第 5 讲*

随机变量/向量变换

麻省理工学院 14.30 2006 年春季

Herman Bennett

13 随机变量函数（单变量模型）

13.1 离散模型

设 X 是一个概率质量函数为 $f_X(x)$ 的离散型随机变量。定义一个新的随机变量 Y 作为 X 的函数，$Y = r(X)$。$f_Y(y)$ 是 Y 的概率质量函数，表示如下：

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P[r(X) = y] = \sum_{x:r(x)=y} f_X(x) \qquad (31)$$

例 13.1 计算 $f_Y(y)$，其中，$Y = X^2$ 且如果 x=-2，-1，0，1，2，$P(X = x) = 0.2$，否则，为 0。

注意：这些讲义不一定是自封的。它们只是对讲座的一种补充而不是替代。

13.2 连续模型

13.2.1 二步法

设 X 是一个概率密度函数为 $f_X\left(x\right)$ 的随机变量。定义一个新的随机变量 Y 作为 X 的函数，$Y=r\left(X\right)$。$f_Y\left(y\right)$ 是 Y 的概率密度函数，表示如下：

第一步：$F_Y\left(y\right)=P\left(Y\le y\right)=P\left[r\left(X\right)\le y\right]=\int_{x:r(x)\le y} f_X\left(x\right)dx$

第二步：$f_Y\left(y\right)=\dfrac{dF_Y\left(y\right)}{dy}$　（$F_Y\left(y\right)$ 在任何一点都是可微的）。　　**（32）**

例 13.2. 计算 $f_Y\left(y\right)$，其中，$Y=X^2$ 且 X～U[-1，1]。

13.2.2 一步法

设 X 是一个概率密度函数为 $f_X\left(x\right)$ 的随机变量。定义 X 的所有可能值的集合为 χ，使得 $f_X\left(x\right)>0\left[\chi=\left\{x: f_X\left(x\right)>0\right\};\text{例如：}a<X<b\right]$。

定义一个新的随机变量 Y，使得 $Y=r\left(X\right)$，这里 $r\left(\ \right)$ 是一个严格单调函数（递增或递减）且是 X 的可微函数（因而连续）。那么 Y 的概率密度函数 $f_Y\left(y\right)$ 表示如下：

$$f_Y\left(y\right)\begin{cases} f_X\left(r^{-1}\left(y\right)\right)\left|\dfrac{\partial r^{-1}\left(y\right)}{\partial y}\right| & ,\text{对于}y\in\mathcal{Y}\subseteq R; \\ 0 & ,\qquad\text{否则}\end{cases}\qquad\textbf{(33)}$$

这里集合 $\mathcal{Y}$ 定义为：$\mathcal{Y}=\left\{y: y=\mathcal{Y}=r\left(x\right),\ \text{对于所有}x\in\chi\right\}$。例如：

$a<X<b\Leftrightarrow\alpha<Y<\beta$。

- 如果$r(x)$是非单调的，将 X 进行分段，使得每一个区域都是单调的。那么就可以对每一个区域应用一步法，并相加。
- 式（**33**）是如何得出的呢？

例 13.3. 计算 $f_Y(y)$，其中，$Y=4X+3$且如果$0<x<\infty$，$f(x)=7e^{-7x}$，否则为 0。

例 13.4. 用一步法解答**例 13.2.**。

14 随机向量函数（多变量模型）

14.1 离散模型

设 $X \equiv \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ 是联合密度函数为 $f_X\left(x_1, ..., x_n\right)$ 的随机向量。

定义一个新的随机向量 $Y \equiv \left(Y_1, Y_2, ..., Y_m\right)$，是随机向量 X 的函数，则对于 $i = 1...m$，$Y_i = r_i\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$。Y 的联合密度函数 $f_Y\left(y_1, y_2 ..., y_m\right)$，表达式如下：

$$f_Y\left(y_1, y_2 ..., y_m\right) = \sum_{\substack{\left(x_1, ... x_n\right): r_i\left(x_1, ... x_n\right) = y_i \\ \forall i = 1...m}} f_X\left(x_1, ..., x_n\right) \qquad \textbf{(34)}$$

● 这是对 **13.1 部分**的直接推广，其中公式（34）是公式（31）的推广表达式。

例 14.1（卷积）设（X，Y）是一个随机向量， X 与 Y 是相互独立，概率质量函数分别为 $f_X\left(x\right)$ 和 $f_Y\left(y\right)$ 的离散型随机向量。计算 $P\left(Z=z\right)$，其中 $Z=Y+X$ 。

14.2 连续模型

14.2.1 两步法

$X\equiv\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ 是一个随机向量，其联合密度函数为 $f_X\left(x_1,...,x_n\right)$。

定义一个新的随机向量 $Y\equiv\left(Y_1,Y_2,...,Y_m\right)$，是随机向量 X 的函数，则对于 $i=1...m$，$Y_i=r_i\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$。Y 的联合密度函数为 $f_Y\left(y_1,y_2...,y_m\right)$，表达式如下（其中 m=1）：

第一步：

$$F_Y\left(y\right)=P\left(Y\le y\right)=P\left[r\left(X_1,...,X_n\right)\le y\right]=\int...\int_{(x):r(x)\le y}f_X\left(x_1,...,x_n\right)dx_1...dx_n$$

第二步：$f_Y\left(y\right)=\dfrac{dF_Y\left(y\right)}{dy}$　　（$F_Y\left(y\right)$ 在每一点都是可微的）　　**（35）**

● 这是对 **13.2.1 部分**的一个直接推广，其中式（35）是式（32）的推广表达式（此时，m=1）。

● m>1 的情况是类似的（但会比较复杂）。

14.2.2 一步法

设 $X \equiv (X_1, X_2, ..., X_n)$ 为联合密度函数为 $f_X(x_1, ..., x_n)$ 的随机向量。

定义一个新的随机向量 $Y \equiv (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$，是随机向量X的函数，则对于 $i = 1, ..., n$，$Y_i = r_i(X_1, X_2, ..., X_n)$，<u>与式（37）成立的条件相同</u>。Y 的联合密度函数为 $f_Y(y_1, ..., y_n)$，表达式如下：

$$f_Y(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{cases} f_X(s_1(), s_2(), ..., s_n())|J|, & \text{对于}(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathcal{Y} \subseteq R^n; \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \qquad \textbf{(36)}$$

这里：

$$\begin{matrix} Y_1 = r_1(X_1, ...X_n) \\ Y_2 = r_2(X_1, ...X_n) \\ \vdots \\ Y_n = r_n(X_1, ...X_n) \end{matrix} \quad \xrightarrow{\text{一一变换}} \quad \begin{matrix} X_1 = s_1(Y_1, ...Y_n) \\ X_2 = s_2(Y_1, ...Y_n) \\ \vdots \\ X_n = s_n(Y_1, ...Y_n) \end{matrix} \qquad \textbf{(37)}$$

且

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial s_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial s_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \qquad \text{（雅可比矩阵）} \qquad \textbf{(38)}$$

且

χ 是 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的支撑：$\chi = \{x : f_X(x) > 0\}$。

$\mathcal{Y}$ 是 $Y_1, ...Y_n$ 的诱导支撑：$\mathcal{Y} = \{y : y = r(x), \text{对于所有} x \in \chi\}$。

$$(x_1, ..., x_n) \in \chi \Leftrightarrow (y_1, ..., y_n) \in \mathcal{Y}。 \qquad \textbf{(39)}$$

- 注意，为了使该方法可行，m 须等价于 n (n=m)。
- 如果式（37）的条件不成立，那么，将其进行划分，在每个区域使该条件成立，然后对每个区间应用该方法，再相加。
- 这是对 **13.2.2** 部分的一个直接推广，其中公式（36）是公式（33）的推广表达式。
- 记住：如果 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，那么 $\det(A) = |A| = ad - cb$。

例 14.2 设$\left(X_1, X_2\right)$是随机向量，X_1和X_2是联合密度函数为$f\left(x_1, x_2\right)=e^{-x_1-x_2}$的连续随机向量，如果$0 \leq x_i$，否则，为 0。用一步法求出$f_Y\left(y\right)$，这里$Y=X_1+X_2$。

例 14.3 设$\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$是一个连续型随机向量，包含n个独立同分布随机变量，[1]这里$X_i \sim U\left[0,1\right]$。计算随机向量X两种变换的概率密度函数：(1) $Y_{\max}=\max\left\{X_1, X_2, ..., X_n\right\}$和(2) $Y_{\min}=\min\left\{X_1, X_2, ..., X_n\right\}$。

[1] 缩写为iid，或者称为“随机样本”。这方面的更多内容参见讲义 7。