诚实考试吾心不虚，公平竞争方显实力，
考试失败尚有机会，考试舞弊前功尽弃。

上海财经大学《高等数学（经管类）I》课程考试卷(A)闭卷

课程代码____________课程序号________________

2021——2022 学年第一学期

一、填空题（每题 2 分，共 12 分）

1．设 $y=x^{\ln x}$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=e}=$______________.

2. 若 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，则 $f^{(n)}(x)=$__________________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)=$__________________.

4. $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$,则 $\int\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$______________.

5. $\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=$ _________________.

6. 若 m 为正整数，则 $\int_0^{+\infty}x^{4m+1}e^{-x^2}\mathrm{d}x=$__________________.

二、单选题（每题 2 分，共 12 分）

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　　）

A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.　C) $ab=0$.　D) $ab=2$.

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　　　）

A) 连续.　B) 有可去间断点.　C) 有跳跃间断点.　D) 有无穷间断点.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　　）

A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在.　B) $\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在.

C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.　D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

4. 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x$，$(-\dfrac{\pi}{2} < x < 2\pi)$ 的拐点是（　　）

A) $(0,2)$.　　B) $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.　　C) $(\pi,-2)$.　　D) $(\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{3\pi}{2})$.

5. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = f(-1) = 1, f(0) = -1$，且 $f''(x) > 0$，则（　　）

A) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x > 0$.　　B) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x < 0$.

C) $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.　　D) $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x < \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

6. 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x) = \int_{0}^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$，若 $\varphi(1) = 1$，$\varphi'(1) = 5$，则 $f(1) =$（　　）

A) 2.　　B) 1.　　C) $\dfrac{1}{2}$.　　D) 0.

三、计算题（每题 8 分，共 64 分）

1. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ 确定的隐函数，求 $y''(0)$.

2. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \cos t^2 \\ y = t\cos t^2 - \int_{1}^{t^2} \dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

3. 若函数 $f(x) = 4x^3 + \dfrac{3}{x}$，求 $f(x)$ 的极值.

4. 求曲线 $y = \dfrac{x^{x+1}}{(1+x)^x}$ $(x > 0)$ 的斜渐近线方程.

5. 求不定积分 $\int \dfrac{x + \cos x}{1 + \sin x}\mathrm{d}x.$

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} \ln(1 + \dfrac{k}{n})$.

7. 求 $\int_{-1}^{1} \dfrac{2x^2 + x\sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

8. 求函数 $I(x) = \int_{0}^{x} \dfrac{t+2}{(t^2 + 2t + 2)^2}\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值与最小值.

四、综合应用题（本题 7 分）

某商品的需求函数为$Q(p)=e^{-\frac{p}{2}}$， p 为价格.

(1) 求当 $p=4$ 时的边际需求，并说明其经济意义；

(2) 求当 $p=4$ 时的需求弹性，并说明其经济意义；

(3) 当 p 为何值时，总收益的最大值是多少？

(4) 当 $p=4$ 时，若价格 p 上涨1%，总收益将变化百分之几？

五、证明题（本题 5 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(1)$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.