

第十六届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案 (非数学 B 类, 2024 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{\sin^4 x} =$ _____.

(2) $\int_{-2}^2 (x^3 \cos^5 x + \sqrt{4-x^2}) dx =$ _____.

(3) 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{3y} + \int_0^{x+y} \cos t^2 dt = 1$ 确定. 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{(0,0)} =$ _____.

(4) 设 $z = f(xy, e^{x+y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数. 则

$z_{xy} =$ _____.

(5) 设 $D: x^2 + y^2 \leq r^2$, 其中 $r > 0$. 则 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_D (e^{x^2+y^2} - 1) dx dy}{r^4} =$ _____.

解答. (1) $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$, $\sin^4 x = x^4 + o(x^4)$. 故原式 $= -\frac{1}{2}$.

(2) 由于积分区间对称, 被积函数第一项是奇函数, 故原式 $= \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$.
注意, 此积分为圆心在原点, 半径为 2 的上半圆盘的面积, 故积分 $= 2\pi$.

(3) 两端对 x 求导得

$$3y'e^{3y} + (1+y')\cos(x+y)^2 = 0.$$

继续求导得

$$3y''e^{3y} + 9(y')^2e^{3y} + y''\cos(x+y)^2 - 2(x+y)(1+y')^2\sin(x+y)^2 = 0.$$

将 $x=0, y=0$ 分别代入上面两式, 得

$$y'(x)|_{(0,0)} = -\frac{1}{4}, \quad y''(x)|_{(0,0)} = -\frac{9}{64}.$$

(4)

$$z_x = yf_1 + e^{x+y}f_2.$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= (xf_{11} + e^{x+y}f_{12})y + f_1 + (xf_{21} + e^{x+y}f_{22})e^{x+y} + e^{x+y}f_2 \\ &= xyf_{11} + (x+y)e^{x+y}f_{12} + e^{2(x+y)}f_{22} + f_1 + e^{x+y}f_2. \end{aligned}$$

(5) 利用极坐标变换 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 则

$$\iint_D (e^{x^2+y^2} - 1) dx dy = 2\pi \int_0^r (e^{\rho^2} - 1) \rho d\rho = \pi(e^{r^2} - 1 - r^2).$$

注意, $r \rightarrow 0^+$ 时, $e^{r^2} - 1 - r^2 = \frac{r^4}{2} + o(r^4)$, 故原式 $= \frac{\pi}{2}$.

答题时不要超过此线
密封线

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 用Lagrange乘子法求函数 $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ 在平面 $x - y + z = 1$ 和圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上的最大值.

解答. 构造Lagrange函数

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) = x + 2y + 3z - \lambda(x - y + z - 1) - \mu(x^2 + y^2 - 1).$$

..... (2 分)

解方程组

$$\begin{cases} L_x = 1 - \lambda - 2\mu x = 0, \\ L_y = 2 + \lambda - 2\mu y = 0, \\ L_z = 3 - \lambda = 0, \\ x - y + z - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

不难得到, $\lambda = 3, x = -\frac{1}{\mu}, y = \frac{5}{2\mu}$. 代入 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 得 $\mu = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$. 于是
 $x = \mp \frac{2}{\sqrt{29}}, y = \pm \frac{5}{\sqrt{29}}, z = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}$ (12 分)

注意到

$$f\left(\mp \frac{2}{\sqrt{29}}, \pm \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}.$$

所以函数 f 在给定曲线上的最大值为 $3 + \sqrt{29}$ (14 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 求函数 $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$ 在 $x_0 = 2$ 处的Taylor级数, 并确定它的收敛域.

解答. $f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+x-2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{5}} \right).$ (4 分)

又

$$\frac{1}{1+x-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n, \quad |x-2| < 1,$$

$$\frac{1}{1+\frac{x-2}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-2}{5}\right)^n, \quad \left|\frac{x-2}{5}\right| < 1.$$

于是得到 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处的Taylor展式

$$f(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) (x-2)^n, \quad |x-2| < 1.$$

..... (10 分)

当 $x = 1$ 时, 级数变为 $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)$, 它的通项不趋于零, 发散.

当 $x = 3$ 时, 级数变为 $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)$, 它的通项不趋于零, 发散.

所以该幂级数的收敛域为 $(1, 3)$ (14 分)

答题时不要超过此线
密封线

得分	
评阅人	

四、(本题 14 分) 求微分方程 $(x^3 - y^2)dx + (x^2y + xy)dy = 0$ 的通解.

解法1. 设 $u = y^2$, 则原方程化为 $\frac{du}{dx} = \frac{2u}{x(1+x)} - \frac{2x^2}{x+1}$ (6 分)

这线性方程的通解为

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 u + (1+x)^2 = C.$$

即

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 y^2 + (1+x)^2 = C.$$

..... (14 分)

解法2. 原方程可化为

$$x dx + y dy + y \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0,$$

即,

$$\frac{1}{2} d(x^2 + y^2) + y d\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

..... (6 分)

两边同时除以 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}} \cdot \frac{y}{x} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

即,

$$d(\sqrt{x^2 + y^2}) + d\left(\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}\right) = 0.$$

故,

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = C,$$

即,

$$(1+x)\sqrt{x^2 + y^2} = Cx.$$

..... (14 分)

解法3. 将原方程化为 $x dx + y dy + y \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$, 即

$$\frac{1}{2} d(x^2 + y^2) + y d\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

..... (6 分)

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x}$, 方程化为

$$\frac{1}{2} dr^2 + r \sin \theta d \tan \theta = 0,$$

$$dr + \sec \theta \tan \theta d\theta = 0.$$

积分得, $r + \sec \theta = C$.

换回原变量, 得原方程的通解为

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = C.$$

..... (14 分)

专业:

座位号:

考场号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

答题时不要超过此线

密封线

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

(1) 计算 $I_1 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$.

(2) 计算 $I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 dx$.

解答. (1) 当 $a > 0$ 时, 做变换 $x = \frac{u}{a}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\frac{u}{a}} d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$.

..... (2 分)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx &= -\frac{1}{x} \cdot \sin^2 x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot 2 \sin x \cos x dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

..... (6 分)

(2) $a > 0$ 时, 做变换 $x = \frac{u}{a}$, 易得 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(ax)}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}a$. 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 dx &= -\frac{1}{2x^2} \cdot \sin^3 x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^2} \cdot 3 \sin^2 x \cos x dx \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin(2x)}{x^2} dx = \frac{3}{8} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2} dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(3x)) - (1 - \cos x)}{x^2} dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} dx \\ &= \frac{3}{4} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} dx \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

..... (14 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数的非负函数, 且存在 $M > 0$ 使得对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|f'(x) - f'(y)| \leq M|x - y|$. 证明: 对于任意实数 x , 恒有 $(f'(x))^2 \leq 2Mf(x)$.

证明. 任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 对任意 $h \in (-\infty, +\infty)$, 且 $h \neq 0$, 恒有

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x+h) &= f(x) + \int_0^h f'(x+t)dt \\ &= f(x) + \int_0^h (f'(x+t) - f'(x))dt + f'(x)h. \end{aligned}$$

..... (6 分)

取 h 使得 $hf'(x) \leq 0$, 则

$$-f'(x)h \leq f(x) + \int_0^h (f'(x+t) - f'(x))dt \leq f(x) + M\frac{h^2}{2}.$$

$$|f'(x)| \leq \frac{f(x)}{|h|} + M\frac{|h|}{2}.$$

..... (12 分)

取 $|h| = \sqrt{\frac{2f(x)}{M}}$, 即得所证不等式 $(f'(x))^2 \leq 2Mf(x)$ (14 分)