线性空间

一、向量空间（习题 P114）

坐标 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ 是V的一组基，$\beta \in V$，则 $\beta = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n) X$

X有且仅有一个，X^T ~~称~~为 β 在 $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ 下坐标

基变换公式 $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$，与 $\beta_1\ \beta_2 \cdots\cdots \beta_n$ 为 R^n 下两组基

因 $\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + \cdots\cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \vdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + \cdots\cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases}$ 即 $\beta = \alpha P$（基变换公式）

P为由基 $\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n$ 到基 $\beta_1\ \beta \cdots\cdots \beta_n$ 的过渡矩阵.

坐标变换公式 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

二、内积与正交.

施密特标准正交化. 一组线性无关向量 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$，构成正交向量组 $\beta_1 \cdots \beta_n$

$\beta_1 = \alpha_1 \quad \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \quad \beta_r = \alpha_r - \dfrac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_r, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 \cdots\cdots - \dfrac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})}\beta_{r-1}$

$\gamma_1 = \dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \quad \gamma_r = \dfrac{\beta_r}{\|\beta_r\|} \cdots\cdots$

三 正交矩阵 A、B

① $A^TA=AA^T=I$, ② $A^T=A^{-1}$ 也是正交阵. ③ $|A|=\pm 1$.

④ $A\cdot B$ 与 $B\cdot A$ 也为正交阵. ⑤ A为正交矩阵 <=> 行/列向量组为正交向量组.

⑥ 向量空间V的两组正交基之间过渡矩阵是正交矩阵.

⑦ 正交矩阵的保角性与保长性 $(A\alpha, A\beta)=(\alpha,\beta)$ $\|A\alpha\|=\|\alpha\|$.

例1: $A^2+6A+8I=0$, 且 $A^T=A$, 则证 $A+3I$ 为正交矩阵.

$(A+3I)^T=A+3I$. $(A+3I)^T(A+3I)=A^2+6A+9I=I$,

<=> $A+3I$ 为正交矩阵.

例2: A为正交矩阵, 且 $A-I$ 可逆 记 $B=(A+I)(A-I)^{-1}$, 证B为反对称矩阵

$B^T=((A-I)^{-1})^T(A+I)^T=(A^T-I)^{-1}(A^T+I)=(A^{-1}-I)^{-1}(A^{-1}+I)$

$=(A^{-1}-I)^{-1}A^{-1}(I+A)=(I-A)^{-1}(I+A)$.

现证 $(A+I)$ 与 $(A-I)^{-1}$ 可交换 即 $(A+I)(A-I)^{-1}=(A-I)^{-1}(A+I)$

左右分别乘 $(A-I)$ 得 $(A-I)(A+I)=(A+I)(A-I)$ 显然成立

故 $B^T=(A+I)(I-A)^{-1}=-B$ B为反对称矩阵

例3：证不存在正交阵 A、B，满足 $A^2=AB+B^2$

假设 ∃ A、B 为正交阵，使得 $A^2=AB+B^2$

则 $A^2\cdot B^{-1}=(A+B)$. $\quad A(A-B)=B^2 \quad A-B=A^{-1}B^2$

$$\begin{cases} A+B=A^2B^{-1} \\ A-B=A^{-1}B^2 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}(A^2B^{-1}+A^{-1}B^2) \quad B=\frac{1}{2}(A^2B^{-1}-A^{-1}B^2).$$

$$\begin{cases} AA^T=I & (A^2B^{-1}+A^{-1}B^2)(B(A^{-1})^2+(B^{-1})^2A)=4I. \\ BB^T=I & (A^2B^{-1}-A^{-1}B^2)(B(A^{-1})^2-(B^{-1})^2A)=4I. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I+A^2B^{-3}A+A^{-1}B^3A^{-2}+2=4I. \\ I-A^2B^{-3}A-A^{-1}B^3A^{-2}+2=4I \end{cases} \Rightarrow 4I\neq 8I$$

矛盾

故不存在正交阵 A、B，使得 $A^2=AB+B^2$