概率论期末复习

腾讯会议：

2021年12月5日 周日晚上19：00 – 22：00

主讲人：数学学院 潘群，杨勇 老师

学生处本科生学业指导中心（筹）组织

上海财经大学
SHANGHAI UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

*B*站,财大概率论潘老师

视频:2021年复习(上),

2021年复习(下)

2019年12月,2020年12月

两次考试试卷

历年概率论考试难题分析

2020−2021第二学期

概率论期末考试

2021.06.01下午3点半点到5点半

杨勇制作

五. 计算题

2.随机变量X与Y相互独立, X的概率分布为$P(X=k)=\frac{1}{3}, k=-1,0,1, Y$的概率密度为

$$p_Y(y)=\begin{cases}1, 0<y<1\\ 0, 其他\end{cases},$$

令$Z=X+Y$,求(1)$P\left(Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)$;

(2)Z的分布函数。

解: $Y \sim U(0,1)$,

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0\\ y, 0\le y<1,\\ 1, y\ge 1\end{cases}$$

(1)

$$P\left(Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=P\left(X+Y\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)$$

$$=P\left(Y\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=P\left(Y\le\frac{1}{2}\right)=F_Y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

注: X与Y独立

(2)　由全概率公式知,

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$$

$$= P(X = -1)P(X + Y \le z \mid X = -1)$$

$$+ P(X = 0)P(X + Y \le z \mid X = 0)$$

$$+ P(X = 1)P(X + Y \le z \mid X = 1)$$

$$=\frac{1}{3}\left[P(Y\le z+1)+P(Y\le z)+P(Y\le z-1)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right]$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0\\ y, 0\le y<1,\\ 1, y\ge 1\end{cases}$$

当$z<-1$时，$F_Z(z)=0,$

当$-1\le z<0$时，$0\le z+1<1, -2\le z-1<-1,$

$$F_Z(z)=\frac{1}{3}\left[(z+1)+0+0\right]=\frac{z+1}{3},$$

当$0 \le z < 1$时, $1 \le z+1 < 2, -1 \le z-1 < 0,$

$$F_Z(z) = \frac{1}{3}[1+z+0] = \frac{z+1}{3},$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ y, 0 \le y < 1, \\ 1, y \ge 1 \end{cases}$$

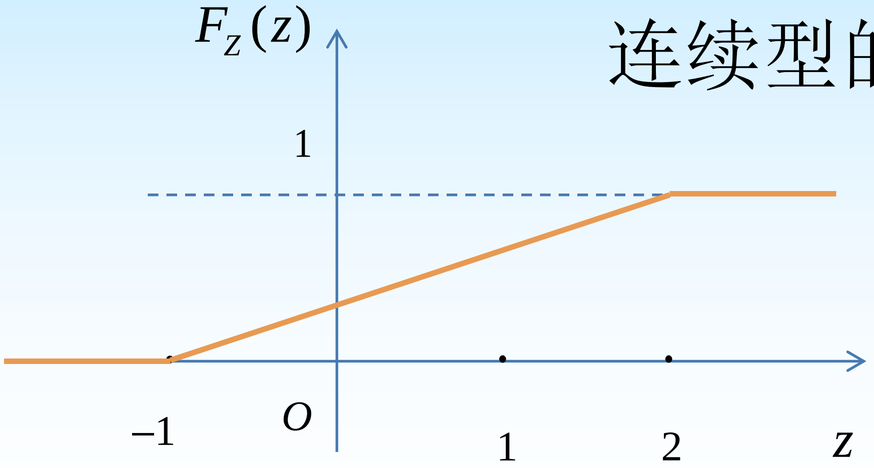
当$1 \le z < 2$时, $2 \le z+1 < 3, 0 \le z-1 < 1,$

$$F_Z(z) = \frac{1}{3}[1+1+(z-1)] = \frac{z+1}{3},$$

当$z \ge 2$时, $F_Z(z) = 1,$

所以,Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, z<-1\\ \dfrac{z+1}{3}, -1\le z<2\\ 1, z\ge 2\end{cases}。$$



连续型的, $Z\sim U(-1,2)$

2020-2021第一学期

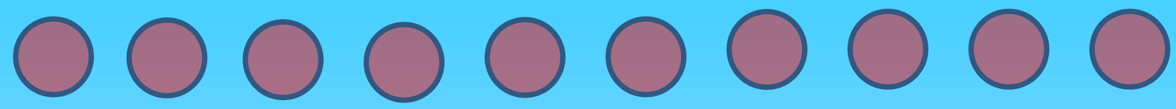
概率论期末考试

2020.12.08下午1点到3点

杨勇制作

一. 填空题(共9题,每空2分,共计22分)

1.10个女生5个男生排成一列,则任意两个男生都不相邻的概率为________。

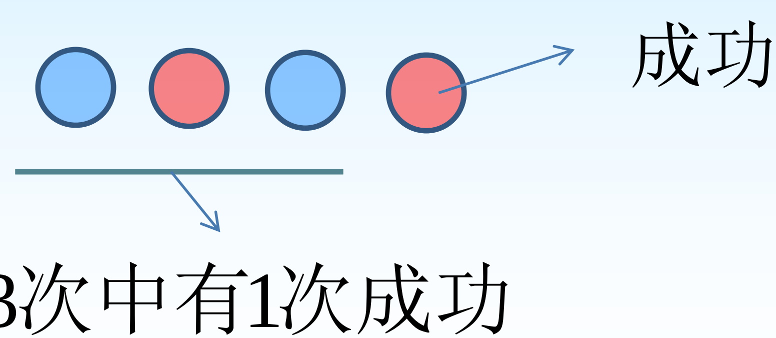
解：

女生先排好,男生11个位置挑5个位置放。

$$\frac{10!\times P_{11}^{5}}{15!}=\frac{2}{13}$$。

3.在独立重复试验中,已知第四次试验恰好是第二次成功的概率为$\frac{3}{16}$,以X表示首次成功所需试验的次数,则X取偶数的概率为____________。

解：



$$\left(C_3^1 p^1 (1-p)^2\right) \times p = \frac{3}{16},$$

$$p(1-p) = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{2}, \qquad X \sim G\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \cdots,$$

X取偶数的概率为

$$= P(X = 2) + P(X = 4) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{1/2^2}{1 - 1/2^2} = \frac{1}{3}。$$

五.计算题(共5题,其中第1,2,5每题10分,第3题15分,第4题9分,共计54分)

1.某高校某学院二年级一、二、三班学生人数分别为16人、25人和25人,其中参加义务献血的人数分别为12人、15人和20人。从这三个班中随机地抽取一个班,再从该班学生中任取2人。求

(1) 第一次抽到的是已献血学生的概率;

(2) 如果第二次抽到的是未参加献血的学生,则第一次抽到的是已献血学生的概率。

解 : A_k = “抽到第k个班”, $k = 1, 2, 3,$

B_i = “任取的二个学生中,第i次抽到的是已献血的学生”, $i = 1, 2,$

(1) 全概率公式,

$$P(B_1)=\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B_1|A_k)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{12}{16}+\frac{15}{25}+\frac{20}{25}\right)=\frac{43}{60};$$

$$(2)\ P(B_1 \mid \bar{B}_2) = \frac{P(B_1\bar{B}_2)}{P(\bar{B}_2)},$$

抽签是公平的, $P(B_1) = P(B_2) = \dfrac{43}{60}$,

$$P(\bar{B}_2) = \frac{17}{60},$$

$$P(B_1\bar{B}_2) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B_1\bar{B}_2 \mid A_k)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{P_{12}^{1}P_{4}^{1}}{P_{16}^{2}}+\frac{P_{15}^{1}P_{10}^{1}}{P_{25}^{2}}+\frac{P_{20}^{1}P_{5}^{1}}{P_{25}^{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{37}{60}=\frac{37}{180},$$

$$P(B_1|\bar{B}_2)=\frac{P(B_1\bar{B}_2)}{P(\bar{B}_2)}=\frac{37/180}{17/60}$$

$$=\frac{37}{51}。$$

3.设随机向量(X,Y)的联合密度函数为

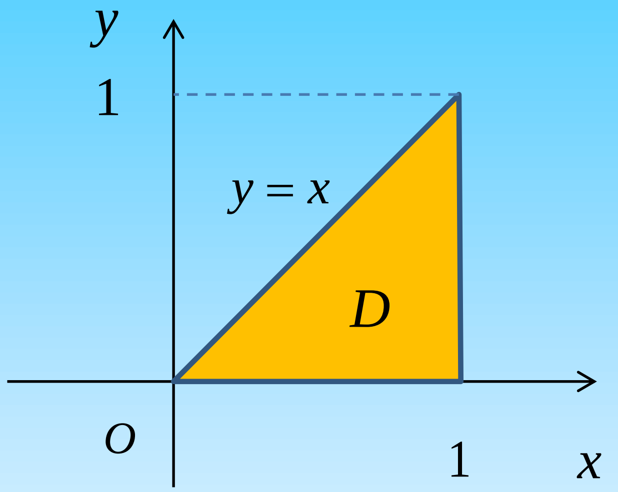
$$p(x,y)=\begin{cases}8xy, 0<y<x<1\\ 0, 其他\end{cases},$$

(1) 求边际密度函数$p_X(x)$, $p_Y(y)$,并讨论X与Y的独立性;

(2) 求$Z=X+Y$的密度函数$p_Z(z)$;

(3) 求(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$。

解:(1)



$0 < x < 1,$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$$

$$= \int_0^x 8xydy = 4x^3,$$

$$0 < y < 1,$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$$

$$= \int_y^1 8xydx = 4y(1 - y^2),$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 4x^3, 0 < x < 1 \\ 0, 其他 \end{cases},$$

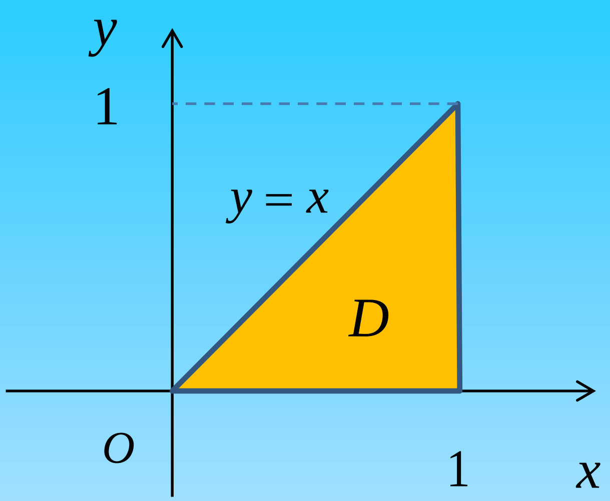
$$p_Y(y)=\begin{cases}4y(1-y^2),0<y<1\\ 0,\ 其他\end{cases},$$

当$(x,y)\in D$时,

$$p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y),$$

所以, X与Y不独立。

(2)



当$z \le 0$或$z \ge 2$时, $p_Z(z) = 0$,

$0 < z < 2$,

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z - x)dx,$$

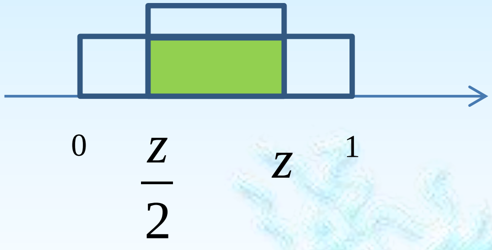
当 $p(x,z-x)=8x(z-x)$ 时，

$0<z-x<x<1$，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{z}{2}<x<z,\\&0<x<1,\end{aligned}\right\}\text{取交集}$$

当 $0<z<1$ 时，

$$p_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}8x(z-x)dx$$

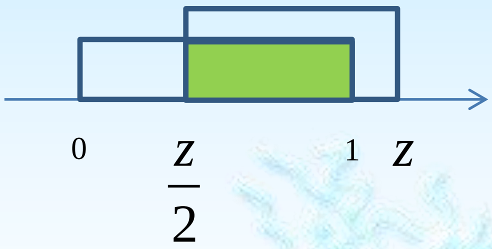


$$=\int_{\frac{z}{2}}^{z}(8xz-8x^2)dx$$

$$=4zx^2\Big|_{\frac{z}{2}}^{z}-\frac{8}{3}x^3\Big|_{\frac{z}{2}}^{z}=\frac{2}{3}z^3,$$

当$1\le z<2$时,

$$p_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}8x(z-x)dx$$



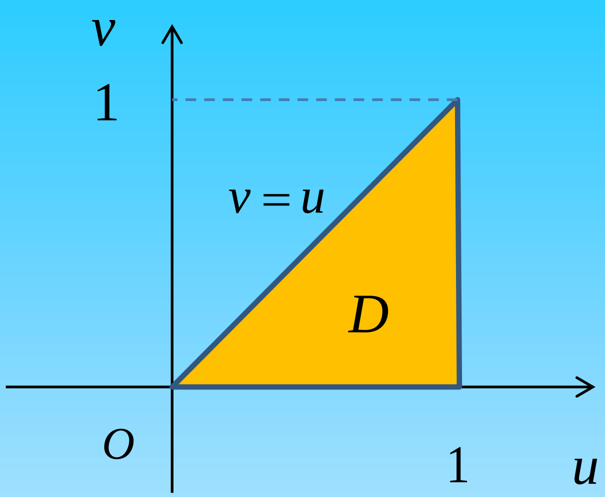
$$=\int_{\frac{z}{2}}^{1}(8xz-8x^2)dx$$

$$=4zx^2\Big|_{\frac{z}{2}}^{1}-\frac{8}{3}x^3\Big|_{\frac{z}{2}}^{1}=-\frac{2}{3}z^3+4z-\frac{8}{3},$$

所以,

$$p_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{3}z^3, & 0<z<1 \\ -\frac{2}{3}z^3+4z-\frac{8}{3}, & 1\le z<2 \\ 0, & 其他\end{cases}。$$

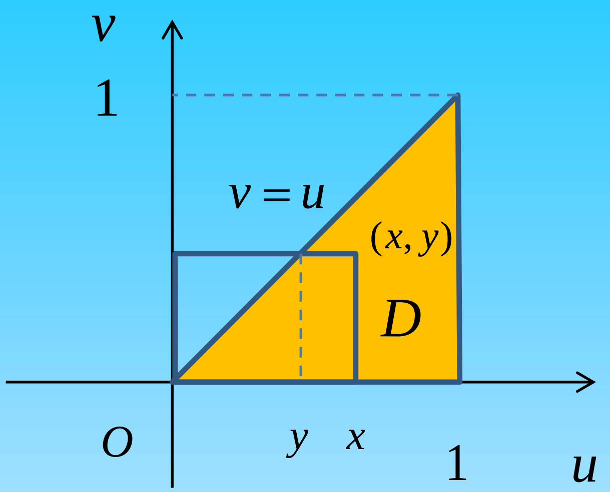
(3)



$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv,$$

当$x<0$或$y<0$时, $F(x,y)=0,$

当$(x,y)\in D$时,



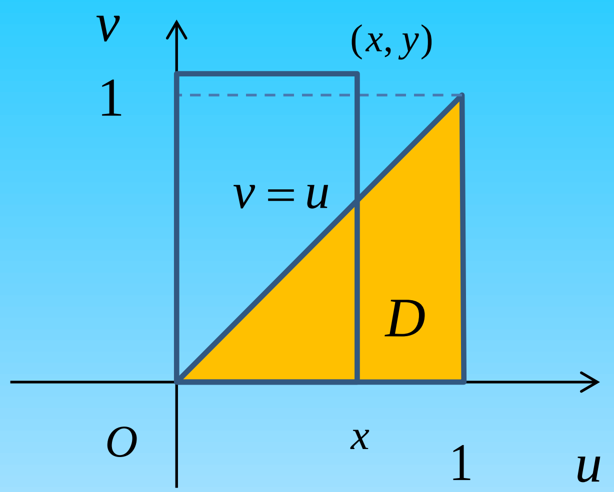
$$F(x,y)=\int_0^y\left(\int_0^u 8uv\,dv\right)du+\int_y^x\left(\int_0^y 8uv\,dv\right)du$$

$$=\int_0^y 4u^3\,du+\int_y^x 4uy^2\,du$$

$$=y^4+(2x^2y^2-2y^4)$$

$$=2x^2y^2-y^4,$$

当$0 < x < 1, y \ge x$时,

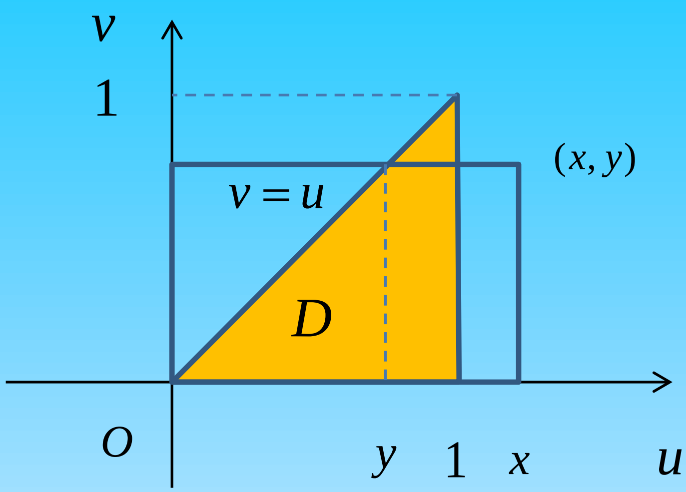


$$F(x,y)=\int_0^x\left(\int_0^u 8uv\,dv\right)du$$

$$=\int_0^x 4u^3\,du$$

$$=x^4,$$

当$x>1, 0<y<1$时,



$$F(x,y)=\int_0^y\left(\int_0^u 8uvdv\right)du+\int_y^1\left(\int_0^y 8uvdv\right)du$$

$$=\int_0^y 4u^3du+\int_y^1 4uy^2du$$

$$=y^4+(2y^2-2y^4)$$

$$=2y^2-y^4,$$

当$x > 1, y > 1$时，$F(x, y) = 1$,

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, x<0\text{或}y<0 \\ 2x^2y^2-y^4, 0<y<x<1 \\ x^4, 0<x<1, y\geq x \\ 2y^2-y^4, x\geq 1, 0<y<1 \\ 1, x\geq 1, y\geq 1 \end{cases}$$ 。

2019−2020第一学期

概率论试卷

2019.12

杨勇制作

四. 分析判断题(每题3分)

1.若$F(x)$是某个随机变量的分布函数,则$1-F(-x)$也是某个随机变量的分布函数。

解：　错误。

$F(x)$右连续,　记 $F_1(x)=1-F(-x)$,

$$\lim_{x\to x_0^+} F_1(x)=1-\lim_{x\to x_0^+} F(-x)=1-\lim_{-x\to -x_0^-} F(-x)$$

$$=1-\lim_{y\to y_0^-}F(y),$$

其中$y=-x, y_0=-x_0$。

由于,$F(x)$右连续,不一定左连续。所以,$F_1(x)$不一定右连续。从而,$F_1(x)$不一定是某个随机变量的分布函数。

五. 计算题（第2题12分，第3题18分，第4题12分）

2.若X的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} x\ ,0\le x<1 \\ 2-x,1\le x\le 2\ , \\ 0\ ,\text{其他} \end{cases}$$

求$Y=2X-1$的密度函数。

解:

$$y=2x-1=f(x),\text{严格单调增加},x=\frac{y+1}{2}=h(y),$$

$$p_Y(y)=p_X\left(h\left(y\right)\right)\cdot\left|h'(y)\right|$$

$$=\begin{cases}\dfrac{y+1}{2}\times\dfrac{1}{2},0\le\dfrac{y+1}{2}<1\\\left(2-\dfrac{y+1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2},1\le\dfrac{y+1}{2}\le 2\\0,\text{其他}\end{cases}$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{y+1}{4}, -1\le y<1\\ \dfrac{3-y}{4}, 1\le y\le 3\\ 0, \text{其他}\end{cases}
$$
。

3.设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}4ye^{2(1-x)}, x>1, 0<y<1\\ 0, otherwise\end{cases},$$

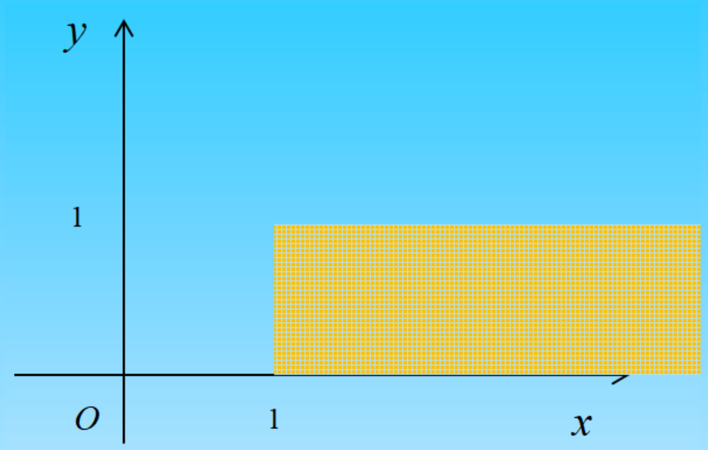
(1)求边际密度函数$p_X(x)$, $p_Y(y)$,并讨论

X与Y的独立性;

(2)求$Z=X+Y$的密度函数$p_Z(z)$;

(3)求$E(X-Y)^2$。

解$:(1)$



$$x>1,\ p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 4ye^{2(1-x)}dy$$

$$=2e^{2(1-x)},$$

$$p_X(x)=\begin{cases}2e^{2(1-x)}, x>1\\ 0, x\le 1\end{cases};$$

$$0 < y < 1,\ p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

$$= \int_{1}^{+\infty} 4ye^{2(1-x)}dx$$

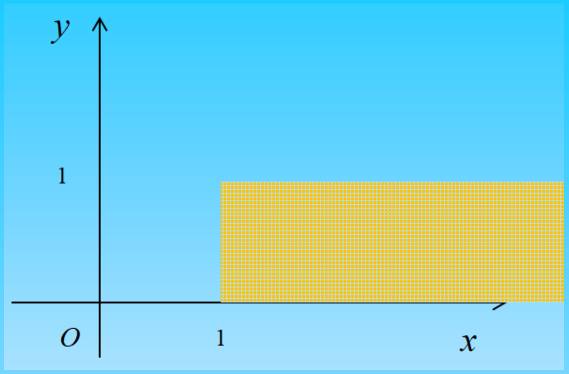
$$= 2y, \qquad p_Y(y) = \begin{cases} 2y, 0 < y < 1 \\ 0, otherwise \end{cases};$$

经过全部区域验证，有

$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

所以，X与Y独立。

(2) 由卷积公式知,



$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)dx$$

$z \le 1, p_Z(z) = 0,$

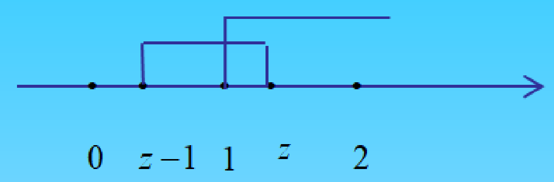
$z > 1,$

$$p(x, z-x) = 4(z-x)e^{2(1-x)}, x > 1, 0 < z - x < 1,$$

$z - 1 < x < z$

$1 < x$ 取交集

当$1<z<2$时,交集为$1<x<z$,



$$p_Z(z)=\int_1^z 4(z-x)e^{2(1-x)}dx$$

$$=4ze^2\int_1^z e^{-2x}dx-4e^2\int_1^z xe^{-2x}dx$$

$$=-2ze^2(e^{-2x})\Big|_1^z+2e^2\int_1^z xd(e^{-2x})$$

$$=-2ze^2(e^{-2z}-e^{-2})+2e^2\left(xe^{-2x}\Big|_1^z-\int_1^z e^{-2x}dx\right)$$

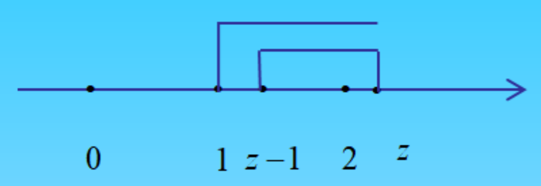
$$= -2ze^{2-2z} + 2z + 2e^{2}\left(ze^{-2z} - e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{1}^{z} \right)$$

$$= -2ze^{2-2z} + 2z + 2e^{2}\left(ze^{-2z} - e^{-2} + \frac{1}{2}\left(e^{-2z} - e^{-2}\right) \right)$$

$$= -2ze^{2-2z} + 2z + 2ze^{2-2z} - 2 + e^{2-2z} - 1$$

$$= e^{2-2z} + 2z - 3,$$

当$z \geq 2$时，交集为$z-1<x<z$,



$$p_Z(z)=\int_{z-1}^{z}4(z-x)e^{2(1-x)}dx$$

$$=4ze^{2}\int_{z-1}^{z}e^{-2x}dx-4e^{2}\int_{z-1}^{z}xe^{-2x}dx$$

$$=-2ze^{2}(e^{-2x})\Big|_{z-1}^{z}+2e^{2}\int_{z-1}^{z}xd(e^{-2x})$$

$$=-2ze^{2}(e^{-2z}-e^{2-2z})+2e^{2}\left(xe^{-2x}\Big|_{z-1}^{z}-\int_{z-1}^{z}e^{-2x}dx\right)$$

$$=-2ze^{2-2z}+2ze^{4-2z}+2e^{2}\left(ze^{-2z}-(z-1)e^{2-2z}+\frac{1}{2}e^{-2z}-\frac{1}{2}e^{2-2z}\right)$$

$$=-2ze^{2-2z}+2ze^{4-2z}+2ze^{2-2z}-2ze^{4-2z}+2e^{4-2z}+e^{2-2z}-e^{4-2z}$$

$$=(e^{2}+1)e^{2-2z},$$

综上所述,

$$p_Z(z)=\begin{cases} e^{2-2z}+2z-3, 1<z<2 \\ (e^{2}+1)e^{2-2z}, z\ge 2 \\ 0 \quad , z\le 1 \end{cases}$$ 。

(3) $$p_X(x)=\begin{cases}2e^{2(1-x)}, x>1\\ 0, x\le 1\end{cases},$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}2y, 0<y<1\\ 0, otherwise\end{cases},\qquad X与Y独立,$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x)dx=\int_{1}^{+\infty} x\cdot 2e^{2-2x}dx$$

$$=2e^2\int_1^{+\infty} xe^{-2x}dx=-e^2\int_1^{+\infty} xd\left(e^{-2x}\right)$$

$$=-e^2\left(xe^{-2x}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty} e^{-2x}dx\right)$$

$$=-e^{2}\left(-e^{-2}+\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{1}^{+\infty}\right)$$

$$=-e^{2}\left(-e^{-2}-\frac{1}{2}e^{-2}\right)=\frac{3}{2},\qquad \text{其中}\int_{1}^{+\infty}xe^{-2x}dx=\frac{3}{4}e^{-2},$$

$$E(X^{2})=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2}p_{X}(x)dx=\int_{1}^{+\infty}x^{2}\cdot 2e^{2-2x}dx$$

$$=2e^{2}\int_{1}^{+\infty}x^{2}e^{-2x}dx=-e^{2}\int_{1}^{+\infty}x^{2}d\left(e^{-2x}\right)$$

$$=-e^{2}\left(x^{2}e^{-2x}\Big|_{1}^{+\infty}-2\int_{1}^{+\infty}xe^{-2x}dx\right)$$

$$= -e^{2}\left(-e^{-2} - 2\times\frac{3}{4}e^{-2}\right) = \frac{5}{2},$$

$$DX = E(X^{2}) - (EX)^{2} = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4},$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_{Y}(y)dy = \int_{0}^{1} y\cdot 2y dy = \frac{2}{3}y^{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$E(Y^{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^{2} p_{Y}(y)dy = \int_{0}^{1} y^{2}\cdot 2y dy = \frac{2}{4}y^{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2},$$

$$DY = E(Y^{2}) - (EY)^{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{1}{18},$$

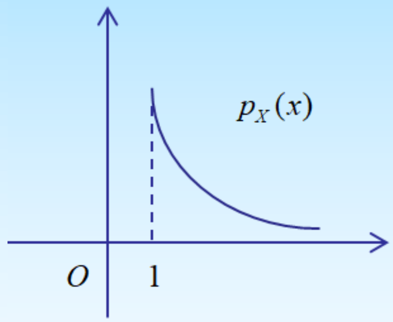
$$E(X-Y)=EX-EY=\frac{5}{6},$$

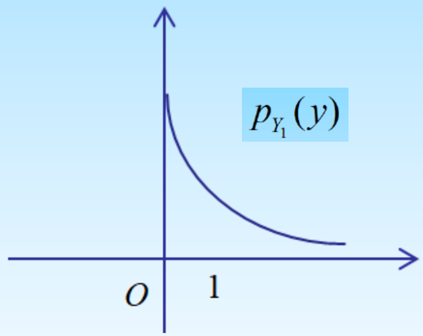
$$D(X-Y)=DX+DY=\frac{11}{36},$$

$$E(X-Y)^2=D(X-Y)+(E(X-Y))^2=1。$$

另解：$p_X(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-1)}, x>1\\ 0, x\le 1\end{cases}$，

$X=Y_1+1, Y_1\sim Exp(2)$, $p_{Y_1}(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$，





$EX=EY_1+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}, DX=D(Y_1+1)=DY_1=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$。

习题集第五章, 计算题2:

2.从一个装有m个白球和n个黑球的袋中取球, 直到出现白球时为止, 如果每次取出的球仍放回袋中, 求取出黑球数的数学期望与方差。

解: 设用X表示取出的黑球数,

Y表示取到白球时所做过的试验次数。

$$p=\frac{m}{m+n},Y\sim G(p),Y=X+1,$$

$$EY=\frac{1}{p}=\frac{m+n}{m},DY=\frac{1-p}{p^2}=\frac{n(m+n)}{m^2},$$

$$EX=EY-1=\frac{m+n}{m}-1=\frac{n}{m},$$

$$DX=D(Y-1)=DY=\frac{n(m+n)}{m^2}。$$

4.一民航送客车载有10位旅客自机场开出,旅客有4个车站可以下车,如到达一个车站没有旅客下车就不停车。用X表示停车的次数,求EX及DX。(设每名旅客在各个车站是否下车是等可能的,且各旅客是否下车相互独立)。

解:

$$X_k = \begin{cases} 1, \text{第}k\text{个车站有人下车} \\ 0, \text{第}k\text{个车站没人下车} \end{cases}, k = 1, 2, 3, 4,$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4,$$

$$P(X_k=1)=1-C_{10}^{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\approx 0.9437,$$

$$EX_k=0.9437,DX_k=0.053,$$

$$EX=E(X_1+X_2+X_3+X_4)=3.7748;$$

$$DX=D(X_1+X_2+X_3+X_4)$$

$$=\sum_{k=1}^{4}DX_k+2\sum_{1\le i<j\le 4}Cov(X_i,X_j)$$

为表达方便记：$A_i=\{X_i=1\}, A_j=\{X_j=1\}$,

$$P(X_iX_j=1)=P(X_i=1, X_j=1)$$

$$=P(A_iA_j)=1-P(\overline{A_iA_j})$$

$$=1-P(\bar{A}_i\cup\bar{A}_j)=1-\left(P(\bar{A}_i)+P(\bar{A}_j)-P(\bar{A}_i\bar{A}_j)\right)$$

$$=1-\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+\left(\frac{3}{4}\right)^{10}-\left(\frac{2}{4}\right)^{10}\right)=0.8884,$$

$X_i X_j$	0	1
P	0.1116	0.8884

$$E(X_i X_j) = 0.8884,$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - EX_i \cdot EX_j$$

$$= 0.8884 - 0.9437 \times 0.9437$$

$$= -0.00217,$$

$$DX = \sum_{k=1}^{4} DX_k + 2 \sum_{1 \le i < j \le 4} Cov(X_i, X_j)$$

$$= 4 \times 0.053 - 2 \times 0.00217 \sum_{1 \le i < j \le 4} 1$$

$$= 4 \times 0.053 - 2 \times 0.00217 \times 6$$

$$= 0.186\text{。}$$

概率论试卷

2018－2019学年第1学期

2019年1月3日

杨勇制作

三. 分析判断题(6分)

设X,Y独立且同分布于两点分布$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$Z=XY$,则X,Y,Z之间两两独立但不相互独立。

解: 正确。 $Z:-1,1,$

$$P(Z=1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)$$

$$=P(X=-1)P(Y=-1)+P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{2},$$

$$Z \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}。$$

$$P(X=-1, Z=-1) = P(X=-1, XY=-1)$$

$$= P(X=-1, Y=1) = P(X=-1)P(Y=1)$$

$$= \frac{1}{4} = P(X=-1)P(Z=-1),$$

$$P(X=-1, Z=1) = P(X=-1, XY=1)$$

$$= P(X=-1, Y=-1) = P(X=-1)P(Y=-1)$$

$$= \frac{1}{4} = P(X=-1)P(Z=1),$$

类似可以证明：

$$P(X=1,Z=-1)=P(X=1)P(Z=-1),$$

$$P(X=1,Z=1)=P(X=1)P(Z=1),$$

这样我们证明了，X和Z独立，　同理，Y和Z独立，

所以，X,Y,Z两两独立。

因为，

$$P(X=1,Y=1,Z=-1)=0\neq P(X=1)P(Y=1)P(Z=-1)=\frac{1}{8},$$

所以，X,Y,Z不独立。

四.计算题(12+10+12+12+10=56分)

1.甲袋中有2个白球和4个黑球,乙袋中有6个白球和2个黑球。现从甲乙两袋中各任取一球,再从取出的两球中任取一球,试求:(1)该球是白球的概率是多少?

(2)如果发现该球是白球,问原先从两个袋子中取出的两球是同颜色球的概率是多少?

解:

(1) A_1 : 任取一球, 来自甲袋,

A_2 : 任取一球, 来自乙袋,

B : 两球中任取一球, 该球为白球,

由全概率公式知,

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{8} = \frac{13}{24};$$

(2) C_1:甲袋中任取一球,该球为白球,

C_2:乙袋中任取一球,该球为白球,

C_1和C_2独立,$C_1C_2 \subset B$

$$P(C_1C_2 \mid B) = \frac{P(C_1C_2B)}{P(B)} = \frac{P(C_1C_2)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(C_1)P(C_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}}{\frac{13}{24}} = \frac{6}{13}。$$

考试标准答案:

设$A_i=$“从甲袋取出i个白球”$,i=0,1,$

$B_j=$“从乙袋取出j个白球”$,j=0,1,$

$C=$“该球是白球”$,$

A_i和B_j独立$,$

(1) $$P(C)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}P(A_iB_j)P(C|A_iB_j)$$

$$=\frac{4}{8}\times\frac{2}{8}\times0+\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}\times1=\frac{13}{24},$$

(2)

$$P\left((A_0B_0+A_1B_1)\middle|C\right)=P\left(A_1B_1\middle|C\right)=\frac{\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}\times 1}{\frac{13}{24}}=\frac{6}{13}\text{。}$$

2.设随机变量X服从标准正态分布$N(0,1)$，试求X^2的密度函数。

解： $U = X^2$,

$$F_U(u) = P(U \le u) = P(X^2 \le u),$$

$u < 0, F_U(u) = 0,$

$u \ge 0,$

$$F_U(u) = P(X^2 \le u) = P(-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u})$$

$$=\Phi\left(\sqrt{u}\right)-\Phi\left(-\sqrt{u}\right)=2\Phi\left(\sqrt{u}\right)-1,$$

$u>0,$

$$p_U(u)=F_U'(u)=2\varphi(\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u}{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}},$$

$$p_{X^2}(u)=p_U(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}, u>0\\ 0, u\le 0\end{cases}。$$

注:

$$p_{X^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}。$$

4.对二维随机向量(X,Y),设X服从区间$[-1,1]$上均匀分布,$Y=X^2$,

(1)试求X与Y的相关系数$Corr(X,Y)$,并说明两者之间有无线性相关关系;

(2)X与Y相互独立吗？证明你的结论。

解： (1)

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1\le x\le 1\\ 0,otherwise\end{cases},$$

$$EX=\frac{-1+1}{2}=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{2}dx=\frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3},$$

$$E(X^3)=\int_{-1}^{1}x^3\frac{1}{2}dx=\frac{x^4}{8}\Big|_{-1}^{1}=0,$$

$$E(X^4)=\int_{-1}^{1}x^4\frac{1}{2}dx=\frac{x^5}{10}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{5},$$

$$Cov(X,Y)=Cov(X,X^2)$$

$$=E(X-EX)(X^2-E(X^2))$$

$$=E\left(X\left(X^2-\frac{1}{3}\right)\right)=E\left(X^3-\frac{X}{3}\right)=0,$$

$$DX = \frac{(1+1)^2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$D(X^2) = E(X^4) - \left(E(X^2)\right)^2$$

$$= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45},$$

$$\rho_{XY} = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0,$$

即X与Y不相关,也即X与Y无线性相关关系。

(2)

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=P\left(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{4}\right)=P\left(X\le\frac{1}{2},X^2\le\frac{1}{4}\right)$$

$$=P\left(-1\le X\le\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$$

$$=P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$F_X\left(\frac{1}{2}\right)=P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},$$

$$F_Y\left(\frac{1}{4}\right)=P\left(X^2\le\frac{1}{4}\right)=P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$P\left(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{4}\right)\ne P\left(X\le\frac{1}{2}\right)P\left(Y\le\frac{1}{4}\right)$$

即 $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\ne F_X\left(\frac{1}{2}\right)F_Y\left(\frac{1}{4}\right),$

所以, X 和 Y 不独立。

2017－2018年第二学期

2018年6月5日

概率论试卷

杨勇制作

四. 计算题

4.(12分)设随机变量X服从$(0,2)$上的均匀分布,Y服从参数$\lambda=2$的指数分布,且X,Y独立,记随机变量$Z=X+2Y$。

(1)求Z的密度函数$p_Z(z)$;

(2)求EZ及DZ。

解:　(2)

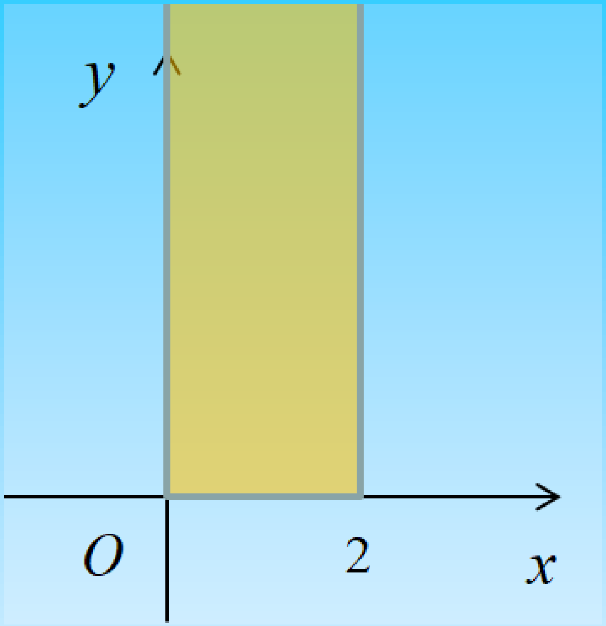
$$EX=\frac{0+2}{2}=1, DX=\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{1}{3},$$

$$EY=\frac{1}{2},DY=\frac{1}{4},X,Y\text{独立},$$

$$EZ=EX+2EY=2,$$

$$DZ=DX+4DY=\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}=\frac{4}{3}\text{。}$$

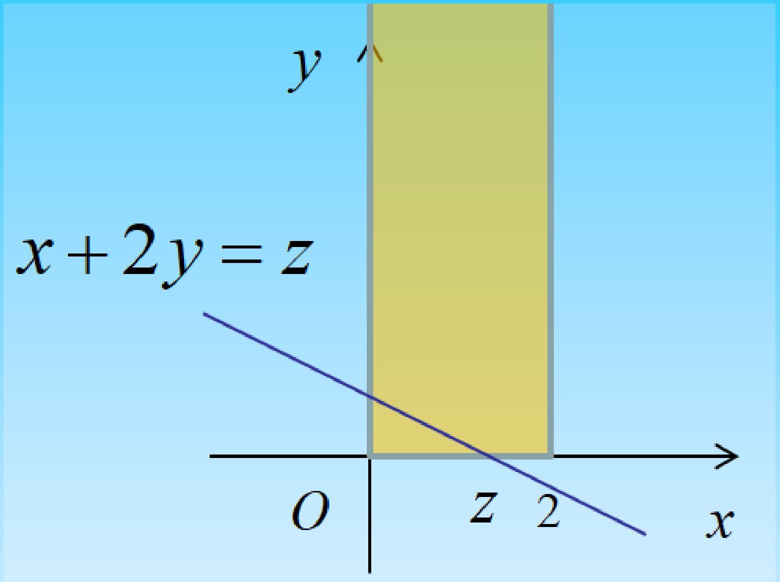
(1)



$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$z \le 0, F_Z(z) = 0,$$

$$0 < z < 2,$$



$$F_Z(z) = P(X + 2Y \le z)$$

$$= \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} \frac{1}{2} \times 2e^{-2y} dy$$

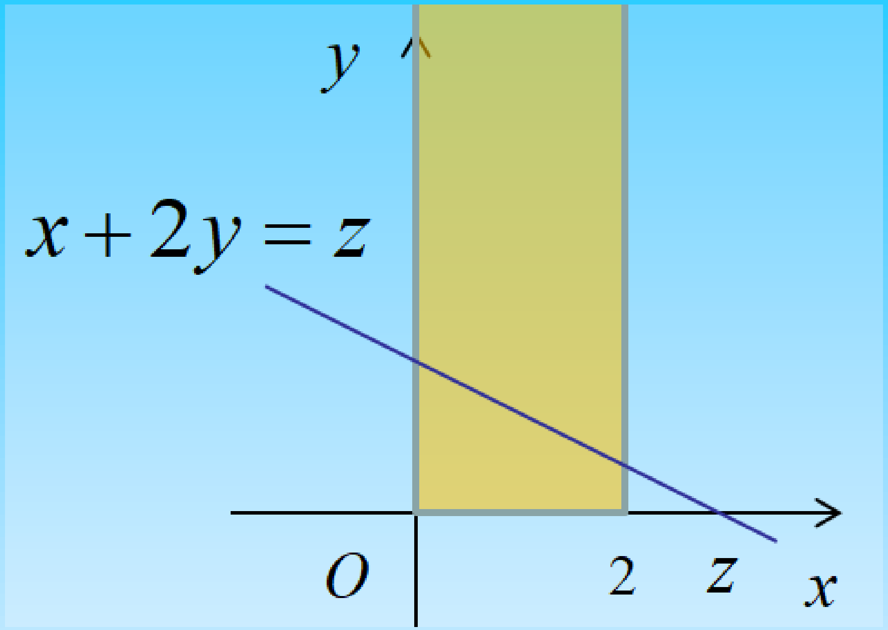
$$= -\frac{1}{2}\int_0^z \left(e^{-2y}\right)\Big|_0^{\frac{z-x}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^z (e^{-(z-x)} - 1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^z e^x dx + \frac{z}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-z} + \frac{z}{2} - \frac{1}{2};$$

$$z \geq 2,$$



$$F_Z(z) = P(X + 2Y \leq z)$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} \frac{1}{2} \times 2e^{-2y} dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{-2y}\right)\Big|_0^{\frac{z-x}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 (e^{-(z-x)} - 1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^2 e^x dx + 1$$

$$= \frac{1}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{2-z} + 1,$$

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, z<0 \\ \dfrac{1}{2}e^{-z}+\dfrac{z}{2}-\dfrac{1}{2}, 0\le z<2, \\ \dfrac{1}{2}e^{-z}-\dfrac{1}{2}e^{2-z}+1, z\ge 2 \end{cases}$$

$p_Z(z)=F_Z'(z)$,所以,

$$p_Z(z)=\begin{cases} 0, z\le 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right), 0<z<2 \\ \frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right), z\ge 2 \end{cases}。$$

注:

$$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty} zp_Z(z)dz=\int_0^2 z\frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right)dz+\int_2^{+\infty} z\frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right)dz$$

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 p_Z(z)dz=\int_0^2 z^2\frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right)dz+\int_2^{+\infty} z^2\frac{1}{2}\left(e^{2-z}-e^{-z}\right)dz$$

$$DZ=E(Z^2)-(EZ)^2$$

5.设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立,均服从参数为1的泊松分布,定义随机变量

$$若Y_k = \begin{cases} 1, X_k = 0 \\ 0, 否则 \end{cases}, (1 \le k \le n)。$$

(1)记$\bar{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}$,求当$n$足够大时$\bar{Y}$的近似分布;

(2)利用切比雪夫不等式估计,当n至少取多大时,可使$P(|\bar{Y} - e^{-1}| < 0.1) \ge 0.8$?

（注:e^{-1}可用0.4近似）。

解： $X_k \sim P(1)$,

$$P(Y_k=1)=P(X_k=0)=\frac{1^0}{0!}e^{-1}=e^{-1},$$

$$Y_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix},\quad EY_k=e^{-1}, DY_k=e^{-1}(1-e^{-1}),$$

显然$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$独立同分布。

(1) 由中心极限定理知,

$$\bar{Y} \overset{\bullet}{\sim} N\left(EY_1,\frac{DY_1}{n}\right)=N\left(e^{-1},\frac{e^{-1}-e^{-2}}{n}\right)。$$

(2)　　由切比谢夫不等式,

$$P\left(\left|\overline{Y}-e^{-1}\right|<0.1\right)=P\left(\left|\overline{Y}-E\overline{Y}\right|<0.1\right)\geq 1-\frac{D\overline{Y}}{0.1^2}\geq 0.8,$$

$$1-\frac{0.4\times 0.6}{0.01n}\geq 0.8,\quad n\geq 120\text{。}$$

2017－2018年第一学期

2017年12月5日

概率论试卷

杨勇制作

2.分析判断题：设$X \sim B(1, p)$(这里$0 < p < 1$),
$Y \sim Exp(\lambda)$(参数为λ的指数分布),则$Z = XY$
一定不是连续型随机变量。

解：　对。

$$P(Z=0)=P(XY=0)$$

$$=P(X=0)P(XY=0|X=0)+P(X=1)P(XY=0|X=1)$$

$$=1-p,$$

而连续型随机变量等于任何一点的概率为0,

所以Z一定不是连续型随机变量

注： $$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)$$

$$z<0, F_Z(z)=0,$$

$z\ge 0,$ $$F_Z(z)=P(XY\le z)$$

$$=P(X=0)P(XY\le z\,|\,X=0)+P(X=1)P(XY\le z\,|\,X=1)$$

$$=(1-p)+pP(Y\le z)$$

$$=(1-p)+p(1-e^{-\lambda z}),$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-pe^{-\lambda z}, z\geq 0\\ 0, z<0\end{cases},$$

此分布函数在$z=0$不连续,所以Z不是连续型随机变量,也不是离散型随机变量。

四.计算题

4.某公司计划开发一种新产品,并试图确定该产品的产量,他们计划出售一件产品可获得收入100元,而积压一件产品导致损失20元。同时预测销售Y服从指数分布,即密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases},$$

为了获得利润的数学期望最大,应生产多少件产品?(已知 $\ln 6 = 1.7918$)

解： a表示生产的件数, X表示利润,

$$X = f(Y) = \begin{cases} 100Y - 20(a-Y), Y < a \\ 100a, Y \geq a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 120Y - 20a, Y < a \\ 100a, Y \geq a \end{cases},$$

$$EX = Ef(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p_Y(y) dy$$

$$= \int_0^a (120y - 20a) \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy + \int_a^{+\infty} 100a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy$$

$$= 120 \int_0^a y \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy - 20a \int_0^a \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy + 100a \int_a^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy$$

$$= -120 \left[y e^{-\frac{y}{5}} \Big|_0^a - \int_0^a e^{-\frac{y}{5}} dy \right] - 20a \left[-e^{-\frac{y}{5}} \Big|_0^a \right] + 100a \left[-e^{-\frac{y}{5}} \Big|_a^{+\infty} \right]$$

$$=-120\left[ae^{-\frac{a}{5}}-5\left(-e^{-\frac{y}{5}}\Big|_0^a\right)\right]-20a\left[1-e^{-\frac{a}{5}}\right]+100ae^{-\frac{a}{5}}$$

$$=-120\left[ae^{-\frac{a}{5}}-5\left(1-e^{-\frac{a}{5}}\right)\right]-20a\left(1-e^{-\frac{a}{5}}\right)+100ae^{-\frac{a}{5}}$$

$$=-120ae^{-\frac{a}{5}}+600-600e^{-\frac{a}{5}}-20a+20ae^{-\frac{a}{5}}+100ae^{-\frac{a}{5}}$$

$$=600-600e^{-\frac{a}{5}}-20a,$$

$$(EX)'_a=-600e^{-\frac{a}{5}}\times\left(-\frac{1}{5}\right)-20=0,$$

$$e^{-\frac{a}{5}}=\frac{1}{6},$$

$$-\frac{a}{5}=-\ln 6=-1.7918,$$

$$a=8.959\approx 9,$$

应生产9件产品。

$$EX=Ef(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)p_Y(y)dy$$

$$=\int_0^a(120y-20a)\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy+\int_a^{+\infty}100a\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy$$

$$=120\int_0^a y\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy-20a\int_0^a\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy-100a\int_{+\infty}^a\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy,$$

$$\left(EX\right)'_a=120a\frac{1}{5}e^{-\frac{a}{5}}-\left[20a\frac{1}{5}e^{-\frac{a}{5}}+20\int_0^a\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy\right]$$

$$-\left[100a\frac{1}{5}e^{-\frac{a}{5}}+100\int_{+\infty}^a\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy\right]$$

$$= -20\int_0^a \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy + 100\int_a^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy$$

$$= -20\left[-e^{-\frac{y}{5}}\Big|_0^a\right] + 100\left[-e^{-\frac{y}{5}}\Big|_a^{+\infty}\right]$$

$$= -20\left[1 - e^{-\frac{a}{5}}\right] + 100e^{-\frac{a}{5}}$$

$$= -20 + 120e^{-\frac{a}{5}} = 0,$$

$$e^{-\frac{a}{5}} = \frac{1}{6},$$

$$-\frac{a}{5}=-\ln 6=-1.7918,$$

$$a=8.959\approx 9,$$

应生产9件产品。

5.假设某种型号的螺丝钉的重量是随机变量,期望值为50克,标准差为5克。求

(1)100个螺丝钉一袋的重量超过5.1千克的概率;

(2) 每箱螺丝钉装有500袋，500袋中最多有4%的重量超过5.1千克的概率。

解: (1)

X_i :第i个螺丝钉的重量, $i=1,2,\cdots,100$,

可以认为$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$独立,

$$p = P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 5.1\times 1000\right)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{5100-5000}{\sqrt{100\times 5^2}}\right) = 1-\Phi(2)$$

$$= 1-0.97725 = 0.02275;$$

(2) Y: 500袋中重量超过5. 1千克的袋数,

$Y \sim B(500, 0.02275)$,

$$Y_k=\begin{cases}1, 第k袋重量超过5.1千克\\0, 第k袋重量不超过5.1千克\end{cases}, k=1,2,\cdots,500,$$

$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{500}$相互独立,

$$P\left(Y=\sum_{k=1}^{500}Y_k\le 20\right)\approx\Phi\left(\frac{20-500\times 0.02275}{\sqrt{500\times 0.02275\times 0.97725}}\right)$$

$$=\Phi(2.58698)=0.995。$$

2016－2017年第二学期

概率论试卷

杨勇制作

计算题:

2.设随机变量ξ与η相互独立,服从相同分布$N(\mu,\sigma^2)$。令$X=\alpha\xi+\beta\eta, Y=\alpha\xi-\beta\eta$,其中$\alpha,\beta$为常数,求$X$与$Y$的相关系数$\rho_{XY}$。

解:

$$DX=\alpha^2\sigma^2+\beta^2\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,$$

$$DY=\alpha^2\sigma^2+\beta^2\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,$$

$$Cov(X,Y)=Cov(\alpha\xi+\beta\eta,\alpha\xi-\beta\eta)$$

$$=Cov(\alpha\xi,\alpha\xi-\beta\eta)+Cov(\beta\eta,\alpha\xi-\beta\eta)$$

$$=\alpha^2 Cov(\xi,\xi)-\alpha\beta Cov(\xi,\eta)+\alpha\beta Cov(\eta,\xi)-\beta^2 Cov(\eta,\eta)$$

$$=\alpha^2 D\xi-\beta^2 D\eta=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2,$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}。$$

3.汽车加油站共有两个加油窗口,现有三辆车A, B, C同时进入该加油站,假设A, B首先开始加油,当其中一辆加油结束后立即开始第三辆车C加油。假设各辆车所需时间是相互独立且都服从参数为λ的指数分布。(1)求第三辆车C在加油站等候加油时间T的密度函数;(2)求第三辆车C在加油站度过时间S的密度函数。

解:三辆车所需时间分别用X,Y,Z表示。

$X,Y,Z \sim Exp(\lambda)$, X,Y,Z相互独立,

(1) $T=\min\{X,Y\}$,

$$F_T(t)=P(T\le t)=P(\min\{X,Y\}\le t),$$

$$t\le 0, F_T(t)=0,$$

$$t>0, F_T(t)=1-P(\min\{X,Y\}>t)$$

$$=1-P(X>t,Y>t)$$

$$=1-P(X>t)P(Y>t)$$

$$=1-e^{-2\lambda t},$$

$$t>0,\ p_T(t)=F_T'(t)=2\lambda e^{-2\lambda t},$$

$$p_T(t)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda t}, t>0\\ 0, t\le 0\end{cases};$$

$(2)\ S = T + Z,$

$s > 0,$

$$p_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t) p_Z(s-t) dt$$

$$= \int_0^s 2\lambda e^{-2\lambda t} \lambda e^{-\lambda(s-t)} dt,$$

其中$t > 0, s - t > 0,$即$0 < t < s,$

所以,

$$p_S(s) = 2\lambda^2 e^{-\lambda s}\int_0^s e^{-\lambda t}dt$$

$$= -2\lambda e^{-\lambda s}\left(e^{-\lambda t}\Big|_0^s\right)$$

$$= 2\lambda e^{-\lambda s}\left(1 - e^{-\lambda s}\right),$$

$$p_S(s) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda s}\left(1 - e^{-\lambda s}\right), s > 0 \\ 0, s \le 0 \end{cases} \text{。}$$

《概率论》试卷

2016−2017学年第1学期

杨勇　制作

四.计算题

1.$(5'\times 2=10')$　类似的习题还有习题集P96第28 题

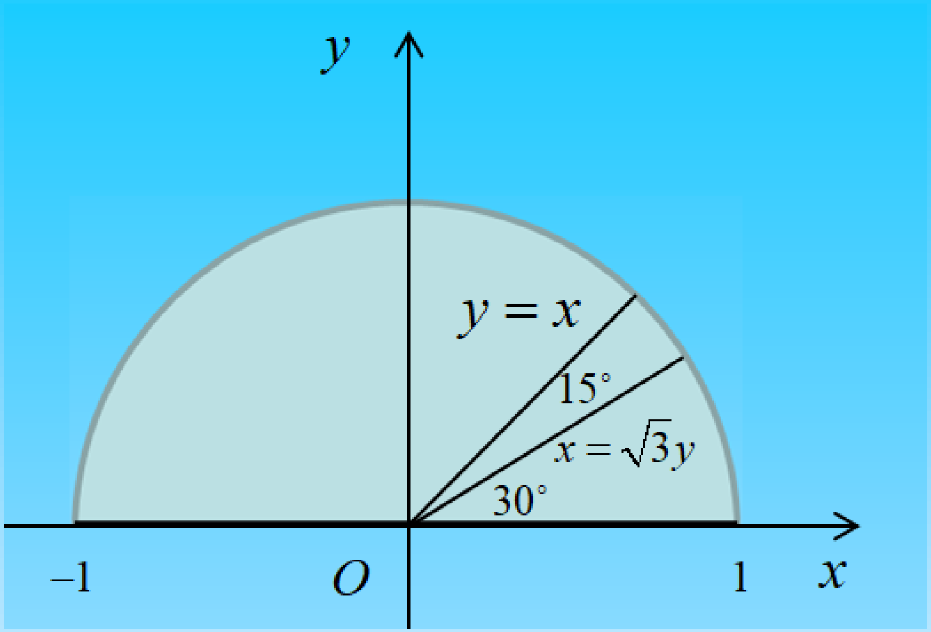
设向量(X,Y)服从$G=\{(x,y)\,|\,y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$上的二维均匀分布。定义随机变量$U,V$ 如下:

$$U=\begin{cases}0, X\leq 0\\ 1, 0<X\leq Y\\ 2, X>Y\end{cases}, V=\begin{cases}0, X>\sqrt{3}Y\\ 1, X\leq\sqrt{3}Y\end{cases},$$

求(1)(U,V)的联合概率分布;(2)相关系数ρ_{UV}。

解:

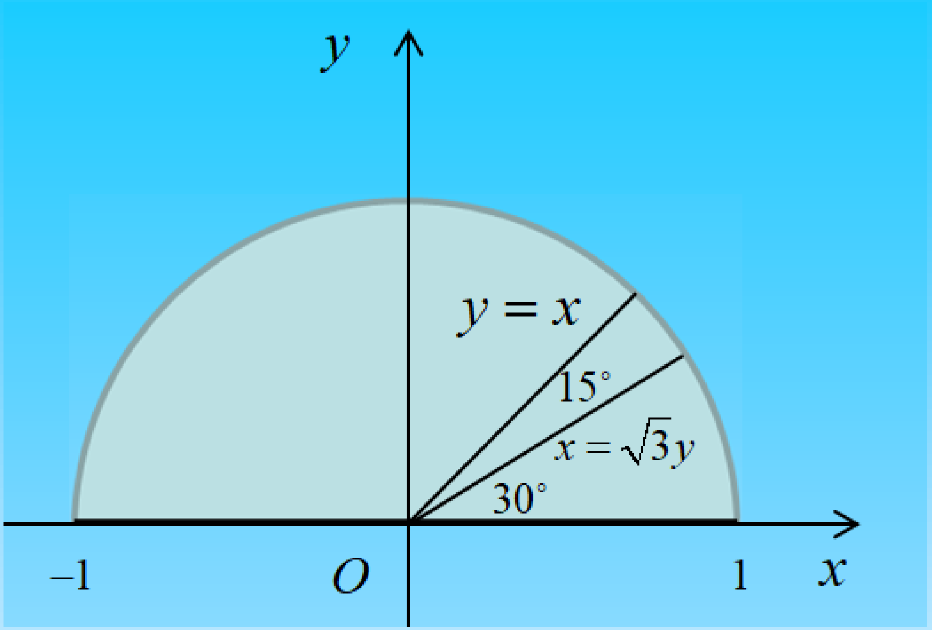
(1)



$$P(U=0,V=0)=P(X\le 0,X>\sqrt{3}Y)=0,$$

$$P(U=0,V=1)=P(X\le 0,X\le \sqrt{3}Y)=\frac{1}{2},$$

$$P(U=1,V=0)=P(0<X\le Y,X>\sqrt{3}Y)=0,$$



$$P(U=1,V=1)=P(0<X\le Y, X\le\sqrt{3}Y)=\frac{1}{4},$$

$$P(U=2,V=0)=P(X>Y, X>\sqrt{3}Y)=\frac{1}{6},$$

$$P(U=2,V=1)=P(X>Y, X\le\sqrt{3}Y)=\frac{1}{12},$$

$V \backslash U$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

(2)

$V \backslash U$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$EU=\frac{3}{4}, EU^{2}=\frac{5}{4}, DU=\frac{11}{16};$$

$$EV=\frac{5}{6}, DV=\frac{5}{36};$$

$$E(UV)=(0\times 0)\times 0+(0\times 1)\times 0+(0\times 2)\times\frac{1}{6}$$

$$+(1\times 0)\times\frac{1}{2}+(1\times 1)\times\frac{1}{4}+(1\times 2)\times\frac{1}{12}=\frac{5}{12},$$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\frac{E(UV)-EU\cdot EV}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=-\frac{5}{\sqrt{55}}。$$

2.$(5'\times 2=10')$

某小镇每天发生的交通事故数可以用参数$\lambda=0.1$的泊松分布描述,连续观察一个月(30 天),求

(1)一个月内发生的交通事故数不多于3次的概率;

(2)一个月内至多2天有交通事故的概率。

解： (1)记X_i为第i天发生的交通事故数，

则$X_i \sim P(0.1), i=1,2,\cdots,30$。

可认为$X_1, X_2, \cdots, X_{30}$相互独立，由可加性，

从而$\sum_{i=1}^{30} X_i \sim P(3)$，故

$$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \le 3\right) = \sum_{k=0}^{3} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \approx 0.6472 \text{。}$$

注：不要用中心极限定理。

(2)先算一天有交通事故数的概率,

$$p = P(X_i \geq 1) = 1 - P(X_i = 0) \approx 0.095,$$

记Y为一个月内有交通事故的天数,则

$Y \sim B(30, 0.095)$,故

$$P(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} C_{30}^{k} 0.095^{k} 0.905^{30-k} \approx 0.4476。$$

完