Предельная теорема для марковской цепи с несимметричными вероятностями перехода

Ахан Исмаилов

November 2022

1 Постановка задачи

Рассматривается марковская цепь (случайное блуждание) с несимметрическими вероятностями перехода на одно состояние вверх или на одно состояние вниз, где s состояние цепи, а $p(s)$ - неубывающая функция, имеющая следующие свойства:
(1)

$$p(0) = 1/2.$$
$$p'(0) = a > 0.$$
$$p''(0) \text{ - существует.}$$

Пусть r - параметр масштаба доступных состояний, тогда $p_r(s)$ вероятность перехода из состояния s в $s-1$, которая задается как $p_r(s) = p(rs)$. Вероятность перехода из s в $s+1$ равна соответсвенно $1 - p_r(s)$.

2 Предельная теорема

Пусть π_s стационарные вероятности нашего процесса. И s имеет (дискретную) плотность π_s. Тогда:
(2)

$$s \cdot 2\sqrt{ar} \to N(0,1), \text{ при } r \to 0_+$$

(сходимость к нормальному по распределению)

3 Доказательство

Пусть,

$$\sigma = 1/\sqrt{4ar}$$

Давайте рассматривать такие состояния, что:
(3)

$$|s| < 3\sqrt{1/(4ar)} = 3\sigma.$$

То есть, те которые находятся в 3σ интервале.

Также из условия (1) на $p(s)$.

$$p(x) = 1/2 + ax + O(x^2)$$

Значит,

$$p_r(s) = 1/2 + ars + O((rs)^2)$$

По формулам стационарных вероятностей у таких цепей, имеем также следующее соотношение:
(4)

$$\pi_{s+1} = \tfrac{1-p_r(s)}{p_r(s+1)} \cdot \pi_s$$

Пусть $s \geq 0$, тогда из (2)

$$\tfrac{1-p_r(s)}{p_r(s+1)} < 1$$

То есть монотонность,

$$\pi_{s+1} \leq \pi_s.$$

Также,

$$ln(\tfrac{1}{2} + x) = -ln2 + 2x + O(x^2)$$

Взяв ln (4) имеем: (5)

$$\begin{gathered} ln\pi_{s+1} = ln[1 - p_r(s)] - ln[p_r(s+1)] + ln\pi_s = \\ ln[\tfrac{1}{2} - ars + O((rs)^2)] - ln[\tfrac{1}{2} + ar(s+1) + O((rs)^2)] + ln\pi_s = \\ -2ars - 2ar(s+1) + O((rs)^2)) + ln\pi_s = -2ar(2s+1) + O((rs)^2) + ln\pi_s \end{gathered}$$

Давайте, выразим все стационарные вероятности через нулевое. Применяя (5) многократно.

$$ln\pi_s = -2ars^2 + O(r^2s^3) + ln\pi_0 = -s^2/(2\sigma^2) + O(r^{0.5}) + ln\pi_0$$

Значит, для $|s| \leq 3 \cdot \sigma$

$$\pi_s = const \cdot e^{-s^2/(2\cdot\sigma^2)} \cdot e^{O(r^{0.5})} = const \cdot e^{-s^2/(2\cdot\sigma^2)} \cdot (1 + O(r^{0.5}))$$

То есть, вид такой же как и у плотности нормального распределения. А остальные $s > 3\sigma$, из за монотонности π_s незначительно маленькие и не будут влиять на сходимость. Для π_s при $s < 0$ выводится аналогично.

4 Численные расчеты

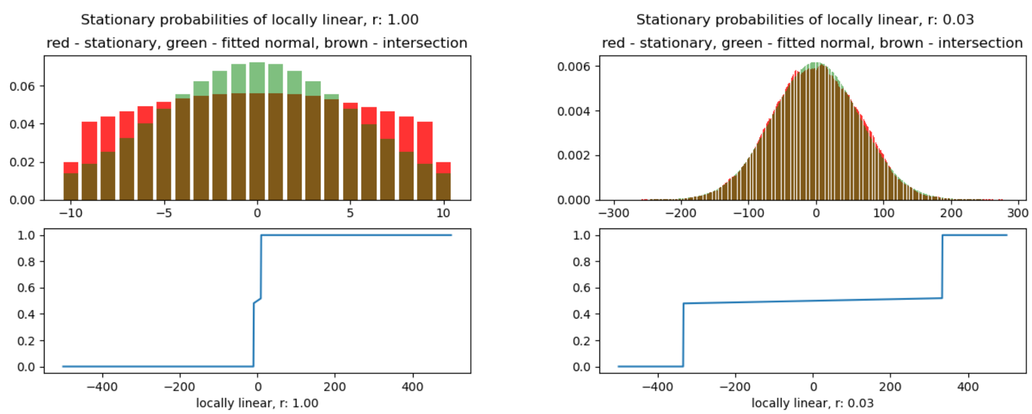
Давайте проведем численные расчеты чтобы проверить наш факт. Мы выведем наши стационарные вероятности как частоты нахождения в состояний. Мы проводим численный расчет, зная что $p_r(s)$, $1 - p_r(s)$ это вероятности переходов в соседние состояния. И делаем таких 10^7 итераций. То есть в каждом состояний, мы бросаем монетку и выбираем идем направо или налево. Красный цвет, вычесленные стационарные вероятности, зеленым цветом я нарисовал нормальное распределение со средним и дисперсией как у полученных данных. То есть, если данные являются нормальным распределением, то красный цвет полностью совпадет с зеленным. Их пересечение, на графике выглядит коричневым цветом.

График слева, локально линейная функция,

$$p(s) = s/500 + 1/2, \text{ если } |s| < 10$$
$$p(s) = 1, \text{ если } s \geq 10$$
$$p(s) = 0, \text{ если } s \leq -10$$

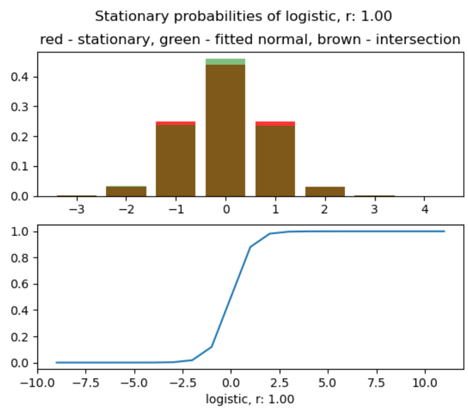
График справа, функция,

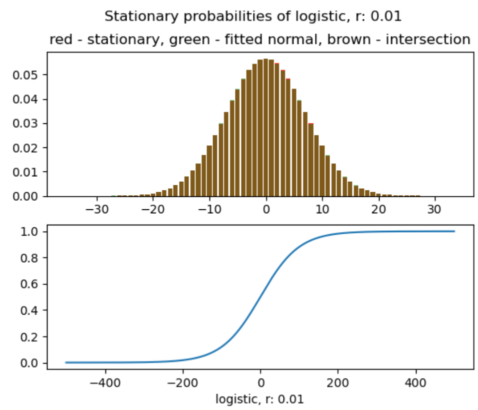
$$p_r(s) = p(0.03 \cdot s)$$



Логистическая функция

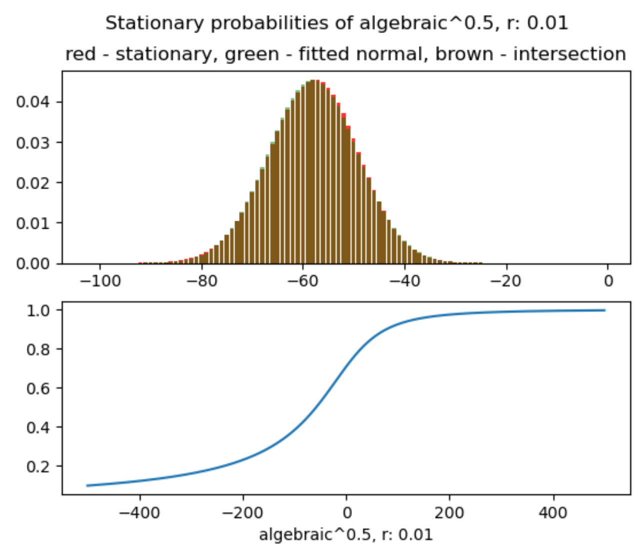
$$\text{График слева: } p(s) = e^s/(e^s + e^{-s})$$
$$\text{График справа: } p_r(s) = p(0.01 \cdot s)$$





Случай когда значение функции принимает значение 1/2, не в точке ноль. Факт все еще верен, но лишь среднее значение теперь тоже не нулевое.

$$p(s) = [(1 + s/\sqrt{1 + s^2})/2]^{0.5}$$
$$p_r(s) = p(0.01 \cdot s)$$



5 Возможные обобщения / комментарий

Нам не обязательно чтобы функция $p(s)$, проходила через значение 1/2, в нуле. По численным расчетам видно что это работает и в общем случае.

Заметим, что мы можем обобщить на непрерывную марковскую цепь, заменив вероятности перехода на частоты. Среднее нахождение в состояний это сумма $p(s)+(1-p(s)) = 1$. Если же домножить интенсивности на произвольное число, то есть интенсивности переходов сделать $\lambda_s \cdot p(s)$, $\lambda_s \cdot (1-p(s))$. То, я думаю что, стационарные вероятность в позиций s, лишь домножиться на $1/\lambda_s$, в то время как пропорция между остальными останется неизменной.

Интуиция доказательства. Заметим что для нашего доказательства мы сделали предположение что функция аппроксимируется линейной около точки нуля. И для нее у нас все верно. А то, что мы вводили $p_r(s)$, то есть растягивали наш график, мы получается увеличивали регион в котором наша функция примерно линейная, в то время, существенные вероятности находятся лишь в 3σ интервале, а этот интервал увеличивается с более медленной скоростью. Поэтому, и верна наша теорема.

6 Применения

Я заметил этот факт когда моделировал свою позицию в алгоритме маркет мейкинга. Маркет мейкинг это когда мы стараемся и покупать и продавать акции, зарабатывая на разнице. Примерно так работают обменные пункты валют. Там алгоритмы которые это делают стараются держать свою позицию (количество акции) около нуля. Таким образом они тоже как в нашем процессе ходят $+1/-1$. Но когда позиция выше нуля, они чаще стараются продавать. И когда позиция меньше нуля чаще покупать, чтобы не иметь риск связанный со своей позиций. И как раз, функция вероятностей переходов описывается монотонной функцией сигмоидного типа $p(s)$. Где при больших s, вероятность продажи около единицы. При маленьких, около нуля. Взять к примеру статью Стоикова [1]. Там $p(s)$ логистическая функция, которую я тоже просиммулировал и включил графики. Причем $p(s)$, у них появляеться второстепенно, от цен покупок и продаж которые ставятся, а также от моделирования маркет ордеров на рынке, то есть частоты того как часто нас будут исполнять на соответственных выставленных ценах.

И таким образом мой факт поможет определять частоты того что маркет мейкер имеет позицию s. Что также поможет считать риск стратегий в явном виде.

7 Заключение

Некоторые технические моменты нужно подправить. Где то формализовать.

(1) https://www.math.nyu.edu/ avellane/HighFrequencyTrading.pdf