0 (四个)最常用的假设检验：应用复习

我们针对同一个随机样本的应用，来复习一下四个最常用的假设检验框架。对每种检验，我们需要变换所做的假设和决策规则。

0.1 随机样本

设 $X_1,...,X_{10}$ 为总体服从正态分布的一个随机样本，均值(μ)未知，标准差已知(σ=1)。下面的表格代表了随机样本的实现值：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\bar{x}$
1.0	0.4	-0.3	1.2	-0.6	1.6	-0.3	2.0	0.5	-0.1	0.54

0.2 似然比检验 (LRT):

用显著性水平为 5%进行似然比检验，原假设是总体均值为 0，备择假设是为总体均值为 1。

$$H_0\text{：}\ \mu = 0$$

$$H_1\text{：}\ \mu = 1$$

决策规则的表达式为： “如果 $f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})\rangle \mathrm{k}$，则拒绝 H_0 ” 。

- 我们需要计算 k 和对于 $i = 0,1$ 时，$f_i(\mathrm{x})$ 的值。k 的值取决于我们想要构造的检验的显著性水平，$f_i(\mathrm{x})$ 的值取决于随机样本的实现值。

0.2.1 计算 k

为了计算 k，我们需要先知道原假设中 $f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})$ 的分布。注意大写字母 X 说明统计量 $f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})$ 是一个由随机样本中的随机变量函数构造的随机变量。

计算 $f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})$ 分布的方法取决于（具体例子）假定的总体分布，往往很难计算。一旦知道了 $f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})$ 的分布，我们就可以寻找满足显著性水平条件的 k 值：

$$P(f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})\rangle \mathrm{k}\,|\,\mu=0)=\alpha=0.05$$

DeGroot and Schervish(2002，第 465 页第八章)中提出一种不一定要知道 $f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})$ 的分布就能计算 k 的方法。运用这种方法我们计算出 k=1.22，这意味着 $P(f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})\rangle 1.22\,|\,\mu=0)=\alpha=0.05$。大家课后可详见 DeGroot and Schervish 书中的叙述。（不是考试必读部分）

0.2.2 计算似然比 $f_1(\mathrm{x})/f_0(\mathrm{x})$

计算 $f_0(\mathrm{x})$：

$$f_0(\mathbf{x}|\mu=0)=\prod_{j=1}^{n} f_0(x_j|\mu=0)=\prod_{j=1}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\mid \mu=0,\ \sigma=1\right)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{10/2}\cdot 1^{10}}\ e^{-(2\cdot 1^2)^{-1}\sum_{j=1}^{10}(x_j-0)^2}=\frac{1}{(2\pi)^{10/2}\cdot 1^{10}}\ e^{-(2\cdot 1^2)^{-1}9.96}$$

计算 $f_1(\mathrm{x})$：

$$f_1(\mathbf{x}|\mu=1)=\prod_{j=1}^{n} f_0(x_j|\mu=1)=\prod_{j=1}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\mid \mu=1,\ \sigma=1\right)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{10/2}\cdot 1^{10}}\ e^{-(2\cdot 1^2)^{-1}\sum_{j=1}^{10}(x_j-1)^2}=\frac{1}{(2\pi)^{10/2}\cdot 1^{10}}\ e^{-(2\cdot 1^2)^{-1}9.16}$$

$$\Longrightarrow\quad f_1(\mathbf{x})/f_0(\mathbf{x})=e^{-0.5\cdot 9.16}/e^{-0.5\cdot 9.96}=e^{0.40}=1.49$$

0.2.3 检验的结果

$f_1(x)/f_0(x)=1.49 \rangle k=1.22$，所以，在显著性水平为 5%下，拒绝总体均值为 0 的原假设，接受总体均值为 1 的备择假设。

0.3 单侧检验:

用显著性水平为 6%的单侧检验，检验原假设为总体均值为 0.4，备择假设为总体均值大于 0.4。

$$H_0：\mu = 0.4$$
$$H_1：\mu \rangle 0.4$$

决策规则的表达式为：““如果$\bar{x}\rangle c$, 则拒绝 H_0 ”。

- 我们需要计算 c 值，它取决于我们想要构造的假设检验的显著性水平。

0.3.1 计算 c

我们要找到满足犯第一类错误的概率为 6%这一条件的 c 的值，

$$P(\bar{X}\rangle c \,|\, \mu = 0.4\ ) = \alpha_0 = 0.06$$

要计算 c，我们首先需要知道随机变量 $\bar{X}$ 的分布。随机样本是正态分布，因此，可得 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$。那么在原假设中，$\bar{X} \sim N(0.4, \frac{1^2}{10})$，所以，

$$P\left(\frac{\sqrt{10}(\bar{X} - 0.4)}{1} > \frac{\sqrt{10}(c - 0.4)}{1}\right) = 0.06$$

因为 $\frac{\sqrt{10}(\bar{X} - 0.4)}{1} = Z \sim N(0, 1)$，我们知道

$$P\left(Z > \frac{\sqrt{10}(c - 0.4)}{1}\right) = 0.06$$

因为$P(Z > z_{0.94}) = 0.06$，$z_{0.94}$=1.555，可得：

$$\frac{\sqrt{10}(c-0.4)}{1} = 1.555$$

因此，

$$c = 0.4 + \frac{1.555}{\sqrt{10}} = 0.892$$

0.3.2 检验的结果

$\bar{x} = 0.54 < c = 0.892$，所以，在显著性水平为 6%下，不能拒绝总体均值为 0.4 的原假设H_0，总体均值大于 0.4 的备择假设。

0.4 双侧检验:

在显著性水平为 1%下，采用对称的双侧检验，检验总体均值等于 0.1 的原假设和总体均值不等于 0.1 的备择假设。

$$H_0\text{：} \mu = 0.1$$
$$H_1\text{：} \mu \neq 0.1$$

决策规则的表达形式为：“如果$\bar{x}$<c_1或$\bar{x}$>c_2，拒绝H_0”。

- 需要计算c_1和c_2，它们的值取决于检验的显著性水平。

0.4.1 计算 c_1 和 c_2

我们需要找到满足犯第一类错误概率为 1%这一条件的c_1和c_2的值。

$$P\left(\bar{X} < c_1 | \mu = 0.1\right) + P\left(\bar{X} > c_2 | \mu = 0.1\right) = \alpha = 0.01$$

因为我们构造的是一个对称的检验，需要满足如下两个条件：

P（$\bar{x}<c_1|\mu=0.1$）=0.005　和P（$\bar{x}>c_2|\mu=0.1$）=0.005

为了计算c_1和c_2，我们需要知道随机变量 $\bar{X}$ 的分布。随机样本是正态的，则可知 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，在原假设中，$\bar{X} \sim N(0.1, \frac{1^2}{10})$，因此：

$$P\left(\frac{\sqrt{10}(\bar{X}-0.1)}{1} < \frac{\sqrt{10}(c_1-0.1)}{1}\right) = 0.005$$
且
$$P\left(\frac{\sqrt{10}(\bar{X}-0.1)}{1} > \frac{\sqrt{10}(c_2-0.1)}{1}\right) = 0.005$$

因为$\frac{\sqrt{10}(\bar{X}-0.1)}{1} = Z \sim N(0,1)$，可得：

$$P\left(Z < \frac{\sqrt{10}(c_1-0.1)}{1}\right) = 0.005$$
以及
$$P\left(Z > \frac{\sqrt{10}(c_2-0.1)}{1}\right) = 0.005$$

因为 $P(Z \langle\ z_{0.005}) = 0.005$ 和 $P(Z\ \rangle\ z_{0.995}) = 0.005$，在这里，$z_{0.005} = -2.575$ 和 $z_{0.995} = -2.575$，可得：

$$\frac{\sqrt{10}(c_1-0.1)}{1} = -2.575$$
和
$$\frac{\sqrt{10}(c_2-0.1)}{1} = 2.575$$

解得：

$$c_1 = 0.1 + \frac{-2.575}{\sqrt{10}} = -0.714$$
和
$$c_2 = 0.1 + \frac{2.575}{\sqrt{10}} = 0.914$$

- 注意，计算c_2可以遵循上述单侧检验中计算c的步骤。（$\alpha = 0.005$）

0.4.2 检验结果

$\bar{x} = 0.54 \rangle c_1 = -0.714$和$\bar{x} = 0.54 \langle c_2 = 0.914$，则显著性水平为 1%时不能够拒绝总体均值等于 0.1 的原假设而去接受总体均值不为 0.1 的备择假设。

0.5 广义似然比检验（GLRT):

我们并不是求解这个检验，而是给出基本的指导：

$$H_0 : \mu = 0$$
$$H_1 : \mu \neq 0$$

决策规则表达式为："如果T⟩d，则拒绝H_0"。

T 为如下统计量：

$$T = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_0} L(\theta_1, \ldots, \theta_k | x_1, \ldots, x_n)}{\sup_{\theta \in \Omega} L(\theta_1, \ldots, \theta_k | x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_0} f(\mathbf{x} | \theta \in \Omega_0)}{\sup_{\theta \in \Omega} f(\mathbf{x} | \theta \in \Omega)}$$

- 我们需要计算 T 和 d.。对于 T ，就要找到似然函数的最大值（给定样本数据），通过在原假设和备择假设的集（此时$\forall \mu \in \Re$）中的所有可能的值估计 μ。这个似然函数的最大值为从分母中得到的那个数值。
- 我们需要遵循相同的步骤来计算分子中的数值，但是，只需要在原假设空间内估计 μ 所有可能值的似然数。因为在这种情况下，原假设空间是一个简单原假设，所以必须在 μ =0 处估计似然数。
- 我们根据条件，$P(T\langle d | \mu = 0) = \alpha$，计算$d$。与似然比检验一样，计算 T 的分布方法因情况不同而异，很多时候很难计算。当计算广义似然比检验时，我们采用另一种方法。这种方法只应用于假设 n→∞的情况下。在一个大样本中，我们知道$-2\ln T$ 的极限分布（这一结果本课程不予证明）如下：

$$-2lnT \overset{n \to \infty}{\sim} \chi^2_{(r)}$$

其中，r等于Ω中的自由参数#减掉Ω_0中的自由参数# r[1]

- 如果$-2\ln T \rangle \chi^2_{(r), \alpha}$，则拒绝$H_0$。

[1]技术结果表明该分布是一个$\chi_{(r)}{}^2$分布，自由度$r = \dim\Omega - \dim\Omega_0$。