2017－2018年第二学期

2018年6月5日

概率论试卷

杨勇制作

一. 填空题（2分×13=26分）

1.设事件A, B独立, 事件C为“$A, \bar{B}$中至少有一个不发生”。若$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{2}{3}$,

则$P(C)=$______________。

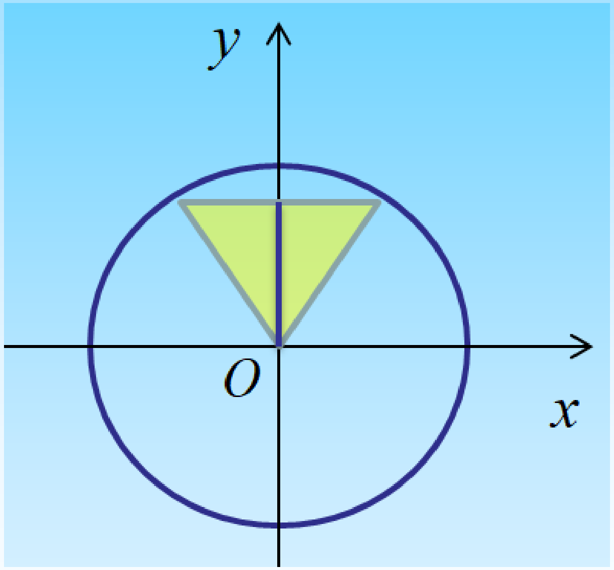
解: $C=\bar{A}\cup\bar{\bar{B}}=\bar{A}\cup B$

$$P(C)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)$$

$$=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A})P(B)=\frac{5}{6}。$$

2.在以原点为圆心的单位圆内画平行弦,如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的,则任意画的弦长度大于1的概率为_____________。

解:



这个三角形是一个等边三角形,

所求的概率为$p=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

3.某单位员工中有90%的人是基民(购买基金),80%的人是炒股的股民,已知在是股民的前提下,还是基民的人所占的比例至少是__________。

解:

$A=$"股民",$B=$"基民",

$$1 \geq P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)$$

$$1 \geq 0.8+0.9-0.8P(B|A), \quad P(B|A) \geq \frac{7}{8}。$$

4.已知随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<-1\\ 0.4, & -1\le x<0\\ 0.7, & 0\le x<1\\ 1 & ,x\ge 1\end{cases},$$

则随机变量$|X|$分布函数$F_{|X|}(x)$为____________。

解:

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix},\qquad |X|\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix},$$

$$F_{|X|}(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ 0.3, & 0\le x<1\\ 1 & ,x\ge 1\end{cases}。$$

另解:
$$F_{|X|}(x)=P\left(\left|X\right|\le x\right),$$

$$x<0,F_{|X|}(x)=0,x\ge 1,F_{|X|}(x)=1,$$

$$0\le x<1,F_{|X|}(x)=P(\left|X\right|\le x)=P\left(-x\le X\le x\right)=0.3,$$

$$F_{|X|}(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ 0.3, & 0\le x<1\\ 1 & ,x\ge 1\end{cases}\text{。}$$

5.设随机变量X和Y相互独立,且$X \sim N(1,2)$, $Y \sim N(-3,4)$,则随机变量$Z=-2X+3Y+5$的密度函数$f(z)$为________________。

解: $$Z \sim N(EZ, DZ),$$

$$EZ = -2EX + 3EY + 5 = -6,$$

$$DZ = 4DX + 9DY = 44,$$

$$Z \sim N(-6, 44),$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{44}} e^{-\frac{(z+6)^2}{88}}, -\infty < z < \infty。$$

6.设二维随机向量(X,Y)的联合概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.2	0.2

则$P(X=1|Y\le 1)=$____________,

$Z=\max\{X,Y\}$概率分布为____________。

解：

$$P(X=1|Y\le 1)=\frac{P(X=1,Y\le 1)}{P(Y\le 1)}=\frac{0.4}{0.7}=\frac{4}{7},$$

$X \backslash Y$ (Z)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.2	0.2

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

7.已知随机变量X的概率分布为

$$P(X=k)=a\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\text{其中}\lambda>0,k=1,2,\cdots,$$

则$EX=$ ________________。

解：

$$ae^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1,$$

$$ae^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-1\right)=1,\qquad a=\frac{1}{1-e^{-\lambda}},$$

$$EX=a\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=a\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}。$$

8.设随机变量$X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, i=1,2,$ 且满足条件$P(X_1+X_2=0)=1,$ 则

$P(X_1=X_2)=$ ________________。

解：$P(X_1+X_2 \neq 0)=0,$

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
-1	0	0	?
0	0	?	0
1	?	0	0

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$p_{i\bullet}$
-1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$P(X_1 = X_2) = P(X = -1, Y = -1) + P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1)$$

$$= \frac{1}{2}\text{。}$$

9.设$X \sim B\left(3,\frac{1}{3}\right), Y \sim U(0,3), X$与$Y$相互独立,

则行列式$\begin{vmatrix} X & X-1 & 1 \\ 0 & Y & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$的概率为__________。

解:

$$\begin{vmatrix} X & X-1 & 1 \\ 0 & Y & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = XY - 2X - Y + 2 > 0,$$

即$(X-1)(Y-2) > 0,$

$X > 1, Y > 2$或者$X < 1, Y < 2,$

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27},P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

所要求的概率为

$$p=P(X>1,Y>2)+P(X<1,Y<2)$$

$$=P(X>1)P(Y>2)+P(X<1)P(Y<2)$$

$$=\frac{7}{27}\times\frac{1}{3}+\frac{8}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{23}{81}。$$

10.已知随机变量X与Y都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,

且$P(X>0,Y>2\mu)=\dfrac{1}{3}$,则

$P(X\le 0,Y\le 2\mu)=$ ______________。

解:
$$P(X\le 0,Y\le 2\mu)=1-P\left(\overline{X\le 0,Y\le 2\mu}\right)$$

$$=1-P(\{X>0\}\cup\{Y>2\mu\})$$

$$=1-\left[P(X>0)+P(Y>2\mu)-P(X>0,Y>2\mu)\right]$$

$$=1-\left[1-\Phi\left(\frac{0-\mu}{\sigma}\right)+1-\Phi\left(\frac{2\mu-\mu}{\sigma}\right)-\frac{1}{3}\right]$$

$$=1-\left[1-\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)+1-\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)-\frac{1}{3}\right]$$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)+1-\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}\text{。}$$

11.设$X_1 \sim B(4, p), X_2 \sim B(2, p), X_3 \sim B(3, p)$,

且X_1, X_2, X_3相互独立,则

$X_1 + X_2 + X_3 \sim$ ________________。

解:　由二项分布的可加性,

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim B(9, p)。$$

12.设X,Y为随机变量,已知$DX=25, DY=36$, X与Y的相关系数$\rho_{XY}=0.4$,则 $Cov(2X-3Y,X-Y)=$ ________________。

解:

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}},$$

$$Cov(X,Y)=12,$$

$$Cov(2X-3Y,X-Y)=Cov(2X-3Y,X)-Cov(2X-3Y,Y)$$

$$=2Cov(X,X)-3Cov(Y,X)-\left[2Cov(X,Y)-3Cov(Y,Y)\right]$$

$$=2DX-5Cov(X,Y)+3DY=98。$$

13.将一枚骰子重复掷n次，则当$n\to\infty$时，n次掷出点数的算术平均值$\bar{X}_n$依概率收敛于________________。

解：X_k：表示第k次投掷出现的点数，$k=1,2,\cdots,$

$$X_k \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$a = EX_k = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2},$$

DX_k为一个常数，

$X_1, X_2, \cdots$独立同分布,再由辛钦大数定律知,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \frac{7}{2}。$$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{7}{2}\right| < \varepsilon\right) = 1。$$

二. 选择题（2分×5=10分）

1.设一批零件的次品率为0.01,若用泊松分布近似,则100个零件中最多只有一个次品的概率约为__________。

$A)\quad e^{-1},\quad B)\quad 2e^{-1},\quad C)\quad 0.5,\quad D)\quad \dfrac{e^{-1}}{2}$ 。

解: X表示100个零件中次品的个数,

$$X \sim B(100, 0.01), X \overset{\cdot}{\sim} P(1),$$

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 2e^{-1}\text{。} \qquad (B)$$

2.设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=Ae^{-x}(x>0,0<y<2),$$

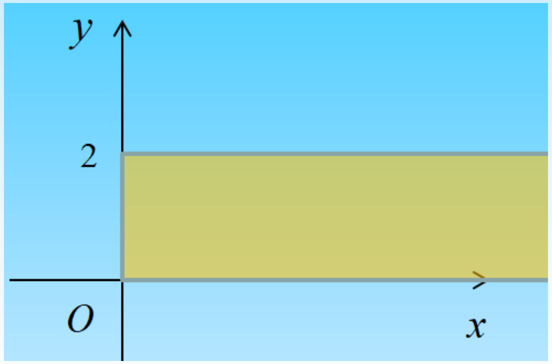
则$A=$ ________。

$A)\quad 0.5,\quad B)\quad 0.75,\quad C)\quad 0.25,\quad D)\quad 1$ 。

解:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^2 Ae^{-x}dy$$

$$=2A\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-2Ae^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2A,$$



$A=\dfrac{1}{2}$。 (A)

3.设$X \sim N(1,4), P(X > a) = \Phi\left(-1\right)$,则$a =$ ______。

$A)$ 2, $B)$ 3, $C)$ 1, $D)$ 5。

解:

$$P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-1}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1),$$

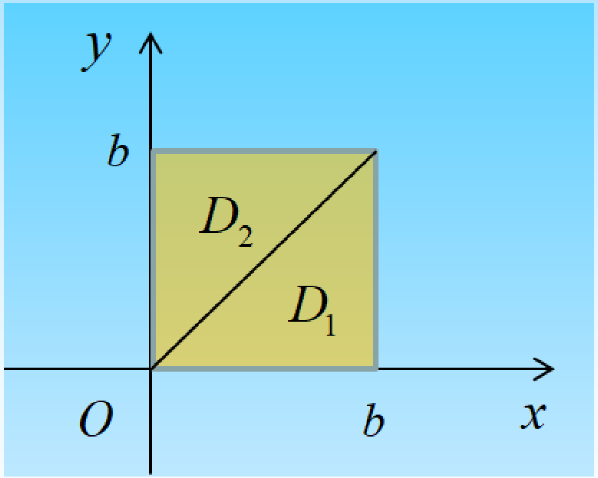
$$\Phi\left(\frac{a-1}{2}\right) = \Phi(1), \qquad a = 3。$$

(B)

4.设随机变量X和Y相互独立,都服从$[0,b]$上的均匀分布,则$E[\min(X,Y)]=$ ________。

A) $\dfrac{b}{2}$, B) b, C) $\dfrac{b}{3}$, D) $\dfrac{b}{4}$。

解:



$$E\left(\min(X,Y)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)\,p(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint_{D_1} y\frac{1}{b^2}dxdy+\iint_{D_2} x\frac{1}{b^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{b^2}\left[\int_0^b dx\int_0^x ydy+\int_0^b dx\int_x^b xdy\right]$$

$$=\frac{1}{b^2}\left[\int_0^b \frac{x^2}{2}dx+\int_0^b x(b-x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{b^2}\left[\frac{b^3}{6}+\frac{b^3}{6}\right]=\frac{b}{3}。$$

(C)

另解：$$Z=\min\{X,Y\},$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\min\{X,Y\}\le z),$$

$$z<0, F_Z(z)=0, z\ge b, F_Z(z)=1,$$

$$0\le z<b, F_Z(z)=1-P(\min\{X,Y\}>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)$$

$$=1-\frac{(b-z)^2}{b^2},$$

$$p_Z(z)=F_Z'(z),$$

$$p_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2(b-z)}{b^2}, 0 < z < b \\ 0, otherwise \end{cases},$$

$$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z p_Z(z) dz = \int_0^b z \frac{2(b-z)}{b^2} dz$$

$$= \frac{1}{b^2} \int_0^b (2bz - 2z^2) dz$$

$$= \frac{1}{b^2} \left[bz^2 \Big|_0^b - 2\frac{z^3}{3} \Big|_0^b \right] = \frac{b}{3}。$$

5.设随机向量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$,则

$P(-X<a,Y\le y)=$ ________________。

A) $1-F(-a,y)$, B) $1-F(-a,y^-)$,

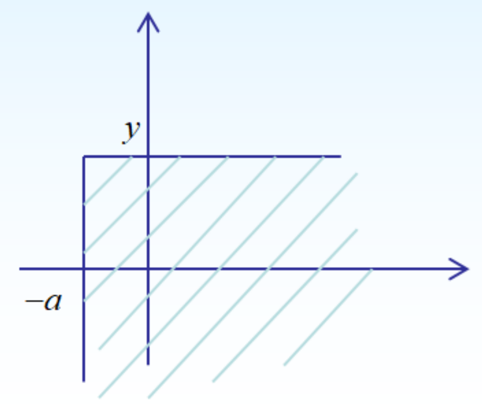
C) $F(+\infty,y)-F(-a,y^-)$, D) $F(+\infty,y)-F(-a,y)$。

解: $P(-X<a,Y\le y)=P(-a<X<+\infty,-\infty<Y\le y)$

$=F(+\infty,y)-F(-a,y)-F(+\infty,-\infty)+F(-a,-\infty)$

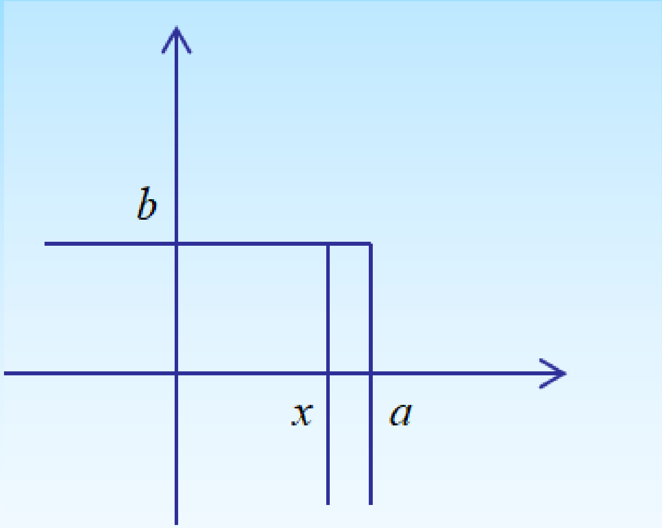
$=F(+\infty,y)-F(-a,y)$。

(D)



注：

$$P(X<a,Y\le b)=\lim_{x\to a^-}P(X\le x,Y\le b)=\lim_{x\to a^-}F(x,b)=F(a^-,b)\text{。}$$



三. 简答题(4分×2+4分×1=12分）

1.叙述下列概念:（1）二维随机向量的定义;

（2）林德贝格-勒维中心极限定理。

答: (1)

设随机试验的样本空间Ω,对每一个$\omega\in\Omega$,
有确定的二个实值单值函数$X(\omega),Y(\omega)$与
之对应,则称$\left(X(\omega),Y(\omega)\right)$为二维随机向量,
简记(X,Y)。

(2)

设$X_1, X_2, \cdots$是相互独立同分布的随机变量所构成的序列,并且$EX_1 = \mu, DX_1 = \sigma^2 < \infty$,那么对任意实数$x$,总有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x \right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt 。$$

2.分析判断题:若X和Y独立同分布,则$X=Y$。

答:

设$X(Y)\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, X与Y独立,

$$P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)$$

$$=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)$$

$=\frac{1}{2}$, 即$X\neq Y$。 错。

四. 计算题（共52分）

1.(6分)设在某段时间内来到证券交易所的人数X服从参数为λ的泊松分布,每个人来交易所的人购买A股的概率为p。假设股民之间是否购买A股相互独立,令Y表示X个人中购买A股的人数,求Y的数学期望。

解:

$$P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n=0,1,2,\cdots,$$

$$P(Y=k \mid X=n)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n,$$

$$P(Y=k \mid X=n)=0, k>n,$$

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{\infty} P(X=n)P(Y=k \mid X=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\bullet e^{\lambda q}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p},k=0,1,2,\cdots。$$

$$Y\sim P(\lambda p),EY=\lambda p。$$

2.（12分）已知A, B为随机事件，$P(A)=\dfrac{2}{3}$，

$P(B|A)=\dfrac{1}{6}, P(A|B)=\dfrac{1}{3}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}, \quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases},$$

(1)求(X, Y)的联合概率分布;

(2)若$Z=X+aY$，求a取何值时，X与Z不相关。

解:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9},$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(B)\times\frac{1}{3},$$

$$P(B)=\frac{1}{3},$$

$$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}})$$

$$=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]$$

$$=1-\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right]=\frac{1}{9},$$

$$P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}B)=P(B-AB)$$

$$=P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9},$$

$$P(X=1,Y=0)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9},$$

$$P(X=1,Y=1)=P(AB)=\frac{1}{9},$$

(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2)

$X \backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$$EX=\frac{2}{3}, DX=\frac{2}{9}, EY=\frac{1}{3}, DY=\frac{2}{9},$$

$$E(XY)=1\times 1\times \frac{1}{9}=\frac{1}{9},$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{9},$$

$$Cov(X,Z)=Cov(X,X+aY)$$

$$=Cov(X,X)+aCov(X,Y)$$

$$=DX+a\times\frac{1}{9}=0,\qquad a=-2$$

3.(12分)假设由自动加工的某种零件的内径X(毫米)服从正态分布$N(\mu,1)$,内径小于10或大于12为不合格品,其余为合格品。销售每件合格品获利,销售每件不合格品亏损,已知销售利润T(单位:元)与销售零件的内径X由如下关系:

$$T=\begin{cases}-1 & , X<10 \\ 20, & 10 \le X \le 12, \\ -5 & , X>12\end{cases}$$

问平均内径μ取何值时,销售一个零件的平均利润最大?

解:

$$ET = ET(X) = \int_0^{+\infty} T(x)p(x)dx$$

$$= \int_0^{10} (-1)p(x)dx + \int_{10}^{12} 20p(x)dx + \int_{12}^{+\infty} (-5)p(x)dx$$

$$= -P(0 < X < 10) + 20P(10 \le X \le 12) - 5P(X > 12)$$

$$= -\left[\Phi\left(10-\mu\right)-\Phi\left(0-\mu\right)\right]+20\left[\Phi\left(12-\mu\right)-\Phi\left(10-\mu\right)\right]$$
$$-5\left[1-\Phi\left(12-\mu\right)\right]$$

$$= 25\Phi\left(12-\mu\right)-21\Phi\left(10-\mu\right)+\Phi\left(-\mu\right)-5,$$

其中$p(x)$为$N(\mu,1)$的密度函数,$\Phi(x)$和$\varphi(x)$分别为标准正态分布的分布函数和密度函数,$\Phi(-\mu)\approx 0$。

$$\frac{dET}{d\mu} = 25\varphi(12-\mu)(-1)-21\varphi(10-\mu)(-1),$$

$$25\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=21\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}},$$

$$e^{\frac{-(10-\mu)^2+(12-\mu)^2}{2}}=\frac{25}{21},\qquad e^{22-2\mu}=\frac{25}{21},$$

令 $\frac{dET}{d\mu}=0$,解得唯一驻点, $\mu_0=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}\approx 10.9$,

因为此问题为实际问题,显然有最大值,

所以,当μ=10. 9毫米时,平均利润最大。

注: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 不是 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$。

4.(12分)设随机变量X服从$(0,2)$上的均匀分布,Y服从参数λ=2的指数分布,且X,Y独立,记随机变量$Z = X + 2Y$。

(1)求Z的密度函数$p_Z(z)$;

(2)求EZ及DZ。

解：　(2)

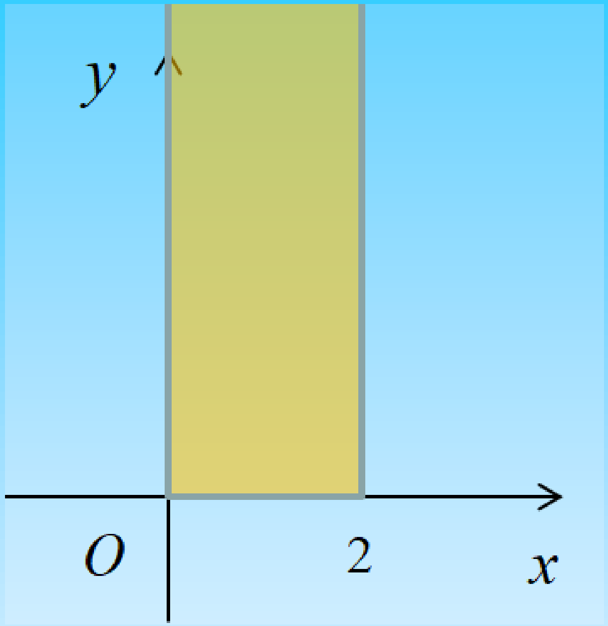
$$EX = \frac{0+2}{2} = 1, DX = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$EY=\frac{1}{2},DY=\frac{1}{4},X,Y\text{独立},$$

$$EZ=EX+2EY=2,$$

$$DZ=DX+4DY=\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}=\frac{4}{3}\text{。}$$

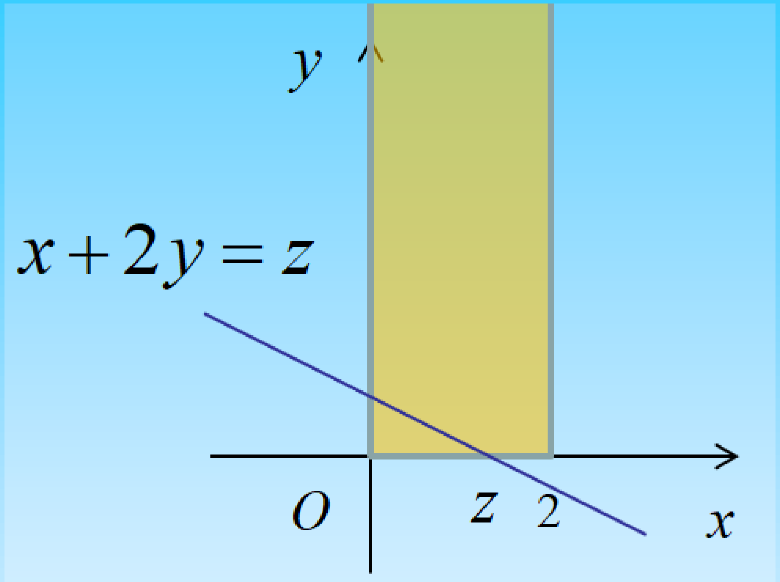
(1)



$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$z \le 0, F_Z(z) = 0,$$

$$0 < z < 2,$$



$$F_Z(z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$= \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} \frac{1}{2} \times 2e^{-2y} dy$$

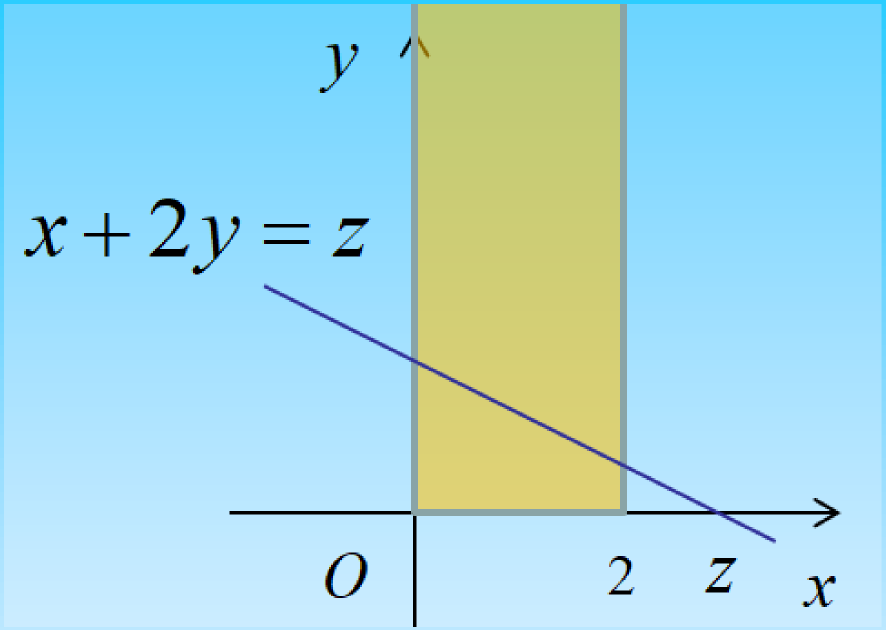
$$= -\frac{1}{2}\int_0^z \left(e^{-2y}\right)\Big|_0^{\frac{z-x}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^z (e^{-(z-x)} - 1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^z e^x dx + \frac{z}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-z} + \frac{z}{2} - \frac{1}{2};$$

$$z \geq 2,$$



$$F_Z(z) = P(X + 2Y \leq z)$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} \frac{1}{2} \times 2e^{-2y} dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{-2y}\right)\Big|_0^{\frac{z-x}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 (e^{-(z-x)} - 1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^2 e^x dx + 1$$

$$= \frac{1}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{2-z} + 1,$$

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, z<0 \\ \frac{1}{2}e^{-z}+\frac{z}{2}-\frac{1}{2}, 0\le z<2, \\ \frac{1}{2}e^{-z}-\frac{1}{2}e^{2-z}+1, z\ge 2 \end{cases}$$

$p_Z(z)=F_Z'(z)$,所以,

$$p_Z(z)=\begin{cases}0, z\le 0\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right), 0<z<2\\ \frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right), z\ge 2\end{cases}$$ 。

注：

$$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty} zp_Z(z)dz=\int_0^2 z\frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right)dz+\int_2^{+\infty} z\frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right)dz$$

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 p_Z(z)dz=\int_0^2 z^2\frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right)dz+\int_2^{+\infty} z^2\frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right)dz$$

$$DZ=E(Z^2)-(EZ)^2$$

5.设随机变量$X_1,\cdots,X_n$相互独立,均服从参数为1的泊松分布,定义随机变量

$$\text{若} Y_k=\begin{cases}1, X_k=0\\ 0,\text{否则}\end{cases},(1\le k\le n)\text{。}$$

(1)记$\overline{Y}=\dfrac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$,求当$n$足够大时$\overline{Y}$的近似分布;

(2)利用切比雪夫不等式估计,当n至少取多大时,可使$P(\left|\overline{Y}-e^{-1}\right|<0.1)\ge 0.8$?

（注:e^{-1}可用0.4近似）。

解： $X_k \sim P(1)$,

$$P(Y_k = 1) = P(X_k = 0) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = e^{-1},$$

$$Y_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix}, \quad EY_k = e^{-1}, DY_k = e^{-1}(1-e^{-1}),$$

显然$Y_1, \cdots, Y_n$独立同分布。

(1) 由中心极限定理知,

$$\bar{Y} \overset{\bullet}{\sim} N\left(EY_1, \frac{DY_1}{n}\right) = N\left(e^{-1}, \frac{e^{-1} - e^{-2}}{n}\right)。$$

(2) 由切比谢夫不等式,

$$P\left(\left|\overline{Y}-e^{-1}\right|<0.1\right)=P\left(\left|\overline{Y}-E\overline{Y}\right|<0.1\right)\geq 1-\frac{D\overline{Y}}{0.1^2}\geq 0.8,$$

$$1-\frac{0.4\times 0.6}{0.01n}\geq 0.8,\quad n\geq 120\text{。}$$

完