诚实考试吾心不虚 ，公平竞争方显实力，

考试失败尚有机会 ，考试舞弊前功尽弃。

上海财经大学《高等数学（经管类）I》课程考试卷（A）闭卷

课程代码______________课程序号__________________

2021——2022 学年第一学期

一、填空题（每题 2 分，共 12 分）

1．设 $y=x^{\ln x}$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=e}=$__ $2dx$ ____.

2. 若 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，则 $f^{(n)}(x)=$___ $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$____.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)=$______ e^4 ________.

4. $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$, 则 $\int\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$_____ $-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ ________.

5. $\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=$ ______ $\frac{\pi^2}{4}$ ________.

6. 若 m 为正整数，则 $\int_0^{+\infty}x^{4m+1}e^{-x^2}\mathrm{d}x=$____ $\dfrac{1}{2}(2m)!$ ______.

二、单选题（每题 2 分，共 12 分）

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（ A ）。

A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.　C) $ab=0$.　D) $ab=2$.

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ B ）

A) 连续.　B) 有可去间断点.　C) 有跳跃间断点.　D) 有无穷间断点.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（ D ）

A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在.　B) $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在.

C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在.　　　D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

4. 曲线$y=x\sin x+2\cos x$，$(-\dfrac{\pi}{2}<x<2\pi)$的拐点是（　C　）

A) $(0,2)$.　　B) $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.　　C) $(\pi,-2)$.　　D) $(\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{3\pi}{2})$.

5. 设二阶可导函数$f(x)$满足$f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且$f''(x)>0$，则（　B　）

A) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x>0$.　　　　B) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$.

C) $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.　　　D) $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

6. 设函数$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_{0}^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$，若$\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则$f(1)=$（　A　）

A) 2.　　B) 1.　　C) $\dfrac{1}{2}$.　　D) 0.

三、计算题（每题 8 分，共 64 分）

1. 设$y=y(x)$是由方程$x^3+y^3+xy-1=0$确定的隐函数，求$y''(0)$.

解 对方程两边关于x求导得$y'=-\frac{3x^2+y}{x+3y^2}$. 因此$y''=\frac{(3x^2+y)(1+6yy')-(6x+y\prime)(x+3y^2)}{(x+3y^2)^2}$. 由于$y(0)=1$, 故$y'(0)=-\frac{1}{3}$, 从而$y''(0)=0$.

2. 设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\cos t^2\\ y=t\cos t^2-\int_{1}^{t^2}\dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u\end{cases}$确定，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

解 $\frac{dy}{dt}=-2t^2\sin t^2, \frac{dx}{dt}=-2t\sin t^2$.　$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=t$.　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d(dy/dx)}{dt}}{dx/dt}=-\frac{1}{2t\sin t^2}$，因此$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

3. 若函数$f(x)=4x^3+\dfrac{3}{x}$，求$f(x)$的极值.

解 由$f'(x)=12x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{12\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{x^2}$，$f''(x)=\dfrac{24x^4+6}{x^3}$可知，$f(x)$的可能极值点为$x=$

$-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$.列表

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	不存在	−	0	+

可知$f(x)$的极大值为$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-4\sqrt{2}$，极小值为$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4\sqrt{2}$.

4. 求曲线 $y=\dfrac{x^{x+1}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线方程.

解 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^x}{(1+x)^x}=\dfrac{1}{e}$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-\frac{1}{e}x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{1}{e}x)=\lim_{x\to+\infty}x(\frac{x^x}{(1+x)^x}-e^{-1})=\lim_{x\to+\infty}x(e^{x\ln\frac{x}{1+x}}-e^{-1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}xe^{-1}(e^{x\ln\frac{x}{1+x}+1}-1)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-1}[1-x\ln(1+\frac{1}{x})]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}e^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=e^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=e^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}e^{-1}.$$

因此曲线斜渐近线为 $y=e^{-1}x+\dfrac{1}{2}e^{-1}$.

5. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x+\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解 法 1 $\displaystyle\int\frac{x+\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{1+\sin x}dx+\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx+\ln(1+\sin x)$

$$=-\int xd\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\ln(1+\sin x)=-x\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\int\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx+\ln(1+\sin x)$$

$$=-x\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-2\int\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\ln(1+\sin x)$$

$$=-x\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+\ln(1+\sin x)+C.$$

法 2 $\displaystyle\int\frac{x+\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{1+\sin x}dx+\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx+\ln(1+\sin x)$

$$=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx-\int\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx+\ln(1+\sin x)=\int xd\tan x-\int xd\sec x+\ln(1+\sin x)$$

$$=x\tan x-\int\tan xdx-x\sec x+\int\sec xdx+\ln(1+\sin x)$$

$$=x\tan x+\ln|\cos x|-x\sec x+\ln|\sec x+\tan x|+\ln(1+\sin x)+C.$$

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}.$$

7. 求 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin t}{=}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos t}{1+\cos t}dt$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos^2 t)\cos t}{1+\cos t}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)\cos tdt=4(1-\frac{\pi}{4})=4-\pi\text{。}$$

8. 求函数 $I(x)=\int_0^x\frac{t+2}{(t^2+2t+2)^2}\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值与最小值.

解 当 $x\in[0,1]$ 时，$I'(x)=\frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}>0$，即 $I(x)$ 在 $[0,1]$ 上为单调递增函数.

当 $x=0$ 时，$I(x)$ 有最小值 $I(0)=0$；

当 $x=1$ 时，$I(x)$ 有最大值 $I(1)$，

$$I(1)=\int_0^1\frac{t+2}{\left(t^2+2t+2\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(t^2+2t+2)}{\left(t^2+2t+2\right)^2}+\int_0^1\frac{d(t+1)}{\left((t+1)^2+1\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+2t+2}\Big|_0^1+\left[\frac{1}{2}\frac{t+1}{t^2+2t+2}+\frac{1}{2}\arctan(t+1)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\arctan 2-\frac{\pi}{8}.$$

或 $I(1)=\int_0^1 \frac{t+2}{\left(t^2+2t+2\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(t^2+2t+2)}{\left(t^2+2t+2\right)^2}+\int_0^1 \frac{d(t+1)}{\left((t+1)^2+1\right)^2}$

$$\overset{t+1=\tan u}{=}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+2t+2}\Big|_0^1+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 udu}{\sec^4 u}=\frac{3}{20}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\cos^2 udu=\frac{3}{20}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\frac{1+\cos 2u}{2}du$$

$$=\frac{3}{20}+\frac{1}{2}(\arctan 2-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{4}\sin 2u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}=\frac{3}{20}+\frac{1}{2}(\arctan 2-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{4}\left(\sin(2\arctan 2)-1\right)$$

$$=-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\arctan 2-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\sin(\arctan 2)\cdot\cos(\arctan 2)=-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\arctan 2-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$=-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\arctan 2-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\arctan 2-\frac{\pi}{8}$$

四、综合应用题（本题 7 分）

某商品的需求函数为$Q(p)=e^{-\frac{p}{2}}$， p 为价格.

(1) 求当 $p=4$ 时的边际需求，并说明其经济意义；

(2) 求当 $p=4$ 时的需求弹性，并说明其经济意义；

(3) 当 p 为何值时，总收益的最大值是多少？

(4) 当 $p=4$ 时，若价格 p 上涨1%，总收益将变化百分之几？

解 (1) $Q'(p)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{p}{2}},Q'(4)=-\frac{1}{2}e^{-2}$. 表示价格$p$从 4 上升（下降）1 单位，需求相应减少（增加）$\frac{1}{2}e^{-2}$单位；

(2) 需求弹性：$\eta(p)=\frac{EQ}{Ep}=\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}=-\frac{p}{2}$. $\eta(4)=-2$. 表示价格p从 4 上升（下降）1%， 需求相应减少（增加）2%.

(3) 总收益$R(p)=pQ(p)=pe^{-\frac{p}{2}},R'(p)=\left(1-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}}$. $R'(p)=0\Rightarrow p=2;R''(p)=\left(-1+\frac{p}{4}\right)e^{-\frac{p}{2}},R''(2)=-\frac{1}{2e}<0$. 因此当$p=2$时，总收益最大$R(2)=2Q(2)=\frac{2}{e}$.

(4) 收益弹性：$r(p)=\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\frac{dR}{dp}=1-\frac{p}{2}.r(1)=\frac{1}{2},r(4)=-1$.
$r(1)$表示价格从 1 上升（下降）1%，总收益相应增加（减少）0.5%；
$r(4)$表示价格从 4 上升（下降）1%，总收益相应减少（增加）1%.

五、证明题（本题 5 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续导数，在$(0,1)$内二阶可导，且 $f(0)=f(1)$. 证明：存在

$\xi \in (0,1)$ 使得 $f''(\xi) = \dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

证 令$F(x) = (1-x)^2 f'(x)$. 则$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$F(1) = 0$.
由$f(0) = f(1)$可知存在$\xi_1 \in (0,1)$，使得$f'(\xi_1) = 0$，从而$F(\xi_1) = 0$.
因此$F(x)$在$[\xi_1, 1]$上满足 Rolle 定理条件，故存在$\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0,1)$，使得$F'(\xi) = 0$，即

$$-2(1-\xi)f'(\xi) + (1-\xi)^2 f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$