

上海财经大学《高等数学(经管类)I》课程考试卷(A) 闭卷

课程代码_____

2019 ——2020 学年第一学期

一、单选题(每小题 2 分，共计 10 分)

1. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$. 则必有().
- A. $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立 $a_n < b_n$. B. $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 成立 $b_n < c_n$.
- C. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. D. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.
2. 设 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有().
- A. 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点; B. 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点;
C. 2 个跳跃间断点; D. 2 个无穷间断点.
3. 设 $y = f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, $\Delta y, dy$ 分别为 $f(x)$ 在 x_0 处对应的函数值增量和函数微分. 若 $\Delta x > 0$, 则().
- A. $0 < dy < \Delta y$ B. $0 < \Delta y < dy$ C. $dy < \Delta y < 0$ D. $\Delta y < dy < 0$
4. 若连续函数在闭区间上有极大值和极小值, 则().
- A. 极大值一定是最大值, 且极小值一定是最小值.
B. 极大值一定是最大值, 或极小值一定是最小值.
C. 极大值不一定是最大值, 且极小值不一定是最小值.
D. 极大值必大于极小值.
5. 设 $g(x)$ 是可微函数 $f(x)$ 的反函数, 其中 $x > 0$, 且恒有 $\int_1^{f(x)} g(t) dt = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 8)$, 则 $f(x) = ($).
- A. \sqrt{x} B. $\sqrt{x} - 1$ C. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ D. $\sqrt{x} - 2$

二、填空题(每小题 2 分，共计 10 分)

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3 + 1^2} + \frac{2^2}{n^3 + 2^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3 + n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 确定, 其中 f 可导, 且 $f' \neq 1$. 则 $dy =$ _____.
8. $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, x \in (0, 1)$. 则 $f(x) =$ _____.
9. $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f'(t)dt$, 若 $x \rightarrow 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^2 是等价无穷小, 则 $f'(0) =$ _____.
10. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_{-1}^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$, 则 $a =$ _____.

三、计算题(每小题 6 分, 共计 60 分)

11. 已知 $f(x) = a^{x^3}, (a > 0)$, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \ln[f(1)f(2) \cdots f(n)]$.
12. 已知 $\arctan \frac{x-y}{x+y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
13. 已知 $\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases} (t < 0)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
14. 设 $f(x) = x^2 \cos 2x$, 求 $f^{(2019)}(0)$.
15. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin(\sin(\sin x))}{\sin x \cdot \sin(\sin x) \cdot \sin(\sin(\sin x))}$
16. 求曲线 $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.
17. 计算 $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$.
18. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x + x^2 \int_0^1 f(x) dx + x^3 \int_0^2 f(x) dx$, 求 $f(x)$.
19. 计算积分 $\int_0^1 x \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$.
20. 计算积分 $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n dx$, n 为正整数.

四、(本题 7 分) 求函数 $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的极值, 单调区间, 凹凸区间和拐点。

五、(本题 7 分) 已知商品的价格函数为 $p(x) = \frac{5}{1+x^2}$, 且最大需求量为 5 单位, 这里 x 表示需求量, p 表示价格. 求:

- (1) 该商品的收益函数和边际收益.
- (2) 使收益最大时的需求量, 最大收益和相应价格.
- (3) 最大需求量时的收益弹性, 并解释其经济意义.

六、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0, f(b) = 1$, 证明:

$\exists \xi \in (a, b), \eta \in (a, b), \xi \neq \eta$, 使得 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2(b-a)$.