上海财经大学《高等数学(经管类)I》课程考试卷（A）答案

2019 ——2020 学年第一学期

一、单选题(每小题 2 分，共计 10 分)

1. 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$．则必有(D).

A. $\forall n\in \mathrm{N}^+$，成立 $a_n<b_n$.　　B. $\forall n\in \mathrm{N}^+$，成立 $b_n<c_n$.

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

2. 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有(A)

A. 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点;　　B. 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点;
C. 2 个跳跃间断点;　　D. 2 个无穷间断点.

3. 设 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，$\Delta y,\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在 x_0 处对应的函数值增量和函数微分．若 $\Delta x>0$，则(A).

A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　C. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$　D. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$

4. 若连续函数在闭区间上有极大值和极小值，则(C)
A. 极大值一定是最大值，且极小值一定是最小值.
B. 极大值一定是最大值，或极小值一定是最小值.
C. 极大值不一定是最大值，且极小值不一定是最小值.
D. 极大值必大于极小值.

5. 设 $g(x)$ 是可微函数 $f(x)$ 的反函数，其中 $x>0$，且恒有 $\int_1^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$，则 $f(x)$ =(B).

A. $\sqrt{x}$　　B. $\sqrt{x}-1$　　C. $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$　　D. $\sqrt{x}-2$

二、填空题(每小题 2 分，共计 10 分)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1^2}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right)=\underline{\dfrac{1}{3}}$.

7. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xe^{f(y)}=e^{y}$ 确定的，其中 f 可导，且 $f'\neq 1$．则 $\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{e^{f(y)}}{e^{y}-xe^{f(y)}f'(y)}\mathrm{d}x}$ 或者 $\underline{\dfrac{1}{x[1-f'(y)]}\mathrm{d}x}$.

8. $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x, x\in(0,1)$。则 $f(x)=\underline{-\ln(1-x)-x^2+C}$.

9. 如果当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t$ 的导数 $F'(x)$ 与 x^2 是等价无穷小，则 $f'(0)=\underline{\dfrac{1}{2}}$.

10. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_{-1}^{\infty}4x^2e^{-2x}\mathrm{d}x$，则 $a=\underline{-1}$.

三、计算题(每小题 6 分，共计 60 分)

11. 已知 $f(x)=a^{x^3},(a>0)$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$.

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\ln a\sum\limits_{i=1}^{n}i^3=\ln a\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^3\dfrac{1}{n}=\ln a\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\dfrac{\ln a}{4}$.

12.已知 $\arctan\dfrac{x-y}{x+y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：两边求导：$\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'$

$$\frac{y-xy'}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}\Rightarrow y-xy'=x+yy'\Rightarrow y'=\frac{y-x}{x+y}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(y'-1)(x+y)-(y-x)(1+y')}{(x+y)^2}=-2\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}.$$

13. 已知 $\begin{cases}x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}};\\ y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\end{cases}(t<0)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+t^2}-t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\dfrac{1}{1+t^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{1+t^2}}}\cdot\frac{-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=-\frac{1}{1+t^2}.$$

$$\therefore\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-1.$$

14. 设 $f(x)=x^2\cos 2x$，求 $f^{(2019)}(0)$.

解: 由于 $f(x)$ 为偶函数，则其奇数阶导数都为奇函数，则 $f^{(2019)}(0)=0$。

也可以使用莱布尼兹公式计算。

15. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin(\sin(\sin x))}{\sin x\cdot\sin(\sin x)\cdot\sin(\sin(\sin x))}$.

解: 令 $t=\sin x$，则原式=$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t-\sin(\sin t)}{t^3}\overset{洛}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin t)}{3t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 t}{2}}{3t^2}=\dfrac{1}{6}$.

16. 求曲线 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=\infty$，则其无水平渐近线。

$\lim\limits_{x\to +0}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，则其有垂直渐近线 $x=0$；

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}}+2e^{\frac{1}{x}}\right]=3$，

有斜渐近线 $y=x+3$.

17. 计算 $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

解: 由于 $\int \sqrt{x^2-1}dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$,

所以 $\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$,

因此原式 $= \int (x-\sqrt{x^2-1})dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

18. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x + x^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + x^3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解: 记 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$B=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，则

$$f(x) = x + Ax^2 + Bx^3 \Rightarrow$$
$$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+Ax^2+Bx^3)\mathrm{d}x \Rightarrow 8A-3B=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$B = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (x+Ax^2+Bx^3)\mathrm{d}x \Rightarrow 8A+9B=-6 \cdots\cdots\cdots(2)$$
$$A=\frac{3}{8},\quad B=-1.$$

19. 计算积分 $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\mathrm{d}x \overset{x=1+\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1+\sin t)^2\mathrm{d}t$

$\overset{t=-u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin u)^2\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin u+\sin^2 u)\mathrm{d}u = \frac{3}{4}\pi - 2$

20. 计算积分 $\int_0^1 (\ln\frac{1}{x})^n\mathrm{d}x$，$n$ 为正整数.

解: 令 $t=-\ln x, x=e^{-t}, \mathrm{d}x=-e^{-t}\mathrm{d}t$

原式 $=\int_{+\infty}^0 t^n(-e^{-t}\mathrm{d}t) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(n+1) = n!$.

四、(本题 7 分) 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$ 的极值，单调区间，凹凸区间和拐点。

解： $y=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 。 $y'=\dfrac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ ，

$y''=\dfrac{-8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}}$ ，则 $f'(-\frac{1}{3})=0,\ x=\pm1,\ f'(x)$， $f''(x)$ 不存在，因此

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	无定义	$+$	0	$-$	无定义	$+$
y''	$+$		$-$		$-$		$-$
y	单增上凹		单增下凹		单减下凹		单增下凹
		(拐点) $(-1,0)$		(极大) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$		(极小) 0	

综上： $x=-\dfrac{1}{3}$ 为其极大值点，极大值为 $f(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ ， $x=1$ 为其极小值点，极小值为 $f(1)=0$；单调增区间为 $(-\infty,-\dfrac{1}{3})$，$(1,+\infty)$，单调减区间为 $(-\dfrac{1}{3},1)$；上凹区间为 $(-\infty,-1)$，下凹区间为 $(-\dfrac{1}{3},+\infty)$； $(-1,0)$ 是曲线拐点。

五、(本题 7 分) 已知商品的价格函数为 $p(x)=\dfrac{5}{1+x^2}$，且最大需求量为 5 单位，这里 x 表示需求量，p 表示价格．求:

(1) 该商品的收益函数和边际收益.
(2) 使收益最大时的需求量，最大收益和相应价格.
(3) 最大需求量时的收益弹性，并解释其经济意义.

解：记收益函数为 $R(x)$，则

(1) $R(x)=xp(x)=\dfrac{5x}{1+x^2}$，边际收益 $R'(x)=\dfrac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

(2) $R'(x)=0\Rightarrow x=1.R(1)=\dfrac{5}{2},\ p(1)=\dfrac{5}{2}$. 产量为 1 个单位时，收益最大，此时最大收益为 $\dfrac{5}{2}$，对应价格为 $\dfrac{5}{2}$.

(3) $\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{x=5}=\left.\frac{p}{R}\frac{dR}{dp}\right|_{x=5}=\left.\frac{p(5)}{R(5)}\frac{dR/dx}{dp/dx}\right|_{x=5}=\frac{1}{5}\cdot\left.\frac{\frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{-\frac{10x}{(1+x^2)^2}}\right|_{x=5}=0.48$.

意义: 商品价格每上涨(下跌)1%, 收益上涨(下跌)0.48%. 此时属收益低弹性.

六、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=0, f(b)=1$,

证明: $\exists\xi\in(a,b),\eta\in(a,b),\xi\neq\eta$, 使得 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2(b-a)$.

证: $\because$ $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, $\therefore$ 由闭区间上连续函数的介值定理可知: $\exists c\in(a,b)$,

使得 $f(c)=\frac{1}{2}$. 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上分别使用 Lagrange 中值定理, 可得:

$\exists\xi\in(a,c)\subset(a,b),\eta\in(c,b)\subset(a,b)$,使得

$$f(c)-f(a)=f'(\xi)(c-a),\quad f(b)-f(c)=f'(\eta)(b-c)$$

$$\Rightarrow c-a=\frac{f(c)-f(a)}{f'(\xi)},\quad b-c=\frac{f(b)-f(c)}{f'(\eta)},$$

从而有

$$b-a=(c-a)+(b-c)=\frac{\frac{1}{2}}{f'(\xi)}+\frac{\frac{1}{2}}{f'(\eta)},$$

即

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2(b-a),\qquad \xi,\eta\in(a,b),\xi\neq\eta.$$