第 3 讲*

多维随机变量（多变量模型）

麻省理工学院 14.30 2006 年春季

Herman Bennett

6 多维随机变量

6.1 二维分布

很多试验涉及两个或两个以上的变量。对于这样的情况，必须定义一个包含我们所关注的多维随机变量的随机向量。

一个**n维随机向量**定义为从样本空间到实数$\Re^n$的函数。在二维情况下，n=2。

6.1.1 离散模型

设(X,Y)为离散二维随机向量，随机向量(X，Y)的联合概率质量函数记作$f_{XY}(x,y)$，定义为：

$$f_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)\text{，对于任意 x 和 y；} \qquad \textbf{(9)}$$

满足如下性质：

（1）$f(x,y) \geq 0$，对于任意(x,y)。

（2）$\sum_{\forall x}\sum_{\forall y} f(x,y) = 1.$

- 注意：对于$f_{XY}(x,y) : \Re^2 \to \Re$.

注意：这些讲义不一定是自封的。它们只是对讲座的一种补充而不是替代。

● 与一维随机变量一样，在二维随机变量中，事件 A 被定义为结果(x, y)的子集。

事件 A 的概率表示为：

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} f(x, y) \tag{10}$$

● 与一维随机变量一样，二维随机变量(X,Y)的分布特征完全可以通过联合累积分布函数和联合概率质量函数来描述。(X,Y)的<u>联合累积分布函数</u>为$F(x, y)$，定义为

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{X\le x}\sum_{Y\le y} f(x, y). \tag{11}$$

例 **6.1.** 看看下面 $f(x, y)$ 的分布特征，计算 $P(X \ge 2, Y \ge 3)$，$P(X = 2)$ 和 $P(|X - Y| = 1)$ 。

$f(x,y)$	0	1	2	3	4
0	.1	.05	.05	0	0
1	.05	.2	.2	.05	0
2	0	0	.1	.1	.05
3	0	0	0	0	.05

6.1.2 连续模型

设(X,Y)是一个连续二维随机向量。(X,Y)的联合密度函数是$f_{XY}(x,y)$，定义为：

$$P((X,Y)\in A)=\int_A\int f_{XY}(x,y)dxdy$$，对于xy平面的任意子集A； **(12)**

满足如下性质：

（1）$f(x,y)\geq 0$，对于任意(x,y)。

（2）$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$

- 再次注意$f_{XY}(x,y):\Re^2\rightarrow\Re.$

和一维连续型随机变量一样，二维随机变量(X,Y)的分布特征完全可以通过联合累积分布函数和联合概率密度函数来描述。(X,Y)的联合累积分布函数为$F(x,y)$，定义为：

$$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{XY}(u,v)dudv \quad \textbf{(13)}$$

- $F(-\infty,y)=0,\ F(x,-\infty)=0,\ \ F(-\infty,+\infty)=1$
- 如果(X,Y)是连续随机向量，那么$P(X=x_0,Y=y_0)=?$
- 在$f(x,y)$的连续点上，$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

例 6.2. 检验下面 $f(x,y)$ 的特征，并计算 $P(X \le 0.6, Y \le 0.6)$，以及 $P(X+Y \rangle 1)$。

$$f(x,y)=\begin{cases} 6xy^2 & 0<x<1,\quad 0<y<1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

6.2 边际分布

我们引入边际分布的概念，是为了描述从二维分布的角度再现包含在随机向量中每个随机变量的一维分布。

设 (X,Y) 是联合概率质量/密度函数为 $f_{XY}(x,y)$ 的随机向量，X和Y的边际质量/密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 定义为：

$$f_X(x)=\sum_{y\in\Re} f_{XY}(x,y)\ ;\qquad f_Y(y)=\sum_{x\in\Re} f_{XY}(x,y)\qquad \text{（离散型）}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy\ ;\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx\qquad \text{(连续型)}\qquad \textbf{(14)}$$

- 与概率质量/密度函数一样， $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 必须满足：

  （1）　$f() \geq 0$

  （2）　$\sum / \int = 1$

- 从边际分布 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 并不一定都能得出 (X,Y) 的联合分布。因为边际分布不包含变量之间关系的信息（除非它们是相互独立，后面将对此做进一步介绍）。

例 6.3. 计算例 **6.1** 中的 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 。

例 6.4. 计算例 **6.2** 中的 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

6.3 条件分布

设随机向量 (X,Y) 的联合概率质量/密度函数为 $f_{XY}(x,y)$，边际质量/密度函数为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。对于任意X，有 $f_X(x)>0$，X=x时Y的条件概率质量/密度函数记作 $f(y|x)$，

$$f(y|x)=P(Y=y|X=x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}, \quad f(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \qquad \textbf{(15)}$$

（离散型） （连续型）

对于任意Y，有 $f_Y(y)>0$，Y=y时X的条件概率质量/密度函数记作 $f(x|y)$，

$$f(x|y)=P(X=x|Y=y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad \textbf{(16)}$$

（离散型） （连续型）

- 与概率密度函数一样，$f(y|x)$ 和 $f(x|y)$ 必须满足：

  （1） $f()\geq 0$

  （2） $\sum/\int=1$

- 直觉认识：

—当知道随机变量 X 的值时，意味着在知道 X 的可能值之前，(x,y) 的结果就变为不可能事件（空集）。

—所以，$\sum/\int=1$ 这一性质也不再成立。为了满足这一性质，我们需要重新计算仍然可能结果发生的概率（边际分布除以联合分布），同时保持仍然可能结果之间的相对可能性不变。

例 6.5. 计算例 **6.1** 中的 $f(y|x=1)$

例 6.6. 计算例 **6.2** 中的 $f(y|x=0.5)$

6.4 独立性

设随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f_{XY}(x,y)$，边际密度函数为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。随机变量X和Y是相互独立的随机变量，满足下列条件：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$ ，对于任意 X 和 Y。 **（17）**

- 注意，此时意味着 $f(y|x)=f_Y(y), X=x$，并没有提供关于 Y 的任何额外信息。
- $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\longleftrightarrow P(x,y)=P(x)P(y)$ （离散型）
- 检验独立性的一种很有用的方法：

如果 X 和 Y 相互独立，$\leftrightarrow$ 对于所有的 x 和 y, $f(x,y)=g(x)h(y)$

例 6.7. 例 **6.1** 中 X 和 Y 是相互独立的吗？

例 6.8. 例 **6.2** 中 X 和 Y 是相互独立的吗？

6.5 总结

例 **6.9.**

$$f(x,y)=\begin{cases} 8yx & ,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

（1）证明 $f\ (x,y)$ 满足联合密度函数的性质。

（2）计算 X 和 Y 的边际分布。

（3）计算 $f(y|x=0.5)$。

（4） X 和 Y 是相互独立的吗？

例 **6.10.**

$$f(x,y)=\begin{cases} cyx^2 & x2\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

（1）计算 **c 的值。**

（2）计算 X 和 Y 的边际分布。

（3）计算 $f(y|x=0.5)$

（4）X 和 Y 是相互独立的吗？

6.6 多维分布

参看印发的资料。