第 1 讲*

集合论与概率论

麻省理工学院 14.30 2006 年春季

Herman Bennett

1 集合论

1.1 基本概念和定理

1. 随机试验：任何结果具有不确定性的行为或过程。

2. 样本空间：随机试验（设为S）的所有可能结果（或元素）的集合。[有限对无限；离散对或连续] [1]

注意：这些讲义不一定是自封的。它们只是对讲座的一种补充而不是替代。

3. 随机事件：包含在样本空间（S）中的元素（子集A，B等）的集合。

4. $s \in S$：随机实验s的结果属于样本空间S。反之，则用符号$\notin$来定义。

5. $\varnothing = \{\ \}$：定义为空集(没有元素的集合)。它也定义为不可能事件的元素集合；例如：掷骰子时出现负点数事件。

6. 事件与事件的并：事件A与B的并是指属于事件A或事件B或同时属于两事件的所有元素的集合，用$A \cup B$表示。[$A \cup B = \{x：x \in A$ 或 $x \in B\}$]

性质：$A \cup A = A$；　$A \cup S = S$；　$A \cup \varnothing = A$

7. 事件与事件的交：事件A与B的交是指既属于事件A也属于事件B的元素集合，用 A∩B表示。 [A∩B={x： x∈A且x∈B}]

性质：A∩A=A； A∩S=A； A∩∅=∅

8. 对立事件：事件A的对立事件是所有不属于事件A的元素集合，表示为 A^c (等价于 $A^{'}$。 [A^c ={x：x∉A}]

性质：$(A^c)^c = A$；$\theta^c = S$；$S^c = \theta$；$A^c \cup A = S$；$A^c \cap A = A$

9. 事件的包含 $A \subset B$：如果事件A的每个元素也包含在事件B中，那么事件A包含于事件B，记作 $A \subset B$。

性质：如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则 $A = B$；

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset C$，则 $A \subset C$；

对于任何事件 A，则 $\varnothing \subset A$。

10. .事件与事件的不相容： 如果事件A 与B 没有共同的元素，那么事件 A 和事件B 不相容，或者相互排斥。 [A∩B=∅，则A 和 B为不相容事件]

11. 互为穷举：如果事件A 与 B的并是S，那么事件A与B互为穷举。[A∪B=S，则A 和 B 是互为穷举事件]

12. 最后，附加的结论(作业：思考如何用文氏图来表示）

－交换律：:A∪B=B∪A；A∩B=B∩A.

－结合律：A∪(B∪C)=(A∪B)∪C；A∩(B∩C)=(A∩B)∩C.

－分配律：A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)；A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C).

－摩根定理：$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$； $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2 概率论

2.1 概率的定义

事件 A 发生的可能性有多大？我们用事件 A 发生的概率来表示事件将要发生的可能性，记作 P(A)，它的取值在 0 到 1 之间的任意数。

概率函数的数学定义是以三个公理为基础的，它是基于概率的直观概念。[P()：{所有可能事件的集合}→[0，1]]

－公理 1：对任一事件 A，必有 P(A)≥0(非负数)。

－公理 2：必然事件的概率 P(S)=1。

－公理 3：对于任意一组不相容事件 A1， A2，...， An，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$，

n 是该组不相容事件集的总数量。

性质(对于事件 A 和事件 B)：

－ $P(A) = 1 - P(A^c)$； P(A∪B)=P(A)+P(B)—P(A∩B)；P(∅)=0；

－如果 A 和 B 是不相容的，那么 P(A∩B)=0；

－如果 $A \subset B$，那么 $P(A) \le P(B)$。

例 2.1. 证明 P(A∪B)=P(A)+P(B)—P(A∩B)。

2.2 等概率事件---（即概率相等）时，计算 P(A)的方法

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \quad (1)$$

N 为包含于集合 S 中的结果总数。N(A)为包含于事件 A 中的结果总数。

当样本空间很小，且每个结果等概率（概率相等）时，只要统计发生次数即可。例如，掷一枚骰子：N=6， P(3)=1/6。如果你遇到的问题不是这么简单，可以用下面的方法来计算概率。

1. <u>一般乘法法则</u>：如果一个过程分为多个阶段（阶段的总数为K），第i个阶段的完成方法有 n_i 种，无论前面阶段发生什么结果，这一过程本身有 $n_1 n_2 ... n_k$ 种完成方法。注意每个阶段的选择不一定是相同的。(虽然它们可以相同)

例 2.2 假设盒子里包含 7 种不同颜色的球。如果每个球在取出后立即放回，那么从盒子中取出 3 个球有多少种方法？

2. <u>排列</u>：假设从n个物品中不放回地抽取k个物品，排列的总数（意味着与顺序有关）为 n(n-1)...(n-k+1)。推广公式为 $P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$ [如例 2.2 中为 $P_{3,7} = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \bullet 6 \bullet 5$]

例 **2.3.**　4 只不同的狗有多少种排列方法？从 10 只狗中的选出 4 只不同的狗，有多少种选法？

3.　<u>组合</u>**:** 现在假设试验的方法如前面所述，从总数为n的物品中不放回地抽取k个物品。组合的总数（意味着与顺序无关）为 $C_{k,n} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$，$\binom{n}{k}$读作“从n中选择k”；表示从n个物品集合中抽取k个物品的方法数目。[如例 **2.2.** 中为

$$C_{3,7} = \frac{7!}{3!(7-3)!}$$

例 **2.4.** 从一套 5 本书中挑选出 3 本书有多少种可能的组合？从一套 5 本书中挑选出 5 本书有多少种可能的组合(注意：不同于排列)

总结：当简单数数不太现实时，我们用 1-3 的方法计算样本空间中包含的结果总数 N，然后计算事件 A 包含的结果总数 N(A)，这样，我们就可以计算出 P(A)。

例 2.5. 一副 52 张的纸牌有 4 张 A 。假定你分给 4 位牌手每人 13 张牌。每个牌手刚好得到一张 A 的概率是多少？

例 2.6. 抛一枚均匀硬币 7 次。出现 3 次正面的概率是多少？至少出现 3 次正面的概率是多少？

2.3 条件概率

当不能确定一项试验的精确结果时，我们就使用概率来描述。然而，这并不意味着我们对试验过程一无所知。一个事件的概率P(A)是在已知信息基础上得到的。同时，我们还可以获得一些新的信息修正我们的判断（即概率）。条件概率，即P(A|B)，是指得到新信息后做出的新判断，在这里新信息指的是事件B的发生。[2]

$$\text{定义：}\quad P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)>0 \qquad (2)$$

注意：

- $P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$.
- 如果事件 $A_1,A_2,\ldots A_k$ 不相容且为互为穷举，那么：

  $P(A_1|B)+P(A_2|B)\ldots+=1$ 并且

  $\sum_{i=1}^{k}P(B|A_i)P(A_i)=P(B)$ （全概率公式）

贝叶斯定理：把样本空间S分成 $A_1,A_2,\ldots A_k$ k个不相容且互为穷举事件，这样P(A_i)>0。令事件B满足P(B)>0，那么，

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k}P(B|A_i)P(A_i)}\left(=\frac{P(A_i\cap B}{P(B)}\frac{\text{条件概率}}{\text{全概率公式}}\right) \qquad (3)$$

这种更新事件 A 概率的方法叫做贝叶斯更新法。

[1] $P(A|B)$和P(A) 也分别被叫做后验和先验。

例 2.7. 市场上有一种叫 MP∞的新的数字播放音乐设备。因为是新产品，所以并不是100%可靠。假定知道该新设备中 20%不好用，30%的寿命只能持续使用 1 年，而其余的可以使用 5 年。如果你买了一个新的 MP∞并且好用，它能使用 5 年的概率是多少？

2.4 独立性

如果 $P(A|B) = P(A)$，那么事件 A 和 B 就被称为是相互独立的；否则，就是相关的。

- 例如，抛一枚均匀的硬币 2 次，第 2 次抛硬币出现正面 H 或反面 T 的概率并不取决于第 1 次出现 H 或 T。换句话说，第 1 次抛硬币的结果并没有为第 2 次抛硬币的结果提供任何附加的信息，即 P(A|B)=P(A)
- 如果事件 A 和 B 是相互独立的，那么 P(A∩B)=P(A)P(B)(根据条件概率的定义).
- 如果事件 A 和 B 是相互独立的，那么 A 和 B^c 也是相互独立的，即 [$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$]。
- <u>两个或两个以上事件互为独立的推广定义</u>：对于k≤n事件的所有可能子集，如果 $P(A_i \cap A_j \cap ...A_k) = P(A_i)P(A_j)...P(A_k)$。那么，事件 $A_1, A_2, ..., A_n$ 相互独立。

例 2.8. 关于掷骰子试验的事件：A={2，4，6}，B={1，2，3，4}，C={1，2，4}。事件 A 和 B 是相互独立的吗？事件 A 和 C 呢？