专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

第十六届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(非数学 A 类, 2024 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

(1) $\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x =$ ________.

(2) 设 $D: x^2+y^2 \leqslant r^2$，其中 $r>0$. 则

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\iint_D (\mathrm{e}^{x^2+y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^4} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(3) 已知函数 $z=f(xy,\mathrm{e}^{x+y})$, 且 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数. 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(4) 直线 $L: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的单位方向向量为 ________.

(5) 设 L 为圆周 $x^2+y^2=9$，取逆时针方向，则第二型曲线积分

$$\int_L \frac{-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

解答. (1)

$$\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C.$$

故原式等于 $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

(2) 利用极坐标变换 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, 则

$$\iint_D (\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^r (\mathrm{e}^{\rho^2} - 1)\rho\mathrm{d}\rho = \pi(\mathrm{e}^{r^2} - 1 - r^2).$$

注意，$r \to 0^+$ 时，$\mathrm{e}^{r^2} - 1 - r^2 = \dfrac{r^4}{2} + o(r^4)$, 故原式 $= \dfrac{\pi}{2}$.

(3)

$$\begin{aligned} z_x &= yf_1 + \mathrm{e}^{x+y}f_2. \\ z_{xy} &= (xf_{11} + \mathrm{e}^{x+y}f_{12})y + f_1 + (xf_{21} + \mathrm{e}^{x+y}f_{22})\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x+y}f_2 \\ &= xyf_{11} + (x+y)\mathrm{e}^{x+y}f_{12} + \mathrm{e}^{2(x+y)}f_{22} + f_1 + \mathrm{e}^{x+y}f_2. \end{aligned}$$

(4) 直线 L 的一般式方程为 $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$ 这样，过 L 的平面束方程为

$$x - y - 1 + \lambda(y + z - 1) = 0, \quad 即 \quad x + (\lambda - 1)y + \lambda z - 1 - \lambda = 0,$$

其中 λ 为参数. 平面的法向量为 $(1, \lambda - 1, \lambda)$.
此法向量与平面 π 的法向量垂直当且仅当 $(1, \lambda-1, \lambda)\cdot(1, -1, 2) = 0$, 即 $\lambda = -2$.
从而，过 L 且与平面 π 垂直的平面为 $x-3y-2z+1 = 0$. 于是，投影直线 L_0 的方程为$\begin{cases} x - 3y - 2z + 1 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$
由此，L_0 的方向向量为 $(-4, -2, 1)$. 故单位方向向量为 $\pm(-\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}})$.
注：单位方向向量有两个，得到一个即可.

(5) 记 $P = \dfrac{-y}{4x^2+y^2}, Q = \dfrac{x}{4x^2+y^2}$, $L_1 : 4x^2 + y^2 = 4$, 取顺时针方向. 在 L 与 L_1 所围成的环状区域内 P, Q 都是连续可微的且 $Q_x - P_y \equiv 0$. 根据Green公式,

$$\int_{L+L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$$

故

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{-L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_{-L_1} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

再由Green公式,

$$\frac{1}{4}\int_{-L_1} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sigma(D) = \pi,$$

其中 $D : 4x^2 + y^2 \leqslant 4, \sigma(D) = 2\pi$ 为 D 的面积.

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 求微分方程 $(x^3-y^2)\mathrm{d}x+(x^2y+xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解法1. 设 $u=y^2$, 则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2u}{x(1+x)}-\dfrac{2x^2}{x+1}$. .... (6 分)

这个线性方程的通解为

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2u+(1+x)^2=C.$$

即

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2y^2+(1+x)^2=C.$$

.... (14 分)

解法2. 原方程可化为

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+y\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=0,$$

即

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+y\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

.... (6 分)

两边同时除以 $\sqrt{x^2+y^2}$, 得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}\cdot\frac{y}{x}\cdot\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

即

$$\mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})+\mathrm{d}\left(\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\right)=0.$$

故

$$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C,$$

即

$$(1+x)\sqrt{x^2+y^2}=Cx.$$

.... (14 分)

解法3. 将原方程化为 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + y\dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} = 0$, 即

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2 + y^2) + y\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

.... (6 分)

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan\theta = \dfrac{y}{x}$, 方程化为

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}r^2 + r\sin\theta\mathrm{d}\tan\theta = 0,$$

$$\mathrm{d}r + \sec\theta\tan\theta\mathrm{d}\theta = 0.$$

积分得，$r + \sec\theta = C$.

换回原变量，得原方程的通解为

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = C.$$

.... (14 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ k, & x=0.\end{cases}$$

(1) 求常数 k 的值，使得$f(x)$在区间[0,1]上连续;

(2) 对(1)中 k 的值，求函数 $f(x)$ 的最小值λ 与最大值μ.

解答. (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

令$k=\dfrac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\dfrac{1}{2}$. 所以 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续. .... (4 分)

(2) 易知, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)},$$

其中$g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$. .... (8 分)

因为$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$, 且

$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2\ln(1+x)-2x}{1+x}<0\quad(0<x\leqslant 1),$$

所以$g'(x)$在$[0,1]$上单调递减, 故当 $0<x\leqslant 1$ 时, $g'(x)<g'(0)=0$. 这又推出 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 故当 $0<x\leqslant 1$ 时, $g(x)<g(0)=0$. 从而 $f'(x)<0$ $(0<x\leqslant 1)$, 又可推出 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减. 因此,

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1,\quad \max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=f(0)=\frac{1}{2}.$$

于是, 函数 $f(x)$ 的最小值 $\lambda=\dfrac{1}{\ln 2}-1$, 最大值 $\mu=\dfrac{1}{2}$. .... (14 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 14 分) 求曲面积分 $I=\iint\limits_{S}(x^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geqslant 0)$ 的上侧.

解法1. 记 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,z=0,x^2+y^2\leqslant R^2\}$, 取下侧. 由Gauss公式知

$$\iint\limits_{S+\Sigma}(x^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(2(x+y+z)-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中，$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,z\geqslant 0,x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$. .... (4 分)

由于,

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

所以,

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2(x+y+z)-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

.... (8 分)

由对称性，

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2z-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

用球坐标变换 $x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$, 得

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R(2r\cos\varphi-3)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\left(\frac{R^4}{4}-R^3\right).$$

.... (14 分)

注：最后一步直接利用直角坐标计算也可以.

解法2. S 的参数方程为

$$x=R\cos\theta\sin\varphi,\ y=R\sin\theta\sin\varphi,\ z=R\cos\varphi,\ (0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

曲面 S 上的点 (x,y,z) 处的单位法向为 $\frac{(x,y,z)}{R}$. 故,

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{S}(x^2-x,y^2-y,z^2-z)\cdot\frac{(x,y,z)}{R}\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{R}\iint\limits_{S}\left[x^3+y^3+z^3-(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{R}\iint\limits_{S}\left[x^3+y^3+z^3-R^2\right]\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考场号:________ 座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6 分)

由对称性可知

$$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}S = \iint\limits_S y^3\mathrm{d}S = 0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (8 分)

故,

$$\begin{aligned}
I \quad &= \frac{1}{R}\iint\limits_S z^3\mathrm{d}S - R\iint\limits_S \mathrm{d}S = \frac{1}{R}\iint\limits_S z^3\mathrm{d}S - 2\pi R^3 \\
&= \frac{1}{R}\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant\theta\leqslant2\pi}} (R\cos\varphi)^3R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta - 2\pi R^3 \\
&= 2\pi R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi - 2\pi R^3 \\
&= 2\pi R^4\cdot\frac{1}{4} - 2\pi R^3 \\
&= \frac{\pi R^4}{2} - 2\pi R^3.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (14 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$是 $(-\infty,+\infty)$上具有连续导数的非负函数，且存在 $M>0$ 使得对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant M|x-y|$. 证明：对于任意实数 x, 恒有 $(f'(x))^2\leqslant 2Mf(x)$.

证明. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$, 对任意 $h\in(-\infty,+\infty)$, 且 $h\neq 0$, 恒有

$$\begin{aligned}0\leqslant f(x+h)&=f(x)+\int_0^h f'(x+t)\mathrm{d}t\\&=f(x)+\int_0^h(f'(x+t)-f'(x))\mathrm{d}t+f'(x)h.\end{aligned}$$

.... (6 分)

取 h 使得 $hf'(x)\leqslant 0$, 则

$$-f'(x)h\leqslant f(x)+\int_0^h(f'(x+t)-f'(x))\mathrm{d}t\leqslant f(x)+M\frac{h^2}{2}.$$

$$|f'(x)|\leqslant\frac{f(x)}{|h|}+M\frac{|h|}{2}.$$

.... (12 分)

取$|h|=\sqrt{\frac{2f(x)}{M}}$,即得所证不等式 $(f'(x))^2\leqslant 2Mf(x)$. .... (14 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^2+k^2}$ 收敛, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明. 对于任意固定的 n 和 N, 有

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2+n^2}\leqslant\sum_{k=1}^{N}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{y^2+n^2}\mathrm{d}y=\int_0^N\frac{1}{y^2+n^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{n}\arctan\frac{N}{n}.$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2+n^2}\geqslant\sum_{k=1}^{N}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{y^2+n^2}\mathrm{d}y=\int_1^{N+1}\frac{1}{y^2+n^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{n}\left(\arctan\frac{N+1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right).$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2+n^2}-\frac{\pi}{2n}\right|\leqslant\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n}\left(\arctan\frac{N+1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right).$$

令 $N\to\infty$, 即有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+n^2}-\frac{\pi}{2n}\right|\leqslant\frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n}.$$

.... (4 分)

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^2+k^2}-\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+n^2}-\frac{\pi}{2n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n}<+\infty.$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^2+k^2}-\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right)$ 绝对收敛，从而收敛. 由此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^2+k^2}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 同敛散. 以下只需证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

.... (8 分)

记 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的前 n 项部分和，则有

$$S_{n^2}=\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1}\frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}+\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^mC_m+\frac{(-1)^n}{n^2},$$

其中
$$C_m=\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1}\frac{1}{k}.$$
由 $C_m<m\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2+m}\cdot(m+1)=\frac{2}{m}$ 知，$C_m\to 0, m\to\infty$.
此外，$C_m>(m+1)\cdot\frac{1}{m^2+m}+\frac{1}{m^2+2m}\cdot m>\frac{2}{m+1}>C_{m+1}$, 从而 C_m 单调递减, 级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m C_m$ 收敛, S_{n^2} 收敛. .... (12 分)
对于其它的 N, 存在 n 使得
$$n^2\leqslant N<(n+1)^2,\quad |S_N-S_{n^2}|\leqslant C_n<\frac{2}{n}\to 0, N\to\infty.$$
故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛，证毕. .... (14 分)