诚实考试吾心不虚 ，公平竞争方显实力，
考试失败尚有机会 ，考试舞弊前功尽弃。

上海财经大学《高等数学(经管类)I》课程考试卷（A）闭卷

课程代码 102560 课程序号________

2018——2019 学年第一学期

得分	

一、 填空题(本大题共 10 小题，每小题 2 分，共计 20 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}[1-\sin x\ln(1-x)]^{\frac{1}{1-\cos x}}=\underline{e^2}$

2. 设 $y=x^{\sin x}$，且 $x>0$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\underline{x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)}$

装

3. 当 $x\to 1$时，x^3+ax^2-x+b与$x+1$为等价无穷小，则 $a=\underline{\dfrac{1}{2}}$，$b=\underline{-\dfrac{1}{2}}$。

4. $d\ \underline{\arctan x^2+2x+C}\ =\left(\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{1}{x}\right)d\left(x^2\right)$

订

5. 设函数 $f(x)=\ln(ax+b)\quad(a\neq 0)$，则 $f^{(n)}(x)=\underline{\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}}$

6. 定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx=\underline{\dfrac{3}{16}\pi}$ 。

线

7. 设某产品的需求量Q为价格P的函数关系为$Q=aP^b$，其中a,b为常数，且$a\neq 0$，则需求弹性$\eta(P)=\underline{b}$。

8. 设函数 $f(x)$连续，且$\int_0^{x^2-1}f(t)dt=x^4$，则当 $x>0$时，$f(8)=\underline{18}$。

9. 不定积分$\int x\arctan x dx=\underline{\dfrac{1}{2}x^2\arctan x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\arctan x+C}$。

10. 函数 $f(x)=x^3$在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理的中值$\xi=\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$。

得分	

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分.）

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ C ）.

(A) 处处可导　(B) 恰好有一个不可导点

(C) 恰好有两个不可导点　(D) 恰好有三个不可导点

2. 设 $g(x)$ 可微, $f(x)=\ln^2(1+g(x))+2\ln(1+g(x))$, $f'(1)=1, g'(1)=\dfrac{1}{2}$,则 $g(1)=$(D).

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) -1　(C) 1　(D) 0

3. 下列广义（反常）积分发散的是（ B ）.

(A) $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$　(B) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$　(C) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$　(D) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x+2)\ln^2(x+2)}dx$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^4\ln|x|+1, & 0<|x|\le 1\\ 1, & x=0\end{cases}$，则（ A ）.

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值　(B) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续　(D) $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处有拐点

5. 设 $f(x)$ 为连续的偶函数，则 $f(x)$ 的原函数中（ C ）.

(A) 都是奇函数　(B) 都是偶函数　(C) 有奇函数　(D) 有偶函数

得分	

三、 计算题(本大题共 7 小题，每小题 8 分，共计 56 分)

1、设 $y(x)$ 是由方程 $x+y=xy+1$ 确定的隐函数，函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且 $g'(0)=g''(0)=1$。若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-y(x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，求 $f'(0)$。

解：对方程 $x+y=xy+1$ 两边同时对 x 求导得 $1+y'=y+xy'$，则 $y'=\dfrac{y-1}{1-x}$，则 $y'|_{x=0}=0$，对方程两边再对 x 求导得 $y''=2y'+xy''$，则 $y''|_{x=0}=0$。

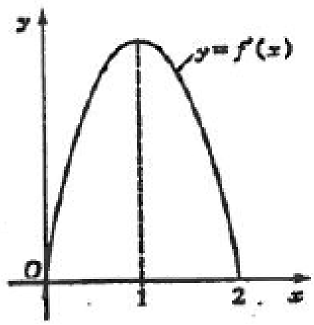
由题 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(g'(x)-y'(x)\right)=1$，

则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{g(x)-y(x)}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-y(x)-x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-y'(x)-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{g'(x)-g'(0)}{x}-\frac{y'(x)-y'(0)}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(g''(0)+y''(0)\right)=\frac{1}{2}$$

2、设 $y=f'(x)$ 的图像如图所示的二次抛物线，且函数 $f(x)$ 的极小值为 2，极大值为 6。求 $f(x)$ 。



解：由 $f'(x)$ 图像知，$f(0)=2$，$f(2)=6$，由题不妨设 $f'(x)=a(x-1)^2+b$，则 $f'(0)=a+b=0$，则 $f(x)=\int\left[a(x-1)^2+b\right]dx=\dfrac{a}{3}(x-1)^3+bx+C$，则由初始条件得 $f(0)=-\dfrac{a}{3}+C=2$，$f(0)=\dfrac{a}{3}+2b+C=6$，则得 $a=-3,b=3,C=1$，则 $f(x)=-(x-1)^3+3x+1$。

3、求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+1}{|x+1|(x^2-x)}\sin\left(\dfrac{|x-1|}{x+2}\pi\right)$ 的所有间断点，并判别间断点类型。

解：$x=0,\pm 1,-2$ 点处，函数无意义，所以为间断点，其他点处函数为初等函数，一定是连续点。

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=0$，则 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一大类可去间断点;

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\dfrac{\pi}{3}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\dfrac{\pi}{3}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一大类跳跃间断点;

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二大类无穷间断点;

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ 不存在，则 $x=-2$ 是 $f(x)$ 的第二大类振荡间断点。

4、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\int_0^t e^{u^2}du \\ y=\int_0^t e^{(u+t)^2}du \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$y=\int_0^t e^{(u+t)^2}du \overset{u+t=v}{=} \int_t^{2t} e^{v^2}dv$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2e^{4t^2}-e^{t^2}}{e^{t^2}}=2e^{3t^2}-1$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(dy/dx\right)}{dx/dt}=\frac{12te^{3t^2}}{e^{t^2}}=12te^{2t^2}。$$

5、计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$。

解：$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}dx$$

$$=\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}+\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}\right)\Bigg|_{1}^{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)。$$

6、求不定积分 $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$。

解：$\int\sec^3 xdx=\int\sec xd\tan x=\sec x\cdot\tan x-\int\tan xd\sec x$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int\tan^2 x\sec xdx=\sec x\cdot\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx,$$

则 $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2}\int \sec x dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$，

则 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \tan^2 x \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x dx = \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx$

$= \frac{1}{2}\sec x \cdot \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$。

7、求 $\int_0^x f(t)g(x-t)dt \quad (x \ge 0)$，其中 $f(x) = x$，而 $g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$。

解：$\int_0^x f(t)g(x-t)dt \overset{x-t=u}{=} -\int_x^0 f(x-u)g(u)du = \int_0^x f(x-u)g(u)du$，

当 $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-u)g(u)du = \int_0^x (x-u)\sin u du$

$= x\int_0^x \sin u du - \int_0^x u \sin u du = x(1-\cos x) + x\cos x - \sin x = x - \sin x$，

当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时，$\int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-u)g(u)du = \int_0^x (x-u)g(u)du$

$= x\int_0^x g(u)du - \int_0^x ug(u)du = x\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0 du\right] - \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin u du + \int_{\frac{\pi}{2}}^x u \cdot 0 du\right]$

$= x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin u du = x - 1$。

得分	

四、综合应用题（本题满分 8 分）

求函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ 在 $[0,2]$ 上的极值、最值及曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

解：由 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$，则 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$，

$f''(x) = 6x - 4$，$f'''(x) = 6$，则 $f'(\frac{1}{3}) = f'(1) = 0$，且 $f''(\frac{1}{3}) = -2 < 0$，则 $x = \frac{1}{3}$ 是 $f(x)$ 的极大值点，极大值 $f(\frac{1}{3}) = -\frac{23}{27}$，$f''(1) = 2 > 0$，则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，极小值 $f(1) = -1$。$f''(\frac{2}{3}) = 0$，且 $f'''(\frac{2}{3}) \ne 0$，则 $(\frac{2}{3}, -\frac{25}{27})$ 是 $f(x)$ 的拐点。

$$\max_{[0,2]} f(x)=\max\{f(0), f(\frac{1}{3}), f(1), f(2)\}=1,$$

$$\min_{[0,2]} f(x)=\min\{f(0), f(\frac{1}{3}), f(1), f(2)\}=-1。$$

得分	

五、证明题（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 内存在二阶导数，且 $f(0)=f(1)$。证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$。

证明：由题 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 之间满足罗尔中值定理，则至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=0$。做辅助函数 $F(x)=x^2 f'(x)$，显然 $F(x)=x^2 f'(x)$ 在 $[0,\eta]$ 之间满足罗尔中值定理，则至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=2\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)=0$，即 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$。