利用积分与路径无关的条件: 若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则积分只与 L 的起点和终点有关, 故可选取便于计算的路径, 如折线段、圆弧段、直线段 (结合 P, Q 考虑)

3. 利用格林公式(适用于封闭曲线) 化为定积分

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

若曲线 L 不是封闭的, 直接计算有困难, 可考虑添加辅助曲线 C, 使 $L+C$ 为封闭曲线, 再利用格林公式.

4. 利用斯托克斯公式(适用空间封闭曲线积分)

$$\iint_\Sigma (\boldsymbol{n} \times \nabla)\cdot(P,Q,R)\,\mathrm{d}S = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

2. 基本技巧

1. 利用对称性简化计算
2. 利用积分与路径无关的等价条件
3. 利用格林公式 (注意加辅助线技巧)
4. 利用斯托克斯公式
5. 利用两类曲线积分之间的联系

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s,$$

其中 α, β 为有向曲线 L 上点 (x, y) 处的切向量的方向角.

例

计算 $I=\int_L (x^2+y+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

例

计算 $I=\int_L (x^2+y+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解: 利用轮换对称性, 有

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s=\int_L y^2\,\mathrm{d}s=\int_L z^2\,\mathrm{d}s.$$

利用重心公式知 $\int_L y\,\mathrm{d}s=\bar{y}\int_L \mathrm{d}s=0$. 故

$$I=\frac{2}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=\frac{2}{3}a^2\int_L \mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

例

1. 计算 $I=\int_L(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是沿逆时针方向以原点为中心、a 为半径的上半圆周.
2. 若 L 改为顺时针方向，计算积分 $I_1=\int_L(x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$.
3. L 仍取逆时针方向，计算积分 $I_2=\int_L(x^2-y+y^2)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$.

例

1. 计算 $I=\int_L (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是沿逆时针方向以原点为中心、a 为半径的上半圆周.
2. 若 L 改为顺时针方向，计算积分 $I_1=\int_L (x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$.
3. L 仍取逆时针方向，计算积分 $I_2=\int_L (x^2-y+y^2)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$.

解: 由于 $\frac{\partial(y^2-x)}{\partial x}=\frac{\partial(x^2-y)}{\partial y}=-1$，因此积分与路径无关. 故

$$I=\int_{(a,0)}^{(-a,0)}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y=\int_a^{-a}x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3.$$

$$I_1=\Big(\int_{L+\overline{AB}}-\int_{\overline{AB}}\Big)(x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y=-2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{2}{3}a^3=a^2\Big(\frac{2}{3}a-\pi\Big).$$

$$I_2=\int_L (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y+\int_L y^2\,\mathrm{d}x=I-\int_0^\pi a^3\sin^3 t\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a^3=-2a^3.$$

例

计算 $I = \int_L (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^4)\,\mathrm{d}y$, *其中* L *为由点* $O(0,0)$ *到* $A(1,1)$ *的曲线* $y = \sin\frac{\pi x}{2}$.

例

计算 $I=\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}y$, *其中* L *为由点* $O(0,0)$ *到* $A(1,1)$ *的曲线* $y=\sin\frac{\pi x}{2}$.

解: 由于 $\frac{\partial(x^2+y^4)}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+2xy)}{\partial y}=2x$, 因此积分与路径无关. 故

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^1(1+y^4)\,\mathrm{d}y=\frac{23}{15}.$$

例

计算 $I = \int_L (e^x \sin y - my)\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - m)\,\mathrm{d}y$, *其中* L *为由点* $(a, 0)$ *到点* $(0, 0)$ *的上半圆周.*

例

计算 $I=\int_L(e^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为由点 $(a,0)$ 到点 $(0,0)$ 的上半圆周.

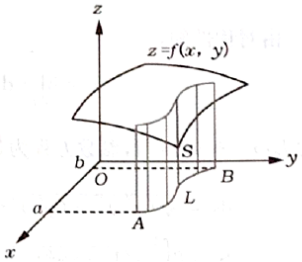
解: $L: x^2+y^2=ax,\ y\geq 0$. 由于

$$\frac{\partial(e^x\cos y-m)}{\partial x}-\frac{\partial(e^x\sin y-my)}{\partial y}=e^x\cos y-(e^x\cos y-m)=m,$$

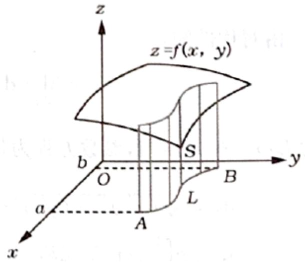
故由格林公式得

$$\begin{aligned}I&=\Big(\int_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}\Big)(e^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y\\&=m\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y=\frac{m}{8}\pi a^2.\end{aligned}$$

柱面面积公式



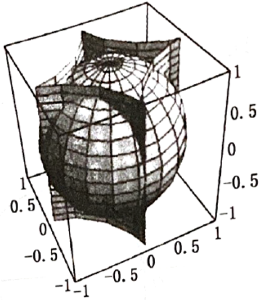
柱面面积公式



$$S = \int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

例

求柱面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ *在球面* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *内的面积.*



解: 由对称性知,

$$S = 8\int_L z\,\mathrm{d}s = 8\int_L \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}s.$$

曲线 $L: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2}).$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,\mathrm{d}t = 3\sin t\cos t\,\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned} S &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^6 t - \sin^6 t} 3\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin^2 t\cos^2 t}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 24\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi. \end{aligned}$$

目录

1. 曲面积分计算的基本方法

$$\text{曲面积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类 (对面积)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

1. 统一积分变量: 代入曲面方程
2. 积分元素投影 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 始终非负}\\ \text{第二类: 有向投影}\end{array}\right.$
3. 确定积分区域: 把曲面积分域投影到相关坐标面

对面积的曲面积分计算方法

若曲面 $\Sigma : z = z(x, y)$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D_{xy} 是 Σ 在 xOy 面上的投影.
如果积分曲面 Σ 由方程 $y = y(z, x)$ 或 $x = x(y, z)$ 给出, 可类似地把对面积的曲面积分化为相应的二重积分.

对坐标的曲面积分计算方法

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

1. 若曲面 $\Sigma : z = z(x,y)$，则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

   其中 Σ 上侧取正号，下侧取负号.

2. 若曲面 $\Sigma : x = x(y,z)$，则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

   其中 Σ 前侧取正号，后侧取负号.

3. 若曲面 $\Sigma : y = y(z,x)$，则

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

   其中 Σ 右侧取正号，左侧取负号.

对于封闭曲面，可考虑用高斯公式.

2. 基本技巧

1. 利用对称性简化计算
2. 利用高斯公式 $\begin{cases}\text{注意公式使用条件}\\ \text{添加辅助面的技巧}\end{cases}$，辅助面一般取平行于坐标面的平面

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. 两类曲面积分的转化

$$\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

其中 α,β,γ 为有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向角.

例

计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

例

计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

解: 法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$. 故

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}\left(\frac{f(x,y,z)+x}{\sqrt{3}}-\frac{2f(x,y,z)+y}{\sqrt{3}}+\frac{f(x,y,z)+z}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}1\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例

计算

$$I=\iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ *为锥面* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *被平面* $z=1$, $z=2$ *所截部分的外侧.*

例

计算

$$I=\iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$, $z=2$ 所截部分的外侧.

解: 法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Sigma}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - z^2\right)\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{2}} \\ &= -\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{15}{2}\pi, \end{aligned}$$

其中 $D_{xy}: 1\le x^2+y^2\le 4$.

例

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(8y+1)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2(1-y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-4yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ *是由曲线* $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ *绕* y *轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与* y *轴正向夹角恒大于* $\frac{\pi}{2}$.

例

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(8y+1)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2(1-y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-4yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ *是由曲线* $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}\quad(1\le y\le 3)$ *绕* y *轴旋转一周所成的曲面，它的法向量与* y *轴正向夹角恒大于* $\frac{\pi}{2}$.

解: 旋转面方程为 $y-1=z^2+x^2$. 设 Σ^* 为 $y=3$, $z^2+x^2\le 2$ 的平面圆，取右侧. 由高斯公式得

$$\begin{aligned}
I&=\Big(\iint_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint_{\Sigma^*}\Big)(8y+1)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2(1-y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-4yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iiint_{\Omega}(8y+1-4y-4y)\,\mathrm{d}V-\iint_{\Sigma^*}2(1-y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\
&=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V+16\iint_{\Sigma^*}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\iint_{D_{zx}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\int_{1+z^2+x^2}^{3}\mathrm{d}y+32\pi\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r(2-r^2)\,\mathrm{d}r+32\pi=34\pi.
\end{aligned}$$

例

设 Σ 为简单闭曲面, $\boldsymbol{a}$ 为任意固定非零向量, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量, 试证 $\oiint_{\Sigma} \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a})\,\mathrm{d}S = 0$.

例

设 Σ 为简单闭曲面, $\boldsymbol{a}$ 为任意固定非零向量, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量, 试证 $\oiint_{\Sigma} \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) \, \mathrm{d}S = 0$.

证明: 设 $\boldsymbol{a}^0 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$, 则由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma} \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) \, \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} \boldsymbol{a}^0 \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{a}^0 \, \mathrm{d}V = 0.$$

例

计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *取外侧.*

例

计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *取外侧.*

解:

$$I = \frac{1}{R^3} \oiint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\pi.$$

例

计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *取外侧.*

解:

$$I = \frac{1}{R^3} \oiint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\pi.$$

思考: 本题 Σ 改为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 时, 应如何计算?

例

计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\,dy\,dz + \frac{y}{r^3}\,dz\,dx + \frac{z}{r^3}\,dx\,dy$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Sigma : x^2+y^2+z^2 = R^2$ *取外侧.*

解:

$$I = \frac{1}{R^3}\oiint_{\Sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \frac{1}{R^3}\iiint_{\Omega} 3\,dx\,dy\,dz = 4\pi.$$

思考: 本题 Σ 改为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 时, 应如何计算?

在椭球面内作辅助小球迷 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 取内侧, 然后用高斯公式.

例

计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \left[(x+y)^2 + z^2 + 2yz \right] \mathrm{d}S$$

其中 Σ *是球面* $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2z$.

例

计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} [(x+y)^2 + z^2 + 2yz] \, \mathrm{d}S$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2z$.

解:

$$I = \oiint_{\Sigma} [(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz] \, \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} (2x + 2z) \, \mathrm{d}S + 2 \oiint_{\Sigma} (x+z)y \, \mathrm{d}S.$$

分别利用重心公式和对称性，得

$$I = 2(\bar{x} + \bar{z}) \oiint_{\Sigma} \mathrm{d}S + 0 = 32\pi.$$

即用了以下计算，由 $\Sigma_1 : z = 1 + \sqrt{2x + 1 - x^2 - y^2}$ 和
$\Sigma_2 : z = 1 - \sqrt{2x + 1 - x^2 - y^2}$ 得

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} z \, \mathrm{d}S &= \iint_{\Sigma_1} (1 + \sqrt{2x + 1 - x^2 - y^2}) \, \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} (1 - \sqrt{2x + 1 - x^2 - y^2}) \, \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = 8\pi. \end{aligned}$$

例

设 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向, 计算

$$I=\oint_L (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}z.$$

例

设 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向, 计算

$$I=\oint_L (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}z.$$

解: 设 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围部分的上侧, D 为 Σ 在 xOy 面上的投影. 由斯托克斯公式

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (4x+2y+3z)\,\mathrm{d}S.$$

由 x 和 y 的轮换对称性得

$$I=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (3x+3y+3z)\,\mathrm{d}S=-\frac{12}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \mathrm{d}S=-\frac{12}{\sqrt{3}}|\Sigma|=-12|D|=-24.$$

例

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ *为半球面* $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ *的上侧.*

例

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解: 以半球底面 Σ_0 为辅助面, 且取下侧, 记半球域为 Ω. 由高斯公式得

$$I = \iiint_{\Omega} 3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \iint_{\Sigma_0} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 3 \frac{2}{3} \pi R^3 - 0 = 2\pi R^3.$$