4.基於傳遞函數的分析

在特徵方程中，我們得到以下條件：

$$\frac{1}{K} = \frac{\Pi_{i=1}^{m}|z - n_i|}{\Pi_{i=1}^{n}|z - z_i|} \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \arg(z - n_i) - \sum_{i=1}^{n} \arg(z - z_i) = (2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{4.5}$$

第一個條件稱為幅度條件，而第二個條件稱為幅度條件，稱為角度條件。 Z 平面上滿足這兩個條件的任何點，條件屬於系統的根源。至此對應一個增益 z0 如果這點是 z0，那麼我們有：

$$\frac{1}{K_{z_0}} = \frac{\Pi_{i=1}^{m}|z_0 - n_i|}{\Pi_{i=1}^{n}|z_0 - z_i|}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \arg(z_0 - n_i) - \sum_{i=1}^{n} \arg(z_0 - z_i) = \theta_0$$

我們有相應的工具。通常，此根軌蹟的草圖可以是使用一些簡單的規則即可輕鬆獲得。其中一些規則是：

1.分支的數量等於系統的階數，即：n;

2.根軌跡相對於實軸對稱。這是由於事實

特徵方程的根是實數還是複數。而如果

有一個複雜的根，我們自動得到它的共軛。

3.位點起源於開環傳遞函數的極點並終止，在此傳遞函數的零上。解釋為什麼基因座起源從極點，我們可以使 K 等於零，而為什麼基因座終止於零可以通過讓 K 在等式中變為∞來解釋。 （4.4）。

4.漸近線的數目等於兩者之間的差極點 n 和開環傳遞函數的零個數 m。這些漸近線的特徵是：

$$\delta = \frac{\sum \text{poles} - \sum \text{zeros}}{n-m}$$

$$\beta_k = (2k+1)\frac{\pi}{n-m}, k = 0, 1, 2, \cdots,$$

參數δ給出漸近線與實軸的交點，βk 給出使每個漸近線與實軸成的角度。

5.對於根軌跡的斷點，首先我們確定變化的參數 K，

即：$K = \frac{\Pi_{i=1}^{n}|z - z_i|}{\Pi_{i=1}^{m}|z - n_i|}$

斷點是以下方程式的解：$\frac{dK}{dz} = 0$

6.虛軸在 z 平面上的交點可以通過以下方式確定

在特性方程式中用 jν替換 z 並編寫如下：

$$\Re(K, \nu) + j\Im(K, \nu) = 0$$

依次給出兩個方程式：

$$\Re(K, \nu) = 0$$
$$\Im(K, \nu) = 0$$

7.從復雜極點出發的角度或到復雜點的到達角度 使用角度條件計算零。如果我們要 計算角度為 z0，條件角度變為：

$$\sum_{i=1}^{m} \arg(z_0 - n_i) - \sum_{i=1}^{n} \arg(z_0 - z_i) - \theta_0 = 180$$

其中 θ0 是該點的對應角度。圖 4.24 的系統，其中工廠是雙積分器和控制器 是一個增益為 K 的比例動作，我們假設它在零之間變化 和無窮大是由於某些物理原因，例如加熱，老化等。我們得到該系統的以下特徵方程：

$$1 + K\frac{(z+1)}{(z-1)^2} = 0, with \;\; K = \frac{k}{2}$$

- *Number of branches:* $n = 2$
- *Finite number of branches:* $m = 1$
- *Infinite number of branches:* $n - m = 2 - 1 = 1$
- *Angle of asymptotes:* β = π(2k+1)

n-m = π(2k+1)

2-1 = π, $k = 0$

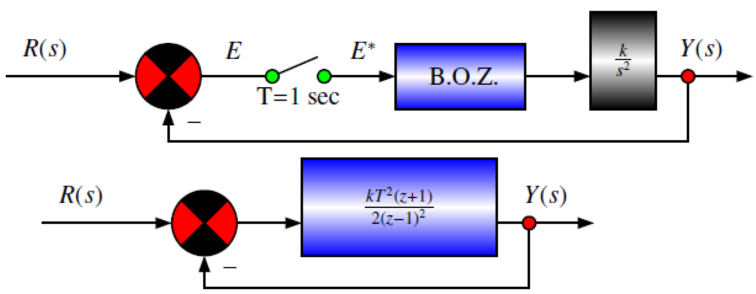

Fig. 4.24 BD of the system with characteristic eqn: $1 + K\frac{(z+1)}{(z-1)^2} = 0$

- *Intersection of the asymptote with the real axis:* δ =

(1)+(1)−(−1)

2−1 = 3

- *Intersection of the locus with the real axis:* *dK*

dz = 2*z*2 + 4*z* − 6 = 0, *which gives*

*z*1 = −1 *et z*2 = −3.

根軌跡如圖 4.25 所示。所有根都在單位圓之外藍色。系統不穩定。這意味著比例控制器不能穩定雙積分器。

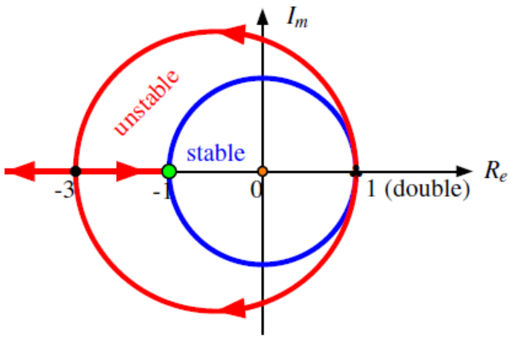

Fig. 4.25 RL of the system with characteristic eqn: $1 + K\frac{(z+1)}{(z-1)^2} = 0$

圖 4.26 的系統。

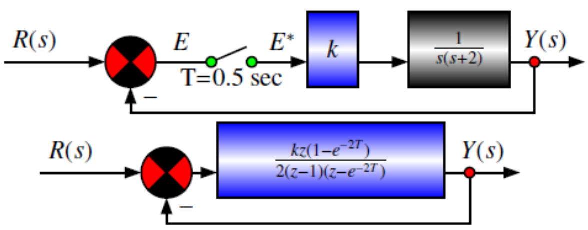

Fig. 4.26 BD of the system with characteristic eqn: $1 + K\frac{z}{(z-1)(z-0.368)} = 0$

該系統的特徵方程由下式給出：

$$1 + k\frac{z(1-e^{-2T})}{2(z-1)(z-e^{-2T})} = 1 + K\frac{z}{(z-1)(z-0.368)} = 0$$
$$\text{with } K = 0.316k$$

- *Number of branches:* $n = 2$.
- *Finite Number of branches:* $m = 1$.
- *Infinite Number of branches* $n - m = 2 - 1 = 1$.
- *Angle of asymptotes:* $\beta = \pi(2k+1)$

$n-m = \pi(2k+1)$

$2-1 = \pi$.

- *Intersection of the locus with the real axis:* dK

$dz = -z^2+0.368 = 0$. *The resolution*

of this equations gives: $z_1 = -0.606$ *et* $z_2 = +0.606$.

如果在特性方程式中用-1 代替 z，我們會發現：

$$1 + K\frac{z}{(z-1)(z-0.368)} = 1 + K\frac{(-1)}{(-1-1)(-1-0.368)} = 0$$

這又意味著：

$$K = 2.738$$

$$K = 0.316k$$

這使：

$$k = \frac{K}{0.316} = \frac{2.738}{0.316} = 8.65$$

根軌跡如圖 4.27 所示。所有的根都在單位圓內藍色。因此，系統對於所有增益 k <8.65 都是穩定的。

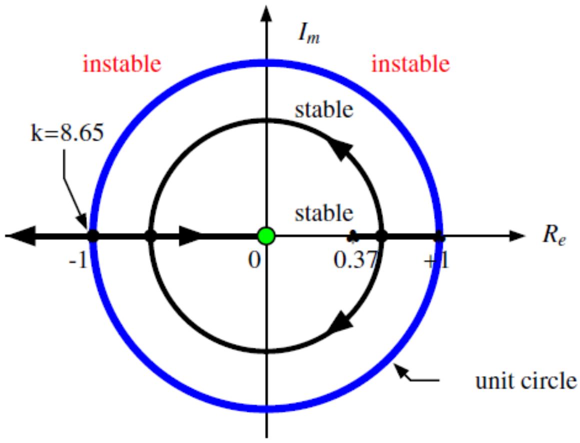

Fig. 4.27 RL of the system with characteristic eqn: $1 + K\frac{z}{(z-1)(z-0.368)} = 0$

響應包括通過正弦輸入激勵系統。在連續時間內統，已證明對於正弦輸入，穩定輸出線性系統是正弦曲線，輸入頻率相同，其幅值和輸出的相位是該頻率的函數。對於離散時間系統，輸出也是正弦波，頻率與輸入信號和相位相同，並且幅度仍然是該頻率的函數。

具有以下傳遞函數的穩定線性系統：

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= K \frac{\Pi_{i=1}^{m} (z - n_i)}{\Pi_{i=1}^{n} (z - z_i)}
\end{aligned}
$$

令輸入 r (t) 具有以下表達式：

$$r(t) = \sin(wt)$$

其中 w 是輸入頻率。此處的幅度等於 1。

該信號的 Z 變換由下式給出（請參見 Z 變換錶）：

$$R(z) = \frac{z\sin(wt)}{z^2 - 2zcost(wt) + 1} = \frac{zsin(wT)}{(z - e^{-jwT})(z - e^{jwT})}$$

如果我們認為系統被相應輸出的 R（z）激勵，

Y（z）由下式給出：

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z)R(z) \\ &= K\frac{\Pi_{i=1}^{m}(z - n_i)}{\Pi_{i=1}^{n}(z - z_i)} \frac{zsin(wT)}{(z - e^{-jwT})(z - e^{jwT})} \end{aligned}$$

為了獲得輸出的表達式，讓我們繼續處理 Y（z）的一部分。 這給出：

$$Y(z) = \frac{cz}{z - e^{-jwT}} + \frac{\bar{c}z}{z - e^{jwT}} + \text{terms due to } G(z)$$

現在讓我們將等式的兩端都乘以 $\frac{(z - e^{-jwT})}{z}$

得到以下內容：

$$G(z)\frac{sinwT}{(z - e^{jwT})} = c + \frac{\bar{c}\left(z - e^{-jwT}\right)}{z - e^{jwT}} + \left[\frac{\left(z - e^{-jwT}\right)}{z}\right]\text{terms due to } G(z)$$

$$\begin{aligned} c &= \left[G(z)\frac{sin(wT)}{(z - e^{jwT})}\right]\Big|_{z=e^{-jwT}} \\ \bar{c} &= \text{conjugate of } c \end{aligned}$$

注意

$e^{-jwT} = cos - wT + jsin - wT = coswT - jsinwT$, which implies that

$$\left(z - e^{jwT}\right)\Big|_{z=e^{-jwT}} = -2jsinwT$$

使用這個我們得到：

$$c = \frac{G(e^{-jwT})}{-2j}$$
$$\bar{c} = \frac{G(e^{jwT})}{2j}$$

現在利用以下事實：對於任何復數，我們都有：

$$G(e^{jwT}) = M(w)e^{j\theta(w)}$$

其中 M 和θ分別代表頻率的幅度和相位 w。

穩態，歸因於 G（z）的項消失，我們有：

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{G(e^{-jwT})}{-2j}\frac{z}{z-e^{-jwT}} + \frac{G(e^{jwT})}{2j}\frac{z}{z-e^{jwT}} \\ &= \frac{M(w)}{2j}\left[-\frac{e^{-\theta(w)}z}{z-e^{-jwT}} + \frac{e^{\theta(w)}z}{z-e^{jwT}}\right] \end{aligned}$$

穩態下 Y（z）的 Z 變換逆由下式給出：

$$\begin{aligned} y(kT) &= \frac{M(w)}{2j}\left[e^{j\theta(w)}e^{jwT} - e^{-j\theta(w)}e^{-jwT}\right] \\ &= \frac{M(w)}{2j}\left[e^{j(\theta(w)+wT)} - e^{-j(\theta(w)+wT)}\right] \\ &= M(w)sin\,(wT + \theta(w)) \end{aligned}$$

價值觀頻率改變時也會改變。 可以通過連續時間的

頻率響應進行一定的並聯。在實際上，對於這些系

統，可以從傳遞中獲得頻率響應 功能，通過執行以下操作來描述系統的 G：

•大小 M（w）由下式給出：

$$M(w) = |G(jw)|$$

•相位θ（w）由下式給出：

$$\theta(w) = \arg(G(jw))$$

對於離散時間，適用相同的推理，但必須替換 e^{jwT} 的 z 並使用以下公式： •大小 M（w）由下式給出：

$$M(w) = \left|G(e^{jwT})\right|$$

•相位θ（w）由下式給出：

$$\theta(w) = \arg\left(G(e^{jwT})\right)$$

實際上，Z 變換是通過用 esT 替換 z 獲得的。因此，s 域左側的主要條帶和互補條帶映射到 z 域中單位圓的內部。如果我們更換通過 e^{jwT} 旋轉 z 以獲得離散時間系統的頻率響應，結果將是毫無意義的，因為它涉及整個 z 平面。避免通常使用以下轉換：

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}\omega}{1 - \frac{T}{2}\omega}$$

這意味著：

$$\omega = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

分別使用 Z 變換和 w 變換，一次行程 然後將 s 平面左半部分的轉換為單位圓， 轉換為 w 平面的整個左半部分。更具體地說， s 平面內的頻率範圍 $-\frac{\omega_s}{2} \leq w \leq \frac{\omega_2}{2}$ 首先轉化為 z 平面中的單位圓，它又轉換成 z 平面的整個左半部分 W 平面。

最後，重要的是要注意頻率ω和 ν。實際上，ω定義為：

$$\begin{aligned} \omega|_{\omega=i\nu} &= j\nu = \left[\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right]_{z=e^{jwT}} \\ &= \frac{2}{T}\frac{e^{jwT}-1}{e^{jwT}+1} \end{aligned}$$

將分子和分母乘以，e^{-jwT}，我們得到：

$$\begin{aligned} w|_{w=i\nu} &= j\nu \\ &= j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{wT}{2}\right) \end{aligned}$$

給出 w 和ν之間的以下關係：

$$w = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{wT}{2}\right)$$

在低頻下，這些頻率之間是相等的。實際上，當 w 低，我們有棕褐色 $\left(\frac{wT}{2}\right) = \frac{wT}{2}$ 得到 w =ν。

基於此評論，離散時間的頻率響應為

在的新表達式中用 jν替換 w 用ν是一個虛擬頻率

將 z 替換為 z =後獲得的傳遞函數

$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$ 可以繪製頻率響應，讓我們考慮以下示例。

例 4.7.1 作為頻率響應的第一個例子，讓我們考慮

圖 4.28 的系統。它代表由直流電驅動的負載的速度

控制

發動機。控制器是成比例的。系統的傳遞函數和

控制器由以下方式給出：

$$\bar{G}(s) = \frac{K_p k}{\tau s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

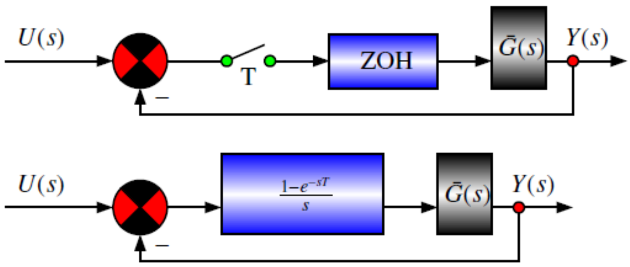

Fig. 4.28 Speed control of mechanical part driven by a dc motor

首先，讓我們計算圖 4.26 中系統的開環傳遞函數。

既然有了 ZOH，我們得到：

$$G(s) = \left(1 - e^{-sT}\right)\frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

其中 K = Kpk = 2，τ= 1s，T 是用於我們系統的採樣

週期，

等於 0.1s。

使用 Z -transform 表，我們得到：

$$\begin{aligned} G(z) &= K\frac{(z-1)}{z}\frac{z\left(1-e^{-T}\right)}{(z-1)(z-e^{T})} \\ &= K\frac{\left(1-e^{-T}\right)}{(z-e^{T})} \\ &= \frac{0.1903}{z-0.9048} \end{aligned}$$

現在替換 z $\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \frac{1+0.05w}{1-0.05w}$ 我們得到：

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{0.1903}{\frac{1+0.05w}{1-0.05w} - 0.9048} \\ &= \frac{0.1903\,(1-0.05w)}{0.0952+0.0952w} \\ &= \frac{1.9989\,(1-0.05w)}{1+w} \end{aligned}$$

使用 Matlab，我們可以獲得該傳遞函數的伯德圖，

如圖所示 由圖 4.29。

4.8 結論 本章介紹基於傳遞函數概念的分析工具。

主要是，我們開發瞭如何計算時間響應和 確定係統

性能。我們還介紹了根軌跡和波特圖 技術。 4.9 問

題 1.計算以下信號的 Z 變換：（一）單位步長（b）單位坡道 （c）單位指數 （d）r（t）= t + sinwt （e）1-重量

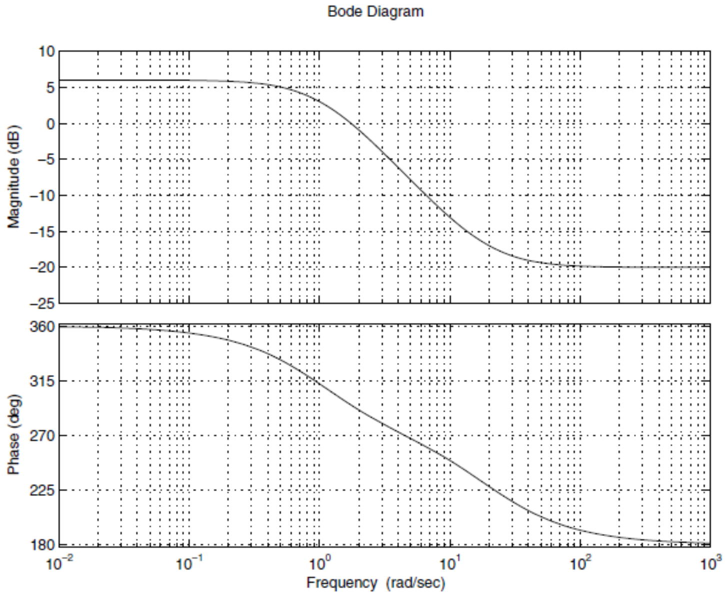

Fig. 4.29 Bode diagram of $\frac{1.9989(1-0.05w)}{1+w}$

2.按以下時間計算信號的表達式：

(a) $Y(z) = \frac{Tze^{aT}}{(z-e^{-aT})^2}, a > 0$

(b) $Y(z) = \frac{z(1-e^{aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}, a > 0$

(c) $Y(z) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{z}{z-e^{aT}} - \frac{z}{z-e^{bT}}\right], a > 0, b > 0$ and $a \neq b$

3.對於動力系統，輸入為 u（t），輸出為 y（t），具有

以下動態：

- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = u(t)$
- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4u(t)$
- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 8u(t)$
- $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$

（a）確定採樣週期 T

（b）使用近似方法確定之間的關係

輸入 U（z）和輸出 Y（z）

（c）確定每種動力學的脈衝傳遞函數

（d）使用 Matlab 計算每個動力學的階躍響應

（e）現在使用零階保持，確定相應的傳遞函數

併計算階躍響應。將此響應與以下一項進行比較

上一個問題

4.在這個問題中，我們考慮圖 4.30 的系統，其中轉

移

該系統的功能由下式給出：

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

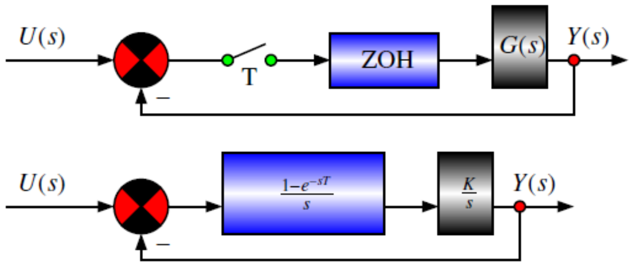

Fig. 4.30 Transfer functions in feedback

（a）確定我們可以用於該系統的採樣週期

（b）使用該採樣週期確定開環傳遞函數，並且

閉環一

（c）確定係統的階躍響應

（d）繪製輸出相對於時間的行為

5.研究具有以下特徵的動力系統的穩定性

方程：

(a) $z^3 + 0.8z^2 + 0.17z + 0.01$
(b) $z^4 + 1.4z^3 + 0.65z^2 + 0.112z + 0.006$
(c) $z^5 + 2.39z^4 + 2.036z^3 + 0.7555z^2 + 0.1169z + 0.0059$
(d) $z^5 + 11.4z^4 + 14.65z^3 + 6.6120z^2 + 1.126z + 0.06$

6.在此問題中，我們考慮了框圖中顯示的動力系統

如圖 4.31 所示。傳遞函數由下式給出：

$$G(z) = \frac{z\left(1 - e^{aT}\right)}{(z-1)\left(z - e^{-aT}\right)}$$

$$C(z) = K$$

a = 0.1 和 T = 0.01

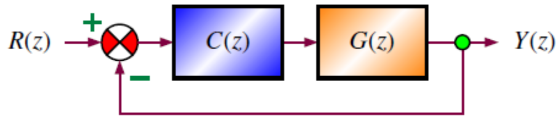

Fig. 4.31 Block diagram of the closed-loop

（a）研究增益 K 的函數穩定性

（b）繪製系統的根軌跡並得出穩定性結論

7.考慮圖 4.30 的系統，其中 G（s）具有以下表達式：

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

其中 K 是增益，τ= 1s 是系統的時間常數。

•確定採樣週期

•計算傳遞函數 G（z）

•當增益 K 在 0 和∞之間變化時，繪製系統的根軌跡

8.考慮圖 4.30 的系統，其中 G（s）具有以下表達式：

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

其中 K = 10 是增益，而 τ= 0.1s 是系統的時間常數。 •確定採樣週期 •計算傳遞函數 G（z） •繪製系統的伯德圖

已註解 [r1]:

5 基於傳遞函數的設計

閱讀完本章後，讀者將：

1.掌握基於經典控制器設計的概念

2.能夠選擇響應經典控制器的結構

3.熟悉比例，比例和設計

4.能夠確定我們的控制律的遞推方程

5.1 引言

解決控制設計問題始終是一個挑戰，即使對於更有經驗的人也是如此控制工程師。必須為其設計控制器的系統可以是現有的，但表現不佳，我們想改進，或者我們正在構建的新系統。在這兩種情況下，設計程序均在通過定義所需的性能來獲得系統的數學模型，這將使我們能夠確定控制器的結構及其參數。通常，控制系統旨在保證某些性能，考慮到系統的閉環動力學。我們將在本章中考慮以響應設計要求的控制器是經典的，例如比例，積分和微分作用，他們的近似值。本章的其餘部分安排如下。在第 2 節中，控制設計問題已製定。

第三部分介紹了設計經典的經驗方法控制器。

5.2 控制設計問題的表述

在本章中，我們將考慮性能較差的現有系統，我們想改善。我們的願望是對瞬態同時採取行動，通過在閉環中引入控制器來強制整個系統按預期運行。以在時域或頻域中給出性能。同時領域，穩定性是設計過程中的首要要求。在旁邊穩定性，我們希望瞬態和穩態機制能夠在理想的方式。在瞬態狀態的時域中，我們應控製過衝，所選時間的上升時間，和穩定時間將取決於我們希望為我們的系統保證精度。對於穩態制度，我們希望確保系統的錯誤小於特定的指定值。在頻域中，除了性能根據閉環動力學的穩定性，增益相位和通常來說，很難在兩者之間建立聯繫時域和頻域的性能。更具體地說，所研究的系統由傳遞函數描述，例如可以使用識別方法獲得。讓我們用 G（s）表示這個傳遞函數。該模型必須在控制的第一階段確定設計。然後，根據控制工程師的性能和專業知識進行設計，我們可以選擇可以正確響應設計的控制器結

構目標。然後，使用適當的方法，我們可以確定控制器的增益。因此，控制設計問題包括確定：

•控制器的結構

•及其參數

使用所需的性能和一些啟發式方法來強制閉環
所選控制器的動態特性使其表現理想。這種方法
由於被忽略的不同現象，在實踐中可能需要改進
動力學。我們將在本章中考慮的控制器是指的經典控制器在文獻中以比例（P），積分（I）和微分（D）動作及其近似也稱為相位滯後，超前和相位超前滯後。控制器的傳遞函數將表示為 C（z）。確定控制器後，相應的差分方程為使用適當的微控制器實時獲取和實現。對於有關此主題的更多詳細信息，我們請讀者參考實現部分詳細。

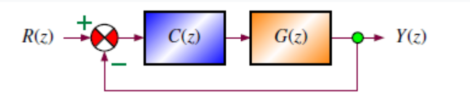

Fig. 5.1 Block diagram of the closed-loop

由於系統性能通常是連續不斷地給出的，因為這樣做更自然。設計步驟可以在連續時間或離散時間。一般來說，設計方法使用以下步驟：

•表演轉換成桿子

•選擇所需控制器的結構

•使用所需的極點確定控制器參數

•對控制器的參數進行了一些調整以補償

預期行為與實際行為之間可能存在差異

設計過程中未考慮的系統零。

重要的是要注意，控制器參數的確定可以，在連續時間或離散時間完成。在連續時間內在這種情況下，確定控制器參數，然後控制器轉移函數被轉換為離散時域得到差分方程，我們應該實時實施。對於離散時間，差分方程為直接獲得併實施。

設計方法可以是以下方法之一：

•基於經驗方法的設計

•基於根軌跡法的設計

•基於波特圖法的設計

在本章的其餘部分，我們將介紹這些方法並給出一些示例展示這些技術如何應用於實際系統。仿真結果將是用來表明其有效性。控制器的設計是連續進行的

然後獲得相應的控制器離散時間版本。的本章使用在 Boukas 中開發的方法（請參見[1]）。

5.3 基於經驗方法的設計

實證方法基於齊格勒-尼科爾斯的工作。這些方法與其他方法相比，具有優勢，因為它們允許設計所需的對象控制器，即使沒有系統的數學模型也是如此。的 Ziegler-Nichols 方法主要基於動力學系統的響應。Ziegler-Nichols 提出了使用時間響應的方法，其他使用時間響應的方法。頻率響應。在本節的其餘部分，我們將介紹這些方法。首先讓我們集中討論時間響應方法。在這些方法中我們可以處理開環穩定和不穩定的系統。第一種方法考慮在原點無極點也不佔優勢的穩定係統的情況複雜的兩極。在這種情況下，階躍響應由圖 5.1 中的給出。從中直接確定參數 T，τ和 k 以及 Tab。 5.1 是用於直接固定控制器參數。G（s）的對應表達式由以下給出：

$$G(s) = k\frac{e^{-\tau s}}{Ts+1}$$

其中 k 是系統的增益，τ是上升時間，T 是延遲時間。Tab 使用的控制器的一般表達式。 5.1 給出：

$$C(s) = K_P\left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right]$$

其中 KP，TI 和 TD 是要使用 Tab 鍵固定的控制器參數。 5.1。備註 5.3.1 必須注意，Ziegler-Nichols 方法是適用的僅在以下情況成立時：

$$0.15 \leq \frac{\tau}{T} \leq 0.6$$

可以使用以下過程來固定控制器參數：

1.獲得開環系統的階躍響應

2.根據該時間響應確定參數τ和 T 的值

3.使用 Tab 鍵計算控制器參數。 5.1

4.計算閉環傳遞函數並檢查性能是否

5.必要時調整控制器的參數以獲得所需的值

備註 5.3.2 通常，我們將使用固定的控制器獲得時間響應按 Tab。 5.1 的過沖在 10%到 60%之間，並且對

控制器參數始終是必需的。

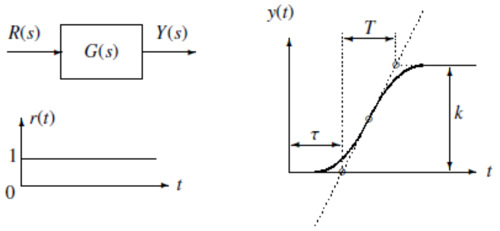

圖 5.2 Ziegler-Nichols 方法：穩定情況

表 5.1 Ziegler-Nichols 方法：控制器參數

Controllers	Parameters
P	$K_P = \frac{T}{\tau}$
PI	$K_P = \frac{0.9T}{\tau}$ $T_I = 3.3\tau$
PID	$K_P = \frac{1.2T}{\tau}$ $T_I = 2\tau$ $T_D = 0.5\tau$

備註 5.3.3 增益值 KP 使用 k = 1 計算。

在這種情況下，必須通過除以 Tab 的值來校正控制器增益 KP。 5.1 由 k。例如，PID 情況下的增益為 KP = $\frac{1.2T}{\tau}$. 代替 KP = $\frac{1.2T}{\tau}$.

例 5.3.1 為了展示這種方法的工作原理，讓我們考慮一個動態穩定系統的階躍響應如圖 5.3 所示。從這個數字我們得到以下參數：

$$k = 2$$
$$\tau = 0.2$$
$$T = 1$$

從這些數據，我們得出結論，齊格勒-尼科爾斯的條件得到滿足因此，我們可以使用選項卡。 5.1 修復所需的控制器。

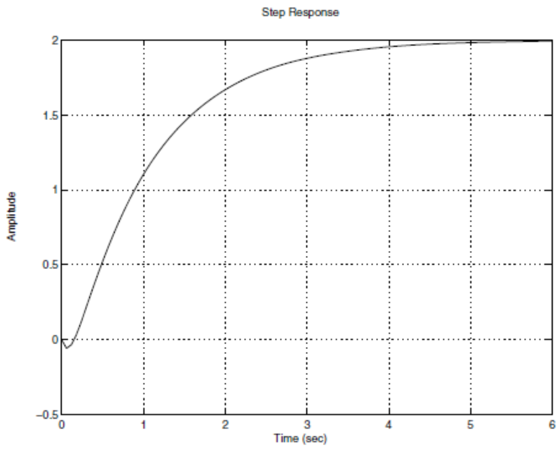

圖 5.3 穩定動力系統的階躍響應

如果我們選擇 PID，則該控制器的參數由下式給出：

$$
\begin{aligned}
K_P &= \frac{1.2T}{\tau} = 1.2 \\
T_I &= 2\tau = 0.4 \\
T_D &= 0.5\tau = 0.1
\end{aligned}
$$

該控制器的閉環動力學由下式給出：

$$F(s) = \frac{2K_P(T_I T_D s^2 + T_I s + 1)e^{-\tau s}}{s(T_I T s + T_I) + 2K_P(T_I T_D s^2 + T_I s + 1)e^{-\tau s}}$$

使用 Pad´e 近似值，即：

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s}$$

我們得到 $F(s) = \frac{2K_P(T_I T_D s^2 + T_I s + 1)(1 - \frac{\tau}{2}s)}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$

with $a_3 = \frac{\tau}{2}T_I[T - 2K_P T_D]$, $a_2 = T_I\left[T + \frac{\tau}{2} + 2K_P(T_D - \frac{\tau}{2})\right]$, $a_1 = \left[T_I + 2K_P(T_I - \frac{\tau}{2})\right]$ and $a_0 = 2K_P$.

說明了該控制器的閉環動力學的階躍響應
由圖 5.4。從此圖可以看出，超調量約為 20%
其他表演是可以接受的。

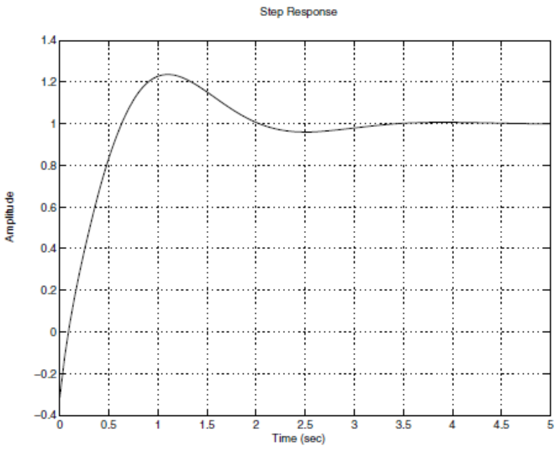

圖 5.4 使用 PID 控制器的閉環動力學的階躍響應
現在讓我們考慮開環中不穩定係統的情況。對於這個
班對於系統，該方法包括使用 PID 控制器安裝系統
TI =∞和 TD = 0 並通過改變增益 KP 帶來閉環
動力學達到穩定性極限（週期性振盪）。用¯KP 和
Tc 表示相應的增益和相應的周期。圖 5.5 給出了這
樣的想法設定。一旦確定了這兩個參數，控制器就可
以使用 Tab 獲得。 5.2。

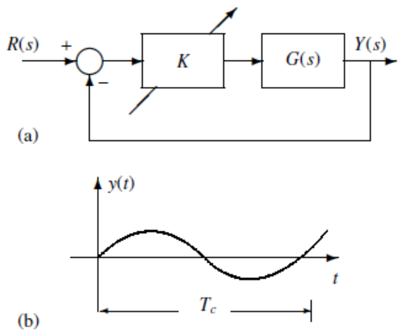

圖 5.5 Ziegler-Nichols：不穩定情況（a）和 Tc 的確定（b）

表 5.2 Ziegler-Nichols 方法：不穩定係統的情況

Controllers	Parameters
P	$K_P = 0.5\bar{K}_P$
PI	$K_P = 0.45\bar{K}_P$ $T_I = 0.83T_c$
PID	$K_P = 0.6\bar{K}_P$ $T_I = 0.5T_c$ $T_D = 0.125T_c$

可以使用以下過程來固定控制器參數：

1.將系統安裝在 TI =∞和 TD = 0 的閉環中，並改變比例直到時間響應產生振蕩之前，控制器的增益 KP

2.從該時間響應中確定參數 K P 和 Tc 的值

3.使用 Tab 鍵計算控制器參數。

4.計算閉環傳遞函數並檢查性能是否

獲得

5.必要時調整控制器的參數以獲得所需的值

表演

例 5.3.2 展示了系統不穩定時的齊格勒-尼科爾斯方法 起作用，讓我們考慮以下動力系統：

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

請務必注意，該傳遞函數在原點處有一個極點，因此，第一種方法將不起作用。現在，如果我們使用比例控制器安裝該系統，則會得到以下信息特徵方程：

$$1 + K_P \frac{1}{s(0.1s+1)(0.2s+1)} = 0$$

相應的 Routh Hurwitz 表由下式給出：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 50 \\ s^2 & 15 & 50K_P \\ \hline s^1 & \frac{15\times 50 - 50K_P}{15} & 0 \\ s^0 & K_P & 0 \end{array}$$

臨界增益 KP 由 KP = 15 給出。對應的複極點為以下等式的解：

$$15s^2 + 50K_P = 0$$

$$s = \pm j\sqrt{50} = \pm 7.0711 j$$

週期 Tc 等於$\sqrt{50}$.如果選擇 PID 控制器，則其參數由下式給出：

$$K_P = 0.6\bar{K}_P = 9$$
$$T_I = 0.5T_c = 0.4443$$
$$T_D = 0.125T_c = 0.1111$$

該控制器的閉環動力學由下式給出：

$$F(s) = \frac{K_P\left(T_I T_D s^2 + T_I s + 1\right)}{0.02T_I s^4 + 0.3T_I s^3 + (T_I + K_P T_I T_D)\, s^2 + K_P T_I s + K_P}$$

閉環動力學的階躍響應如圖 5.6 所示。

要結束本節，讓我們看看如何設計 PID 控制器（P，PI，PID）使用 Ziegler-Nichols 頻率方法（這些方法主要基於確保閉環動力學的裕度相位介於 45o 和 50o 之間的想法且增益幅度大於 8 db）。為此，讓我們假設動態開環系統的描述如下：

$$G(s) = k\frac{1}{\Pi_{i=1}^{n}(\tau_i s + 1)}$$

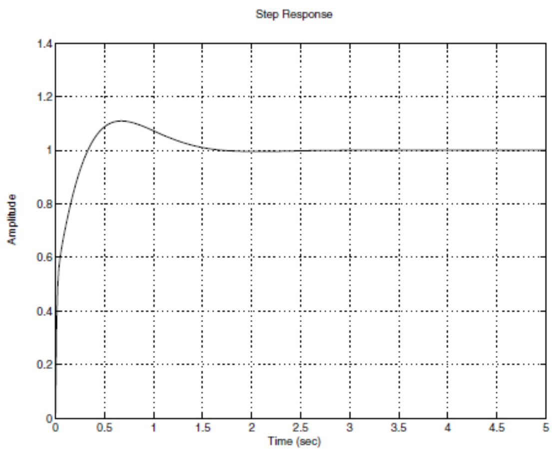

圖 5.6 使用 PID 控制器的閉環動力學的階躍響應

其中，k 是系統的增益，τi，i = 1，...，n 是不同的恆定時間系統的。通過將¯KP 定義為開環增益，以確保增益裕量和相位裕度，τ1 和τ2 如下：

$$
\begin{aligned}
\tau^1 &= \max\{\tau_1, \cdots, \tau_n\} \\
\tau^2 &= \max\{\{\tau_1, \cdots, \tau_n\} - \{\tau^1\}\}
\end{aligned}
$$

控制器參數由 Tab 固定。 5.3。 PID 控制器的表達式是（誰）給的：

$$
C(s) = K_P \frac{(\tau^1 s + 1)(\tau^2 s + 1)}{(\tau^1 + \tau^2) s}
$$

重要的是要注意，開放傳遞函數由下式給出：

T（s）= C（s）G（s）

$$
= \begin{cases}
\frac{kK_P}{\Pi_{i=1}^{n}(\tau_i s+1)} = \frac{K}{\Pi_{i=1}^{n}(\tau_i s+1)} & \text{for P controller, with } K = kK_P \\
\frac{kK(T_I s+1)}{T_I s \Pi_{i=1}^{n}(\tau_i s+1)} = \frac{K(T_I s+1)}{s \Pi_{i=1}^{n}(\tau_i s+1)} & \text{for PI controller, with } K = \frac{kK_P}{T_I} \\
\frac{kK_P(T_I T_D s^2+T_I s+1)}{T_I s \Pi_{i=1}^{n}(\tau_i s+1)} = \frac{K(T_I T_D s^2+T_I s+1)}{s \Pi_{i=1}^{n}(\tau_i s+1)} & \text{for PID controller, with } K = \frac{kK_P}{T_I}
\end{cases}
$$

可以使用以下過程來設計適當的控制器，方法是：

以下步驟：

表 5.3 頻域的 Ziegler Nichols 方法

Controllers	Parameters
P	$K_P = \frac{\bar{K}_P}{k}$
PI	$K_P = \frac{\bar{K}_P}{k}$ $T_I = \tau^1$
PID	$K_P = \frac{\bar{K}_P}{k}$ $T_I = \tau^1 + \tau^2$ $T_D = \frac{\tau^1\tau^2}{T_I}$

1.用補償器確定開環傳遞函數，如 5.1

2.繪製 K = 1 的伯德圖，並確定給出期望值的增益 KP 相位裕度和增益裕度大於 8 db

3.使用以下方法確定控制器的增益 KP：

$$K_P = \begin{cases} \frac{K_p}{k} & \text{fpr P controller} \\ \frac{K_p T_I}{k} & \text{fpr PI controller, with } T_I = \tau^1 \\ \frac{K_p T_I}{k} & \text{fpr PID controller, with } T_I = \tau^1 + \tau^2, T_D = \frac{\tau^1 \tau^2}{T_I} \end{cases}$$

4.檢查系統性能是否令人滿意。如果答案是否定的，調整控制器參數以獲得此類性能。

例 5.3.3 為了展示這種方法是如何工作的，讓我們考慮以下內容動力系統：

$$G(s) = \frac{4}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

我們的目標是設計一種具有以下性能的 PID 控制器：

1.穩定的系統

2.裕度相位介於 45o 和 50o 之間

3.保證金增益大於 8 db

首先，按照上一步的步驟進行操作：

$$\tau^1 = 0.5$$
$$\tau^2 = 0.2$$

$$T_I = \tau^1 + \tau^2 = 0.5 + 0.2 = 0.7$$
$$T_D = \frac{\tau^1 \tau^2}{T_I} = \frac{0.2 \times 0.5}{0.7} = 0.1429$$

增益，KP 給出所需的相位裕度，並且增益裕度大於 8 db 由下式給出：

$$\bar{K}_P = 3.8019$$

為 PID 控制器提供以下增益：

$$K_P = \frac{\bar{K}_P T_I}{k} = \frac{3.8019 \times 0.7}{4} = 0.6653$$

該控制器的閉環動力學傳遞函數如下：

$$F(s) = \frac{kK_P T_D s^2 + kK_P s + \frac{kK_P}{T_I}}{0.01 s^4 + 0.17 s^3 + (0.8 + KK_P T_D)\, s^2 + (1 + kK_P)\, s + \frac{kK_P}{T_I}}$$

閉環動力學的階躍響應如圖 5.7 所示。

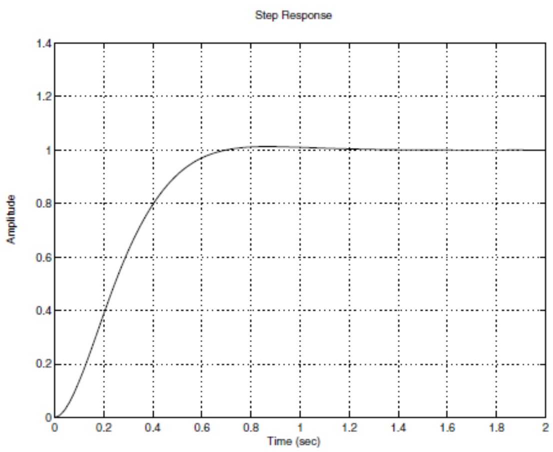

圖 5.7 PID 控制器的閉環動力學的階躍響應

備註 5.3.4 離散時間控制器的表示及其解析實時執行遞歸方程的表達式，我們將下一節將對此進行介紹。

5.4 基於根軌蹟的設計

根源技術是控制系統分析和設計的強大工具。在本節中，我們將使用它來設計控制器，以確保理想的表演。該系統的模型應該以轉換功能。

根軌跡技術可用於設計經典控制器。的該方法背後的技術包括選擇使座位穿過表演中給定的極點。在其餘的在本節中，我們假設傳遞函數 G（s）由下式給出表達：

$$G(s) = k\frac{\Pi_{i=1}^{n}(s+z_i)}{\Pi_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

其中 k，-zi 和-pi 分別是系統的增益，零和極點。

首先讓我們集中討論比例控制器的設計。讓它 傳遞函數由下式給出：

$$C(s) = K_P$$

其中 KP 是要確定的控制器的增益。

從基本控製過程中可以知道，比例控制器同時作用暫態和穩態機制，但其能力有限。

它可以減少錯誤，但絕不會使其等於零。

要計算控制器的增益，我們將使用以下過程（請參閱

Boukas [1]）：

1.計算閉環動力學的特徵方程，即：1 + KpG（s）

令 K = kKp

2.畫出從 0 到無窮大的 K 的根軌跡

3.確定基因座和對應於理想的阻尼比ξ（cosθ=ξ）並得到主導的極點對。讓 SD 成為具有虛構積極部分的人。

4.計算得出極點 sd 的增益 K，然後為

比例控制器由：

$$K_P = \frac{\Pi_{i=1}^{n}|(s_d + p_i)|}{K\Pi_{i=1}^{m}|(s_d + z_i)|}$$

在執行過程中，我們應包含在控制循環中的行 部分是：

```
compute the system's error, e
compute the control law using   u = Kp*e
 send the control and wait for the next interrupt
```

例 5.4.1 為了說明這種設計方法，讓我們考慮一個物理系統 它由一個直流電動機組成，該電動機驅動我們希望提供的機械負載 控制位置。 該系統的傳遞函

數由以下表達式給出：

$$G(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)}$$

其中 k = 5，τ= 1s。從基本控制理論可以看出，系統是不穩定的。我們的願望是使它在閉環中穩定，且超調量小於或等於 5%，並且穩態誤差等於零。從基本控制理論來看，比例控制器足以達到我們的目標。為了獲得控制器增益，讓我們遵循先前過程的步驟。的特徵方程為：

$$1 + K_p \frac{5}{s(s+1)} = 0$$

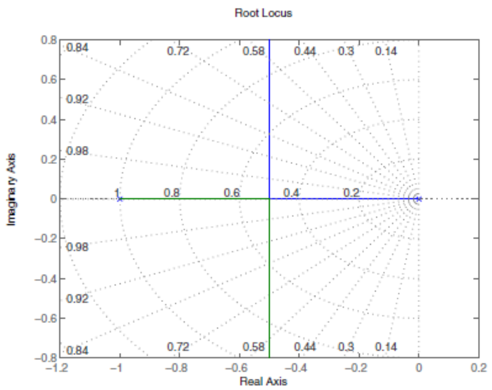

圖 5.8 1 的根軌跡 $\frac{1}{s(s+1)}$

閉環動力學的根源由圖 5.8 給出，從中我們得到：

$s_d = -0.5 + j0.5$

相應的增益為 K = 0.5。這為控制器：

$$K_P = \frac{K}{5} = 0.1$$

閉環動力學的行為如圖 5.9 所示。模擬結果表明所設計控制器的效率。閉環動力學是穩定，並且超調量小於預期的 5%。

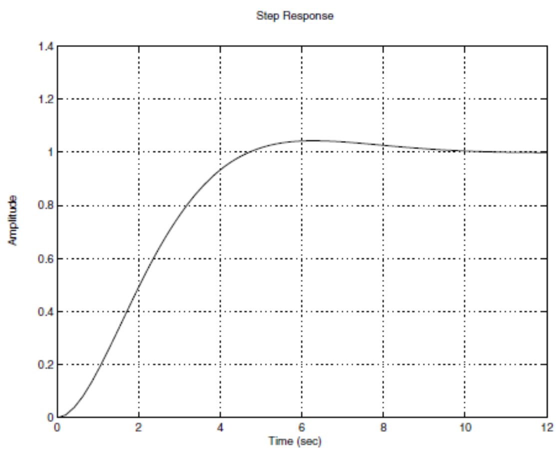

Fig. 5.9 Step response of $\frac{0.5}{s(s+1)+0.5}$

備註 5.4.1 必須注意，我們可以將最佳凝固時間設為 2%使用這種類型的控制器

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} = \frac{4}{0.5} = 8\ sec$$

其中ζ和 wn 分別是阻尼的比率和固有頻率閉環動力學。可以從圖 5.9 中進行檢查。對於比例和積分控制

器的設計，可以使用相同的技術使用。如果讓該控制器的傳遞函數如下：

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P\frac{s+z}{s}, z = \frac{K_I}{K_P}$$

其中必須確定增益 KP 和 KI。該控制器可用於同時作用於瞬態和穩態狀態機制，因此克服了比例控制器本身可以提供的功能通常情況下，比例和積分控制器用於使階躍輸入的誤差等於零，並修正過沖和建立時間。的可以使用以下過程（請參見 Boukas [1]）：

1.通過阻尼比和穩定時間值，我們可以確定

具有正虛部的主導極

2.使用該極點和角度條件，我們可以確定控制器的零，即：

$$\alpha = \pi - \sum_{i=1}^{m} \angle(s_d + z_i) + \sum_{i=1}^{n+1} \angle(s_d + p_i)$$

零的值由下式給出：

$$z = \sigma + \frac{\Im(s_d)}{\tan(\alpha)}$$

with $\sigma = \frac{3}{\zeta\omega_n}$ if the settling is fixed at 5 %

3.畫出

$$K\frac{s+z}{s}\frac{\Pi_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\Pi_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

並確定使用以下公式得出極點 sd 的增益 K

$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} |(s_d + p_i)|}{\prod_{i=1}^{m+1} |(s_d + z_i)|}$$

4.控制器增益由下式給出：

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{K}{k} \\ K_I &= z K_P \end{aligned}$$

要獲得相應的離散時間傳遞函數，我們可以使用

前面介紹的方法。這裡使用第三種方法（梯形方法）

它包括將 s 替換為 $\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ ，其中 T 是選定的採樣週期。

我們得到：

$$C(z) = \frac{\left(\frac{K_I T}{2} + K_P\right) z + \frac{K_I T}{2} - K_P}{z - 1}$$

這給出了將控件與樣本 k 上的錯誤聯繫起來的關係：

$$u_k = u_{k-1} + a e_k + b e_{k-1}$$

where $a = \frac{K_I T}{2} + K_P$ and $b = \frac{K_I T}{2} - K_P$

在控制循環的實現過程中應包括的行

是：

```
compute the system's error, e
compute the control law using the controller expression
save the present error and the present control
send the control and wait for the next interrupt
```

例 5.4.2 為了說明這種設計方法，讓我們考慮一個物

理系統，它由一個直流電動機組成，該電動機驅動我

們希望提供的機械負載控制速度。

該系統的傳遞函數由以下表達式給出：

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

其中 k = 5，τ= 1s。從基本控制理論可以看出，開環的建立時間 5%的系統是 ts =3τ= 3s。系統沒有超調，並且反應有點慢。我們的願望是使系統更快，且超調量小於或等於 5%，穩定時間 ts 小於 5%或等於 1s，並且階躍輸入具有穩態誤差等於零。為了解決此設計問題，讓我們在連續時間域中進行。

因此，要保證在穩態下一步的誤差等於零輸入，我們至少需要一個比例積分控制器。

按照比例積分控制器的程序，我們有：

1.虛數為正的主導極點由下式給出：

$$\begin{aligned} s_d &= -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -3+3j \end{aligned}$$

這是由於我們有以下事實：

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{\log\left(\frac{d}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2+\left(\log\left(\frac{d}{100}\right)\right)^2}} = 0.6901 \\ \omega_n &= \frac{3}{\zeta t_s} = 4.3472 \end{aligned}$$

2.使用此式，我們得到：

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi - 0 + \angle(-3+3j) + \angle(-2+3j) \\ &= 180+135+123.6901 \\ &= 78.6901 \end{aligned}$$

給出零的以下值

$$\begin{aligned} z &= -3 - \frac{3}{\tan(78.6901)} \\ &= -3.6 \end{aligned}$$

3.受控系統的位置由圖 5.10 給出，由此我們可以得出結論

K = 4.73。

4.控制器增益為：

$$K_P = 0.9460$$
$$K_I = 3.4056$$

系統的根源如圖 5.10 所示。

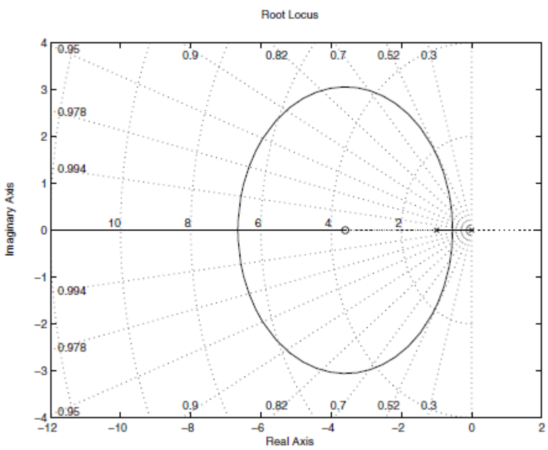

Fig. 5.10 Root locus of $\frac{s+z}{s(s+1)}$, $z = -3.6$