

國立臺灣大學工學院機械工程學系

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

四足機器人穩定爬升樓梯步態之軌跡規劃

Trajectory Planning and Four Legs Coordination for Stair

Climbing in a Quadruped Robot

柯致中

CHIH-CHUNG KO

指導教授：林沛群 博士

Adviser : Pei-Chun Lin, Ph.D.

中華民國 99 年 1 月

January, 2010

國立臺灣大學碩士學位論文 口試委員會審定書

四足機器人穩定爬升樓梯步態之軌跡規劃 Trajectory Planning and Four Legs Coordination for Stair Climbing in a Quadruped Robot

本論文係柯致中君（學號 R96522822）在國立臺灣大學機械學系完成之碩士學位論文，於民國 99 年 01 月 26 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

柯致中

(簽名)

(指導教授)

黃克裕

廖仕仲

系主任

張所鎔

(簽名)

誌謝

回想起，兩年半前的現在，實驗室從積滿雜物以及蜘蛛網開始啟用，身為當時新任教授沛群老師的第一屆學生，我們幾個人：啟喂唷、宣諭仙以及我，著手開始清理一塌糊塗的實驗室並且過著三個人只有一台電腦以及一間超空曠實驗室的生活。一直到現在，實驗室築了有鋪木地板的樓中樓、多到滿出來的電腦，並且每天也生龍活虎的擠了將近十幾個人，這一路的變化，我都伴著走過。在這兩年半中，變化最大的，不光是實驗室，我想最重要的還是我自己。專業知識、發現問題、解決問題的能力，到最重要的做人處事，這些種種的改變，我由衷想要謝謝我的指導教授 林沛群老師。老師是個非常有耐性和修養的人，並且具有內斂的個性，除此之外，他還會關心我的生活和感情問題。無論是在專業學術方面或者是待人處事方面，老師都對我有很大的影響。謝謝您，老師！

同時，我也要感謝我的同學，一起走過這段日子的啟瑋和宣諭，我們並肩扶持，雖然你們最後提早離我而去，嘖！實驗室的學弟們也帶來無比的歡笑：脾氣超好的政昕、鬼點子一堆的紹帆、給龜給怪的小智中，還有總是分享東西給大家吃的兆慶，以及在我最後半年加入實驗室的小朋友們：小白膠、小捲、均聖、阿強。你們的出現，讓我碩士生活添增了一些詭異且有趣的色彩。

最重要的，總是在我身邊默默支持我的人，我的父親。在母親過世後，你總是默默的栽培支持我，在這篇論文完成至此時此刻，我心中所有的感動最想要一同分享就是老爸。Dear Dad：Thanks for supporting me all the way and never give up on me, to whom this effort I wish to dedicate the most.

給我的麻吉鐘鼎還有=S.B.G=的所有成員：歐哲、JJ、Q mo、呂孟、KK、Oki，一路上你們的陪伴和扶持，一起笑到流眼淚肚子抽筋，是我努力繼續的動力。最後，還有一株很重要的植物要感謝，盾柱木，每天我到學校都會擁抱的一棵樹。日以繼夜，你看著我到達、離開，和我心靈對話，給了我力量和慰藉。

未來的日子雖然未知，但現在我將在這裡，台大，我的母校，結束我學生的身份，啟程人生另一個開始。我知道有大家在我身旁，我將不再寂寞，並且能夠勇敢跨出我的第一步。冀望未來有朝一日，我也能成為一個傑出的人，為社會奉獻。

柯致中 2010.2.10 于公館

中文摘要

在四足機器人家族各類移動行為中，本論文針對樓梯爬升的能力發展出通用性廣的演算法。在半靜態穩定的前提下，演算法的內容包括了軌跡規劃以及四足協調。論文全文主要可分為兩個部分，分別介紹了四足機器人平台以不同的幾何形狀運動媒介來探討樓梯爬升的特性：直型腳和半圓腳。第一部份根據腳形狀的和樓梯之間幾何關係，來發展直型腳的基礎演算法。接著討論同時考慮兩腳和四腳的協調，最後以電腦模擬並且透過戶外環境的真實樓梯實測驗證。除此之外，針對爬行存在幾何誤差之真實樓梯的半靜態穩定度去修正機器人姿態，也在論文中報告。論文的第二部分，介紹了以半圓腳為運動媒介去發展出的演算法細節，並最後以模擬驗證。基於幾何形狀的差異而造成運動模式的不同，其內容和直型腳的討論有著不小的出入。透過探討過兩種不同類型的運動媒介，分別為基本的直型腳和進階的半圓腳，則幾乎可推廣至不同 D.O.F. 及各種自由度型態的其他運動媒介，驗證了此篇論文機器人爬升樓梯軌跡規劃的泛用性。

關鍵字：四足機器人、樓梯爬升、演算法、軌跡規劃、足間協調

Trajectory Planning and Four Legs Coordination for Stair Climbing in a Quadruped Robot

Abstract

We report on the general algorithm of trajectory planning and four leg coordination for quasi-static stair climbing in a quadruped robot. Under such conditions, analysis of two different locomotion media is introduced in this thesis. First, we report on quadruped with straight legs. The detailed development is based on the geometrical interactions between robot legs and the stair, starting from single-leg analysis, followed by two-leg collaboration, and then four-leg coordination. Finally, the algorithm is evaluated in the simulation environment with curvature smoothening discussion and experimented under outdoor stair field. In addition, a brief study on the static stability of the robot while climbing as well as an investigation of posture adjustment due to stair geometrical variation is also reported. On the second part of thesis, we analyze algorithm for quadruped with semi-circle legs, and then verified in simulation. Due to difference in geometric shape, this causes a big distinct between semi-circle leg and straight leg in locomotion behavior. Through discussion in these two different locomotion media, the general case: straight leg and the advanced case: semi-circle leg separately, we can generalize almost all other cases with different D.O.F. and joint types, which confirms the generosity of trajectory planning for stair climbing in quadruped robots family in this thesis.

Keywords : quadruped, stair climbing, algorithm, trajectory planning, legs coordination

目 錄

誌謝	I
中 文 摘 要	II
英 文 摘 要	III
圖 目 錄	VI
表 目 錄	IX
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 研究動機與目的	1
1.3 文獻回顧	2
1.4 研究貢獻與論文架構	5
第二章 直型腳之運動軌跡規劃	7
2.1 情境假設與參數設定	7
2.3 單足數值分析	11
2.4 前或後軸兩共軸腳的協調	13
2.5 四足之間的協調	14
2.6 馬達輸出曲線設計和模擬	26
第三章 誤差分析與錯誤校正	36
3.1 側傾分析	36
3.2 誤差適應與軌跡校正	39
第四章 直型腳的實驗結果	46
4.1 實驗測試平台：QUATTROPED	46

4.2 實驗結果與數據分析.....	49
第五章 半圓腳之運動軌跡規劃	56
5.1 半圓腳.....	56
5.2 半圓腳幾何分析.....	58
5.3 半圓腳幾何分析.....	64
5.4 半圓腳多足討論.....	70
5.5 半圓腳的幾何限制.....	78
5.6 換階時序.....	82
5.7 半圓腳的模擬.....	84
第六章 結論與未來展望	87
參 考 文 獻	i

圖目錄

圖 1. 四足機器人測試平台：Quattroped.....	2
圖 2. 四足機器人爬行樓梯示意圖.....	7
圖 3. 單足換階前後瞬間的幾何關係.....	9
圖 4. 腳長限制範圍.....	10
圖 5. a 、 ℓ 、 d 幾何拘束關係圖.....	11
圖 6. 固定特定變數的切平面圖.....	12
圖 7. 共旋轉軸的換階（空相）可用行程示意圖.....	13
圖 8. 一個重合軸在其共軸兩腳都爬升一階後所歷經的總行程示意圖.....	15
圖 9. 干涉發生示意圖（a）、（b）：兩種標準的干涉狀況.....	16
圖 10. 一個完整週期內的各足換階時序圖.....	18
圖 11. 干涉與幾何限制之不等式邊界面.....	21
圖 12. 立體圖之切平面：已知 W 、 H ，檢測是否可行之範圍圖， $\ell_{\max}=21$..	22
圖 13. 立體圖之切平面：已知 W 、 H ，檢測是否可行之範圍圖， $\ell_{\max}=23$..	22
圖 14. 左後腳於兩個週期內的（ ℓ , θ ）資訊以及其一階、二階變化率	28
圖 15. 圓滑化設計目標曲線放大圖.....	29
圖 16. $\Delta\ell$ 圓滑化設計.....	30
圖 17. $\Delta\theta$ 圓滑化設計.....	31
圖 18. 左後腳經過圓滑化規劃的（ ℓ , θ ）資訊以及其一階、二階變化率 ...	33
圖 19. 直型腳運動模擬.....	35
圖 20. 機器人側傾說明圖（俯視圖）.....	36
圖 21. 機器人側傾時序圖：CASE 1	37
圖 22. 機器人側傾時序圖：CASE 2	38

圖 23. 樓梯誤差修正示意圖 ($\Delta W \neq 0$)	42
圖 24. 樓梯誤差修正示意圖 ($\Delta H \neq 0$)	44
圖 25. 測試平台 Quattroped 與直型腳.....	46
圖 26. 旋轉軸腕關節示意圖.....	47
圖 27. 紅外線感測器安裝位置圖.....	48
圖 28. 紅外線距離感測器 (IR) SHARP GP2D12 Infrared Sensor.....	49
圖 29. 遠端控制：LabVIEW 人機介面.....	49
圖 30. 實測結果影片快照截圖（按數字順序）.....	51
圖 31. 右後腳之部分 ℓ 曲線放大圖（黑：理想，綠：實際）.....	52
圖 32. 右後腳之部分 θ 曲線放大圖（黑：理想，綠：實際）.....	52
圖 33. 爬行過程中三個紅外線距離感測器所得之資料.....	53
圖 34. 測距儀量測距離之理想與實際比較.....	54
圖 35. 由測距儀訊號反推得到之運動軌跡.....	55
圖 36. 半圓腳（左）與直型腳（右）之外觀比較（側視圖）.....	56
圖 37. Solid Works 半圓腳快照	57
圖 38. 四足機器人半圓腳參數定義.....	58
圖 39. 距離換算之幾何關係.....	59
圖 40. 半圓腳運動於虛擬座標系與真實樓梯配合：從軌跡的上方脫離 $c=2$. 60	
圖 41. P、Q 點軌跡與涵蓋區域 CR 之關係 ($c=2$)	61
圖 42. 半圓腳運動於虛擬座標系與真實樓梯配合：從軌跡的下方脫離 $c=5$. 62	
圖 43. P、Q 點軌跡與涵蓋區域 CR 之關係 ($c=5$)	62
圖 44. x_{Ga} 、 x_{Gtd} 、 x_{LE} 參數定義（以 $c < c^*$ 為例）.....	66
圖 45. 平移區域 SH 和可用區域 CR 與 c 值之關係.....	68
圖 46. 週期行程 PL 內平移區域 SH 和可用區域 CR 與 c 值之關係	69
圖 47. 共軸兩半圓腳之換階幾何關係配置.....	71

圖 48. $(a_L - a_R)$ 和 c_2 的數值關係.....	72
圖 49. 幾何等效說明圖 I	73
圖 50. 幾何等效說明圖 II.....	74
圖 51. c_{\min} 下界幾何關係	75
圖 52. P_i 曲線定義說明圖 ($c_2 > c^*$)	77
圖 53. $(a_L - a_R)$ 和 P_i 曲線的數值關係.....	78
圖 54. P_i 曲線定義說明圖 ($c_2 < c^*$)	80
圖 55. c_2 全範圍和 P_i 曲線的數值關係	81
圖 56. 半圓腳在完整週期內的各足換階時序圖.....	83
圖 57. 圓腳運動模擬.....	86

表 目 錄

表 1. 實驗平台使用直型腳爬升樓梯相關變數表格.....	25
表 2. 實驗平台使用半圓腳爬升樓梯相關變數表格.....	82

第一章 緒論

1.1 前言

在科技發達的資訊爆炸時代，隨著運算技術的迅速提升，機器人也越來越普及。因此，在人類居住環境中與機器人共存勢必是未來的趨勢。論其外觀，機器人大致上可分為人形機器人（Humanoid Robot）以及仿生機器人（Bio-inspired Robot）。人形機器人的主要特徵是手部、和雙足，以及頭面部的視聽覺辨識系統。在運動方面，人形機器人透過兩隻腳進行移動，因此平衡控制的部分相當複雜。仿生機器人的優點在於模仿自然界動物靈活運動之特質，雖然失去了人形機器人手部的工作度和自由度，但不可否認的，仿生機器人在足部方面比人形機器人強大許多，透過足（Leg）來進行移動，其速度或許不是相當優秀，但針對越障和地形適應方面便相當靈活且強大。結合此概念，居家環境中，最常見的不平整崎嶇地形就以樓梯為代表，我們希望設計出仿生的足式機器人，使其在樓梯上的移動能夠輕巧容易的完成。

1.2 研究動機與目的

在地表平面運動的平台中，腳和輪是兩個最為廣泛被使用的運動體媒介。在經歷一段長時間的演化過程後，大部分地面的動物都進化出敏捷並且強韌的腳，使其可驅使它們的身體在不平坦的自然界地面平穩並且快速的移動。相較之下，輪，人類的一項智慧發明，在平坦的地面上滾動，其優秀效能以及移動速度得以完全展現，這在平坦面上的高水平表現是腳很難比得上的。然而，在人類生活的環境中，既使大部分的地表面都已經被平坦化，有著高度變化的環境依然存在。

因此，輪腳複合的平台，同時在平坦地面（輪）和起伏地面（腳）都有著卓越的機動性，看起來似乎是在未來適應室內和室外環境中機動平台的發展趨勢。Quattroped [1]就是這樣輪腳複合的機動平台，研究透過此平台爬行樓梯的可行性，目前我們試著使其克服這項人類環境中最典型的高度落差之不平整環境。



圖 1. 四足機器人測試平台：Quattroped

在 Quattroped 的平台下，首先使用基礎幾何形狀的運動媒介：直型腳，作為基本的模組探討。因其複雜性較低，因此適合於研究通用性廣泛的演算法。在未來，與人類共存的機器人，諸如保全機器人等，其運動平台勢必要具備克服各種人類環境的能力。因此，機器人在樓梯間的移動能力變的相當重要。要使機器人在樓梯間移動絕非難事，但要使其在樓梯間「輕巧」的移動，亦即做最省能的移動，才較具設計意義。為了達到這個條件，我們必須發展出一套演算法，使機器人的質心做最短路徑的移動，亦即直線軌跡的運動，這將是此篇論文重點的核心。

1.3 文獻回顧

觀察自然界中的生物，透過精密肌肉和骨骼組織結合的生物結構，以及其獨特的步伐調配，有部分可在其生存之環境中敏捷的移動行為，諸如奔跑、跳越等，有部分則具有高度的障礙地形適應能力，亦有部分具有在水上行走的能力。各種生物適應地形的行為，不計其數。而仿生的概念，即將這些生物移動的特性、腳部結構和步態等現象，應用於機器人之上 [2]，諸如馬奔馳的步態 [3]、螃蟹的步

伐 [4]、動物的跳躍步態 (Bounding Gait)，例如透過彈簧儲存能量來達成跳躍的 PAW [5-6] 和以致動器 (Actuator) 瞬間發動來完成跳躍高度可達接近五倍身體高之輕量化四足機器人 AirHopper [7]、也有模仿能於水上疾走的特殊蜥蜴 (Basilisk) 之機器人 Water Runner [8]。這些仿生特性的應用，大幅增加了機器人的移動能力以及環境適應性。足式機器人模仿的設計對象中，當屬四足動物 (Quadruped) 為典型仿生機器人的配置方式，這是由於大多數的哺乳類動物都是由這個家族進化來的。

一些具有高機動性的四足機器人目前也已經被發表，舉例來說，Scout [9] 可藉由半跳躍的方式發展出爬升具高度之平面的方法、其後身 Scout II [10] 則針對該平台建立了跳躍行為的模組、仿照小狗的 Tekken [11] 機器人具備有良好的動態行走能力，能夠在不平整的自然地面 (Irregular Terrain) 前進並可達到 0.7 m/s 的行走速度、可在戶外的地面移動自如，設計的目的為替人類進行地雷拆除的 TITAN-IX [12]、可使用如前述提到的跳躍步態來實現跑步行為並迅速前進的 Patrush [13] 和 Rush [14]。此外，PUPPY II [15] 透過複雜的控制來完成動態仿生步態、KOLT [16] 使用特殊的電氣系統 (Electro-pneumatic System) 來完成腳部的推進並在身體重心平衡方面取得不錯的成果、傑出的 Big dog [17] 機器人具有似驢類大小四足動物的體型，並且在大部分的自然不平整地表面上移動都具有超水平的身體平衡表現，且亦可承受外力的干擾。其他也有不走仿生路線設計的機器人，LAVA [18] 機器人以多功能的四足和身體翻轉配合可完成移動和抓取物品等動作。

另外，也有以輪腳複合機構的型態出現的四足機器人。其中，較具代表性的例如 Hylos [19] 和 Roller-Walker [20]。Hylos 機器人每隻腳具有 2 自由度，包含兩個旋轉關節，並在腳的末端裝上主動輪，與 PAW 相同，在平地時驅動主動輪前進，需使用四足功能時再將輪子固定，使輪子不能轉動，再利用多自由度的腳，在崎嶇不平的地形上帶動身體前進。Roller-Walker 每隻腳具有三個自由度 (DOF)，

並且在每隻腳末端上安裝被動輪，其運動的方式分為滑行模式（Skating Mode）與行走模式（Walking Mode），在平地時，利用腳的擺動帶動輪子滾動，就好像讓機器人穿著溜冰鞋一樣，在地面上滑行；當需要步行時，需透過其特別的機構，將輪子轉 90 度平貼於地面，此時機器人即可以四足動物的步行方式行進。

目前被發表出來在不平整地面具有高機動性的機器人中 [21]，亦有部分研究有提到機器人對於樓梯的爬升能力。在輪式機器人的部分：Shrimp Rover [22]，透過結合了輪子和自行校正連桿（Self-adjustable Linkages）相當智慧的機構設計來維持在不平整地面和樓梯前進時的適當身軀姿態，並提升其在該環境中的機動性；利用類似的智慧型連桿機構進行樓梯爬行的還有 ROBHAZ [23]。Loper [24] 透過轉動的四個「三葉輪」（Tri-lobe）裝置，亦可於樓梯中爬升。IMPASS [25-26] 利用兩個無外框的輪幅（Rimless Spoke Wheel）驅動身軀，並且每個「幅」具備旋轉和線性移動的兩個自由度來越過樓梯和障礙。另外，也有使用跳躍方式（Hopping）來爬樓梯的輪式機器人[27]。一些履帶式機器人（Tracked Robot）如 Azimut [28]、Macbot [29]、LMA [30]和 Swarm-bot [31]及 PackBot [32] 等，也利用了履帶胎面的突起形狀（Treads）並配合身體的可彎曲關節來達到某種程度的構力，抓住樓梯緣角。在雙足機器人方面，WL-16 [33] 和 Twin-Frame [34] 分別透過著名的史都瓦平台（Stewart Platform）和可輪腳相互切換的盤狀機構來使機器人完成步行，並以優秀的平衡控制來達成的樓梯的爬升。而六足機器人（Hexapod Robot）中，Whegs [35] 利用三支輪幅的長度來跨越樓梯，ASTERISK [36] 則透過高精密的雷射測距儀進行視覺辨識配合其肢幹機構（Limb Mechanism）來實現爬升。另外，Rhex [37] 在樓梯上也展示了卓越的表現，同時包括了爬升樓梯[38-39]，和下樓梯[40]，該方法發展出一項創新並且消耗最小能量的可控制樓梯滑行行為。此外，在提及可爬行樓梯的機器人中，亦有透過輪腳複合（Leg-wheel Hybrid）機構來進行樓梯爬行的機器人，如 Zero Carrier [41] 擁有八隻腳，每隻腳只有一個上下平移的自由度，當上樓遇到阻礙時，先將靠近的

階梯的腳升起，驅動主動輪讓身體前進，依此方式完成上樓梯的動作、Octal Wheel [42] 擁有特殊的輪臂機構 (Wheel-arm Mechanism)，以桿將兩輪連接，此桿子如同手臂可將身體抬高，以完成跨越障礙和爬上階梯等動作。

然而，根據我們目前所知，當前具有樓梯爬升能力的四足機器人僅具少數。如在越障能力方面有顯著成績的 Little Dog [43-46]，該計畫是由 DARPA 開發並將實體模型交付給數個不同大學同時進行各種類型的步態研究，其中 Carnegie Mellon University 的研發團隊透過開路控制並針對樓梯爬行研發出專屬的演算法 [47]。雖然該傑出的研究明確的指出類似動物行為的樓梯爬升方式，但由於在這領域，尤其是提及省能相關議題的研究仍然不多，因此我們著手進行針對於四足機器人樓梯爬行行為的研究。

1.4 研究貢獻與論文架構

此篇論文的重點，集中探討於由運動學和幾何觀點出發去處理問題的基本架構。由此重點發展出的演算法需要的前提假設並非絕對嚴謹，如此該演算法才能套用至更多其他的四足機器人家族，而非唯一的機器人。基於當前同時結合四足機器人與樓梯爬升能力的研究並不多的狀況下，論文內容指出泛用性廣的軌跡設計演算法以及標準流程，以每隻腳具有線性移動和旋轉兩個自由度的機器人 Quattroped 為範例平台去分析，其適用範圍可包含每隻腳具有兩個自由度以上的四足機器人，並且不同類型之自由度亦可相容，同時，演算法也可套用於不同幾何形狀的運動媒介。參考此演算法，將更有利於往後四足機器人於樓梯爬行能力的探討與發展。同時，論文也指出了在套用了上述演算法的平台下，面臨真實環境中，具有兩個方向的尺寸誤差之樓梯，四足機器人其處理原則與閉路控制方法。

在接下來的章節中，第二章介紹了在演算法中會被提到的假設、特殊名詞和參數符號。承續著這些內容，接著描述了僅探討單足而發展出的軌跡分析細節、

針對同時考慮雙足和四足的整合協調作探討，並研究機器人在樓梯爬行時的半靜態穩定度（Quasi-static Stability）[48]。第三章指出機器人的側傾問題，以及面對存在尺寸誤差的真實樓梯，機器人的校正處理和補償方法。第四章介紹透過人機介面操空的機器人原型，以及建立在此實驗平台上相關數據的分析。第五章介紹了套用其他進階形狀的足部模組：半圓腳，以及其他半圓腳演算法衍生的相關細節。最後第六章總結了實驗工作結果並提出未來發展的方向。



第二章 直型腳之運動軌跡規劃

2.1 情境假設與參數設定

此篇論文的目的是開發出四足機器人樓梯爬升的演算法，使任一滿足每足具有兩個或兩個以上自由度的四足機器人能夠參考或套用該演算法並且成功的爬升樓梯。其中包括了產生機器人爬升時最省能的質心軌跡、產生機器人的四足在任意時刻的位置資訊、解決四足運作之間彼此的相互協調問題，以及針對環境適應的錯誤校正。該演算法是以下一節提到的數點理論假設為討論基礎，並且在圖 2 中提出了相關參數指標名稱。

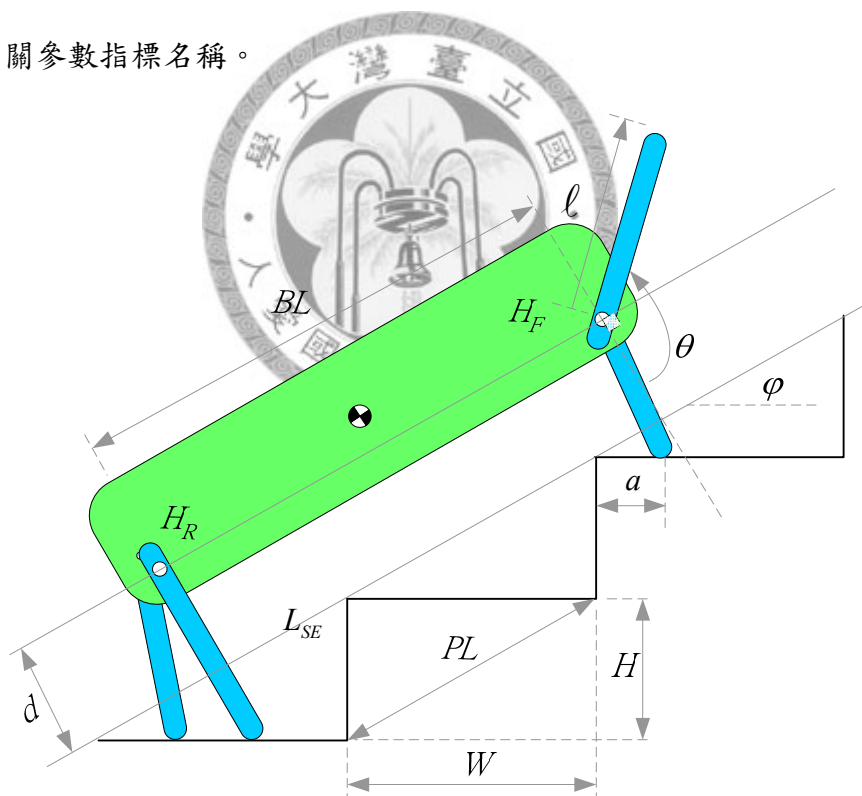


圖 2. 四足機器人爬行樓梯示意圖

演算法是以下列八點假設為出發點來假設，其中出現的斜體代表的是其值可變動調整的參數符號：

1. 每隻腳從側面投影後必須具有兩個自由度在該投影面上。為了方便討論，我們

採用極座標 (ℓ, θ) 為自由度變量符號，並且定義髖部旋轉關節 (Hip Rotary Joint) 之旋轉中心為極座標原點。

2. 位於機器人左邊和右邊同軸線的髖部旋轉關節在機器人的側投影面會重合於同一點，分別定義前兩足和後兩足的共旋轉軸投影點為 H_F 和 H_R 。
3. 樓梯的寬跟高同上述投影面來定義分別為 W 和 H ，並且定義樓梯斜率 ϕ 為 $\phi = \tan^{-1}(H/W)$ 。定義樓梯的「特徵長度」 PL 為樓梯爬升時的週期長度，該長度反映了此樓梯的長度特徵： $PL = \sqrt{W^2 + H^2}$ 。根據數組尺寸不同樓梯的實際量測，樓梯寬 (W) 和高 (H) 的平均值 (以及標準差) 分別為 27 公分 (2.8 公分) 和 17 公分 (1.2 公分)。
4. 前後髖部旋轉關節的共軸點 H_F 和 H_R 是在同一軌跡上移動。此軌跡和樓梯具有相同的斜率並且位於和「樓梯緣線 (L_{SE})」距離偏移量 (Offset Distance) 為 d 之位置上。該軌跡規劃之目的為達成機器人的最低能量損耗。
5. 定義身長 (Body Length) BL 為前後髖關節共軸點 H_F 和 H_R 的距離，並且假設該距離是恆以固定值 BL 為長度。
6. 機器人在爬升過程中必須操作於半靜態 (Quasi-static) 的等速前進狀態，任何動態的身體和足部的動力學問題目前在此省略討論。
7. 在幾何上，一個完整的樓梯是由每一階寬和高為 W 和 H 的樓梯去組合出來的週期性地面環境，因此，在預定軌跡上移動從一階到下一階每隻足的移動也必須表現出週期性的行為。另外，每隻足著地於每一階樓梯的接觸點位置是假設為相同的，此位置 a 定義為該階樓梯邊緣與著地接觸點的距離。
8. 為了維持最小靜態穩定度 (Minimum Static Stability)，在任意時刻機器人至少都有三隻腳與爬升的樓梯接觸，亦即是任意時刻至多只能有一隻腳懸於空中。分別命名空相 (Aero Phase) 和地相 (Ground Phase) 為足位的兩種狀態，當腳位於預計要懸於空中的位置時即為空相，位於預計要接觸地面的位置時則為地相。

2.2 單足幾何分析

為了使四足機器人能達成最省能的爬行，首先我們規劃出軌跡如前所述；由於實際狀況機器人通常為數位輸出，並且假設爬升運動過程全程均為等速前進，因此我們將軌跡（直線）以數位的方式（等間距的點）表達，這些點即為每經過固定間隔時間 Δt 髖關節旋轉軸 H_F 和 H_R 所要到達的位置。此演算法的基本概念就是找出各足的極座標 (ℓ, θ) 使其滿足能使 H_F 和 H_R 落於正確位置，機器人便可遵循預定軌跡前進。

圖 3 顯示了一隻腳在某階梯抬起前的一瞬間（左灰色桿），並假設此腳抬起後在空中停留的時間趨近於無限小馬上到達下一階梯接觸瞬間（右灰色桿）的幾何關係圖。當然，實際狀況在空中停留腳的時間不可能趨近於零，但是為了方便討論，在此我們先假設抬腳換階所需要的時間差是無限小的；亦即，換階前和換階後的腳長長度相同。這項對於估計換階前後腳長特定值的拘束條件假設，將會在往後討論實際狀況的章節中釋出。

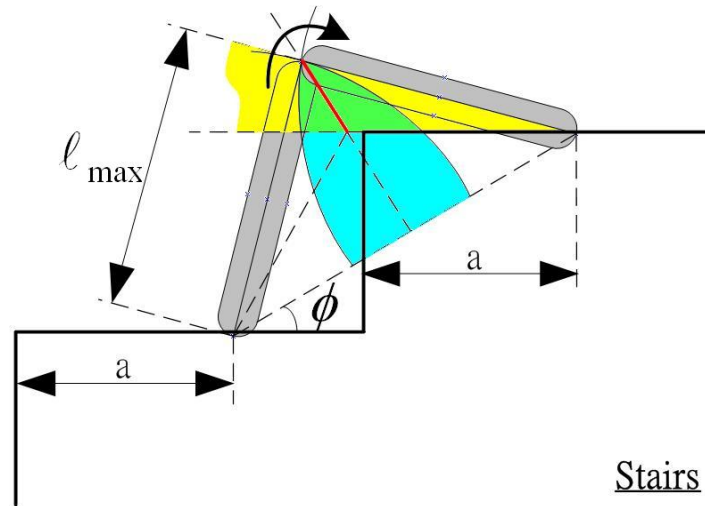


圖 3. 單足換階前後瞬間的幾何關係

為了防止任何介於腳和階梯緣角之間的撞擊發生，我們必須找出腳長最小值 ℓ_{min} 的特定長度。如圖 4 所示，該腳長度必須夠長才能使 H_F 或 H_R 落於黃色區域

內，如此一來腳（圖中的灰桿）才不會在換階完成前的抬昇過程撞擊到階梯的緣角。根據這樣的幾何配置，不難找出其數學關係式如下：

$$\ell_{\min} = \frac{W^2 + H^2}{2W} = \frac{1}{2}(W + H \tan \phi) \quad (1)$$

踩踏點位置深度 a 也受到必須符合拘束條件如下：

$$a < \ell_{\min} \quad (2)$$

若代入前述的樓梯寬高平均值 $W=27\text{cm}$ 和 $H=17\text{cm}$ ，可得 $\ell_{\min}=18.85\text{cm}$ 。在不失通則的狀況下，機器人任一腳的任意時刻腳長 ℓ 將會被設計在以下範圍內：

$\ell_{\min} \leq \ell \leq \ell_{\max}$ ，其中 ℓ_{\max} 為參考樓梯尺寸後自訂出的適當尺寸，事實上， ℓ_{\max} 的長

度會影響四足間的協調問題，在往後的章節會提到。若 ℓ 滿足此條件，則拘束旋轉軸 H_F 或 H_R 使其落於圖 3 的藍色區域內。因此， H_F 和 H_R 可移至的範圍被侷限在圖中的綠色區域。在「換階前和換階後的腳長長度相同」這項假設的前提下， H_F 和 H_R 的位置又更進一步的被限制在綠色區域中的紅色線段上。

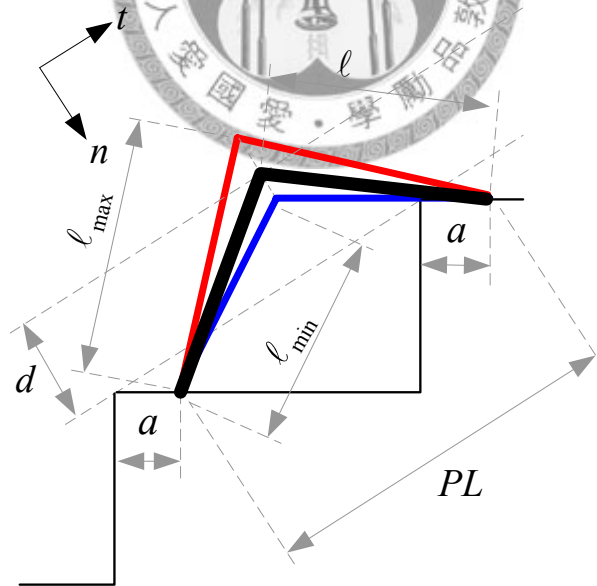


圖 4. 腳長限制範圍

圖 4 清楚的顯示了當腳抬起和著地時腳長設定的上下界 ($\ell_{\min} \leq \ell \leq \ell_{\max}$)。機

器人與樓梯間的距離偏移 d 受到其幾何關係限制可得數學式如下：

$$d = \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}(W^2 + H^2)} - a \sin \phi \quad (3)$$

當機器人腳長逼近其受限制的最小值 ℓ_{\min} 時，方程式可簡化為：

$$d = (\ell_{\min} - a) \sin \phi \quad (4)$$

由 (4) 式可觀察出當 a 接近其極大值時則 d 趨近於 0。

2.3 單足數值分析

在符合上述限制的腳長設計下， a 的允許設計範圍可由 (3) 和 (4) 式決定。透過此兩式，以 a 和偏移量 d 為變數並且腳長限制分別為 $\ell_{\min} = 18.85 \text{ cm}$ 和 $\ell_{\max} = 21 \text{ cm}$ 去繪圖 ($W=27 \text{ cm}$ 和 $H=17 \text{ cm}$)；(3) 或 (4) 式中，三個獨立變數 a 、 ℓ 、 d ，僅由一條方程式拘束，繪出的圖形應為平面，故可得到三維空間中的兩平面如圖 5 所示。此圖說明不論變數之值如何變化，所繪出的圖必須位於此兩平面之間才可滿足所需條件。

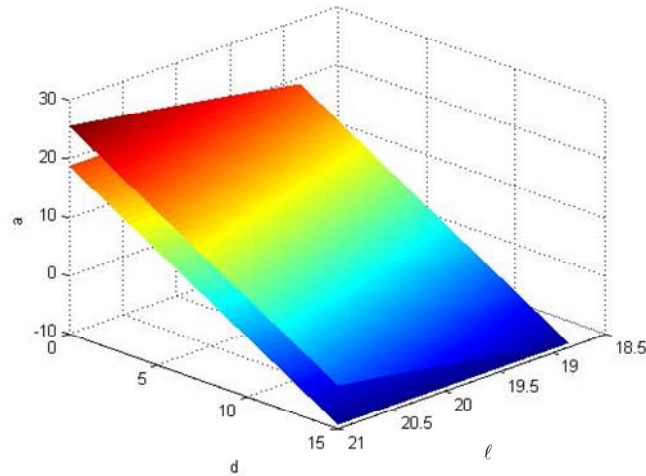


圖 5. a 、 ℓ 、 d 幾何拘束關係圖

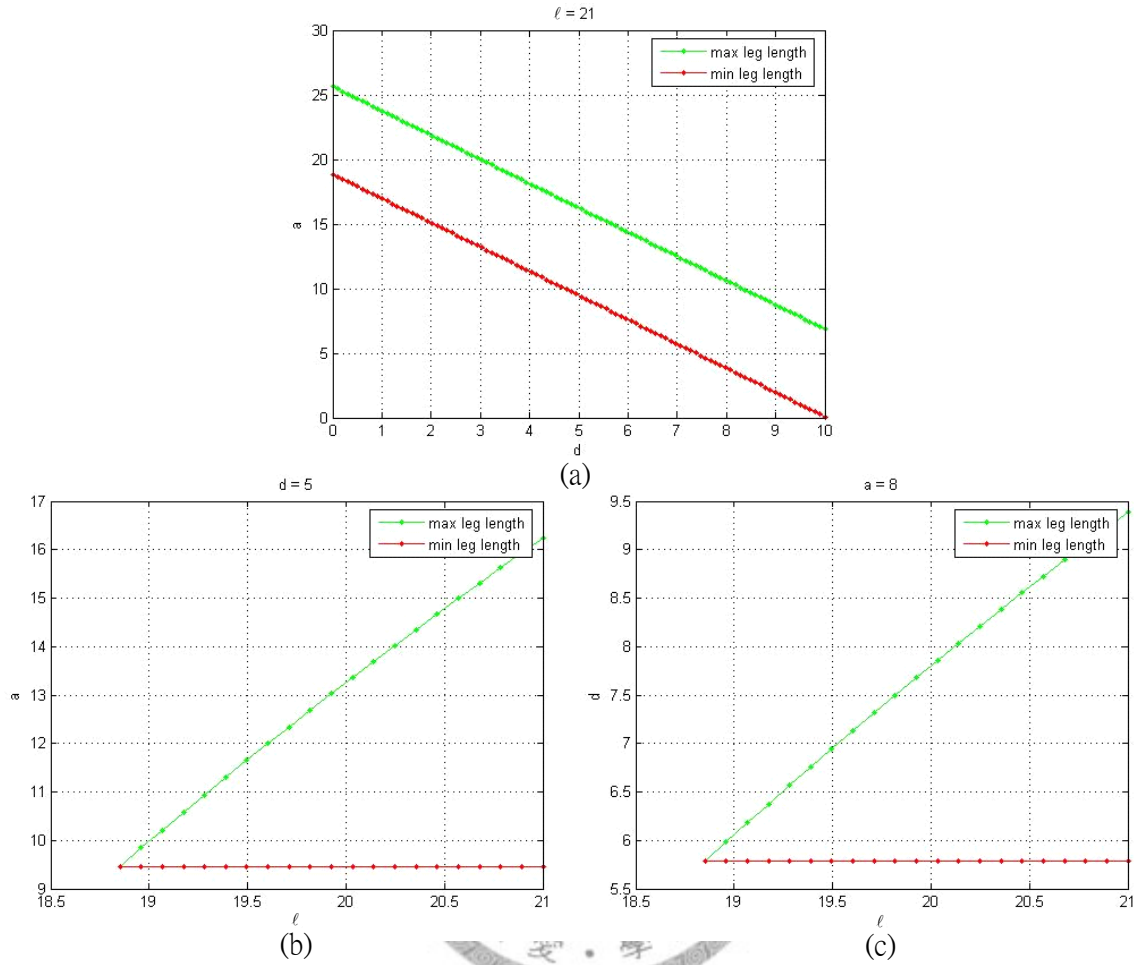


圖 6. 固定特定變數的切平面圖。(a)固定 $\ell=21$ ，(a)固定 $d=5$ ，(a)固定 $a=8$ 。

若將三個變數中任一變數設定為某固定值（亦即在圖 5 三維圖示中從該固定值沿著變數軸切割得到二維的切平面），則剩餘兩個變數的關係便可藉由觀察此切平面圖輕易的瞭解；如此對於給定變數適當值的參考有很大的幫助，在已知的要求下，欲選取剩下參數的值，只要選擇落於符合兩條線區間內的值即可，如圖 6 所示。

三維圖形呈現了 a 在給定偏移量 d 和最長腳長 ℓ_{\max} 下能變化範圍有多大的重要資訊。此變化範圍對於共軸左右兩腳的換階時間差長度是一個重要指標，此將進一步的決定機器人腳之間的協調是否可行。詳細的相關資訊將在接下來的章節說明。

2.4 前或後軸兩共軸腳的協調

機器人的單足若符合前一章節的假設考量，那麼只要該腳長大於等於最小腳長 ℓ_{\min} 便可以從某階樓梯爬升到下一階。然而，若將兩共軸腳同時考慮則此時不一定可行，因為現實中兩隻腳不能同時換階離開地面否則將會破壞機器人的靜態平衡。既然從側投影來看機器人的左右兩腳的旋轉軸關節會重合於同一個點，那麼就意味著「共軸兩腳的換階時間差」必須依靠「軸關節移動到不同位置的起始點去換階」來達成。亦即，以幾何差異來換取時間差異。

假設機器人的腳最長只能伸長到 ℓ_{\max} 的長度，並假設右腳 (leg A) 為先換階的腳，且其換階的起始點位置為當旋轉軸移動到 vp_A 的時候。那麼只要左腳 (leg B) 換階時腳抬起的起始點不晚於旋轉軸移動到 vp_B 的位置時，機器人便可以順利的使兩隻腳都爬升一階樓梯，如圖 7 所示。此圖也清楚的顯示了假若最大腳長值定的越大，那麼共軸左右腳的換階時間差則可拉的越長。然而，對於共軸的兩足來說，雖然時間差越長越好，其仍然有上界限制。因為當時間差太大的時候，會產生「干涉」(Interference) 的問題進而影響到同時考量四足彼此之間協調的困難度，詳細的內容會在接下來的章節中討論。另外，在現實中當腳長 ℓ 太長的時候，轉動慣量過大會造成馬達不必要的能量消耗也是我們所不希望發生的。

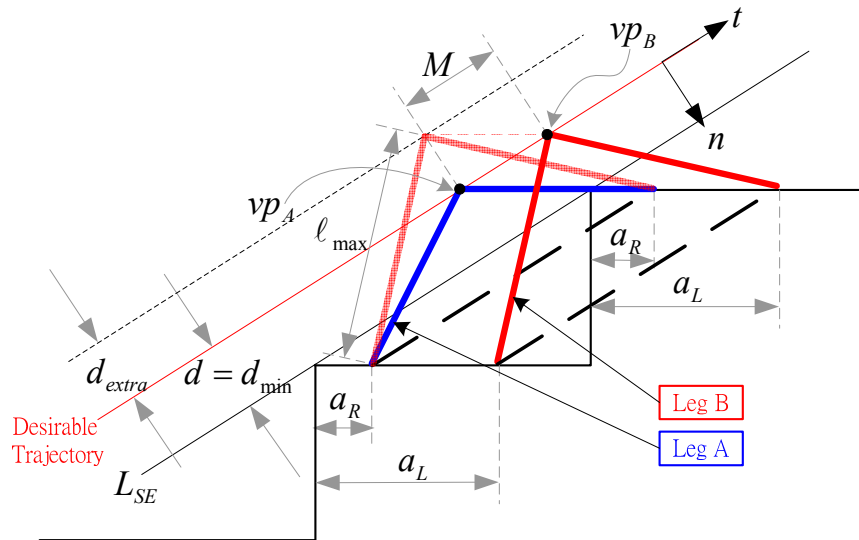


圖 7. 共旋轉軸的換階（空相）可用行程示意圖

我們可將到目前為止的共軸兩腳（前或後）的分析整合成以下幾個標準設計步驟（假設右腳為先換階腳）：

1. 選擇一個適當的值給最大腳長 ℓ_{\max} 。
2. 定義偏移量 d 。
3. 由（4）式，推導右腳著地位置深度 a_R （假設右腳從允許換階區域內最早的位置（即當旋轉軸到達 vp_A 點時）開始抬升）。
4. 將最大腳長 ℓ_{\max} 代入（3）式並減去（4）式，得 d_{extra} （見於圖 7）。

$$d_{extra} = \sqrt{\ell_{\max}^2 - \frac{1}{4}(W^2 + H^2)} - \ell_{\min} \sin \phi \quad (5)$$

5. 由圖 7 中的幾何關係推導左腳著地位置深度 a_L （假設左腳從允許換階區域內最晚的位置（腳長達最長）開始抬升）。

$$a_L = a_R + d_{extra} \csc \phi \quad (6)$$



2.5 四足之間的協調

在現實狀況中，腳的換階從抬升到著地需要時間。假設機器人在換階（空相）的時候仍然保持前進，那麼腳在抬升跟著地時的髖關節旋轉軸位置將會不同。在圖 8 中顯示了數張腳和旋轉軸位置的位移快照，並且以綠色線段的區域表示當腳在換階時，旋轉軸所經過的位移範圍 T （亦可視為時間區段）。遵循前進方向，我們可發現旋轉軸首先經過 T_A （右腳抬升換階），然後經過一段共同著地區域 Δ 後才經過 T_B （左腳抬升換階），故此圖亦可視為共軸雙足換腳的時序圖。很明顯的圖中紅色的腳（左腳）不能在藍色的腳（右腳）著地以前抬起。為了安全起見，我們為了避免任何因為外界干擾、訊號延遲或各種不可抗因素而導致的「協調失序」（Mis-coordination）發生，因而設計了一段緩衝時間 Δ 。由前述可知，每隻腳換階所需要的時間（行程長度）是受到旋轉軸和階梯之間位置關係強烈影響的，

一旦髖關節進入到軌跡上此類被定義的運動區域內，那麼該特定的腳就必須抬起並開始換階的動作。

從實際狀況來看，假如該腳太早抬升，那麼在換階即將完成時，欲完成著地於下一階深度為 a 的位置該腳可能會腳長不足。假如太晚抬升的話，旋轉軸的位置對於階梯來說將會高到超越最大腳長所能構及的範圍。這兩種狀況都會導致機器人運動的不穩定。因此，機器人全部四足之間換階時段的安排是使機器人穩定運動很重要的一個課題。

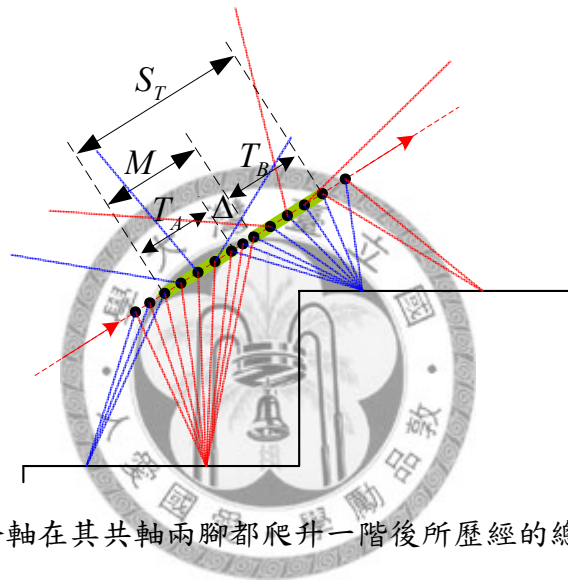


圖 8. 一個重合軸在其共軸兩腳都爬升一階後所歷經的總行程示意圖

圖 8 中的綠色區域可以被視為一隻腳換階的時間區段或者是幾何位移。為了簡化討論，我們直接假設四隻腳每隻腳的綠色區間都是等長的。顯而易見的，每隻腳綠色區間的長度必須比四分之一前述樓梯的「特徵長度」 PL 要短，如此每隻腳在該時間內完成換階，階梯和階梯之間的週期性運動才能被連續的執行。進一步來說，這四個綠色區域之間的任何重疊都不能發生才能使得之前所做的假設「任何時候機器人最多只能有一隻腳抬升於空中」成立。假如綠色區域的長度剛好等於四分之一樓梯特徵長度，則表示任何時間總是剛好三隻腳接觸地面。假如短於四分之一 PL 長，則有部分時間機器人是全部四隻腳支撐的。注意，共軸的左右腳，由於單腳的長度無法長到足夠使該階的綠色區域寬過涵蓋到下一階樓梯的

綠色區域，所以左右腳必須緊接著執行換階抬升的動作。因此腳在換階時的抬升總是成對的出現：前軸兩腳先動作於後軸兩腳，或反之亦然。

既然，換階時間的長短純粹受到幾何關係的影響，那麼身長 BL 在此便扮演了一個決定前軸兩腳和後軸兩腳是否可以完全錯開換階時機去運動的重要角色。圖 8 顯示了共軸兩腳爬完一階的總行程為 S_T ，其中 $S_T = 2T + \Delta$ 。

既然前軸 H_F 和後軸 H_R 的距離受到身長 BL 的幾何限制拘束固定住，那麼一旦掌握 H_R 的位置便可很輕易的定位 H_F 的位置。前軸對和後軸對之間的干涉問題，發生於隨著身長 BL 的長度改變，使得其中一軸的綠色區域重疊到另一軸的任一綠色區域。圖 9 顯示了兩種標準的干涉狀況：(a) 後軸右腳到達必須抬升換階的位置但是前軸左腳還處於空相未完成其換階動作；(b) 前軸右腳到達必須抬升換階的位置但是後軸左腳還處於空相未完成其換階動作。圖中紅色圈中的小區域指出了干涉現象的發生。

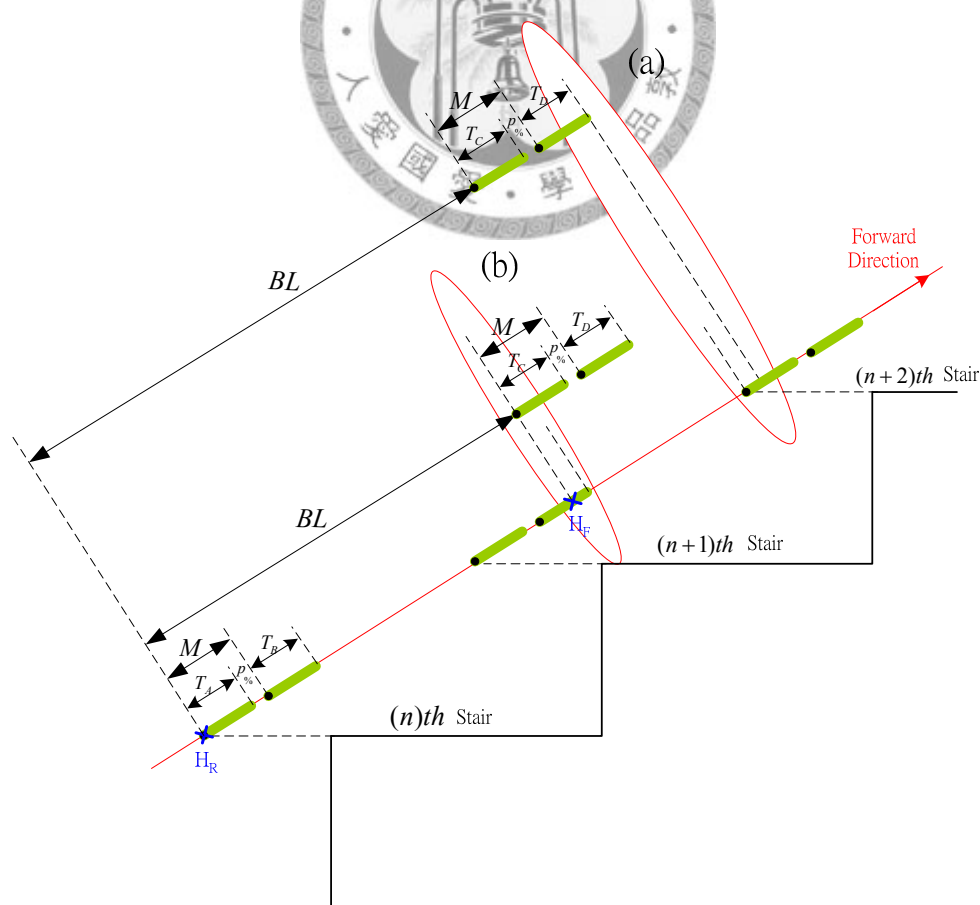


圖 9. 干涉發生示意圖 (a)、(b)：兩種標準的干涉狀況

該如何避免干涉發生？答案就存在於 T_i ($i = A, B, C, \text{ or } D$) 和 BL 其值的正確選取，因為這兩變數是影響綠色區域長度和位置的直接變因。如前所述，為了方便討論我們把每隻腳的條件全部定義為相同。定義 $T_i = T = (1-p)M$ ，其中 M 為「一隻腳換階的總行程長」加上「緩衝區間 Δ 後的長度」，且 p 為緩衝區間的長度百分比，即 $p = \Delta/M$ 。因此：

$$T = (1-p) \left[\frac{W}{H} \sqrt{\ell_{\max}^2 - \frac{1}{4}(W^2 + H^2)} - \frac{1}{2} \sqrt{W^2 + H^2} \right] \quad (7)$$

假設我們給予 BL 設定適當的長度，此時圖 9 中的 (a) 狀況便不會發生，即，前軸 H_F 位置落於 $T_B @ (n+1)th$ 階梯和 $T_A @ (n+2)th$ 階梯之間。如此一來，唯一能夠影響干涉發生的因素就只剩下單軸總行程 S_T 的長度了。由方程式 (7) 我們可觀察出當已知 W 、 H 時， ℓ_{\max} 之值增加，則 T (或 S_T) 也會跟著變長。 S_T 必須比樓梯特徵長度的一半來的短，否則干涉將會無可避免的發生。這同時也表示四足機器人的任一旋轉軸關節在位於空相的時候，其角速度不能太慢。因此，身長 BL 將被嚴厲的限制為恆小於 $PL(k-0.5)$ ，其中 k 為正整數。

另一個縮短 S_T 的方法就是移除 Δ ，此舉動將導致左腳必須在其共軸的右腳著地之後馬上抬升換階而沒有任何緩衝時間。因此這是強烈不建議的作法。比較實際的替代方案是改變 p 百分比之設定值，縮短 Δ 的長度。

換階時序

假設機器人在一組完全精準無尺寸誤差的樓梯上運動，並且透過四足間協調如前一節所述，那麼由前軸 H_F 或後軸 H_R 軌跡之線段來觀察四隻腳的運動，可發現機器人作規律的週期運動，此週期恰好為時相當於旋轉軸其行程經歷 PL (樓梯的特徵長度) 之長。亦即，機器人的運動週期和樓梯週期相同；並且，在軌跡線

段上任取出一段長度為 PL 之線段來看，四隻腳的運動內容、排序均應相同，只是起始點不同。

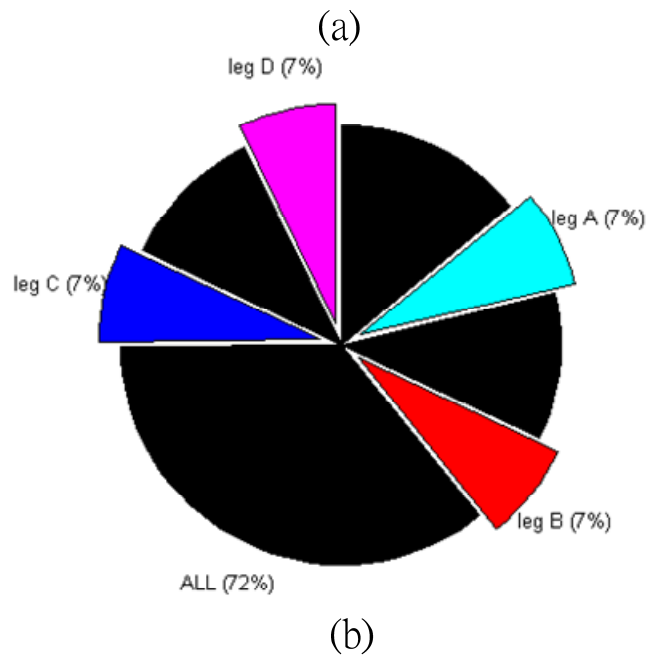
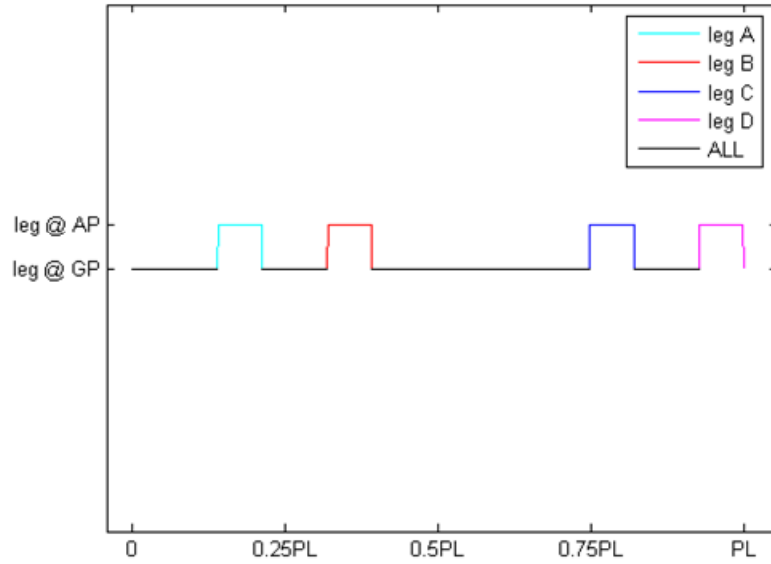


圖 10. 一個完整週期內的各足換階時序圖

圖 10 (a) 描述了在一個週期內，四隻腳在遵守協調規則下的運動順序及狀況。其起始於 D 腳恰好結束之瞬間，故亦結尾於 D 腳於下一階梯換階完成之瞬間。圖 103 (b) 則描述了在給定各參數 (ℓ_{\max} 、 W 、 H 、 p 等) 的設定之下，四腳依照

其運動順序在經歷空相（Aero Phase，AP）時，消耗的時間（行程長度）所佔一個週期的比例。黑色部分表示四足皆經歷地相（Ground Phase，GP）。

多足干涉數值分析

由前述，可知欲判斷干涉狀況的發生，若滿足下列任一點則發生干涉：

$$rem(BL, PL) + S_T \geq PL \quad (8)$$

$$rem(BL, PL) \leq S_T \quad (9)$$

另外，幾何加入幾何限制的條件：

$$\ell_{\max} > \ell_{\min} = \frac{W^2 + H^2}{2W} \quad (10)$$

上述這三個條件將是往後我們設定參數很重要的依據。其中 $rem(x,y)$ 表示求得 x/y 之餘數的方程式。這些不等式呈現了樓梯尺寸 W 、 H 和機器人腳長 ℓ 以及身長 BL 之間的重要關係。 Δ 為使用者自行定義的緩衝時間行程，因此不將其視為變數。設定身長符合 $PL < BL < 2PL$ 的範圍（這樣一來，在實際環境中，機器人和樓梯之間的相對尺寸比例才是比較合理的比值）。在此身長設定之下， $rem(BL, PL) = BL - PL$ ，上述三不等式便可改寫為：

$$(BL - PL) + S_T(W, H, L) \geq PL \quad (11)$$

$$(BL - PL) \leq S_T(W, H, L) \quad (12)$$

$$\ell_{\max} > (W^2 + H^2) / 2W \quad (13)$$

如前所述，投影後的單軸在兩腳都換階完成所經歷的總行程為 S_T ，因為機器人的對稱特性我們也假設了前後軸是一致的，因此前後軸所經歷的總行程皆為 S_T 。在 (11)、(12) 式中，為了簡化混亂的不等式，我們先假設 S_T 為固定值，整理後可得：

$$\left(\frac{BL + S_T}{2BL} \right) \geq \frac{PL}{BL} \quad \text{case (a)}$$

$$\left(\frac{BL - S_T}{BL}\right) \leq \frac{PL}{BL} \quad \text{case (b)}$$

經檢驗，若 $BL > 3S_T$ ，則 $\frac{BL + S_T}{2BL} < \frac{BL - S_T}{BL}$ 。一般而言，在正常的尺寸設置下皆符合此狀況。因此，欲求得**不發生干涉**的條件，上述不等式的比較符號必須**變號**，不等式現在成為：

$$\left(\frac{BL + S_T}{2BL}\right)^2 \leq \left(\frac{W}{BL}\right)^2 + \left(\frac{H}{BL}\right)^2 \leq \left(\frac{BL - S_T}{BL}\right)^2 \quad (14)$$

滿足上述範圍，則干涉狀況(a)和(b)皆不會發生，由觀察可之若以 W/BL 和 H/BL 為兩獨立變數並且給定 BL 之值，則滿足不發生干涉條件的圖形為滿足介於兩同心大小圓之間的圖形。

上述討論提供了重要的線索：觀察這些不等式，可發現是以下列四個獨立參數： W 、 H 、 ℓ_{\max} 、 BL 為基底 (Basis) 去展開的。為了將這些不等式的邊界描述出來，將這些不等式同除以 BL ，並以 W/BL 、 H/BL 、 ℓ_{\max}/BL 為獨立變數；新的三維空間基底現在是以**無因次量** (Dimensionless Quantity) 表示並且代表著 W 、 H 、 ℓ_{\max} 和 BL 之間的比值。同時，欲求**不發生干涉**的條件，也必須把變號的情況一併考慮，三則不等式變為：

$$\left(\frac{\ell_{\max}}{BL}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} \frac{PL}{BL}\right)^2 + \frac{\left[\left(3 - \frac{p}{2}\right) \frac{PL}{BL} - 1\right]^2}{\left[(2 - p) \frac{(\frac{W}{BL})}{(\frac{H}{BL})}\right]^2} \quad (15)$$

$$\left(\frac{\ell_{\max}}{BL}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} \frac{PL}{BL}\right)^2 + \frac{\left[\frac{p}{2} \frac{PL}{BL} - 1\right]^2}{\left[(2 - p) \frac{(\frac{W}{BL})}{(\frac{H}{BL})}\right]^2} \quad (16)$$

$$\left(\frac{\ell_{\max}}{BL}\right) \geq \frac{1}{\left(\frac{W}{BL}\right)} \times \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{BL}\right)^2 \quad (17)$$

當不欲發生圖 9 中的 (a) 和 (b) 兩個干涉狀況時，即滿足不等式 (15) 和 (16) 式。這兩式都指出了 ℓ_{\max}/BL 必須小於某個特定值（當給定了 W 、 H 、 BL 和 p ）。這代表著欲使干涉不發生則限制了 ℓ_{\max} 的上界，或說 ℓ 的上界。至於是「哪個狀況」限制了其上界的極值，則與參數值 W 、 H 、 BL 和 p 有關。一般而言， H 和 ℓ_{\max} 的值通常小於 BL 值的一半，故在繪圖時 H/BL 和 ℓ_{\max}/BL 兩座標軸值超過 0.5 的範圍都是不需要的；以 W/BL 、 H/BL 、 ℓ_{\max}/BL 為三維空間卡式座標的 x ， y ， z 分量去繪圖，則可滿足這幾個參數值的區域應當介於圖 11 所示的兩個平面之間。其中圖 11 的上界限制面是由 (15) 式和 (16) 式的解集合空間共同交集所得。

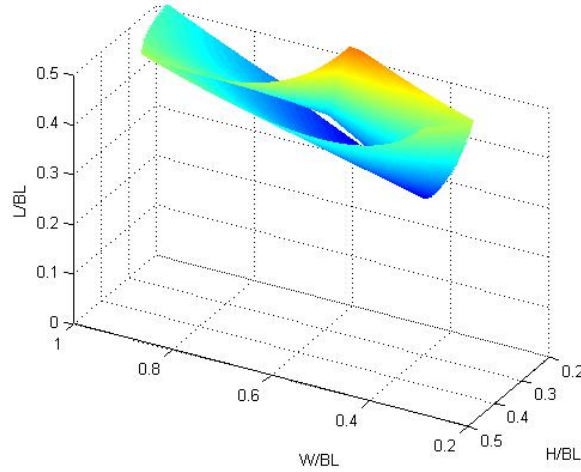


圖 11. 干涉與幾何限制之不等式邊界面

圖 11 提供了非常重要的資訊：已定義的腳長活動範圍 $\ell_{\min} \leq \ell \leq \ell_{\max}$ 和身長 BL （亦即製作完成四足機器人的現有尺寸）在已知的樓梯尺寸 W 、 H （機器人欲爬升的樓梯尺寸）下是否可順利爬升？以我們現有的機器人原型（Prototype）參數舉例，取 $\ell_{\max}=21\text{cm}$ 、 $BL=44.4\text{cm}$ 且 $p=41\%$ ，我們便可從圖 11 所示的三維空間

割出二維平面如圖 12 所示，那麼一旦得知一組樓梯的平均寬、高尺寸值，我們便可檢視此組數據是否落於圖 12 中兩條界線所形成的封閉圖形之內(落於範圍之外則無法順利爬升)，進一步得知機器人能否成功爬升該樓梯。

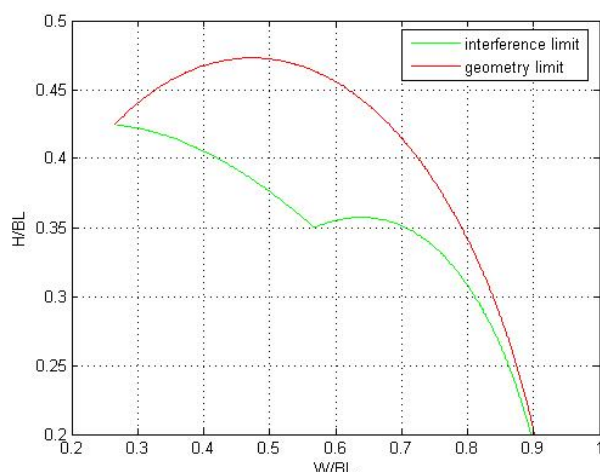


圖 12. 立體圖之切平面：已知 W 、 H ，檢測是否可行之範圍圖， $\ell_{\max}=21$

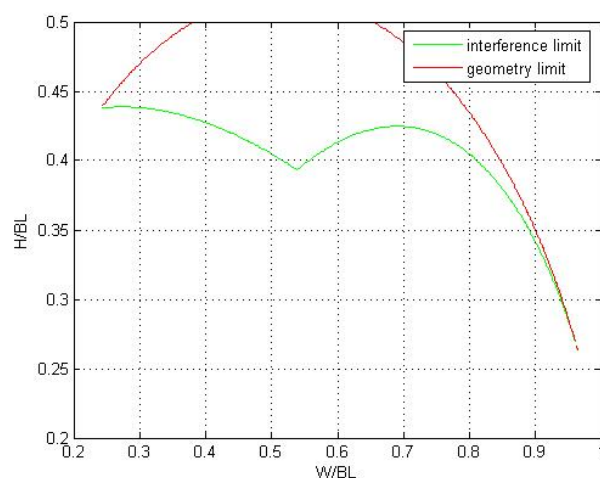


圖 13. 立體圖之切平面：已知 W 、 H ，檢測是否可行之範圍圖， $\ell_{\max}=23$

在圖 12 中，若繪出一以任意角度通過原點的斜直線，此直線上的點代表著相同斜率但不同尺寸的各組階梯；此直線將貫穿封閉曲線的圖形，意味著面對相同斜率的階梯，機器人能爬升樓梯的放大或縮小尺度有一定的範圍的限制。此直線包含於封閉曲線內的長度越長，代表機器人對於此斜率樓梯的適應性越高。

另外，並非落於封閉曲線內的所有樓梯尺寸都是可行的；由於幾何限制的界

線是由 (10) 式衍伸討論繪出，故當此組尺寸 ($W/BL, H/BL$) 逼近該界線時，意味著此時 ℓ_{\min} 之值逼近我們所自訂的最大腳長值 ℓ_{\max} ，則 S_T 趨近於零，那表示共軸的兩腳不但沒有辦法錯開換階時間差，並且每隻腳的換階也必須在瞬間完成，這在現實狀況是不可能達成的。此時，我們就必須重新定義 ℓ_{\max} 的長度使其遠離 ℓ_{\min} 之值，改變 ℓ_{\max} 之值將導致得到圖 13 中新的干涉限制和幾何限制的界線所包圍之封閉範圍縮小，但或許是可行的。亦即，當檢查出樓梯尺寸 ($W/BL, H/BL$) 逼近幾何限制之界線時，解決辦法就是重新定義 ℓ_{\max} 之值。

在我們重新定義 ℓ_{\max} 之後，會得到新的上下界立體圖，並且於 $\ell_{\max}=23$ 取切平面圖，如圖 13。比較圖 124 和圖 13，可觀察出可行範圍有向上移的趨勢，並且其範圍面積增大，有些許的左右延伸以及明顯的上下延伸；並且，其干涉限制的界線形狀也出現變化。這說明了假如發生了上一段落描述之狀況，亦即當檢測出欲爬行的樓梯尺寸太接近幾何限制界線時，重新定義 ℓ_{\max} 取得新的幾何和干涉限制邊界有機會使機器人能夠爬升樓梯。

當 ($W/BL, H/BL$) 落於靠近干涉限制界線但又不超越其範圍，此組樓梯即為機器人欲爬行階梯的理想尺寸。圖 12 為我們的機器人原型在下一章節中的錯誤校正提供了重要的檢視判斷依據。

腳長上界不存在

根據前述的討論，可得結論： ℓ_{\max} 增加，則發生干涉。但事實上，就以人類為例，我們的腳長遠超過樓梯尺寸，但我們在爬樓梯時卻不會遭遇干涉的問題。因此，腳長愈長理論上應該是能夠適應的尺寸範圍愈廣，能克服更多的地形，腳長的上界不應該存在。

既然如此，那到底為什麼 ℓ_{\max} 增加卻會發生干涉呢？原因在於 ℓ_{\max} 和上述的腳長所描述的是不同的兩件事情。首先，我們嚴謹的定義「腳長」：運動物體（人、動物、機器人…等）的腳部完全伸直、伸長時，由髖關節開始計算至腳末端之長

度。因此，不論運動體的腳之自由度為旋轉、或線性，以及不論有幾個自由度，其腳長一律以腳「完全展開」的狀態來量測。故「腳長」為運動體腳部的**真實**最大活動範圍。

而在機器人中， ℓ_{\max} 為我們自訂的最大活動範圍，此最大活動範圍通常是小於腳長的。以目前機器人原型為例，腳長為 26.5cm 的鋁件，而我們自訂的 ℓ_{\max} 為 22cm。也就是說，在這 26.5cm 的範圍內，只有 22cm 會被使用。

當旋轉軸經歷換階區間時，其實有很多種配置方式，無論如何，我們傾向於調配性高，並且穩健的配置法。目前所採用的配置方法如圖 8 所示，共軸的兩腳可以妥善的錯開，並具有可調整的緩衝區間 Δ 。假若將 T_A 的出發點定在早於圖 7 中的水平延伸線交點 vp_A 之前，亦即 S_T 範圍整段在軌跡上往左下移動，提早換階過程，這也是一種配置方法；其他方法例如指定 ℓ_{\max} 為 22cm，在 T_i 的安排上卻只以 21cm 的線性移動範圍去配置。然而這樣的作法，就和直接將 ℓ_{\max} 定義為 21cm 相同；還有眾多其他的配置方式，使用者可自由想像。總之，採用目前預設的方法可得到限制曲線如圖 12 所示，這是檢視機器人能否順利爬升樓梯的重要依據。

若使用者選定了 ℓ_{\max} 長度並依照論文所述的預設流程去分析，發現不發生干涉，則直接採用預設方法即可。否則，假如依照流程一路分析到最後，卻發現干涉發生，則此時使用者有兩個方式可選擇：仍使用預設方法，但降低 ℓ_{\max} 設定的長度（推薦），或者可自由安排其他配置方法。

下方表 1 顯示了上述直型腳討論提及的各變數其符號、物理量以及單位。

Symbol	Quantity	SI Unit
W	length of stair width measured in segittal plane	cm
H	length of stair height measured in segittal plane	cm
PL	charactoristic length of stair	cm
ϕ	stair slope	rad

ℓ	instantaneous output length of single straight leg	cm
θ	instantaneous output angle of single straight leg	rad
ℓ_{\min}	minimum output length of single straight leg	cm
ℓ_{\max}	maximum output length of single straight leg	cm
a (a_R or a_L)	stepping depth of leg (right or left) on stair	cm
d	distance between desirable trajectory and L_{SE}	cm
BL	body length measured from H_R to H_F	cm
M	stroke length between check points of two coaxle legs	cm
S_T	total stroke length of single shaft H_R or H_F	cm
$T(T_i)$	aero phase stroke length for single leg (leg i)	cm
Δ	buffer stroke length for two coaxle legs	cm
p	buffer ratio	%

表 1. 實驗平台使用直型腳爬升樓梯相關變數表格

2.6 馬達輸出曲線設計和模擬

在分析完演算法之後，接著要進行模擬。由於真實狀況中，無法提供完全連續的資訊，因此我們將其數位化，並盡可能的將切割單位縮小，取樣頻率增大，以逼近真實的連續狀況。為了方便觀察，針對 $W=27\text{cm}$ ， $H=17\text{cm}$ 並且每一階都精準無誤差的樓梯 ($PL=31.9\text{cm}$)，我們將一個運動週期分割 150 個點。亦即在預設軌跡 TR 上移動的旋轉軸，在每單位時間 Δt 內將前進 $PL/150=0.21\text{cm}$ 的距離。因此，確定了著地位置 a_R 、 a_L 和旋轉軸位置，便可輕鬆反算各足的姿態 (ℓ, θ)。至於換階的部分，我們所擁有的資訊，僅有各腳在經歷換階前即將抬升瞬間的著地姿態，以及換階完成時的著地姿態。只要能輸出使腳滿足換階前和換階後的姿態，中間剩餘部分（空相）的姿態都可自由安排。定義一個完整的換階過程，包含了換階前和換階後兩個瞬間。假設經歷換階的第一個點為第 i 個點，並反算得該腳資訊 (ℓ_i, θ_i)，且換階的最後一個點的著地姿態為 ($\ell_{i+n-1}, \theta_{i+n-1}$)。換階經歷共計 n 個點，換階過程中除了第一個和最後一個姿態為著地外，其餘部分腳都是懸在空中的狀態。目前空相安排的策略為平均分配法，以腳長 ℓ 為例，換階第一個點腳長為 ℓ_i ，而最後一個點為 ℓ_{i+n-1} ，則中間部分腳長的安排將平均落於 ℓ_i 和 ℓ_{i+n-1} 之間。定義 $\Delta\ell = \ell_{i+n-1} - \ell_i$ ，任兩相鄰的點，其腳長皆相差 $\frac{\Delta\ell}{n}$ 的長度。 θ 部分的安排方法依此類推， $\Delta\theta = (\theta_{i+n-1} + 2\pi) - \theta_i$ （注意同位角）並且各點角度相差 $\frac{\Delta\theta}{n}$ 的經度。

在這樣的安排下進行模擬，使旋轉軸由軌跡上某點出發，且運動經歷兩個週期後結束（即旋轉軸在軌跡上前進了 $2PL$ 的長度）。我們將每個點的 (ℓ, θ) 紀錄下來，此為位置資訊；並透過微分求出位置的一階和二階變化率（速度和加速度），圖 14 顯示了以 RL 腳（左後腳，在長度為 ℓ_{\max} 時換階）為例的所有曲線。圖中的紅色框框標記了腳 RL 歷經換階時的曲線。而 5 (a) 中的 θ 曲線在換階時出現不連續，是因為以同位角 ($\theta - 2\pi$) 表示。如 6 (b) 所示，由於我們換階採用平均分配

法，因此這個階段曲線的變化率為等速，成水平直線。此平均分配法設計，見 7 (c)，使得換階時的加速度出現不連續。這樣的結果，將造成在真實狀況中，可能發生馬達追趕不上訊號，或者是因為馬達扭力瞬間增大超出負荷而造成馬達或電路損毀等問題。



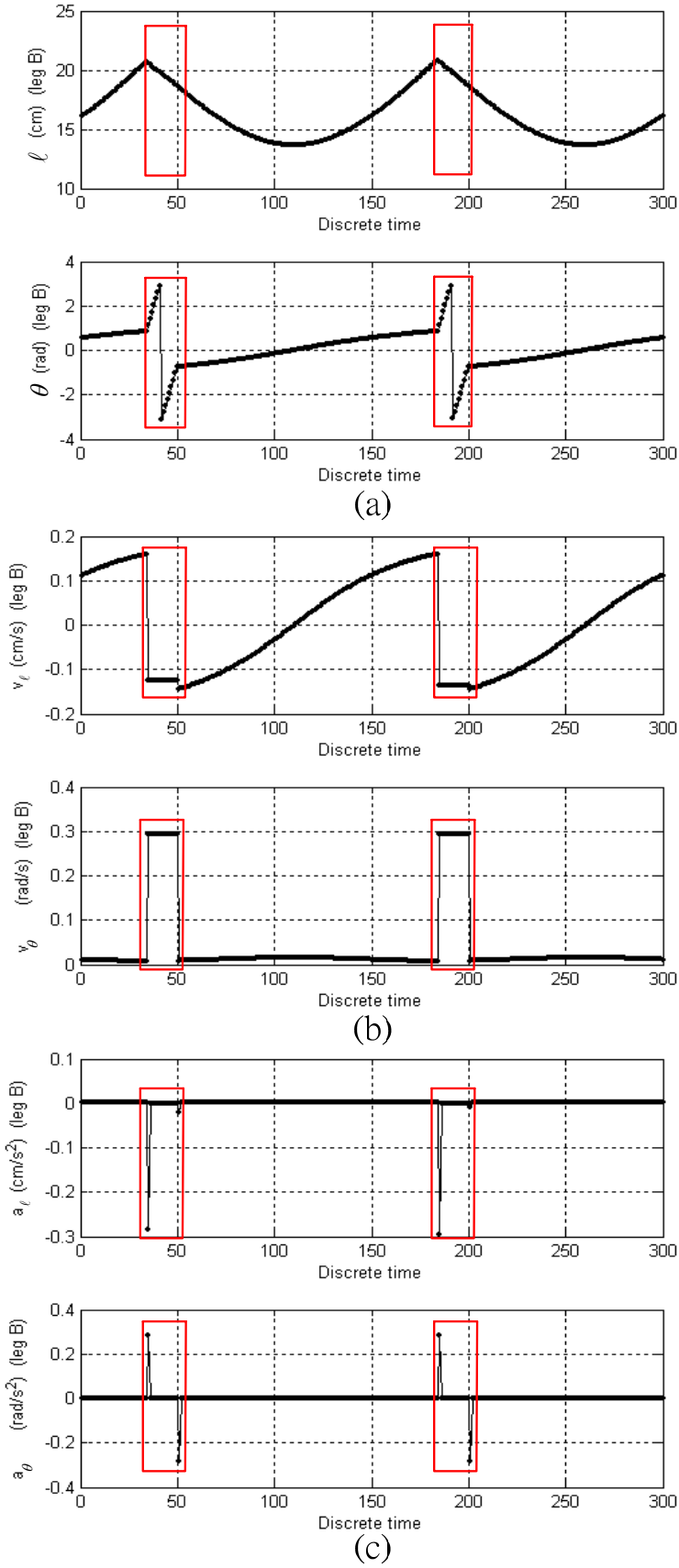


圖 14. 左後腳於兩個週期內的 (ℓ, θ) 資訊以及其一階、二階變化率

欲改善此狀況，我們需要摒棄平均分配法，重新設計換階的安排，使一階變化率的曲線（速度曲線）平滑，此即為曲線圓滑化的設計。將速度曲線換階部分放大來看，如圖 15。在換階過程中（紅框內），可清楚的發現換階前瞬間 S 點和換階後瞬間 E 點除外，剩餘的點和值為 0 的橫軸間所圍成的面積，恰好等於由 (ℓ, θ) 位置圖所求出的 $\Delta \ell$ 和 $\Delta \theta$ 。

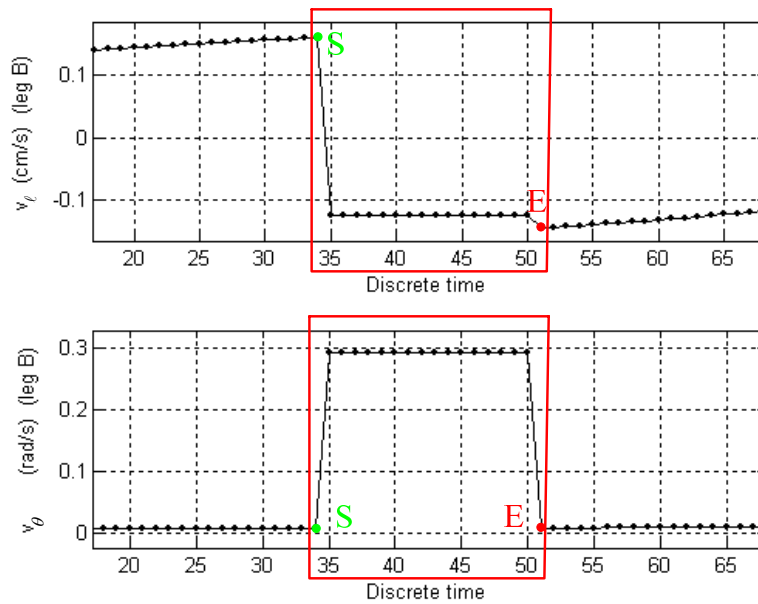


圖 15. 圓滑化設計目標曲線放大圖

遵守著面積和變化量守恆的原理，現在我們可以針對 v_ℓ 規劃出新的圓滑化曲線如圖 16。該曲線由兩部分的三角函數曲線 Γ_1 、 Γ_2 所組成，詳細的曲線資訊描述如下：

$$\Gamma_1 : S \cos \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Gamma_2 : -A_2 \sin \varphi_2, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq \alpha \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \quad A_2 > 0 \right)$$

其中， Γ_2 中有兩未知數 α 和 A_2 ，需要透過往後的拘束方程式求解。關於 Γ_2 為何不

和 Γ_1 相同取用 $1/4$ 週期的三角函數曲線，而採用週期範圍介於 $1/4$ 和 $1/2$ 之間的曲線，乃因 $\Delta\ell$ 為不小的負值，若 Γ_2 同 Γ_1 採用 $1/4$ 週期的三角函數曲線，則 Γ_1 和 Γ_2 的面積總和將不足以小至相等於 $\Delta\ell$ 之負值。

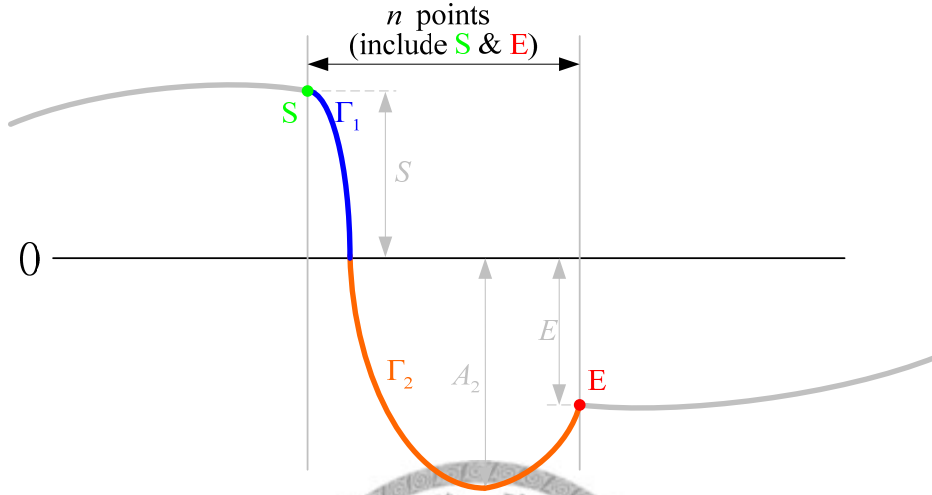


圖 16. $\Delta\ell$ 圓滑化設計

Γ_1 、 Γ_2 的曲線寬度比例使用者是可任意自訂的，這將決定 Γ_1 和 Γ_2 佔用換階區間點數 n 的分配， n_1 和 $(n - n_1)$ 。依照經驗， n_1 盡可能的小，分配起來才有可能有解。因此，自行定義寬度，決定 n_1 後，便可描述 Γ_1 和 Γ_2 的數位方程式：

$$\Gamma_1(i) = S \cos\left(\frac{\pi}{2n_1}(i-1)\right), \quad i = 1:n_1$$

$$\Gamma_2(j) = -A_2 \sin\left(\frac{\alpha}{n-(n_1+1)}(j-n_1-1)\right), \quad j = (n_1+1):n$$

接著，只要將未知數 α 和 A_2 求解， Γ_1 和 Γ_2 便充分定義，則區間內任一點的值都可輕易描述。透過已知條件描述的拘束方程式，我們找出 α 和 A_2 之值：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_1} \Gamma_1(i) + \sum_{j=n_1+1}^n \Gamma_2(j) = \Delta\ell \\ \Gamma_2(n) = E \end{cases} \quad (18)$$

其中，雖然 α 和 A_2 可由式 (18) 解出，卻沒有解析解，僅能依靠數值軟體進行運

算。若定義 $n_1=2$ ，並代入已知 $\Delta\ell=-2.14$ ， $S=0.16$ 和 $E=-0.14$ ，則可求得 $\alpha=2.5425(\text{rad})$ 和 $A_2=0.2254$ 。

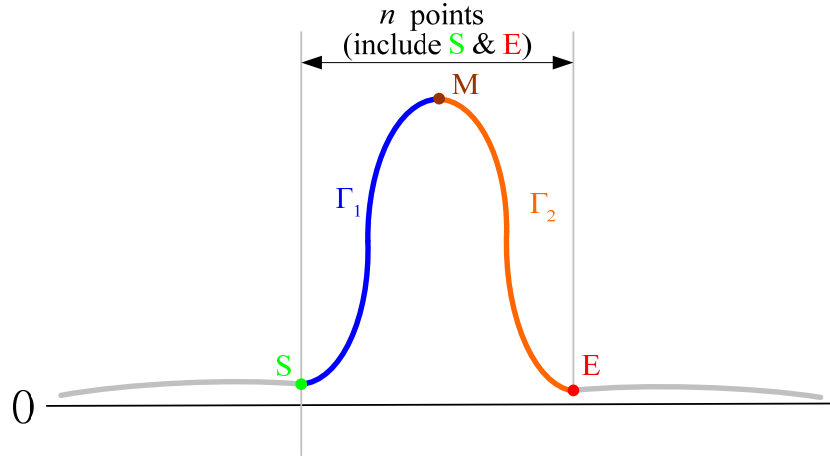


圖 17. $\Delta\theta$ 圓滑化設計

v_θ 的圓滑化曲線設計如圖 17 所示，其規劃過程與方式請讀者參照 v_ℓ 圓滑化曲線規劃的方法，其內容的差異在於 Γ_1 、 Γ_2 皆採用 $1/2$ 週期的三角函數，並且寬度劃分比例為 $n_1 : (n - n_1) = 1 : 1$ 。另外，在曲線設計分析的計算過程中，也略有不同。首先，我們假設中點 M，其值為 M 為未知數，如圖所示。則此時可得 Γ_1 、 Γ_2 的振幅 A_1 、 A_2 為 M 的關係式如下：

$$A_1 = \frac{1}{2}(M - S)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(M - E)$$

此時， Γ_1 和 Γ_2 連續曲線的描述為：

$$\Gamma_1 : A_1 \cos \varphi_1 + (M - A_1), \quad \pi \leq \varphi_1 \leq 2\pi$$

$$\Gamma_2 : A_2 \cos \varphi_2 + (M - A_2), \quad 0 \leq \varphi_2 \leq \pi$$

接著，在 S 和 E 之間的寬度分割 n 個點之後，此時各點之間的間距便等分為 $\frac{2\pi}{n+1}$ 。

且由於 Γ_1 和 Γ_2 的寬度比為 $1 : 1$ ，故決定 $n_1 = \frac{n}{2}$ （當 n 為偶數）或 $n_1 = \frac{n+1}{2}$ （當 n 為奇數）。則此時 Γ_1 和 Γ_2 的數位方程式描述如下：

$$\Gamma_1(i) = A_1 \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{n+1}i\right) + (M - A_1), \quad i = 1:n_1$$

$$\Gamma_2(j) = A_2 \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{n+1}(j - n_1 - 1)\right) + (M - A_2), \quad j = (n_1 + 1):n$$

注意到， $\Gamma_2(j)$ 的函數採反方向的描述：隨著 j 值遞增， $\Gamma_2(j)$ 由圖 17 的右邊向左描述回來。接著我們必須找出 M 值， Γ_1 和 Γ_2 才能充分定義。透過上述已知的面積關係，我們可以找到一拘束方程式：

$$\sum_{i=1}^{n_1} \Gamma_1(i) + \sum_{j=n_1+1}^n \Gamma_2(j) = \Delta\theta \quad (19)$$

和 v_ℓ 的圓滑化設計步驟相似，其中 M 雖然可由上式解出，卻沒有解析解，僅能依靠數值軟體進行運算。若代入已知 $\Delta\ell = -2.14$ ， $S=0.0068$ 和 $E=0.0084$ ，則可求得 $M=0.5441$ 。

至此，腳 RL 在換階過程的曲線圓滑化設計算是大功告成。在採用上述的圓滑化規劃安排後，可得新的曲線如圖 18 (a)、(b)、(c) 所示。(a) 圖中無論是 ℓ 或 θ ，其曲線都變的更加圓滑順暢。圖 (b) 則顯示了經上述方法規劃後的曲線，和我們所預計的所差無幾。圖 (c) 加速度圖的變化也呈現連續而沒有離散的點出現。

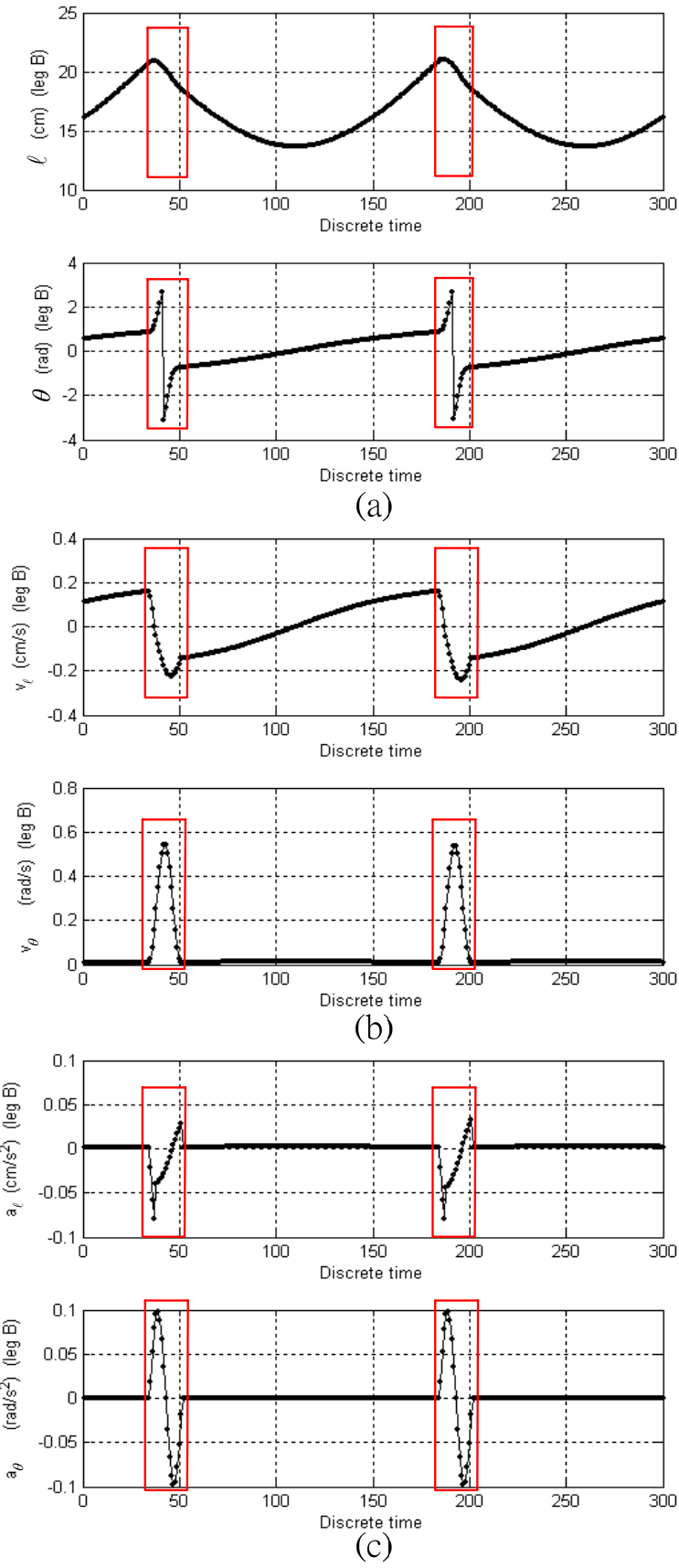
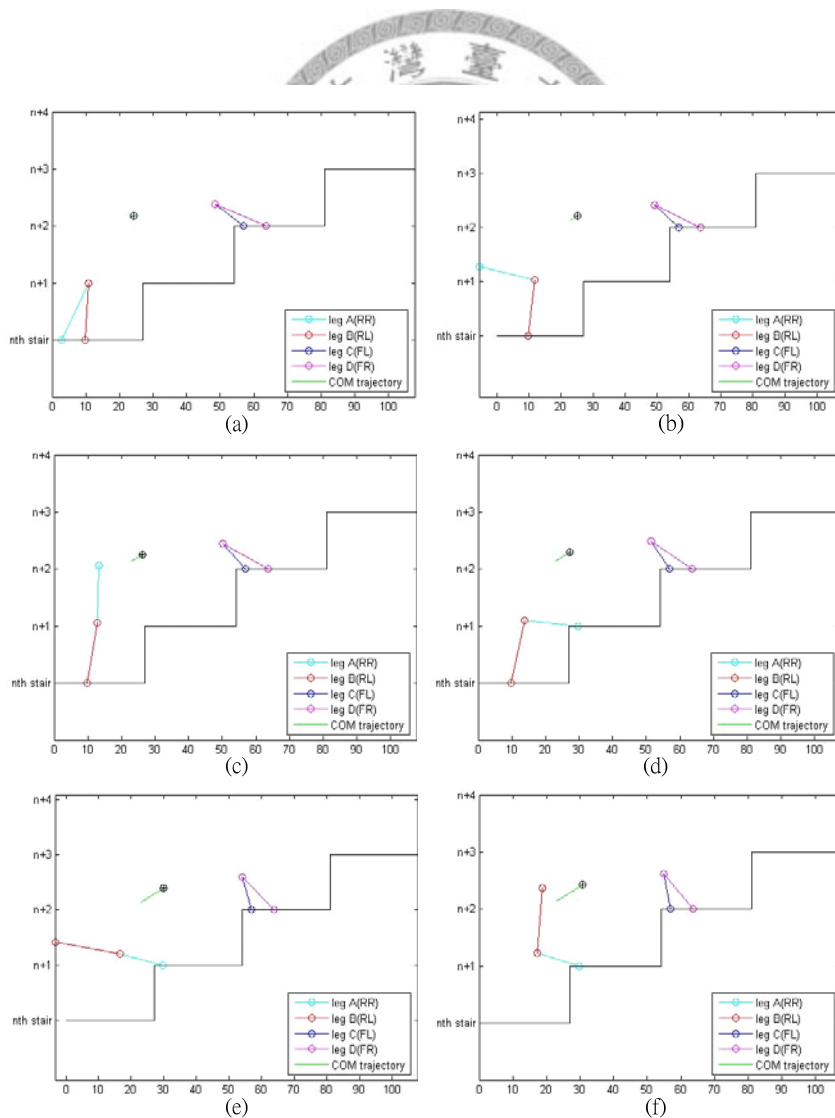


圖 18. 左後腳經過圓滑化規劃的 (ℓ, θ) 資訊以及其一階、二階變化率

其他三腳 RR（右後）、FR（右前）、FL（左前）亦使用相同的方式重新規劃曲線後，接著透過 MATLAB 的模擬，尺寸參數採用機器人原型尺寸的設定值 $\ell_{\max}=21\text{cm}$ 、 $BL=44.4\text{cm}$ 且 $p=41\%$ ，並輸入合理的環境設定值 $d=8.5\text{cm}$ 、 $W=27\text{cm}$ 和 $H=17\text{cm}$ 。利用 MATLAB 中的 MOVIE 的指令顯示爬升過程的連續動畫。注意到此模擬是建立在樓梯尺寸完全精準的假設下進行。圖 19 顯示了經過圓滑化規劃後，機器人在一個完整週期內，其運動結果模擬的數張動畫截圖。截圖內容忽略了機器人機身的構圖，僅顯示了四隻腳的長度和姿態，以及機器人的質心軌跡。由模擬結果可清楚的觀察出每次最多只有一腳可以抬升離地，四足之間依照順序換階，以及存在著四足都處於地相的姿態。



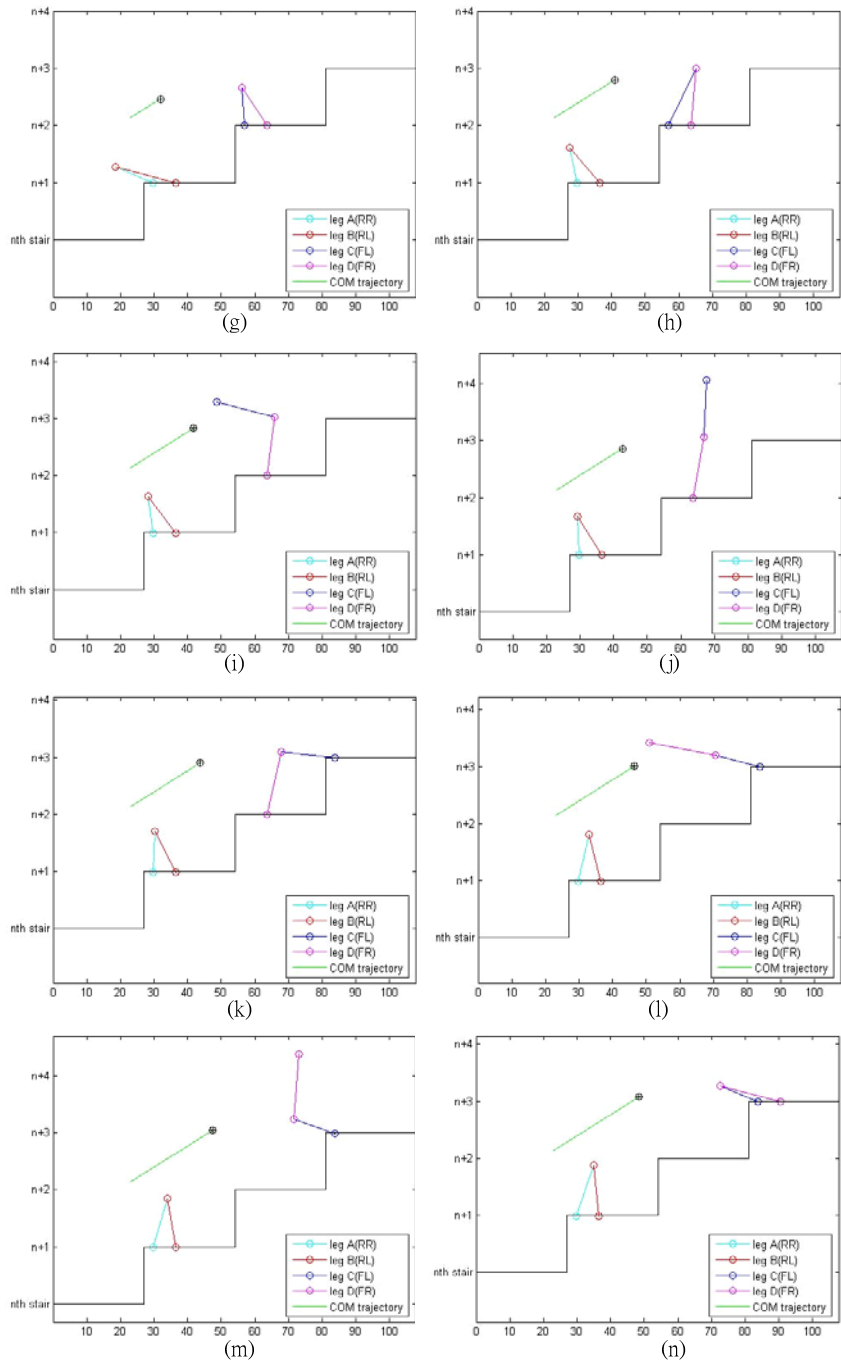


圖 19. 直型腳運動模擬

第三章 誤差分析與錯誤校正

3.1 側傾分析

前述討論全都著重於從側投影面（Sagittal Plane）的討論。在現實中，roll 角的傾斜也必須被考量（Yaw, Pitch and Roll, **Tait-Bryan Angles System**），特別是當機器人僅以三隻腳接觸樓梯作支撐的時候。欲討論此現象必須從俯視圖投影面（Transverse Plane）來探討。

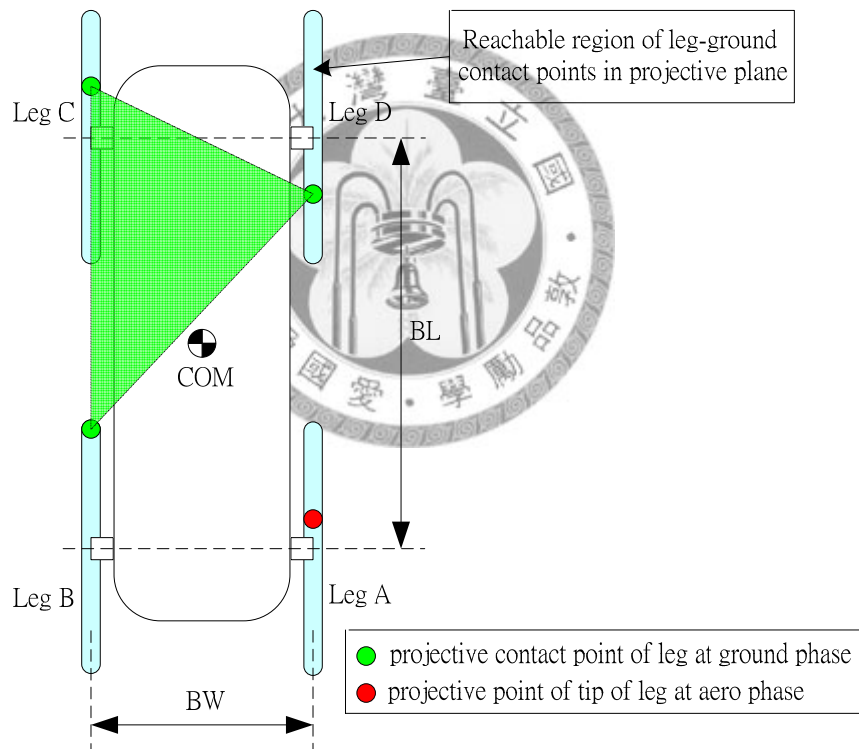


圖 20. 機器人側傾說明圖（俯視圖）

假設質量中心（Center of Mass, COM）位於機器人上下與左右皆對稱的正中央位置，圖 20 說明了當質心落於由三隻著地的腳與地面接觸點所圍成的瞬時三角形之外時，側傾就會發生。參考前述章節所提到的四足協調時序設計，可發現四隻腳的換階方式有兩種可能的排列組合。將機器人的腳給予編號命名，假設機器

人的 A 腳和 C 腳共軸兩腳之中首先換階的腳，由前述可知，此兩腳的腳長一旦到達特定值 ℓ_{\min} 的時候便會抬升換階；那麼機器人剩餘的兩足：B 腳和 D 腳則是共軸兩腳之中較慢換階的腳，當腳長到達 ℓ_{\max} 之特定長度時換階。當我們從俯視投影面來看機器人時，由右後腳開始並以順時針的方向來看各腳，則四隻腳以 A，B，C，D 的順序排列（如圖 20），此即為第一種排列組合。由右後腳開始並以順時針的方向來看各腳，四隻腳以 A，B，D，C 的順序排列，剛好是將第一種排列組合之中的 C、D 兩腳對調，此即為第二種排列組合。

我們透過 MATLAB 利用向量運算的方式來計算 COM 在爬行的過程中是否發生落於瞬時三角形之外的狀況，可發現上述兩種排列組合，在爬行過程中的確都有部分時間發生輕微的側傾現象，但是有程度上的差異。此討論將有助於決定以何種排列組合方式安排機器人的樓梯爬升步態，側傾嚴重度較低者將被採用。

採用目前實驗室有的機器人原型尺寸，設定尺寸如下：身寬 $BW=36\text{cm}$ ，身長 $BL=44.4\text{cm}$ ，最大腳長 $\ell_{\max}=21\text{cm}$ ，緩衝比例 $p=41\%$ ，並以前述的標準平均值 $W=27\text{cm}$ 和 $H=17\text{cm}$ 作為環境參數；定義要求的偏移量 $d=8.5\text{cm}$ 。使用軟體模擬機器人爬升數階樓梯之後，最後可得偏移資訊如圖 21 和圖 22。

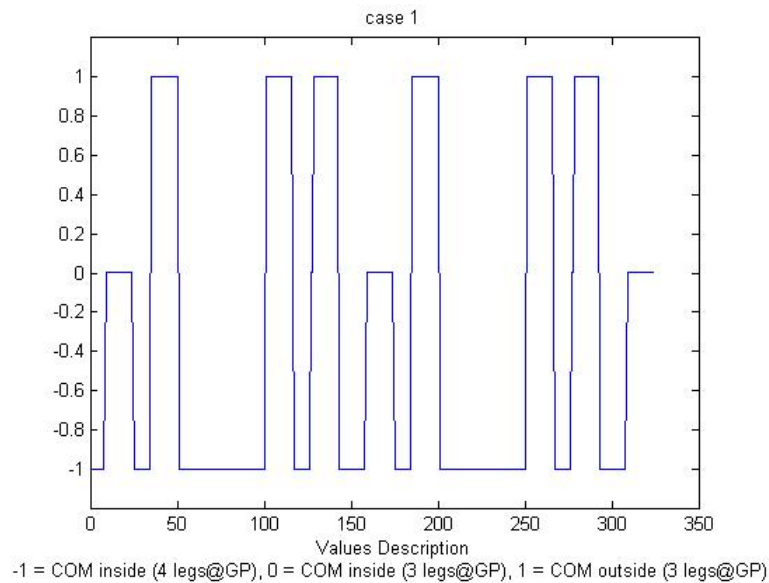


圖 21. 機器人側傾時序圖：CASE 1

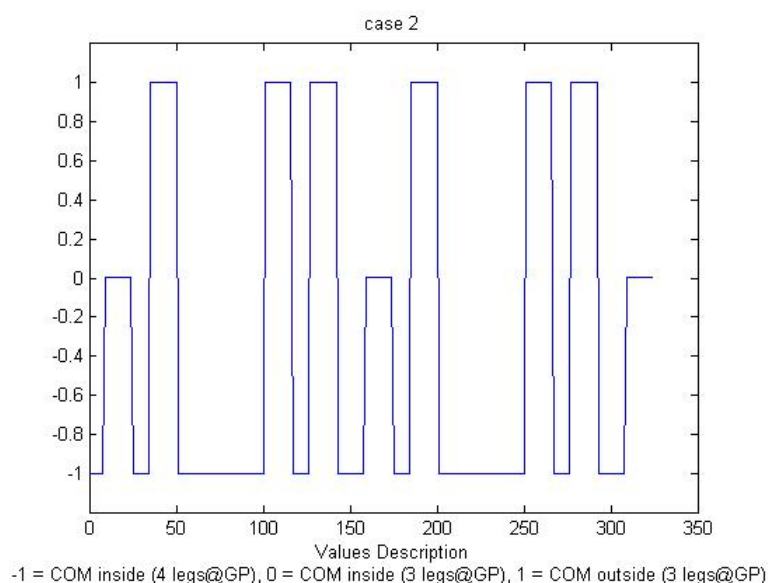


圖 22. 機器人側傾時序圖：CASE 2

圖 21、22 中，橫軸代表的是軌跡位移：我們採用數位控制的方法，以特定的單位長度在軌跡上等間距安排「預定點」規則排列，使得旋轉軸以等速去經過這些「預定點」，故橫軸亦可視為點編號，當編號越大，則軸移動的位置越遠，因此可視為位移。而縱軸則代表側傾的狀態，為了方便觀察我們將所有可能發生的狀態以三個數值表示。當其值為 -1 時表示此時機器人以四隻腳穩定的著地於階梯上，因此不需考量重心外移的問題，亦即側傾不發生；值為 0 時表示此時機器人有一隻腳在做抬升動作，僅三隻腳與地面接觸，但重心仍落於瞬時三角形之內，側傾不發生；值為 1 時表示機器人同前述，僅三隻腳與地面接觸，但此時重心落於瞬時三角形之外，亦即側傾發生。縱軸值的說明詳見於圖片下方，皆有清楚的說明。

觀察這兩張圖可發現，圖中的波形是重複的，因此具有週期性。其顯示了 2.15 個週期的資訊，這代表著機器人爬行了兩層左右的階梯。我們所關注的，是側傾發生的嚴重度，此現象可藉由量化的方式計算出。由於重複的週期特性，我們僅需要計算出一個完整週期內側傾發生的比例即可。經過計算，使用第一種腳位的排列組合方式，側傾的發生佔了 27.3%，而在第二種排列組合方式中佔了 30%。

很明顯的，第一種排列組合方式（從右後腳以 A，B，C，D 的順時針方式安置）其側傾嚴重度較第二種來的輕，也就是說交錯擺置兩軸的先後腳（即先換階和後換階的腳）是較好的選擇。

側傾的發生是由標準位置開始逐漸歪斜傾倒連續的過程，其傾斜的瞬時旋轉軸為對角線上的兩著地腳與地面接觸點的連線，所受到使機器人產生傾斜的外力，乃因其質心偏離此軸進而產生力矩。故質心偏離此軸越遠，機器人傾倒的越快。雖然在爬升過程中，不管以何種排列組合配置腳位，COM 都有將近 30% 左右的時間落於三角形之外，但事實上在爬升過程中，質心與側傾軸的偏移量都不大，因此產生可視為很小的力矩並無法使機器人嚴重傾斜。並且，發生的時間並不是完全連續與連貫，而是散開分佈於機器人一個爬升週期內，當有一隻腳處於空相的部分時間內。因此，這些側傾問題可以在當機器人以四隻腳著地時很快的修正回來。

由目前的步態設計可知，側傾的發生是無可避免的，並造成機器人在爬升時的微小晃動，降低其移動定位的精準度。如欲改善側傾問題，則可縮短機器人僅以三隻腳著地狀態的時間。亦即，加快每隻腳在馬達允許輸出範圍內的換階旋轉速度。

3.2 誤差適應與軌跡校正

再討論過理想狀態環境下的演算法後，現實環境下實際樓梯尺寸在建造上的不精確是需要被考量的。因此，每一階皆具備有相同尺寸 W 、 H 的樓梯是不可能存在的；取而代之的，我們將 W 、 H 視為該樓梯每一組階梯尺寸的平均尺寸，並且定義 ΔW 、 ΔH 為各階尺寸不精確的樓梯與平均尺寸之偏差值。為了在上樓梯時維持演算法的爬升方式，也就是在運動過程中，機器人與樓梯之間（或者說，其運動軌跡和緣線 L_{SE} 之間）的距離始終保持固定值 d 。因此我們必須採用可適應誤

差的新演算法。

單階樓梯的誤差大體上可簡化分為兩種狀況：(a) 僅樓梯寬（深）有誤差，亦即 $\Delta W \neq 0$ 、 $\Delta H = 0$ 。(b) 僅樓梯高有誤差，亦即 $\Delta W = 0$ 、 $\Delta H \neq 0$ 。任何樓梯的尺寸誤差都可視為此兩種狀況的組合。因此，在樓梯爬升的演算法中，誤差的適應只要針對這兩種個別的狀況分別套用相應的解決辦法，機器人便可順利爬升。真實狀況下，在一組樓梯中每一階樓梯的尺寸必定與平均值有微小的誤差，為了方便討論，我們先作理想化的假設：除了有尺寸誤差的該階樓梯以外，假設此與階梯相鄰的其他樓梯都是沒有誤差的。

在上述設定下，我們可以將兩種誤差狀況再加以細分成四種：

(a.1) $\Delta W > 0$ 、 $\Delta H = 0$ ，並且其他相鄰階梯無誤差。

(a.2) $\Delta W < 0$ 、 $\Delta H = 0$ ，並且其他相鄰階梯無誤差。

(b.1) $\Delta W = 0$ 、 $\Delta H > 0$ ，並且其他相鄰階梯無誤差。

(b.2) $\Delta W = 0$ 、 $\Delta H < 0$ ，並且其他相鄰階梯無誤差。

注意到此四種狀況都建立在理想化的假設上。

由於目標在於產生能夠達到省能效果的軌跡，使用開路控制雖然適應性高，但無法精確的執行省能軌跡需求，所以我們需要採用閉迴路控制方式，以確保軌跡的準確性。欲採用閉路控制，最重要的議題，便為樓梯尺寸誤差的偵測；對於某一階有誤差的樓梯，可能的偵測結果有三種：(A) 在機器人任一隻腳踩踏於此階梯之前便已提早偵測到，(B) 在機器人其中一腳踩踏於此階梯之運動過程中才偵測到誤差，以及 (C) 機器人四隻腳中已有某腳（或不止一隻腳）踩踏過此階梯且經歷完整的運動過程，並脫離接觸換階抬升到下一層階梯時，才偵測到該階梯尺寸誤差。當然實際上在前進過程中，必定是前軸的兩隻腳先歷經此誤差階梯才輪到後軸兩腳，故上述 (B)、(C) 狀況提及「正在經歷」或「已經經歷」的腳都是指前軸的腳。理想上，對前進中的機器人來說，若能提前預知即將遭遇的環境即可立刻規劃出誤差階梯的應對運動軌跡，因此偵測狀況 (A) 優於 (B)，且 (B)

又優於 (C)。

欲滿足偵測狀況 (A)，機器人必須具備有同步定位與建圖 (SLAM, Simultaneous Localization and Mapping) 的功能，或者退而求其次，至少需要有可變動偵測角度的測距器 (為適應各組不同寬高尺寸搭配的階梯)，不管選擇為何，機構的複雜性提高將是無可避免的。目前的所設計的機器人原型，初步是以精簡、低複雜性為出發點，僅裝配簡單的紅外線測距儀 (Infrared Distance Sensor) 為其環境偵測設備。由於機器人在樓梯的爬升過程中，身體維持固定平行階梯的傾角的姿態並且會有些微的振動，僅裝置紅外線距離感測器是無法滿足 (A) 提前偵測的可能。故採用狀況 (B) 或 (C) 是較為可能的選擇。

回到上述的四種誤差討論，(a.1) 和 (a.2) 為尺寸在 W 方向上的誤差，見於圖 23，此圖清楚的描述了狀況 (a.2)。一開始機器人位於圖片的左邊中部分的軌跡並且還未遭遇到有誤差的階梯時，此時運動軌跡始終與樓梯保持固定為 D 的距離前進。接著，通過了僅在 W 方向有誤差的階梯，圖中清楚的指出，假如未經任何訊號的回授與修正，機器人將以和樓梯間隔 d_{i+1}^* 為新距離的軌跡前進，並且造成往後每一階的樓梯 (假設沒有誤差) 爬升過程中，機器人腳與階梯的踩踏著地位置往樓梯內側移動，如圖中紅色誤差階梯下一層階梯上的灰點和黑點說明所示。亦即，假如樓梯尺寸在 W 方向有誤差，又不採取任何修正的話，那麼所造成的影響只有「機器人軌跡與樓梯緣線的距離 d 改變」這個現象發生。參考前述章節的幾何分析可知，此距離 d 與機器人腳的抬升換階落地點位置 a 成線性反比。因此， d 愈大，則 a 愈小，在實際上的意義就是機器人的預計換階落點將往樓梯外緣移動；同理反之亦然。

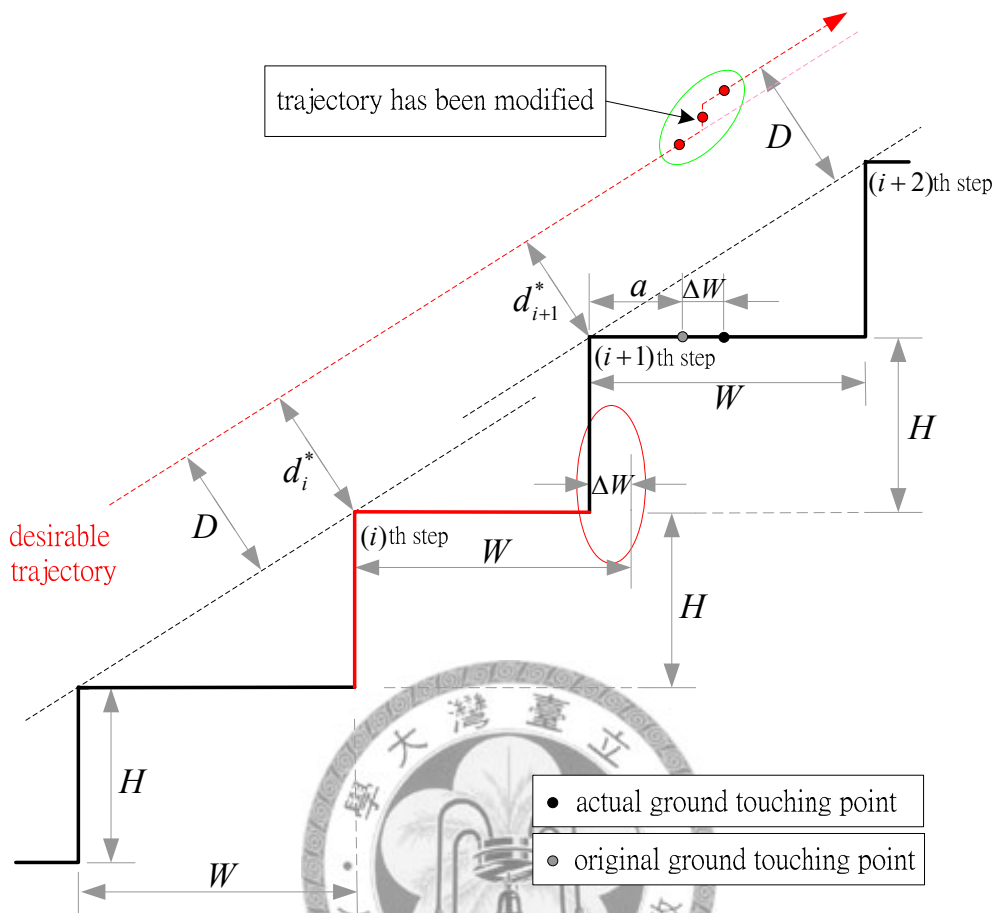


圖 23. 樓梯誤差修正示意圖 ($\Delta W \neq 0$)

因此，在這理想化的假設之下，同時考慮正經歷通過此誤差階梯的共軸左右兩隻腳（其著地點分別以 a_R 和 a_L 表示），假設右腳為先換階腳（即該腳腳長達到 ℓ_{\min} 則換階），左腳為後換階腳（即該腳腳長達到 ℓ_{\max} 則換階），則可知：

(a.1) $\Delta W > 0$ ，此誤差階之後階梯的預計落腳點都發生改變，其落點位置皆往樓梯外側移動， a 變小（ a_R 和 a_L 皆變小），由於 $a_R < a_L$ ，首先面臨的風險為當誤差過大導致 a_R 小於 0 時，機器人右腳會踏空。

(a.2) $\Delta W < 0$ ，此誤差階之後階梯的預計落腳點都發生改變，其落點位置皆往樓梯內側移動， a 變小（ a_R 和 a_L 皆變小），首先面臨的風險為當誤差過大導致落點太靠近於內側時，機器人的左腳落點由於 a_L 過大，在運動過程中左腳會撞擊到著地階梯的下一層樓梯而受到外力影響改變軌跡。

透過幾何關係，我們可找出允許的誤差範圍：

$$a > \Delta W > \frac{1}{H + M \sin \phi} \left[MH \cos \phi + Mb \sin \phi - MW \sin \phi - \frac{d}{\sin \phi} H \right] \quad (20)$$

其中 $M = \left[\frac{W}{H} \sqrt{\ell_{\max}^2 - \frac{1}{4}(W^2 + H^2)} - \frac{1}{2} \sqrt{W^2 + H^2} \right]$ (參考 (7) 式)，套用各參數的

預設值， $W=27\text{cm}$ ， $H=17\text{cm}$ ， $\ell_{\max}=21\text{cm}$ ， $d=8.5\text{cm}$ ，可得： $2.9\text{cm} > \Delta W > -12.05\text{cm}$ 。

亦即，在這樣的環境設置下，假如 $\Delta W > 2.9\text{cm}$ ，則發生右腳於第 $(i+1)$ 階踩空的情形；若 $\Delta W < -12.5\text{cm}$ ，則左腳將在運動過程中撞擊到第 $(i+2)$ 階的梯角。

透過上述討論，不難發現假如樓梯尺寸有誤差 ΔW ，但落於允許範圍內，對於機器人的爬升是不構成障礙的，僅改變了機器人與樓梯之間的相對位置。將此類誤差稱為「非急迫性誤差」，不需立即提出修正。值得注意的是，假若第 (i) 階、 $(i+1)$ 階和 $(i+2)$ 階...等樓梯都有 $\Delta W \neq 0$ 的誤差，由於沒有給予立即性的修正，故誤差會透過「著地於下一階梯上不正確的位置」這種方式疊加累積下去；也就是說，假若我們定義 ΔW_i 為第 (i) 階樓梯的 W 方向尺寸誤差且 ΔW_i 為爬升完畢後所經歷的總誤差，則 $\Delta W_i = \sum_{j=1}^i \Delta W_j$ ，具累積性。如果任意 ΔW_i 符合誤差範圍，且總和 ΔW_i 亦符合誤差範圍，那基本上機器人沒有進行認知修正一樣可以順利前進。

由於 ΔW_i 其值有正有負，並且具有累加性，故在腳通過每一層階梯都進行修正並不是很理想的作法，除了可能會造成反效果（例如，第 $(i+1)$ 階可和第 (i) 階的誤差正負相消，但機器人卻沒有等到行經第 $(i+1)$ 階就馬上在第 (i) 階修正。不但多此一舉，還必須重新修正第 $(i+1)$ 階的誤差），還會增加機器人的 CPU 在執行上的負擔，使機器人無法以最快速度前進。較好的作法是每階都予以追蹤監控 d 值，但不每階進行修正；只有在每間隔了 N 階的倍數時才予以修正。其中 N 為需透過實測狀況去取最佳化值的參數。

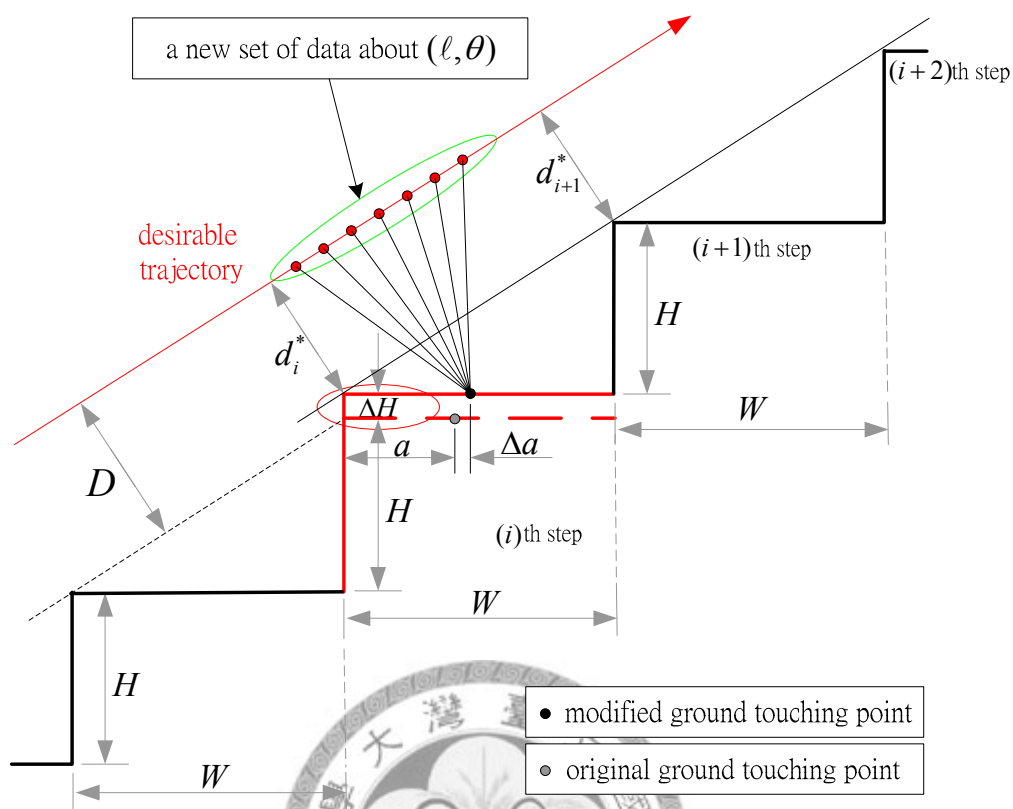


圖 24. 樓梯誤差修正示意圖 ($\Delta H \neq 0$)

回到 H 方向尺寸的誤差討論，並以相同的左右腳落點 a_R 和 a_L 為假設前提，我們現在來觀察假若發生了 $\Delta H \neq 0$ 對機器人爬升會產生什麼樣的影響。圖 24 中，第 i 階樓梯為發生 H 方向誤差的階梯，且 $\Delta H > 0$ 。在機器人的認知中，欲跨上此階梯的腳其末端原本的落點應該位於圖中的灰點，假設沒有進行任何修正的話，則當其末端接觸到圖中的黑點時，此時此腳仍處於空相（Aero Phase）的狀態並且在該腳末端還未到達灰點位置時馬達會持續供以高電流來完成其任務。由於樓梯為剛體，故在強硬相擠之下，機器人軀體發生扭轉是無法避免的，並造成軌跡偏移預定路線，這是我們所不希望看到的。因此，不同於 W 方向的誤差， H 方向的誤差是屬於需要被馬上處理的「急迫性誤差」，並且會立即反映在接觸到的誤差階梯（第 i 階）上。

對於 H 方向誤差的修正方法，無論是同投影軸的左或右腳，都必須在接觸瞬間的當下馬上做出修正，沒有差別。針對此方向上兩種不同的誤差，也必須提出兩種不同的應對策略：

(b.1) $\Delta H > 0$ ，樓梯比預計中來的高，在還未完成空相時就會處碰到地面。此時直接採用此接觸點（圖 24 中的黑點）為該腳的新著地點，並且重新計算滿足需求軌跡上各位置的相應輸出資訊 (ℓ, θ) 如圖 24 所示，則機器人便可不受此階影響，繼續前進。

(b.2) $\Delta H < 0$ ，樓梯比預計中來的矮，在完成空相時仍未接觸地面。當該腳完成空相任務卻未接觸地面，則機器人將發出命令使該腳繼續執行空相任務，一直到此腳接觸到地面為止。接著，便如同上述方法，直接採用此接觸點為新著地點，並且重新計算滿足需求軌跡上各位置的相應輸出資訊，機器人順利繼續前進。

在實際的運動中，必定遭遇到同時具有 W 和 H 方向上誤差的樓梯，而且幾乎每一階都是。如前所述，任何階梯的尺寸誤差都可視為這兩種狀況的組合。採用上述的修正方式，則機器人每隻腳將在每一階梯上進行 $\Delta H \neq 0$ 的急迫性修正，且在 W 方向會持續監控，並每隔 N 接樓梯執行 W 方向的誤差修正一次。注意到，這些修正行為正好套用了前述所提的三種偵測狀況中的 (B)、(C) 下執行。

目前機器人原型所採用必迴路的回受訊號有二：位於機器人底盤的紅外線距離感測訊號，以及馬達編碼器 (Encoder) 的 PID 誤差控制。透過距離感測，取得每一階樓梯的 d_i^* 並監控之，並於每間隔固定階數的階梯予以修正。在 H 尺寸方向的誤差方面，透過機器人核心處理器 compactRIO 接收馬達編碼器回傳的誤差訊號訊號 (PID Error Signal)，可得知機器人各腳受阻力的程度，進而瞭解此時該腳是否處於著地狀態，便能檢查出是否 $\Delta H \neq 0$ 以及是否提前或延遲著地。值得注意的是 PID 誤差源自於兩個因素：馬達受到外來阻力影響以及內部控制訊號誤差。前者會比後者大的多，是為我們所需抓取的訊號。

第四章 直型腳的實驗結果

4.1 實驗測試平台：Quattroped

有了上述的演算法，現在我們要套用在實際硬體上並進行戶外實測。參考第一章，硬體的實驗平台採用 Quattroped 機器人，但將腳至換為直型腳，如圖 25 所示。圖 (a) 直型腳全長 28cm；圖 (b) 接觸面為半圓形且黏著腳踏車輪胎皮於其上；圖 (c) 當直型腳安裝於平台上時，實際可活動範圍僅 23cm，並且可輸出的最大腳長（由旋轉軸圓心算起至腳的末梢輪胎皮處）為 26cm；圖 (d) 為拔除四隻腳後的 Quattroped 平台。



圖 25. 測試平台 Quattroped 與直型腳

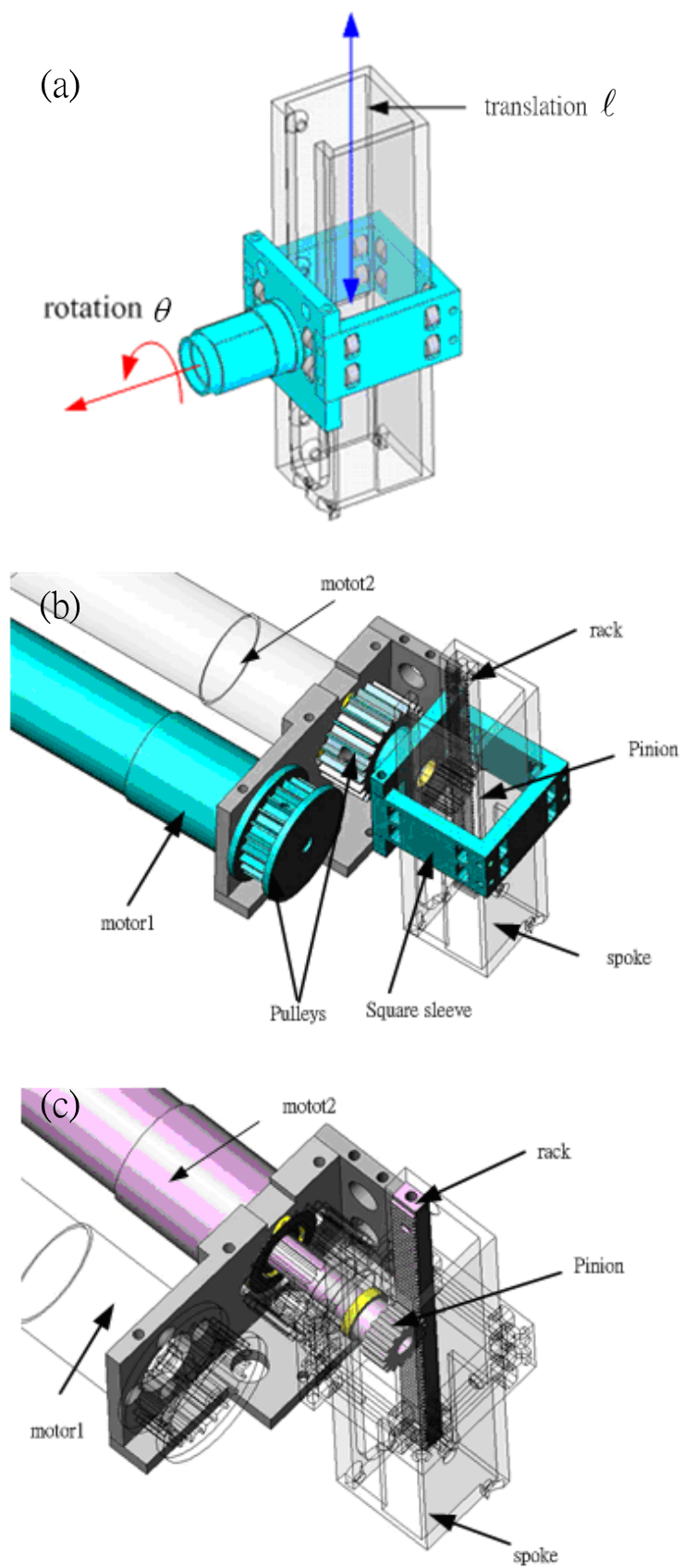


圖 26. 旋轉軸腕關節示意圖

圖 26 顯示了 Quattroped 機器人的核心設計：雙自由度腕關節，並顯示了馬達傳動與直型腳之間的關係。

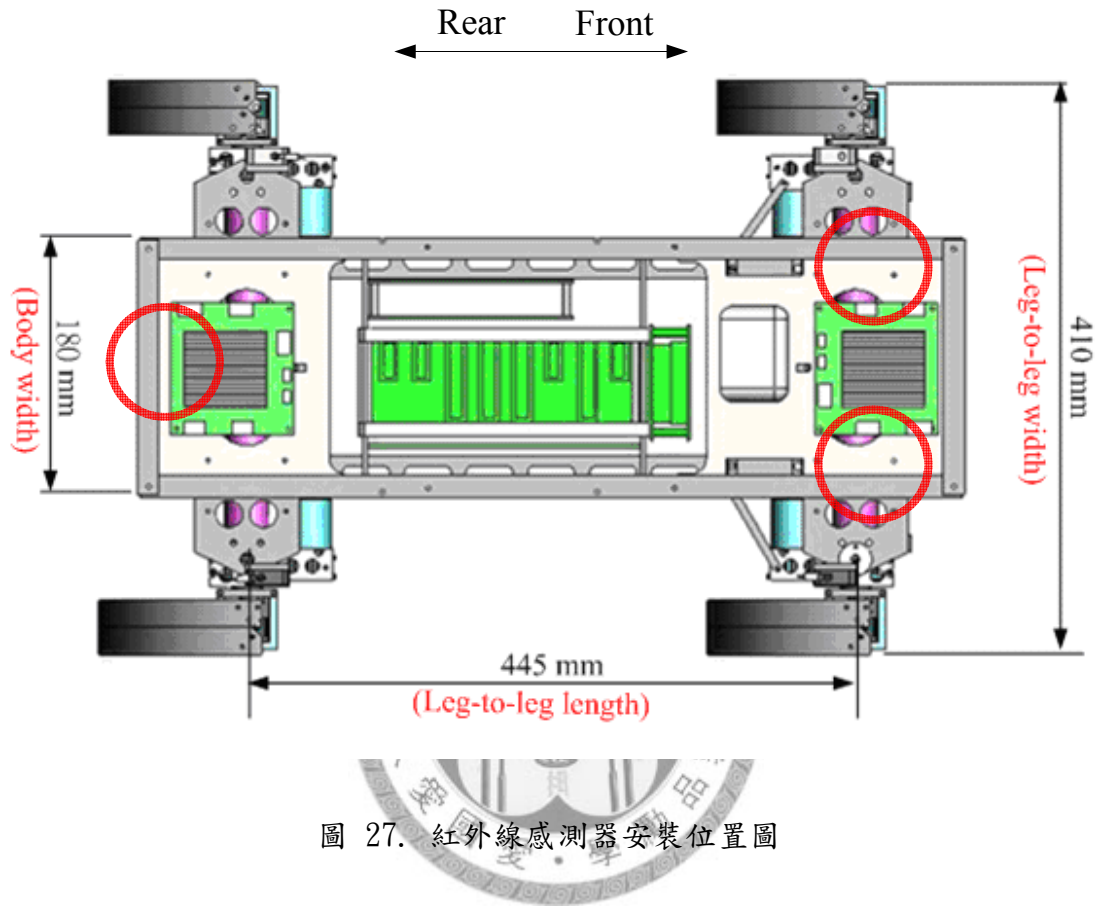


圖 27. 紅外線感測器安裝位置圖

圖 27 為 Quattroped 機器人的頂視圖以及其相關資訊，圖中三個紅圈標記處指出了紅外線測距儀（IR）安裝上鎖於底盤的位置，在運動的過程中，三枚測距儀可不斷偵測平台底部的距離並接收訊號，方向垂直底盤，亦即與機器人的前進方向垂直。所採用的測距儀為夏普 SHARP 的 GP2D12，偵測範圍介於 4cm ~ 30cm，而誤差範圍（雜訊等其他因素所導致）為 1cm 左右。超過偵測範圍時，測得的距離值將不具參考價值。另外，在不同角度下量測同樣的平面距離，也會得到不同的量測結果。透過 MATLAB 中 polyfit 指令的運算，可由將紅外線測距後輸出的訊號：電流，輸入多項式並近似出實際距離。無論如何，近似值畢竟不是絕對精準的。因此實際距離值誤差中，這一部份的偏差也包含在內。



圖 28. 紅外線距離感測器 (IR) SHARP GP2D12 Infrared Sensor

4.2 實驗結果與數據分析

實際測試的樓梯尺寸為：樓梯深 $W=29.6\text{cm}$ ，標準差為 0.36cm ，樓梯高 $H=17.5\text{cm}$ ，標準差為 0.17cm 。演算法採用換階最大腳長 $\ell_{\max}=22\text{cm}$ ，並且旋轉軸軌跡和樓梯保持 $d=9\text{cm}$ 的距離。理論上，依設定，機器人每單位時間 10ms （毫秒）在軌跡上的前進距離為 0.06cm 。圖 30 清楚的顯示爬行樓梯的影片中，部分的快照截圖，僅顯示機器人爬行到第三階樓梯的運動過程。

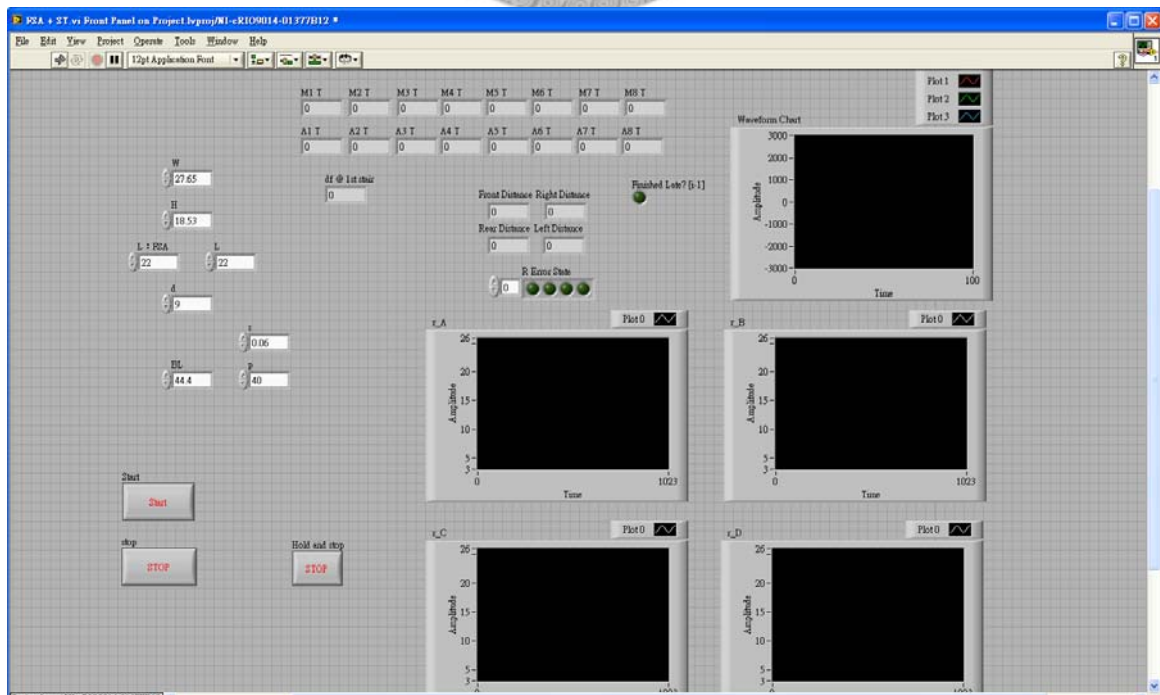


圖 29. 遠端控制：LabVIEW 人機介面

在控制方面，我們透過 LabVIEW 的人機介面（圖 29）遠程無線操控機器人。由於目標的理想訊號和實際的馬達輸出角度勢必有所出入，因此在程式中，使用 PID control 來進行訊號迴授。在運動過程中，四隻腳的 ℓ 和 θ ，其理想和實際輸出的曲線紀錄極為類似，以右後腳為例（兩共軸腳中首先抬升換階的腳），在其運動全程中取出一部份的曲線，並放大觀察該趨近一運動週期時間的曲線，如圖 31、32 所示。其中橫軸皆時間，縱軸單位兩圖分別為 cm 和 rad。在 ℓ 方面，控制平移的馬達輸出曲線表現良好，每單位時間幾乎都可追上理想輸出值，僅有微小的差異。而控制旋轉的馬達 θ 方面，首先理想值和輸出值在圖中左側有一明顯的落差，該曲線當時正經歷此腳抬升換階的動作；不過此處的曲線落差並不是誤差，而是換階時的角度輸出還沒經過同位角的換算去和真實曲線比較，在經過換算之後可發現是幾乎沒有誤差的。 θ 的理想和實際曲線唯一出現較大的差值處，在於換階完成時的曲線，由於腳在抬升至下一階並踩踏時承受強烈的外力衝擊，因此出現暫時無法追上理想訊號的問題，如圖中紅圈標記處所示。





圖 30. 實測結果影片快照截圖（按數字順序）

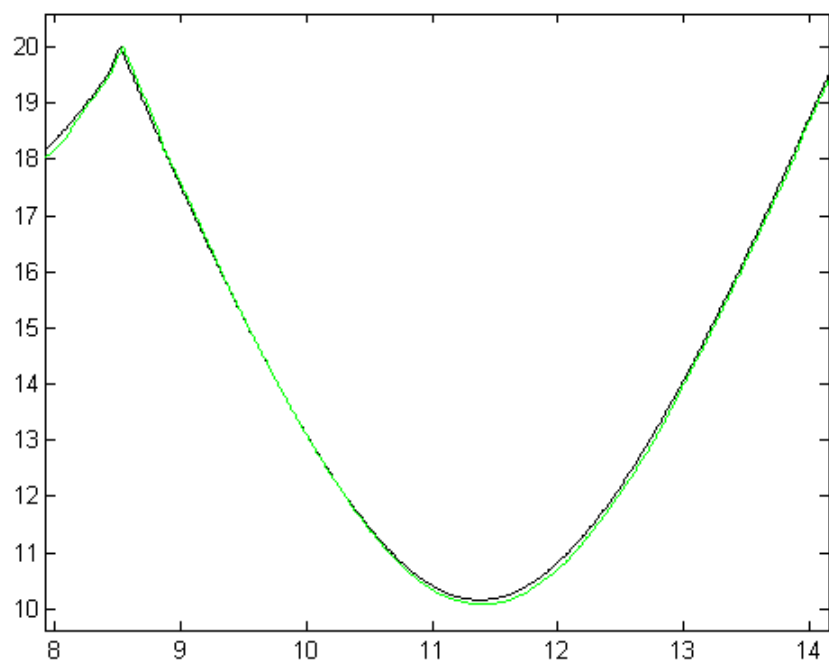


圖 31. 右後腳之部分 θ 曲線放大圖 (黑：理想，綠：實際)

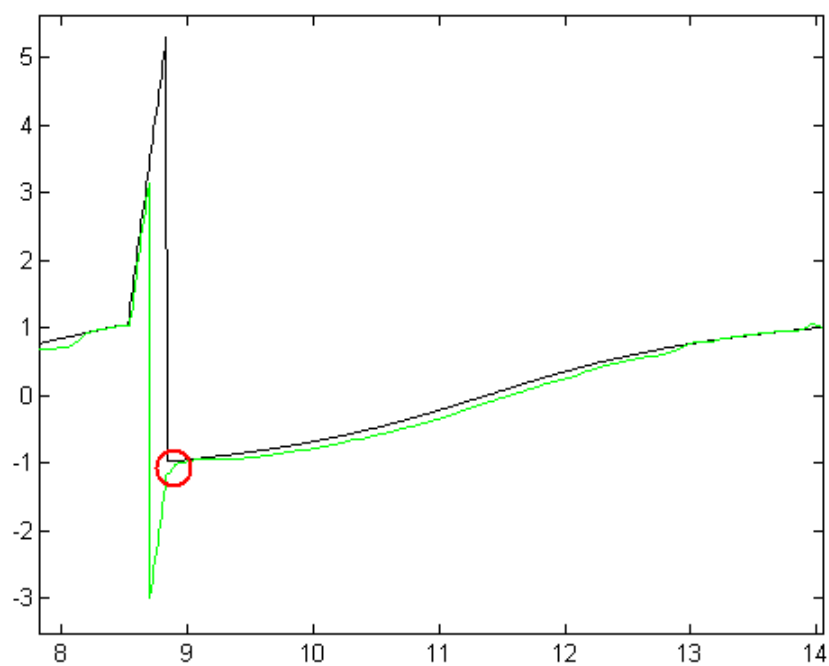


圖 32. 右後腳之部分 θ 曲線放大圖 (黑：理想，綠：實際)

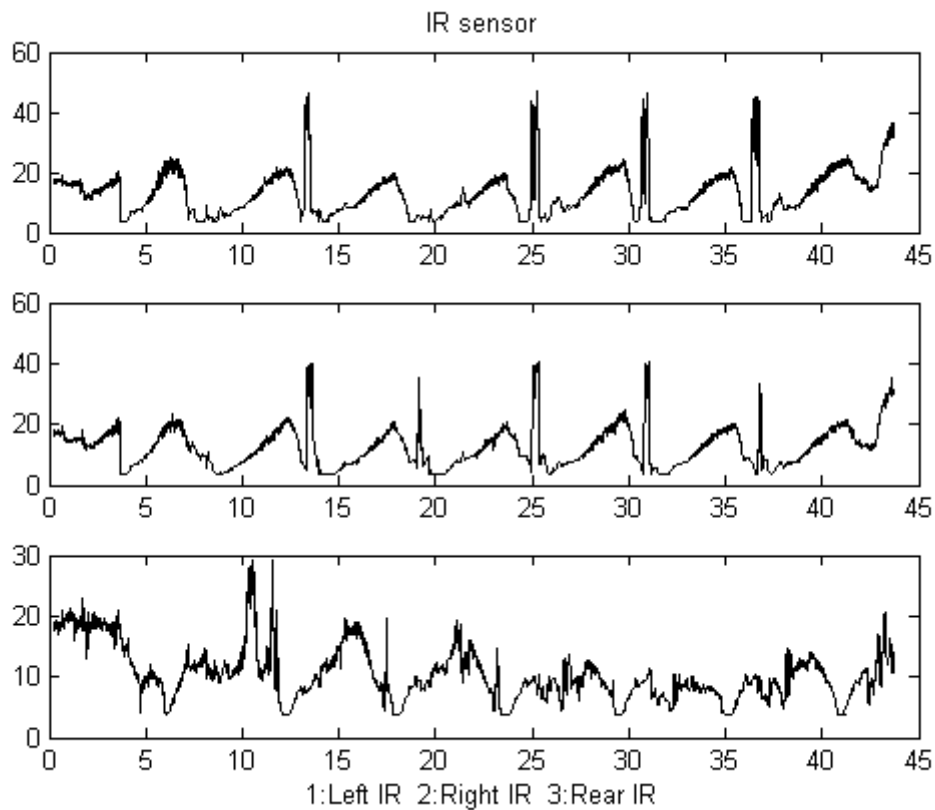


圖 33. 爬行過程中三個紅外線距離感測器所得之資料

在軌跡評估方面，紅外線測距儀提供重要的數據。圖 33 的橫軸單位為時間，此圖顯示了在運動過程中任意時刻三個測距儀所量測的距離訊號。依其順序由上而下分別為位於機器人前方左側、前方右側、後方中間的三個感測器之訊號。觀察此圖，第一和第二張圖的圖形相當接近。理論上，位於左側和右側的感測器所測得的訊號應該完全相同，而實際中，由於重心偏移的側傾問題(參考章節 3.1)，因此造成左右兩測距儀訊號的差異。觀察第三張圖，由於感測器安裝位置前和後的差異，因此經過時間軸的平移，理論上，第三章圖應該與第一、二張圖完全相同。而實際中，側傾問題造成機器人後段部位的軌跡偏移量更勝於前段，因此觀察到後方紅外線測距儀量測到的訊號非常紊亂，不具參考價值。

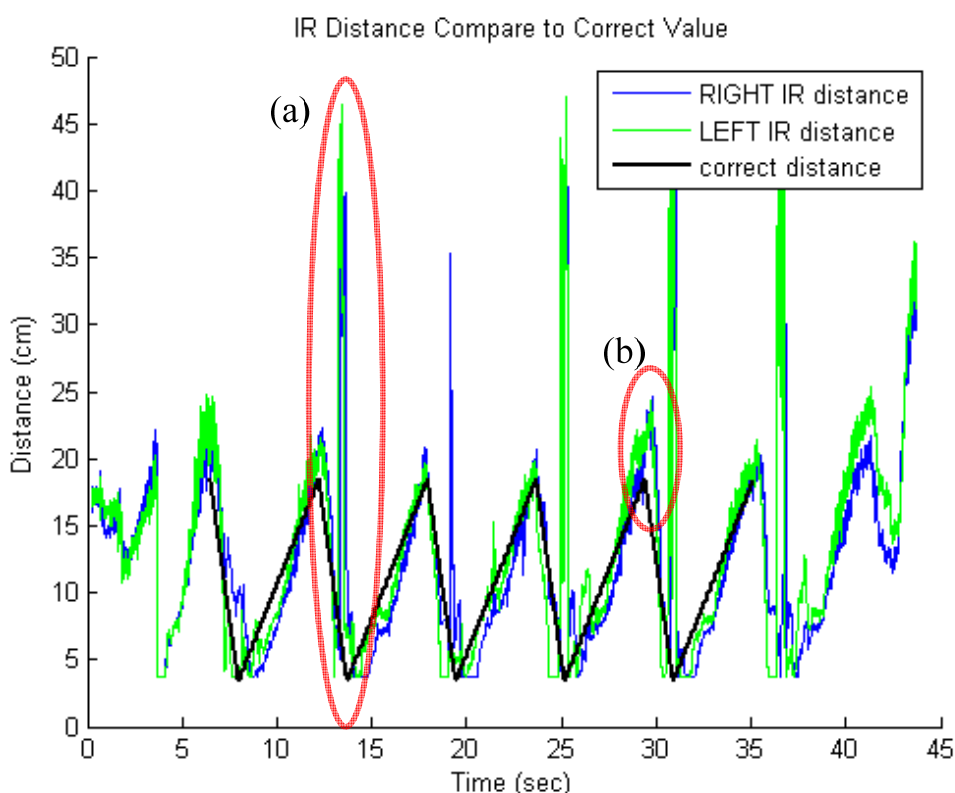


圖 34. 測距儀量測距離之理想與實際比較

將位於前段軌跡較穩定之位置的兩個感測器訊號顯示於同一個畫面。由於機器人在爬行一階樓梯之後，軌跡較趨於穩定，因此資訊中段的曲線較具參考價值。於此段加入理想量測值並繪於同一圖上，顯示如圖 34。比較理想和實際的訊號，可注意到幾個相異之處。首先，基於紅外線的誤差、雜訊和量測角度改變，因此訊號曲線全程呈現鉅齒狀。扣除這個現象，曲線仍有其他不是很令人滿意的部分如 (a)、(b) 所示：各取其中一組偏差值代表，並將其標記出來。發生爆衝曲線 (a) 的原因為，在機器人換階的過程中，軌跡位置太接近樓梯，只要稍有偏移誤差，在換階過程時腳背（圖 25 (a) 的右段）便會撞擊到樓梯緣角，造成機器人微小的跳動。而 (b) 發生的原因，則是由於當後軸使用 ℓ_{\max} 長度換階的左腳在經歷換階時，身體發生側傾問題所致。如前所述，側傾對於造成機器人軀體前段偏移的影響不如後段的歪斜量來的嚴重，因此這個部分的曲線僅有輕微的偏差。

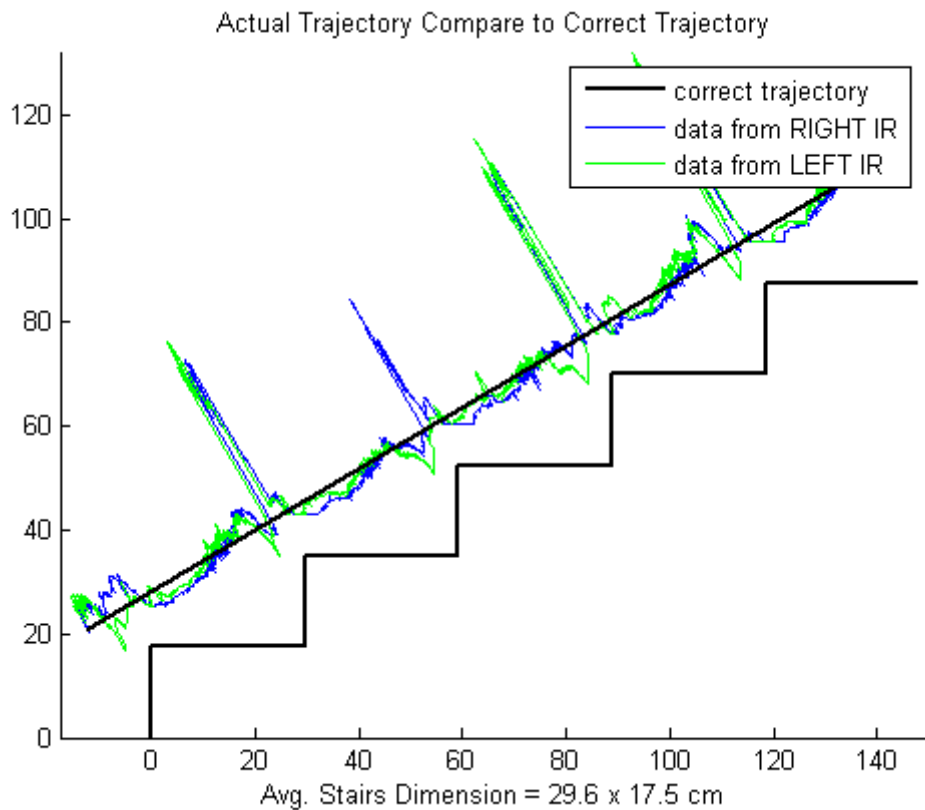


圖 35. 由測距儀訊號反推得到之運動軌跡

最後，將量測數據反算，可反推得旋轉軸的軌跡如圖 35 所示。藍色和綠色的曲線分別為從右和左側的紅外線感測器量到的資訊反推而得。根據正確的軌跡，我們可分別求出兩反推軌跡的標準差。RIGHT：6.38cm，LEFT：6.26cm。此圖同時也可比對當量測資訊發生圖 34 中 (a)、(b) 的問題時，旋轉軸所位於的實際相對於樓梯之位置。扣除曲線中這些不具參考價值的異常數值，並將鉅齒狀曲線平滑化，我們可粗略的估計出機器人針對理想軌跡的實現狀況。

第五章 半圓腳之運動軌跡規劃

5.1 半圓腳

前面章節的討論，都建立在直型腳的演算法上。試想，直線型腳由於力臂極大以及先天的幾何限制，其損耗的能量不可小看。設計出特殊幾何形狀的機器人與地面之間的運動媒介（即腳）以達到省能的效果，是我們所期望的目標。半圓形的腳能夠妥善的利用旋轉軸的能量來達成前進；且直型腳造成力矩極大的主因：線性移動過長，在半圓腳中其線性移動（見圖 36 中的 linear region）範圍僅為直型腳的一半，因此將腳的幾何形狀進階設計為半圓形是為不錯的考量。

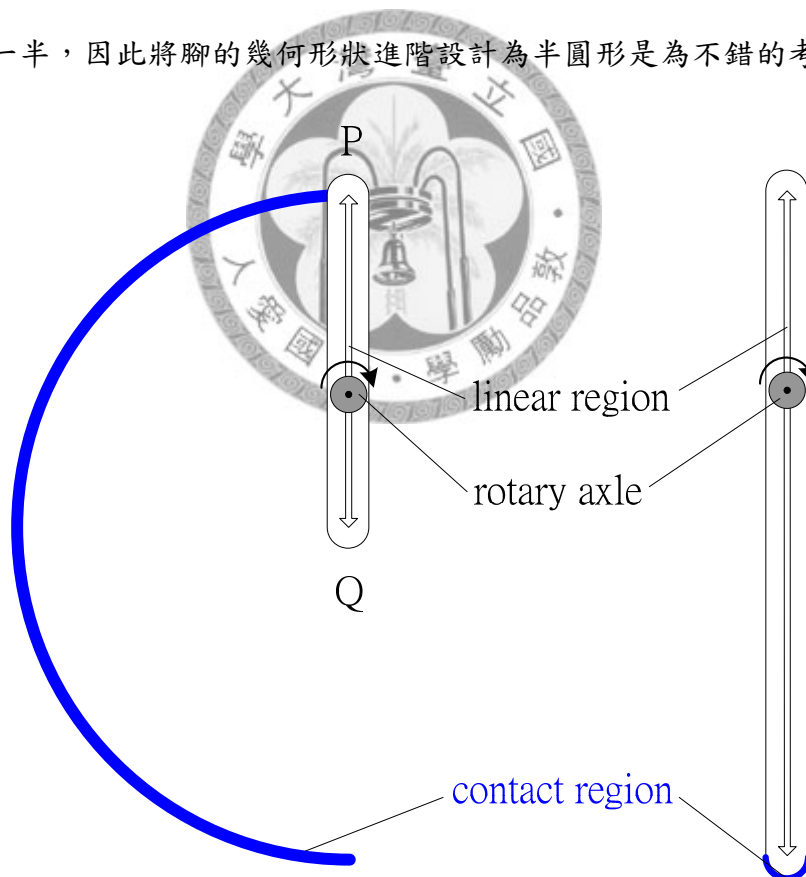


圖 36. 半圓腳（左）與直型腳（右）之外觀比較（側視圖）

將腳的幾何形狀設計為半圓形和直型腳最大的不同在於與地面的接觸點，半圓腳可視為整個半圓形的部分（見圖 36 中的 contact region）與地面做純滾動，其

最大的特色為與地面接觸點的位置時時刻刻都在改變，亦即旋轉軸與接觸點上下都在移動；至於直型腳，其接觸區域因為腳不可能為一無限細的直線，在實際尺寸上具有寬度，因此接觸區域為微小的半圓形而非一點；但巨觀來說，對於樓梯的尺寸以及半圓腳的接觸滾動範圍，直型腳的半圓形純滾動範圍幾乎可視為定點。相對的，半圓腳這樣的設計在線性移動範圍上有所犧牲，僅有直型腳的一半，介於圖 37 中的 P、Q 兩點之間，雖然馬達旋轉軸（Rotary Shaft）因此較為省能，不需輸出較大的扭力，但是也因此喪失了活動性。實際的設計可參考圖 37 的半圓腳快照，清楚的指出各部位細節。

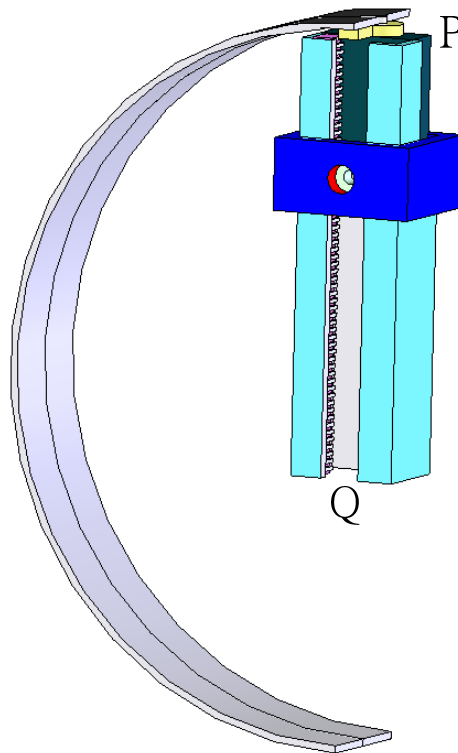


圖 37. Solid Works 半圓腳快照

5.2 半圓腳幾何分析

當半圓腳與地面做純滾動並前進的同時，其旋轉軸預計移動的軌跡必須通過 P、Q 點之間，否則便屬於無法完成的工作範圍。方便起見，和前述章節討論的步驟相同，套用了章節 2.2 的環境假設之後，我們將變數參數化。首先定義 (ℓ, β) 如圖 38 所示，分別為「旋轉軸與 P 點之間的距離」及「與參考座標軸 \hat{n} （相對於前進方向 \hat{t} 夾 90° 角）的逆時針方向夾角」。並定義 ℓ_{\max} 為半圓腳之半徑。

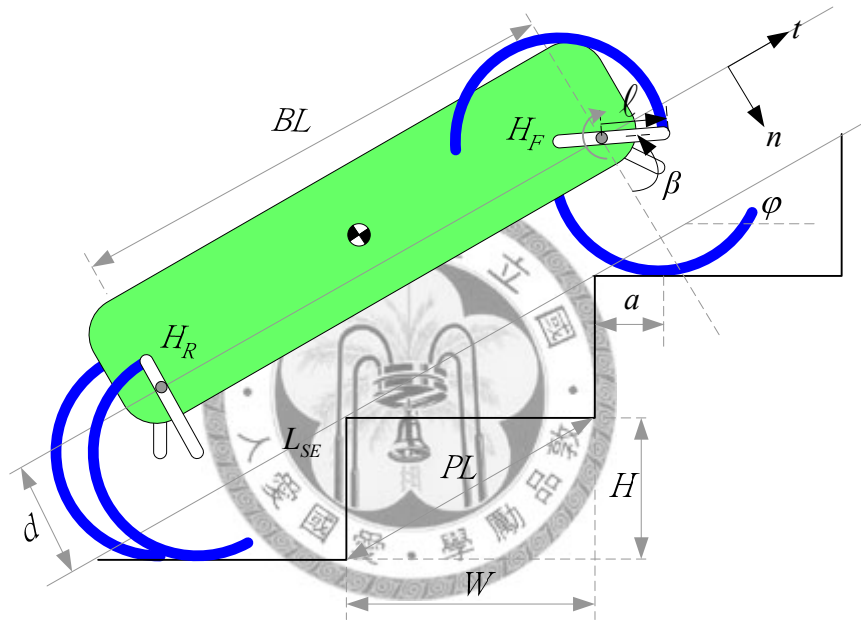


圖 38. 四足機器人半圓腳參數定義

觀察半圓腳的運動特性，首先從平坦的地面著手。定義半圓腳做純滾動運動之廣義座標系 x ，並且平面的起點為 $x=0$ ，半圓以 0° 的姿態擺放於此。如圖 39 所示，我們可以將上述假設視為一階虛擬樓梯座標系（Virtual Stair Coordinate），其梯深寬度 W 無限向右延伸，並且階梯緣角位於 $x=0$ 處。如同直型腳演算法，旋轉軸的軌跡為了省能之目的，因此定義軌跡為與樓梯緣線 L_{SE} 保持固定距離 c 的直線。由於半圓腳做純滾動，且初始姿態（以 0° 擺置）的出發位置為 $x=0$ 處，因此當半圓腳轉至角度 θ 的姿態時，其廣義座標軸的落點 x 由於受到幾何關係拘束，其值只能是唯一解， $x = \ell_{\max} \theta$ 。由於實際各組樓梯平均尺寸 W 、 H 皆異，因此面

Diagram illustrating the cam-follower mechanism. The cam profile is shown in blue, and the follower is shown in red. The contact point is labeled P . The cam is labeled "starting position" and "totally depart position". The follower is labeled "pure rolling". The cam is labeled "rotary axle". The follower is labeled "y" and "x". The cam is labeled "c" and "d". The cam is labeled "x=0" and "x=x*". The cam is labeled "x" and "y". The cam is labeled "l_{max}" and "θ". The cam is labeled "φ".

圖 39. 距離換算之幾何關係

在定義了真實樓梯的座標系之後，其真實軌跡距離 d 便可透過數學式進行換

$$d = c + x^* \sin \phi \quad (21)$$

透過此換算式，真實樓梯便可透過此純滾動廣義座標系進行其他運算。值得一提的是，為何不在樓梯上自建座標系而採用此虛擬座標系？因為純滾動的運動座標系具有**絕對性**，任意擺放姿態 θ 和擺放位置 x 有拘束關係，知其一便可知其二。針對斜率為 $\tan \phi$ 的樓梯， β 和 θ 存在著以下的換算關係： $\beta = -(\theta + \phi)$ 。

假若讀者觀察夠仔細的話，可以發現在圖 39 中，旋轉軸（Rotary Shaft）從位於 $x=0$ 的起始姿態(Starting Position)一直到最後完全脫離軌跡的姿態(Totally Depart Position)，並非完全位於軌跡（線段 TR）其上；而是在運動過程途中，有一陣子短暫脫離軌跡。這所代表的意義就是：使旋轉軸從頭（起使姿態）到尾（完全脫

離姿態) 始終都位於軌跡之上是無法滿足的。接下來針對此現象作詳細的說明。

在半圓腳的運動過程中，由於軌跡必須通過圖 37 中的 P、Q 線性移動區域才屬於可完成的動作，因此可發現在運動過程的連續快照圖 40、42 中，從 (c) 開始旋轉軸 (圖中的藍色小圓圈) 會首次脫離軌跡一段時間，如 (d)。繼續往前運動，才又恢復與軌跡的接觸，如 (e)。接下來的運動過程，旋轉軸和軌跡都保持交集，其中旋轉軸從再次回復接觸以後行進的軌跡，標示為紅線，如 (f)、(g)、(h) 所示。半圓腳不斷前進，一直到完全脫離姿態 (h) 之後，就進入了不可能完成動作的區域。如 (i) 所示。另外，圖 40、42 中，這兩張圖的差異，僅在於不同 c 值的選取，造成第一次旋轉軸脫離軌跡方位的不同， c 值較小，則從軌跡的上方脫離，較大則從下方脫離；不同 c 值的選取，造成旋轉軸可滿足軌跡交集的區段長度不同，是一個很重要的指標。

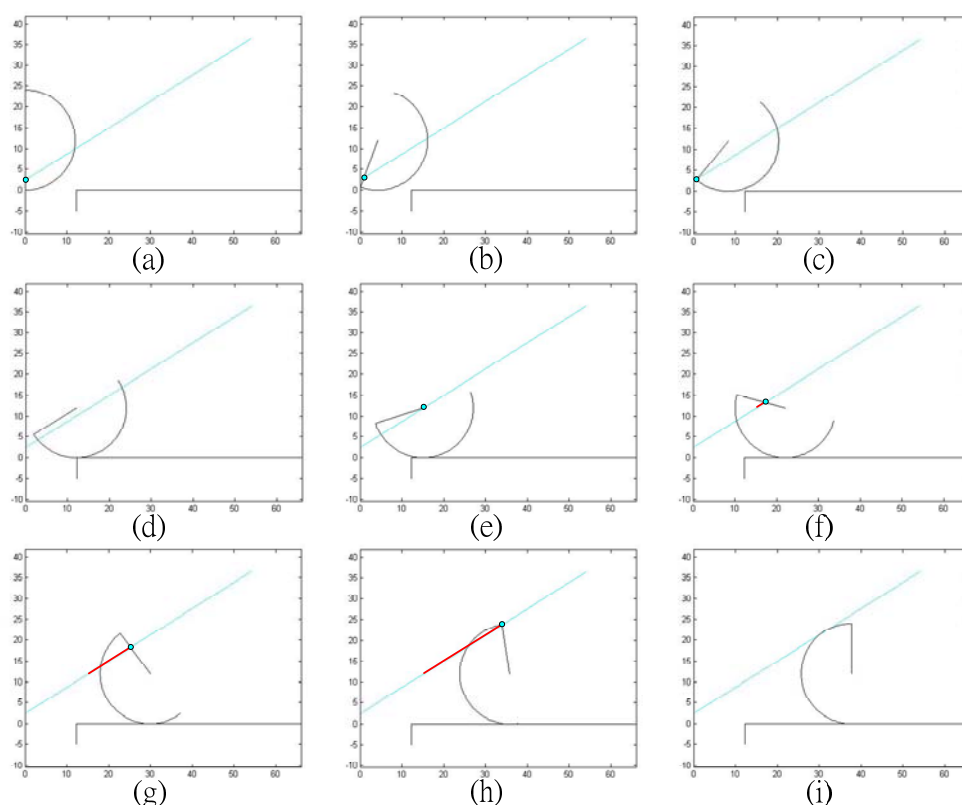


圖 40. 半圓腳運動於虛擬座標系與真實樓梯配合：從軌跡的上方脫離 ($c=2$)

在圖 41、43 中，我們可以更清楚的瞭解旋轉軸和軌跡在首次脫離後，而又回復接觸並且保持交集的線段區域，將此段命名為旋轉軸的「涵蓋區域」(Covered Range)，亦即是在機器人的軌跡規劃中，可以使用的區域。無論是旋轉軸在過程中從軌跡的上方或下方脫離，因為在此脫離前旋轉軸與軌跡的交集過短，不堪使用，因此不能採用，必須予以捨棄。因此，剩餘可使用的區便僅剩前述的涵蓋區域。圖 41、43 中，雖然可用區域後者較前者稍長一些，但是這兩種狀況都指出了涵蓋區域並非所想像的長。這就是半圓形狀的腳最大的致命傷。

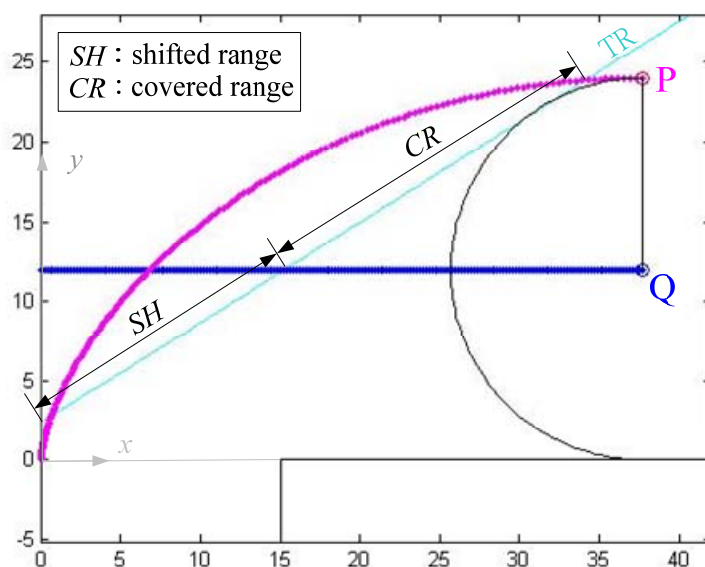


圖 41. P、Q 點軌跡與涵蓋區域 CR 之關係 ($c=2$)

另外，在進入 CR 前的區域，此一區域同時包含著 PQ 線段與 TR 有交集以及脫離交集的線段。雖然此區域內有部分交集，但由於不連續及長度不足，因此必須放棄，我們將此段區域統稱「平移區域」(Shifted Range)。注意到，區域的起點是從虛擬座標系 $x=0$ 開始進入的。

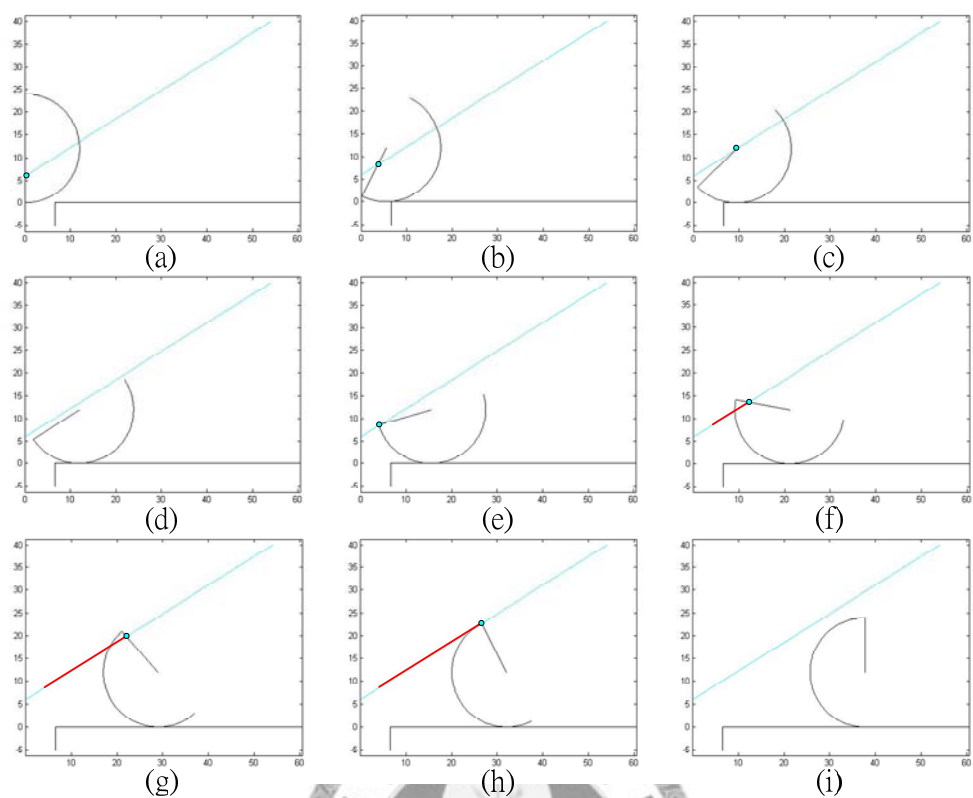


圖 42. 半圓腳運動於虛擬座標系與真實樓梯配合：從軌跡的下方脫離 ($c=5$)

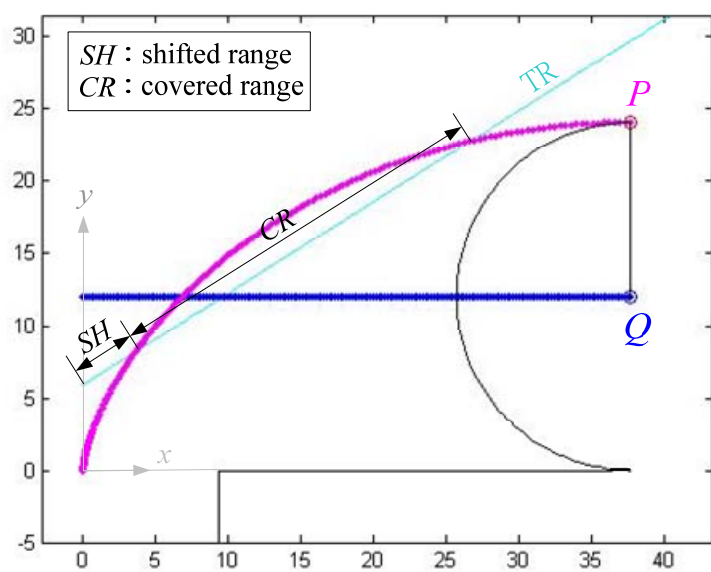


圖 43. P、Q 點軌跡與涵蓋區域 CR 之關係 ($c=5$)

比較圖 41、43，可輕易觀察出很明顯的是 c 值較大者 ($c=5$) 其涵蓋區域較長，這指出了不同 c 值的選取影響了可用區域的長短。那到底 c 值該如何決定，才能得到最長的可用區域呢？由圖 40 (d) 和 42 (d) 可知，若將 c 值設定的大小恰到好處，PQ 線段是有可能和軌跡重合的，此時便不會有首次脫離的現象發生，旋轉軸在運動過程可從起使姿態到完全脫離姿態和軌跡始終保持交集。透過幾何關係的計算，發現當 $c=c^*$ 時，可滿足此狀況：

$$c^* = \ell_{\max} \cos \phi - \ell_{\max} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \sin \phi \quad (22)$$

其中， ℓ_{\max} 為半圓腳半徑， $\tan \phi$ 為樓梯斜率，若取半徑 $\ell_{\max} = 12\text{cm}$ ，則可得 $c^* = 3.7\text{cm}$ 。事實上，畢竟實際測試時，不可能做到零誤差的精準定位，只有當 $c=c^*$ 時，才能涵蓋到一整段的區域；稍有偏差，旋轉軸便會如圖 40、42 所示，中途脫離軌跡，而進入不可能達成的工作區域 (Unreachable Work Space)。因此欲採用整段區域 (指 $CR+SH$) 作為可用區域仍是不可行的。雖然如此， c^* 值並非完全無用，將 c 越逼近 c^* ，則涵蓋區域越長。但事實上，不可使 c 恰等於 c^* ，乃因 c^* 其實是 c 的奇點。關於這一部份，在往後的章節會有詳細說明。因此我們只要將 c 盡可能的逼近 c^* ，並且不使其值相等即可。

總和上述，可整理得知：若 $c < c^*$ ，則半圓腳在前進過程中 PQ 線段會從 P 點開始脫離於軌跡 TR 之上方；若 $c > c^*$ ，則半圓腳在前進過程中 PQ 線段會從 Q 點開始脫離於 TR 之下方。故從圖 39 中的起始位置開始，無論 c 值為多少，只要 $c \neq c^*$ ，那麼半圓腳在前進的過程一定會歷經以下狀況：

- I： PQ 線段與 TR 從 $x=0$ 開始保持相交 (start)
- II： PQ 線段與軌跡 TR 首次脫離 (depart)
- III： PQ 線段與 TR 完全沒有接觸交集
- IV： PQ 線段與 TR 重新開始接觸，回復交集 (arrive)
- V： PQ 線段與 TR 徹底脫離 (totally depart)

若 $c=c^*$ ，則上述流程只會經歷 I、V 兩個階段。

因此，若希望軌跡在前進過程中連續可用，也就是 PQ 線段與 TR 在前進時必須不斷有交點，那我們只能取流程 IV、V 來使用，並放棄前半段的 I、II、III 階段。此一舉動將造成軌跡的可使用行程區域不夠長到足以包含整段週期長 PL （見圖 38），而可使用的範圍長與 c 值有關，在接下來的章節會有詳細討論。

5.3 半圓腳幾何分析

在機器人的行進過程中，對於半圓腳來說最重要的資訊莫過於在經歷以下狀態時的擺放姿態（即角度）。狀態 II 首次脫離（depart）、狀態 IV 回復交集（arrive）、狀態 V 徹底脫離（totally depart）。想明瞭這些狀態的擺放姿態，就相當於求解這些狀態相對於純滾動虛擬座標系 $x=0$ 的 θ 值（轉動了幾度？）。由圖 41、43 可知，找出這些資訊只要透過數學方程式求聯立解即可：a) 直線 TR 的方程式和 Q 點軌跡水平直線方程式的聯立解。b) 直線 TR 的方程式和 P 點軌跡擺線（Cycloid）方程式的聯立解；並且由幾何觀察可知，由於擺線和 TR 有兩個交點，因此必定會有兩組解。注意到，這些方程式的描述都是建立在虛擬座標系上的。

在求解過程，由於 c 值的不同，必須分兩種狀況來討論：

- (1) $c < c^*$ ，半圓腳在前進過程中，PQ 線段會從 P 點開始脫離於 TR 之上方，故 P 點軌跡（擺線）方程式與 TR 直線方程式之雙重解為：首次脫離點（depart）與完全脫離點（totally depart）。而 Q 點軌跡與 TR 之解為到達點（arrive）。

(i) 首次脫離與完全脫離（depart & totally depart）：

$$\text{TR: } y = x \tan \phi + \frac{c}{\cos \phi} \quad \& \quad \text{P 點軌跡: } \begin{cases} x = \ell_{\max} \theta - \ell_{\max} \sin \theta \\ y = \ell_{\max} - \ell_{\max} \cos \theta \end{cases} \quad \text{之解為}$$

$$\langle x_d, y_d, \theta_d \rangle \text{ (depart)} \quad \text{以及} \quad \langle x_{td}, y_{td}, \theta_{td} \rangle \text{ (totally depart)}。 \quad (23)$$

(ii) 到達點（arrive）：

$$\text{TR: } y = x \tan \phi + \frac{c}{\cos \phi} \quad \& \quad \text{Q 點軌跡: } y = \ell_{\max} \quad \text{之解為}$$

$$\langle x_a, y_a, \theta_a \rangle \text{ (arrive)} \circ (\text{其中 } \theta \text{ 和 } x \text{ 間受到純滾動的拘束關係}) \quad (24)$$

(2) $c > c^*$, 半圓腳在前進過程中, PQ 線段會從 Q 點開始脫離於 TR 之下方, 故 P 點軌跡 (擺線) 方程式與 TR 直線方程式之雙重解為: 到達點 (arrive) 與完全脫離點 (totally depart)。而 Q 點軌跡與 TR 之解為首次脫離點 (depart)。

(i) 到達與完全脫離 (arrive & totally depart):

$$\text{TR: } y = x \tan \phi + \frac{c}{\cos \phi} \quad \& \quad \text{P 點軌跡: } \begin{cases} x = \ell_{\max} \theta - \ell_{\max} \sin \theta \\ y = \ell_{\max} - \ell_{\max} \cos \theta \end{cases} \text{ 之解為}$$

$$\langle x_a, y_a, \theta_a \rangle \text{ (arrive)} \quad \text{以及} \quad \langle x_{td}, y_{td}, \theta_{td} \rangle \text{ (totally depart)} \circ \quad (25)$$

(ii) 首次脫離 (depart):

$$\text{TR: } y = x \tan \phi + \frac{c}{\cos \phi} \quad \& \quad \text{Q 點軌跡: } y = \ell_{\max} \text{ 之解為}$$

$$\langle x_d, y_d, \theta_d \rangle \text{ (depart)} \circ (\text{其中 } \theta \text{ 和 } x \text{ 間受到純滾動的拘束關係}) \quad (26)$$

NOTE: (24)、(26) 式中可運算出解析解 (Closed Form), 但(23)、(25) 式則無法求得解析解, 需要藉助數值方法求解。



2. 半圓腳的可用區域 CR 是否如同直型腳一樣，其單隻腳的行程能夠涵蓋整個 PL （樓梯的特徵長度）？或說，可用區域佔了特徵長度的百分比為？

$$\text{i.e. } (CR/PL)*100\% = ?$$

假若在 x 方向的使用行程大於 W ，則在爬升過程中，半圓腳必定會擠壓到下一階樓梯的垂直面，進而造成軌跡變動，這是我們所不希望發生的。另外，如果半圓腳在行走一階樓梯時，其旋轉軸能夠涵蓋軌跡的長度足夠有該組階梯的 PL 長，那麼我們便可仿照半圓腳的換階時序（詳見章節 4-3）來安排四隻腳交錯抬升的順序，問題便可以很快的得到解決。利用投影分量的概念，在檢查 CR 和 PL 的關係時，可以透過 y 方向的等效投影來計算： $(CR/PL)*100\% = (h - y_{id} + y_a)/h*100\%$ 。

透過代入目前機器人原型所採用的實際值， $\ell_{\max} = 12\text{cm}$ ，並且採用樓梯平均值 $W = 27\text{cm}$ ，和 $H = 17\text{cm}$ 。經計算，可得 $c^* = 3.7\text{cm}$ 。若分別取 $c = 2\text{cm}$ 和 $c = 5\text{cm}$ ，則針對上述兩個問題的答案分別為：

$c = 2$ ：1. x 方向的使用量為 22.4cm ，滿足小於 $W = 27\text{cm}$ 之條件，故可接受。

2. CR 佔了 PL 的百分比為 69.82% 。約 70% 左右，並不是很理想。

$c = 5$ ：1. x 方向的使用量為 22.56cm ，滿足小於 $W = 27\text{cm}$ 之條件，故可接受。

2. CR 佔了 PL 的百分比為 85.65% 。僅有約 15% 左右的不足。

兩者在 x 方向的使用量都在可接受的範圍之內，但是兩者的可用區域都不足 PL 的長度，這是令人失望的結果；假若相應任意 c 值下的 CR 全都不足 PL 的長度，則半圓腳的樓梯爬升將不能採用如同直型腳的演算法，關於這點在稍後會有詳細討論。雖然如此，我們還是需要選擇較接近的狀況。很明顯的，由涵蓋區域的長度來看，選用 $c > c^*$ ($c = 5$) 比 $c < c^*$ ($c = 2$) 好的多。

既然 c 之值在討論中佔有重要的地位，直接影響了可使用的涵蓋區域，因此瞭解 c 值與可用區域的關係是首要的目標。在此之前，必須先瞭解 c 值之變動範圍 $c_{\min} < c < c_{\max}$ ，接著便可針對此範圍全域逐一找出相應的涵蓋範圍。見圖 44 所示， c 的最小值 c_{\min} 很直觀地可判斷出當然是 0 ，而最大值 c_{\max} 發生在當 TR 線段

與擺線（P 點軌跡）相切時之 c 值。透過簡易的數學計算，可得：

$$c_{\max} = \ell_{\max} [2 \cos \phi - (\pi - 2\phi) \sin \phi] \quad (30)$$

其中在描述擺線方程式時， ℓ_{\max} 為半圓腳之半徑。觀察夠仔細的話，從幾何上的關係去思考，不難發現此值 c_{\max} 恰為 c^* 之兩倍！故 $0 < c < 2c^*$ 便是我們可調整的範圍。在此範圍內，判斷 $c < c^*$ 或 $c > c^*$ 並透過 (23) 至 (26) 式求解出回復交集 arrive 和完全脫離 totally depart 的資訊，利用上述 y 方向的等效投影方式來計算可用區域和平移區域，取 $\ell_{\max} = 12\text{cm}$ ， $W = 27\text{cm}$ 和 $H = 17\text{cm}$ ，可得圖 45。

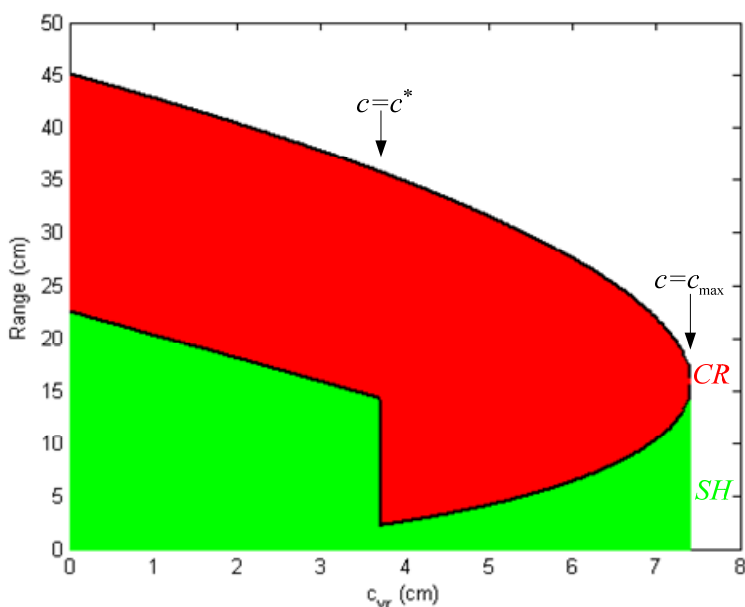


圖 45. 平移區域 SH 和可用區域 CR 與 c 值之關係

利用圖 44 輔助，試想，選定一 c 值，此時便可得預設軌跡 TR 線段的位置，旋轉軸由 TR 與虛擬座標系的 y 軸交點開始出發（亦即其 x 座標由 $x=0$ 出發）並且沿著該線段前進上升。旋轉軸首先歷經平移區域，接著經歷可用區域。其行程清楚的展示於圖 45 中：任一 c 值（橫軸）都可找出其相應的 CR 和 SH 範圍。注意到，在 $c=3.7\text{cm}$ 處，其涵蓋範圍突然激增，出現極值，此即為 c^* 所對應之 CR 。假若我們將 c 從 c^* 的左邊向右逼近（Left-handed Limit），和從 c^* 的右邊向左逼近（Right-handed limit），所得到的答案將會不同，如圖所示。由數學的角度來看，

這代表著 c^* 是 c 的奇點 (Singularity)，或稱不連續點 (Discontinuity)。另外，可發現相應於 $c > c^*$ 的 CR ，其長度普遍大於相應於 $c < c^*$ 的 CR 。因此，在往後的演算法中選取 $c > c^*$ ，並將 c 值盡可能的逼近但不使其等於 c^* 是較好的選擇。

理論上，若將半圓腳的半徑 ℓ_{\max} 增大，即旋轉軸的線性移動區域 PQ 變長，則應該可得到更好的結果：更長的涵蓋區域。事實上，這完全是正確的。在圖 45 中，假若我們將初始設定中的半徑增長，改為 $\ell_{\max} = 15\text{cm}$ ，其餘數值不改變，則會得到和圖 45 形狀完全相同的等比例放大圖形。其圖形橫軸結尾於 $c_{\max} = 9.26\text{cm}$ 處，並且圖形最高點（即左上角）之值為 56.3cm ，其橫軸和縱軸皆相對於圖 45 以 125% 的比例放大。此驗證過程，說明了改變半徑，便能得到等比例縮放涵蓋區域的結論。

有了上述的資訊後，我們真正所關注的重點是：相應不同 c 值下的 CR 和樓梯特徵長度 PL 的比例關係；以及，到底存不存在足以涵蓋整段 PL 長的 CR ？若存在，其相應的 c 值又為何？設定 ℓ_{\max} 、 W 和 H 和前述的值相同。為了方便觀察，將 PL 繪入圖 45 並以該長度去切割圖形：將多餘的部分截掉補償至 SH 區域如圖 46 所示，則可清楚的瞭解不同的 c 值其相應的可用區域能否涵蓋一整段 PL 。

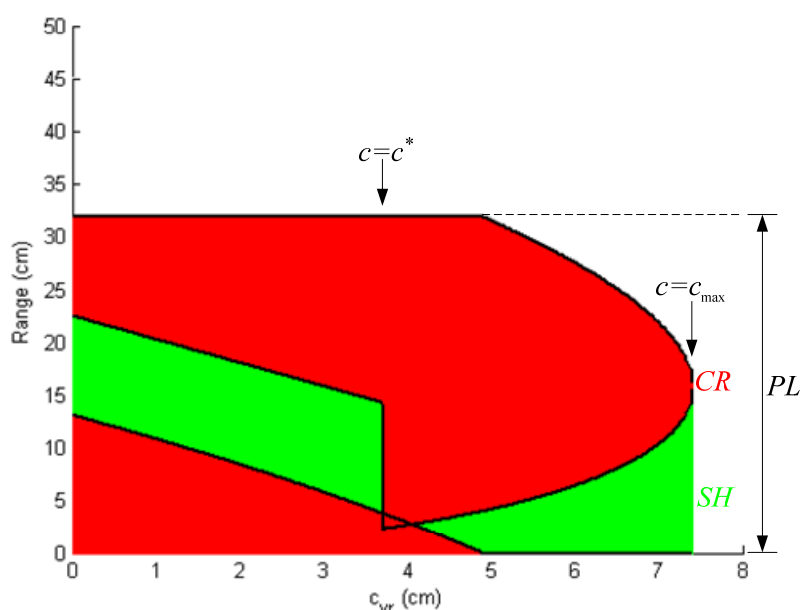


圖 46. 週期行程 PL 內平移區域 SH 和可用區域 CR 與 c 值之關係

圖 46 明白的指出每一 c 值（橫軸）相對於 PL 的長度關係，由圖中可發現在 $c > c^*$ 附近（ $c=3.7\text{cm} \sim c=4.1\text{cm}$ ）的 c 值皆能使其相應的涵蓋區域滿足 PL 長。這些便是往後在演算法中優先採用的值。

5.4 半圓腳多足討論

和直型腳所採用的方式相似（見圖 7），共投影軸（ H_R 或 H_F ）的兩腳選定不同的「臨界換階腳長」，在我們的演算法中分別為 ℓ_{\min} 和 ℓ_{\max} 。接著將兩腳軸點的運動軌跡平行推移至同一直線上（Desirable Trajectory），即完成共軸兩腳的演算法，並且此時兩腳分別著地於 a_R 和 a_L 深度之位置（ $a_L - a_R$ 受到 ℓ_{\max} 之值的影響）。共軸的兩半圓腳透過虛擬座標軸如圖 39 所示，分別選取各自之 c 值，還有以回復接觸（arrive）之姿態著地的深度位置 a_R 和 a_L ，最後再將此虛擬座標系疊加至樓梯並使其對應至相同的 d 值即可。

事實上，共軸的兩半圓腳存在著拘束關係，假若選定了 d 值、其中一腳的 c 值（命名為 c_1 ）和以回復接觸姿態的擺放位置 a_R ，則此時另一腳的 c 值（命名為 c_2 ）和以回復接觸姿態的擺放位置 a_L ，兩參數是互相拘束的。亦即，若欲使兩半圓腳換階後，接觸樓梯的擺置角度皆為回復交集姿態，則 $a_L - a_R$ 將影響 c_2 之值。

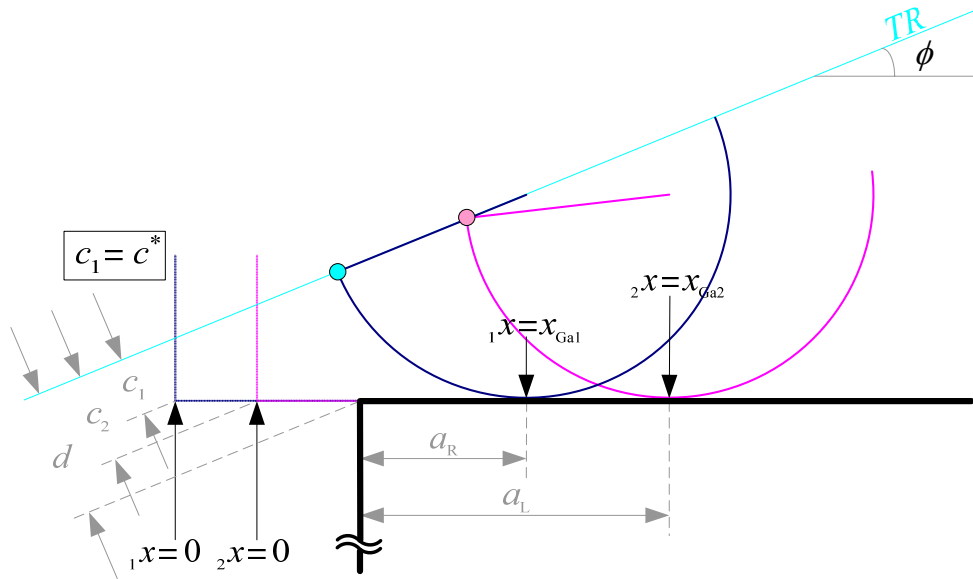


圖 47. 共軸兩半圓腳之換階幾何關係配置

圖 47 清楚地指出共軸的兩半圓腳若換階並踏上此階樓梯之瞬間，欲擺放的角度（回復接觸姿態，參考圖 44，距離虛擬座標系原點滾動了 x_{Ga} 的距離）和位置（樓梯深度 a_R 和 a_L 處），並分別以 c_1 和 c_2 之 c 值建立虛擬座標系於與樓梯緣線距離為 d 之位置 ${}_1x=0$ 和 ${}_2x=0$ 處。圖中所示兩半圓腳的旋轉軸（青色點）位於軌跡上不同位置，顯示當旋轉軸沿著軌跡往上移動到此兩位置時，共軸的兩半圓腳個別應該擺置的角度，是不同的兩個瞬間快照置於同一張圖上。事實上，這樣的幾何關係存在著以下的數學關係：

$$c_1 + (x_{Ga1} - a_R) \sin \phi = d \quad (31)$$

$$c_2 + (x_{Ga2} - a_L) \sin \phi = d \quad (32)$$

由於兩虛擬座標系所對應的 d 值相同，故兩式經整理，存在拘束關係如下：

$$c_2 = c_1 + (a_L - a_R + x_{Ga1} - x_{Ga2}) \sin \phi \quad (33)$$

透過前一節圖 46 的分析，我們瞭解到由右往左逼近的 c^* 值能對應到良好的涵蓋區域，以 c^{*+} 表示。故選取 $c_1 = c^{*+}$ ，則此時 (33) 式中的 x_{Ga1} 便為已知，若將 $(a_L - a_R)$ 的差值視為一變數，並賦予其自訂值，此時欲求解 (33) 式中的 c_2 值，還需計算 x_{Ga2} 之值才行。

因此，欲解出在設定了 c_1 和 $(a_L - a_R)$ 之下的 c_2 值，我們需要透過方程組 (23)

來求解。所有的相關方程式條列如下：

$$\begin{cases} c_2 = c_1 + (a_L - a_R + x_{Ga1} - x_{Ga2}) \sin \phi \\ y = x \tan \phi + \frac{c_2}{\cos \phi} \\ \begin{cases} x = \ell_{\max} \theta - \ell_{\max} \sin \theta \\ y = \ell_{\max} - \ell_{\max} \cos \theta \end{cases} \\ x_{Ga2} = \theta_a \ell_{\max} \end{cases} \quad (34)$$

其中，方程組 (34) 中最後一條方程式的 θ_a ，乃由 (34) 中的第二三四式解出，詳見方程組 (25)。透過這些數學式和拘束關係，我們可以求得在設定了 c_1 之值並要求兩隻腳皆以回復接觸姿態分別擺放於 a_R 和 a_L 的設定下，以 $(a_L - a_R)$ 為變數和 c_2 值的關係曲線如圖 48 所示(設定 $W=27\text{cm}$ ， $H=17\text{cm}$ ， $\ell_{\max}=12\text{cm}$)。

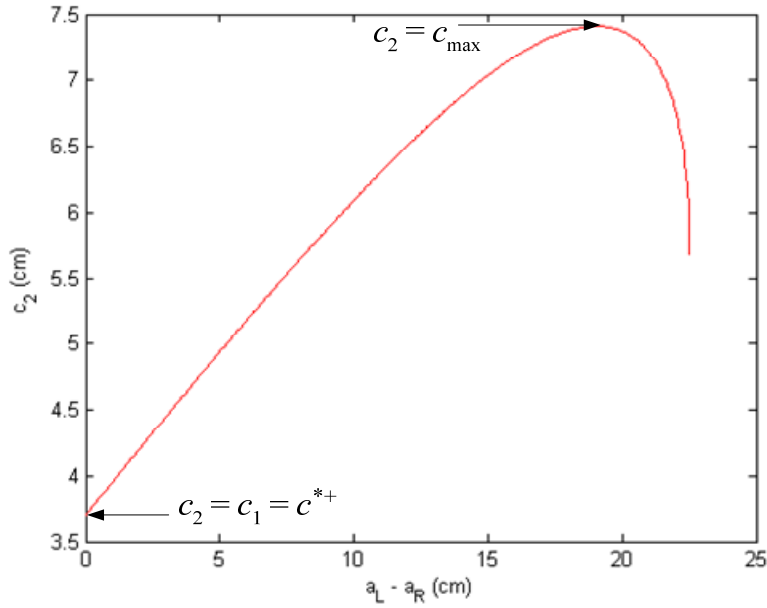


圖 48. $(a_L - a_R)$ 和 c_2 的數值關係

注意到，在曲線接近末端的地方， c_2 值發生下降變小的狀況，我們將之此曲線的最大值命名為「 c_2 的折返點」。在圖 49 中，隨著 $(a_L - a_R)$ 之值逐漸增大，若從第二個半圓腳（左半圓腳）的座標系 $_2 x=0$ 來看，相當於在圖中的 c_2 值逐漸增大，TR 線段逐漸左移，而擺線軌跡（P 點軌跡，粉紅色虛線）不動，最後 TR 線

段終將與其相切，此時 $c_2 = c_{\max}$ ， $(a_L - a_R) \approx 19$ 。詳見前一章節之討論。既然如此，當 $(a_L - a_R) > 19$ 時 TR 線段應當和擺線軌跡脫離相切，為何 c_2 仍然有解呢？關於此現象，在接下的幾何等效計算方法中會提到。

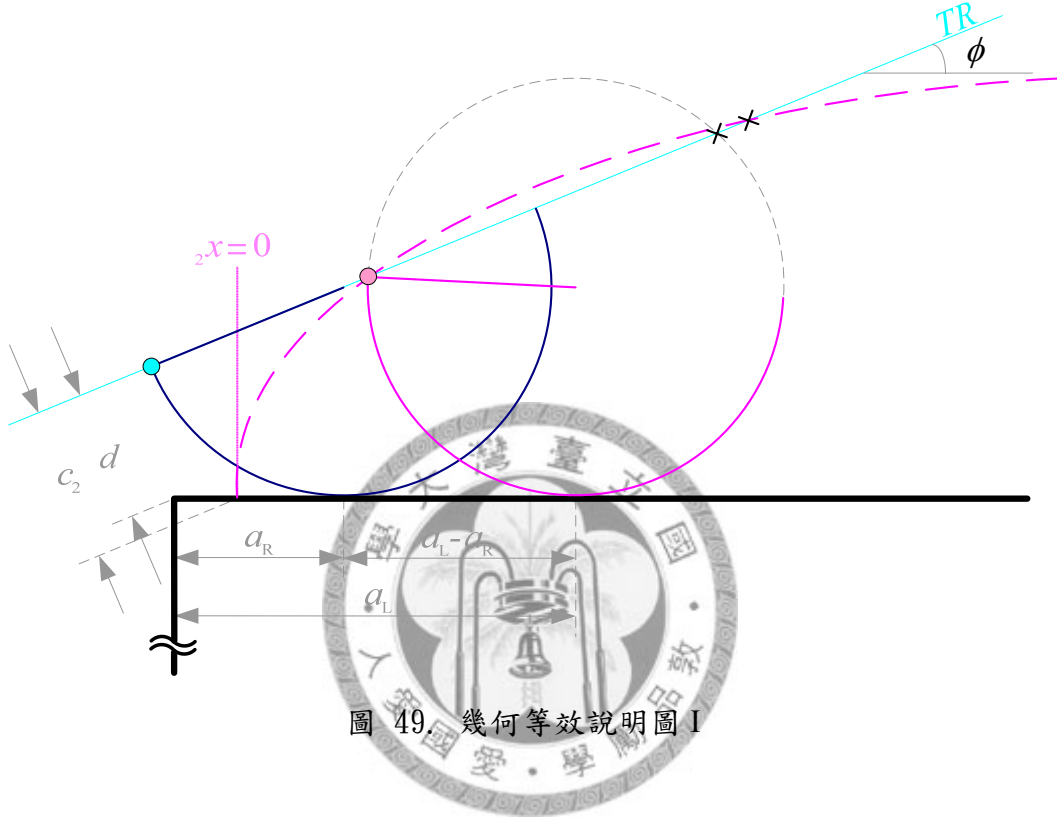


圖 49. 幾何等效說明圖 I

如圖 49 所示，左半圓腳置放於樓梯深 a_L 處，回復交集的起始點（圖中粉紅點，亦為旋轉軸）相當於 TR 軌跡與其所形成的虛擬圓形的交點之一。此虛擬圓會和 TR 線段產生兩組解；另外，P 點擺線軌跡亦與 TR 線段有兩個交點，如圖所示。因此，方程組 (34) 中的數學式可改寫如下：

$$\begin{cases} c_2 = c_1 + (a_L - a_R + x_{Ga1} - x_{Ga2}) \sin \phi \\ y = x \tan \phi \\ \begin{cases} x = (a_L - a_R) + \ell_{\max} \cos \psi \\ y = \ell_{\max} \sin \psi \end{cases} \\ x_{Ga2} = \theta_a \ell_{\max} \end{cases} \quad (35)$$

其中，方程組 (35) 中最後一條方程式的 θ_a ，乃由 (35) 中的第二三四式解出 ψ

（兩解取大），解得 ψ 後，透過幾何關係可知： $\theta_a = \frac{3\pi}{2} - \psi$ 。透過這樣的方式計

算，可加快 c_2 的求解速度。

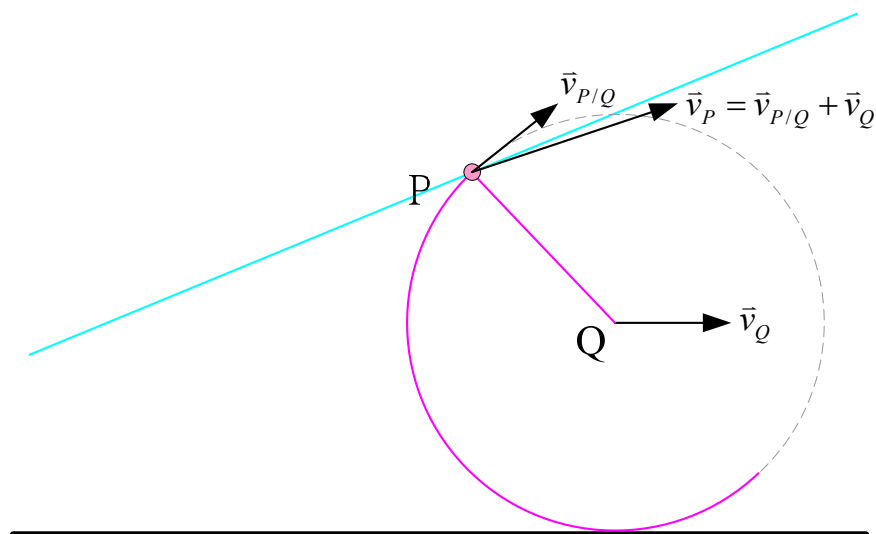


圖 50. 幾何等效說明圖 II

圖 48 中折返點所代表的意義，即為擺線軌跡和 TR 線段不斷相互遠離一直到相切為止，兩個交點匯聚成為一個切點，此切點所對應解出的 c_2 值即為 c_{\max} ；接著擺線軌跡和 TR 線段脫離，僅剩下等效虛擬圓和 TR 線段有所交集而解出的值。

圖 48 中 $(a_L - a_R) > 19$ 之後的圖形求得的資訊 (c_2 、 $\theta_a \cdots$ 等) 所代表的物理意義為：【此半圓腳無法從 ${}_2x=0$ 出發並一路作純滾動到達 a_L 之位置。但若不考慮純滾動由原點 (${}_2x=0$) 出發的限制，半圓腳可直接擺置於 a_L 之位置，並與 TR 線段有瞬時交集；若由此擺放處開始作純滾動，則下一瞬間旋轉軸線性運動區 (PQ 線段) 將馬上脫離 TR 線段。見圖 50，依照運動學原理，P 點之瞬時速度方向指向 TR 線段之下方，亦即下一瞬間 PQ 線段與 TR 線段將不會有交集】。不管如何，由於就算採用 $(a_L - a_R) < 19$ 附近之值，其所對應的涵蓋區域也是極小，不足以採用，因此在 $(a_L - a_R) > 19$ 之後的資訊就更不用說，對演算法的討論來說是不必要的資料。雖然求解 c_2 值真正的上界時，其幾何意義為「虛擬圓與 TR 線段相切之點」，但實際上由於此段資料不具參考價值，故求解此折返點的意義，相當於找出往後分析時數值資料對應 c_2 值的可用上界 (亦可視為 $a_L - a_R$ 之可用上界，其關係

對照可參照圖 48)。

事實上， c_2 真正的上界值會隨著半圓腳半徑的不同而改變。若不考慮尺寸大小於實際環境中是否堪用的可能性，即 ℓ_{\max} 之變動範圍可由 0 cm 開始討論，則當半徑 ℓ_{\max} 值逐漸增加， c_2 真正的上界的算式會由「擺線軌跡與 TR 線段相切求解」

在 $\ell_{\max} = \frac{c^*}{1 - (\frac{\pi}{2} - \phi) \sin \phi} \approx 8 \text{ cm}$ (採用 $\phi = \tan^{-1}(\frac{17}{27})$) 時轉變為「虛擬圓形與 TR 線

段相切求解」，如同上一段落所有討論的內容都是建立在 $\ell_{\max} = 12 \text{ cm}$ 的狀況下所提。儘管如此，比起真正的上界值，我們還是比較重視可用上界。

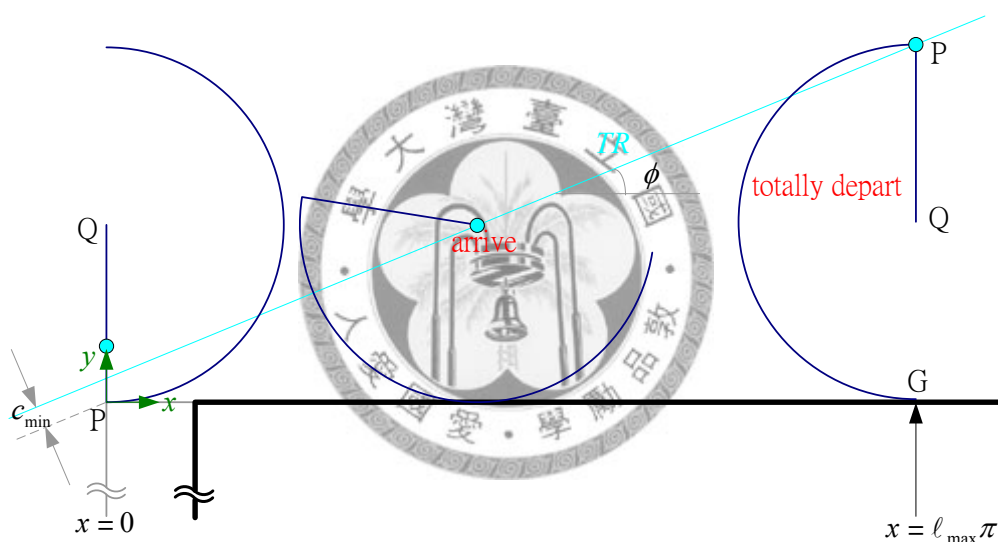


圖 51. c_{\min} 下界幾何關係

瞭解上界討論後，接著要探討 c 值的下界。若我們欲採用半圓腳的標準運動，亦即以純滾動的方式運動，則在半圓腳以 0 度由 $x=0$ 出發後並做了轉動角度行程為 π 的純滾動，此時便到達純滾動行程的終點。參考圖 51，若欲使其繼續移動，則接下來半圓腳的運動模式將轉變為「繞固定點 G 轉動」；若依照此「非預設的標準運動模式」去運動，考慮到半圓腳具有彈性，在此一階段的運動過程中半圓腳將產生極大的形變量，因此旋轉軸位置將變的非常不可預測，進而影響機器人質心位置和運動軌跡偏移。因此我們僅採用半圓腳的運動，最多至行程距離純滾

動了 $\ell_{\max} \pi$ 的長度為止。在此最遠行程下所相應的 c 值即為可調整範圍的最小值。

此時 $c=c_{\min}$ ，透過幾何關係，經計算：

$$c_{\min} = 2\ell_{\max} \cos \phi - \ell_{\max} \pi \sin \phi \quad (36)$$

若採用 $\ell_{\max}=12\text{cm}$ 和 $\phi = \tan^{-1}(\frac{17}{27})$ ，則可得 $c_{\min} \approx 0.223\text{ cm}$ 。

基於 c_1 之預設值 $c_1 = c^{*+}$ 已固定，因此上述的上下界討論都是為了觀察「已經固定一隻腳的擺置和運動方式（即右腳在 ${}_1x=0$ 的虛擬座標中，設定 $c_1 = c^{*+}$ 並以回復交集的姿態擺置於樓梯深度 a_R 處），觀察另一腳之各參數如何調整才能獲得最大涵蓋區域行程」此現象所相應 c_2 可調整的範圍而討論， $c_{\min} < c_2 < c_{\max}$ 。

由於左右兩半圓腳的投影旋轉軸共點，為了方便討論，我們必須統一座標系的定義。如同直型腳之假設，假設兩半圓腳中，右腳首先抬升換階，接著才是左腳，因此定義先抬升的右腳的座標系為廣義座標系（ ${}_1x=0$ ）於抬升後擺放的階梯上，並將第二腳的座標系建立於此座標系上。由於右腳所選定的 c_1 值所對應的可用區域為 100% 整段可用，因此左腳的涵蓋範圍和其起始位置便成為關注的首要重點。

接下來的討論，讀者需要在腦中去想像，建立動態的影像。注意觀測的視角是機器人在樓梯上並往右上方爬升。在圖 47 中，選定 c_1 值並固定了右腳的擺放位置（ $a_R = \text{const.}$ ）和其起始姿態，如此接下來的行程都能包含於可用區域內；接著如同右腳，左腳選定了其擺放位置 a_L （ $a_L > a_R$ ）並以起始姿態的角度擺放，使其接下來的行程也都能包含於涵蓋區域內；依照前面所提的等效概念，左腳著地時的擺放需求，其實可視為將右腳的著地擺放姿態維持不變並且由 a_R 向右平移至 a_L 處，接著以 Q 點為圓心順時針旋轉半圓腳直至 P 點接觸到 TR 線段為止，此時便為左腳的擺放姿態。 a_L 由 $a_L = a_R$ 開始並且隨著 $a_L - a_R$ 值逐漸增加，相當於等效的向右平移量和順時針方向旋轉量跟著增加。見圖 48 的對應關係，隨著 $a_L - a_R$ 值逐漸增加， c_2 也由 c^{*+} 開始逐漸增加，兩變數皆具備連續性和稠密性（density）。因此改變 $a_L - a_R$ 之值其實就是在改變 c_2 之值。另外， c_2 值的增加也代表了 ${}_2x=0$ 的

位置由一開始和 ${}_1x=0$ 重合逐漸向右遠離。

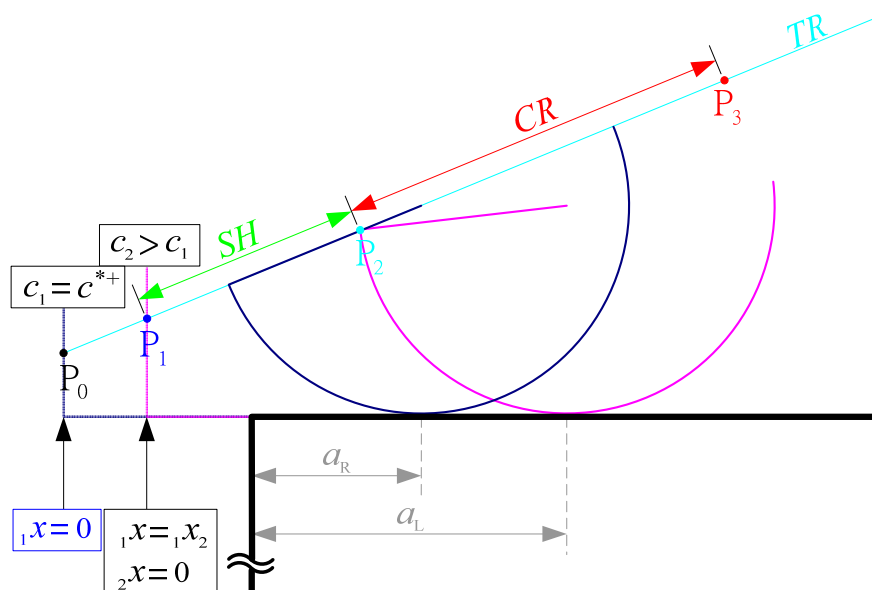


圖 52. P_i 曲線定義說明圖 ($c_2 > c^*$)

回到原先的設定，以右腳的座標系為廣義座標系 (${}_1x=0$)，定義位於此處的旋轉軸軌跡 TR 為 P_0 點。接著決定了左腳的著地點 a_L (同時也決定了 c_2 和 ${}_2x=0$ 位於廣義座標系 ${}_1x$ 中的位置， ${}_1x={}_1x_2$) 並定義此處軌跡 TR 為 P_1 點。此時， c_2 值相應的 CR 和 SH 範圍可立即透過圖 45 取得資訊，進而找出 TR 上的 P_2 點和 P_3 點，如圖 52 所示。想像自己是一個移動中的旋轉軸，由 P_0 開始，沿著 TR 向右上方移動；隨著 a_L 值的不同，旋轉軸也經歷了 P_1 、 P_2 和 P_3 的間隔行程長度也有所改變，如圖 53 所示。其中，行程的長度也就代表著所經歷的時間長度。

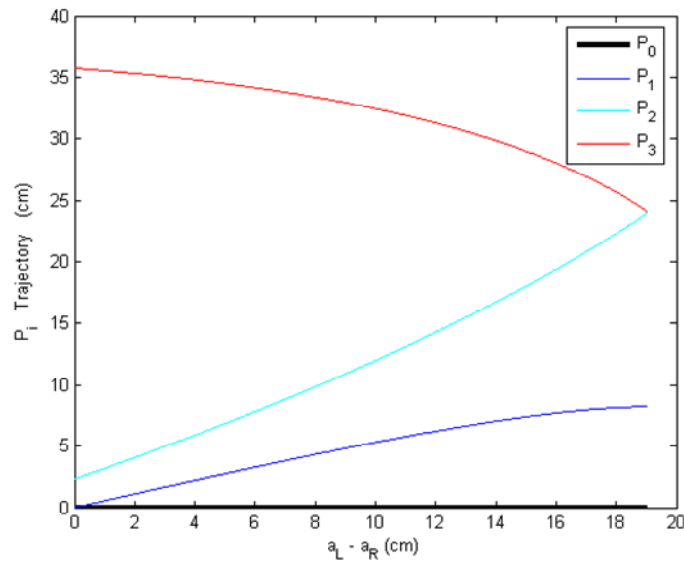


圖 53. $(a_L - a_R)$ 和 P_i 曲線的數值關係

5.5 半圓腳的幾何限制

當旋轉軸位於可用區域內，意味著半圓腳與地面接觸（地相）的同時 TR 軌跡可與 PQ 線性區連續有交集。觀察圖 45，紅色區域代表在某階樓梯上建立了虛擬座標系，經計算後所得出的可用區域（即涵蓋區域）。我們可以解讀為：一只半圓腳選定了 c 值後，在第 (i) 階樓梯上所對應的可用區域；注意到，不管選定的 c 值為何，選擇後在對照時，從圖形的底部垂直向上移動，經過 SH 進入 CR ，最後到達 CR 的終點（紅色圖形上界的曲線），這意味著這只半圓腳在第 (i) 階的行程在這裡必須結束，並抬升換階至第 $(i+1)$ 階。因此，紅色的上界意味著涵蓋區域的終點，半圓腳旋轉軸必須在移動到涵蓋區域終點時，或是移動到終點前附近的區域，進行從第 (i) 階到第 $(i+1)$ 階抬升換階的動作。故該半圓腳在換階時，其所經歷的行程（時間）必須將 CR 的終點包含在內。由於半圓腳在換階時，機器人與地面的支撐僅依靠其他三隻沒換階的腳在接觸，不甚穩定，因此換階所佔用的時間盡量愈短愈好。基於此理由，又加上換階必須包含 CR 之終點，故可

得到以下的結論：一隻半圓腳的換階行程必須定義在其涵蓋區域終點附近的範圍並包含此終點。

因為共軸的左右兩半圓腳，其旋轉軸投影於軌跡 TR 上共點，因此共軸兩腳若選取相同的 c 值，將導致兩足換階的時間相同，這將違背「每次至多只能有一隻腳離開地面」的原則。因此，在選定了其中一隻腳的 c 值 $c_1 = c^{*+}$ 時，另一隻腳 c_2 值的選擇原則除了「挑選之 c 值所對應的涵蓋區域越長越好」之外，此涵蓋區域還必須「足夠包含另一隻腳位於空相（亦即換階）的全部行程時間」。

圖 53 清楚的描述建立於廣義座標系下 $a_L - a_R > 0$ ($c_2 > c^*$) 各值所對應的可用範圍以及範圍終點的位置。綜合上述結論，我們相當於從此圖得到半圓腳選定各 c_2 值的換階區間的大略位置：CR 終點（紅線）附近。並且，由於 $c_1 = c^{*+}$ （橫軸 $a_L - a_R = 0$ 處），此時 $x_2 = 0$ ，因此觀察此圖便可粗略估計第一隻腳的換階區間位置，約位於縱軸 35~40cm 處（假設空相使用了約 5cm 的行程），這意味著另一隻腳的可用區域必須包含此範圍。然而，令人失望的是，此圖中，沒有一個 c_2 值所對應的涵蓋區域可滿足此要求。即使 $c > c^*$ 能對應較優秀長度的涵蓋區間，卻找不到可以滿足與 $c_1 = c^{*+}$ 相互配合的 c 值，這就是選擇了半圓腳必須付出的幾何限制代價。相對的，直型腳沒有 c 值選擇的問題，因此不會有這樣的困擾。

然而，問題總是要解決的。退而求其次，我們轉而尋找所 $c < c^*$ 對應的可用區間。由前述可知，此範圍 c 值所對應的可用區間，其回復交集的起始位置全部都從 Q 點開始進入，也就是半圓腳的圓心位置，或說是距離地板高度 ℓ_{\max} 處的位置（參考圖 41）。試想，假若我們定義了 $c_1 = c^{*+}$ ，則可得知旋轉軸軌跡和樓梯的相對位置。由於兩腳共用旋轉軸，故第二隻腳的旋轉軸在 TR 上的移動勢必與第一隻腳的旋轉軸同步。因此，在已經確定 TR 位置的狀況下， $c_2 < c^*$ 對應出半圓腳的回復交集位置，必定為樓梯深度 $a_L = a_R$ 處，不可能有其他位置，詳見圖 54。為了方便辨識，在圖中特地將第二隻腳（紫紅色）畫粗，以利與第一隻腳（深藍色）作區隔。

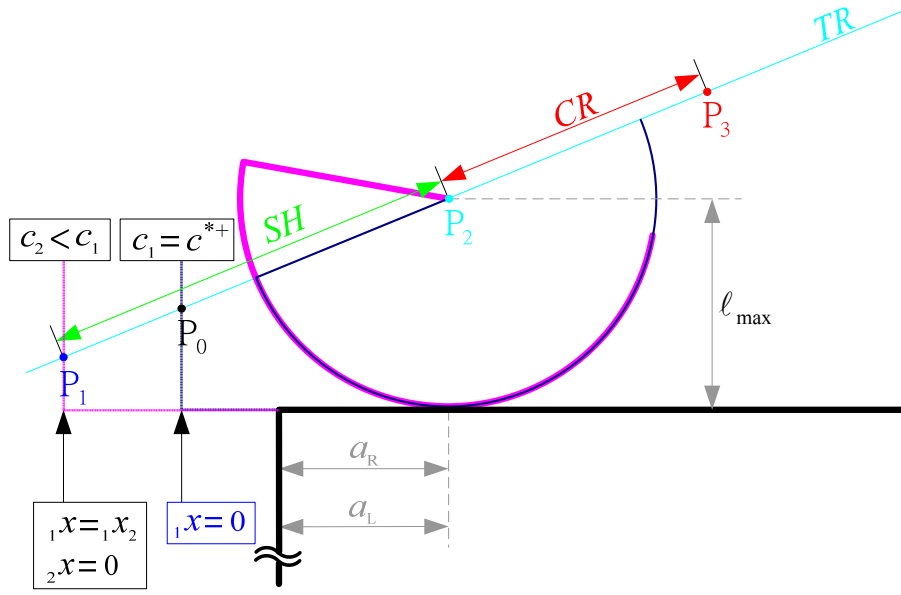


圖 54. P_1 曲線定義說明圖 ($c_2 < c^*$)

如同之前的討論，請讀者在腦中試著想像，建立起連續影像。從原點 ${}_2x=0$ 出發並作純滾動，在 $c_2 < c^*$ 的範圍下，不同的 c_2 值的差異僅在於，回復交集(arrive)的擺放姿態 θ_a 不同，詳見 (24) 式。等效概念：隨著 c_2 值由 c^* 開始減少，相當於將右腳的著地擺放姿態以 Q 點為圓心逆時針旋轉至 c_2 值對應的回復交集角度 θ_a 為止。至於 ${}_2x=0$ 的位置，相當於從回復交集的擺放姿態和位置往反方向（左側）滾動回去，直到回到 $\theta=0$ 為止。隨著 c_2 值小於 c^* 遠離愈多，上述等效逆時針轉動的角度也愈多，則 ${}_2x=0$ 的位置，也由一開始和 ${}_1x=0$ 重合的位置開始逐漸向左遠離。另外，式 (36) 說明了 c_2 的變化範圍最多只能減小至 c_{\min} 。

以相同的模式去定義 P_0 、 P_1 、 P_2 和 P_3 ，並且現在也有了 $c_2 < c^*$ 的資訊，結合圖 53： $c_2 > c^*$ 的資訊並將橫軸由 $a_L - a_R$ 置換成 c_2 ，我們可以得到滿足前述範圍 $c_{\min} < c_2 < c_{\max}$ 的完整圖形，如圖 55。透過 P_1 曲線，這張圖將兩腳選定 c 值對應的涵蓋區域順利的呈現在同一個廣義座標系上。亦即第二隻腳選定 c_2 後，因為和第一隻腳共旋轉軸，經過平移後，可由第一隻腳的座標系（廣義座標系）來觀察其可用區間絕對位置。

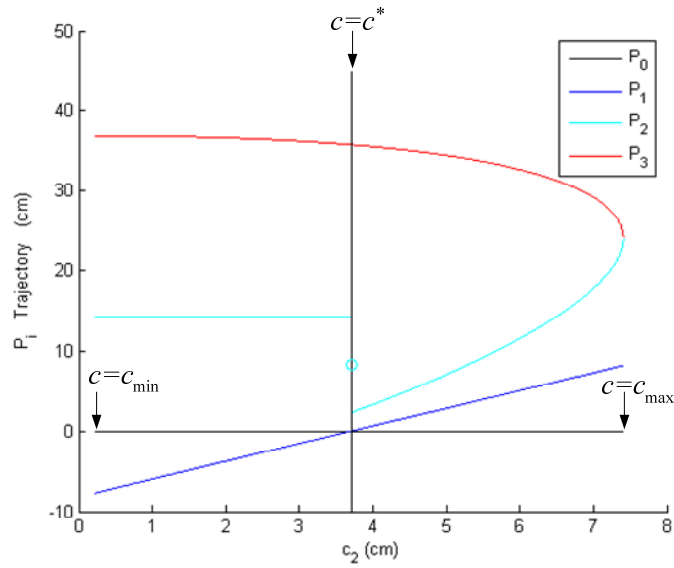


圖 55. c_2 全範圍和 P_i 曲線的數值關係

觀察圖 55，可發現 c 值在接近 c_{\min} 附近的涵蓋區域較晚結束，可涵蓋 c^{*+} 對應的可用行程終點結束後一小段長度。雖然不能涵蓋到縱軸值為 40cm 那麼遠，但這一小段長度是我們可以把握的。 c_{\min} 附近的涵蓋區域有個缺點，就是區域的起始位置非常的晚（約略 14cm 附近）。在選定 $c_2=c_{\min}$ 後，機器人的運動詳見下一章換階時序的討論。

下方表 2 顯示了上述半圓腳討論提及的各變數其符號、物理量以及單位。

Symbol	Quantity	SI Unit
W	length of stair width measured in segittal plane	cm
H	length of stair height measured in segittal plane	cm
PL	characteristic length of stair	cm
ϕ	stair slope	rad
ℓ	instantaneous output length of single semi-circle leg	cm
β	instantaneous output angle of single semi-circle leg	rad
ℓ_{\max}	radius of a semi-circle leg	cm

a (a_R or a_L)	stepping depth of leg (right or left) on stair	cm
d	distance between desirable trajectory and L_{SE}	cm
c	distance between desirable trajectory and origin of virtual coordinate (edge of virtual stair)	cm
c^*	critical value of c	cm
x	horizontal component value relative to virtual origin	cm
y	vertical component value relative to virtual origin	cm
θ	pure rolling angle relative to virtual origin	cm
SH	shifted range length	cm
CR	covered range length	cm
c_{max}	meaningful maximum value of c	cm
c_{min}	meaningful minimum value of c	cm
ψ	angular parameter in equivalent discussion	rad
BL	body length measured from H_R to H_F	cm

表 2. 實驗平台使用半圓腳爬升樓梯相關變數表格

5.6 換階時序

假設機器人在一組完全精準無尺寸誤差的樓梯上運動，並且透過四足間協調如前一節所述，那麼由前軸 H_F 或後軸 H_R 軌跡之線段來觀察四隻腳的運動，可發現機器人作規律的週期運動，此週期恰好為時相當於旋轉軸其行程經歷 PL （樓梯的特徵長度）之長。亦即，機器人的運動週期和樓梯週期相同；並且，在軌跡線段上任取出一段長度為 PL 之線段來看，四隻腳的運動內容、排序均應相同，只是起始點不同。

選取 $c_1 = c^{*+}$ 和 $c_2 = c_{\min}$ 並設定 W 、 H 、 ℓ_{\max} 如預設值，得到換階時序圖如下。

圖 56 (a) 描述了一個週期內，四隻腳在遵守協調規則下的運動順序及狀況。其起始於 B 腳恰好結束之瞬間，故亦結尾於 B 腳於下一階梯換階完成之瞬間。圖 56 (b) 則描述了四腳依照其運動順序在經歷空相 (Aero Phase, AP) 時，消耗的時間所佔一個週期的比例。黑色部分表示四足皆經歷地相 (Ground Phase, GP)。

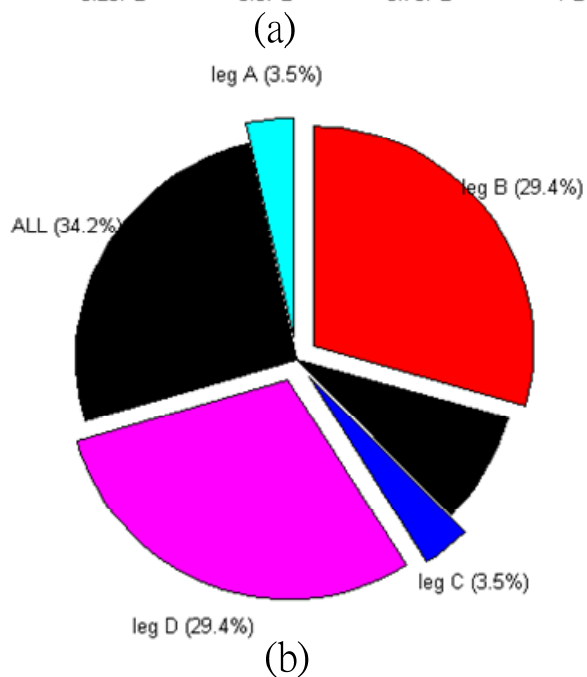
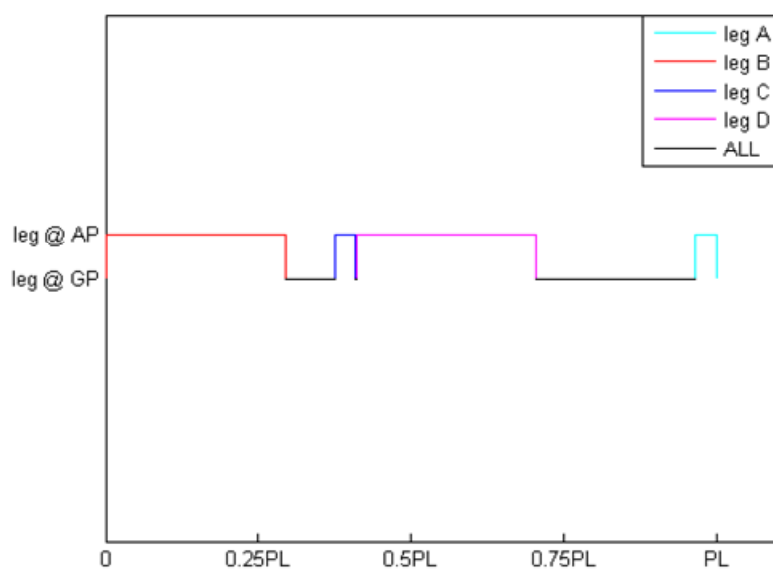


圖 56. 半圓腳在完整週期內的各足換階時序圖

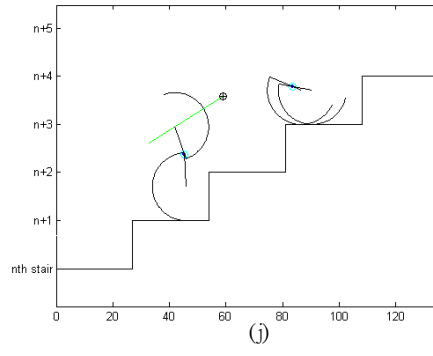
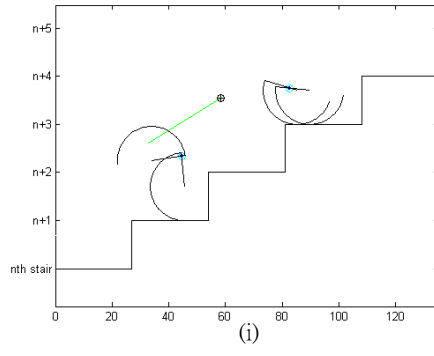
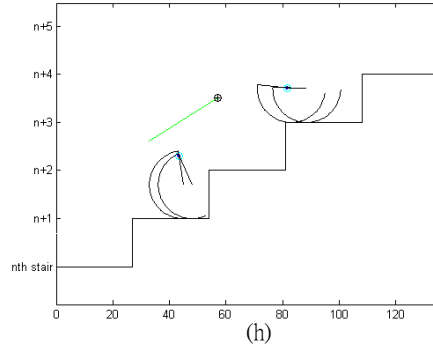
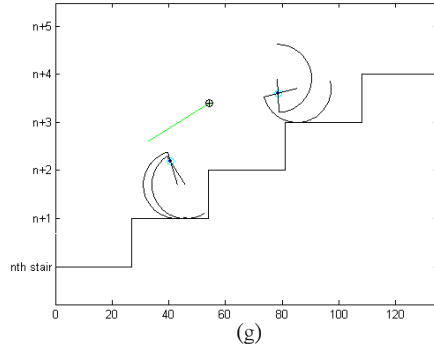
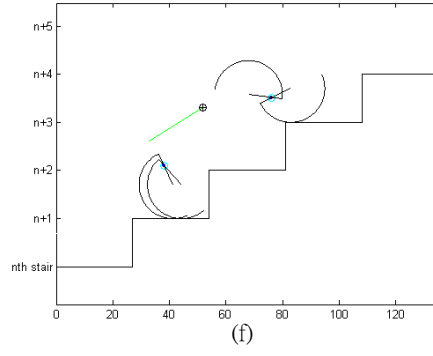
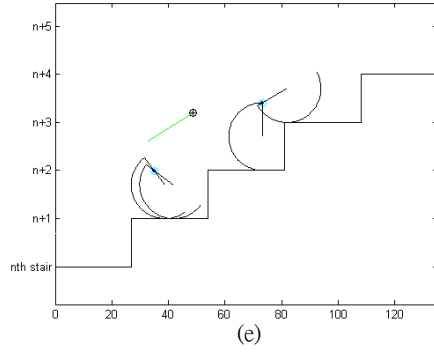
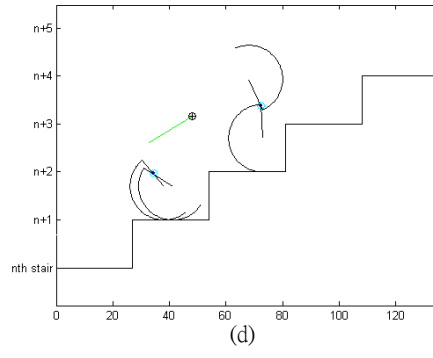
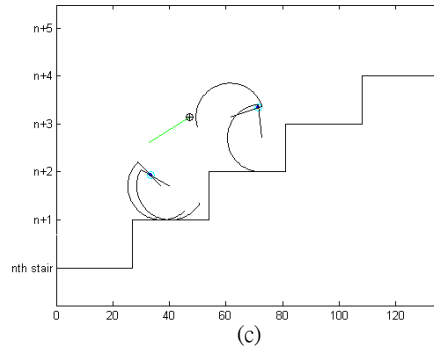
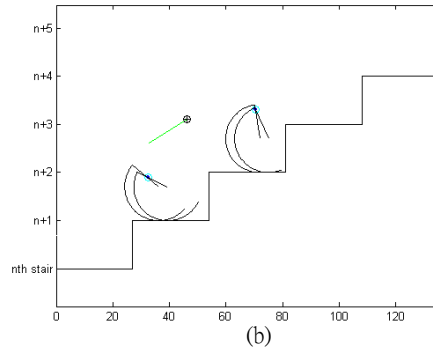
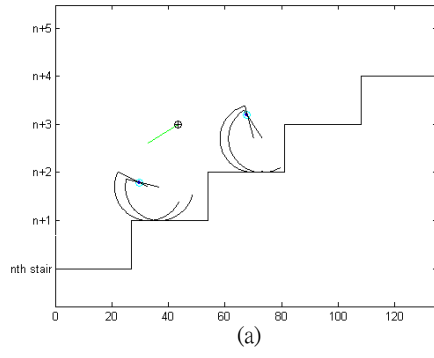
比較圖 10 (b) 和圖 56 (b) 可清楚的發現到，採用半圓腳時，大部分的時間機器人都只靠三隻腳與地面接觸支撐，在一個週期內僅 34.2% 的時間是由四足共同支撐。另外，共軸兩腳之間沒有多餘的行程可以緩衝，右腳換階完成左腳必須馬上跟進，若面臨有尺寸誤差的階梯，這樣的機制極有可能出錯。由此可輕易推斷，四足機器人採用半圓腳的穩定性遠不如採用直型腳。此即為半圓腳的缺點。

針對這樣的問題，觀察圖 55，事實上仍然有解決辦法。由於第一隻腳 $c_1 = c^{*+}$ 已選定，這項設定蒙蔽了思路，忽略了其他配置的可能。假若我們使選定 c^{*+} 值的腳為**第二隻**換階抬升的腳，並選定第一隻腳的 c 值約略位於 c^{*+} 和 c_{\max} 中間。如此一來，兩隻腳的涵蓋區域長度都相當足夠，大幅降低干涉和不穩定的現象。

5.7 半圓腳的模擬

接著透過 MATLAB 的模擬，尺寸參數採用設定值如下：半圓腳半徑 $\ell_{\max} = 12\text{cm}$ 、 $BL = 44.4\text{cm}$ 且，並輸入合理的環境設定值 $d = 10\text{cm}$ 、 $W = 27\text{cm}$ 和 $H = 17\text{cm}$ 。利用 MATLAB 中的 MOVIE 的指令顯示爬升過程的連續動畫。注意到此模擬是建立在樓梯尺寸完全精準的假設下進行。圖 57 顯示了經過圓滑化規劃後，機器人在一個完整週期內，其運動結果模擬的數張動畫截圖。截圖內容忽略了機器人機身的構圖，僅顯示了四隻腳的姿態，以及機器人的質心軌跡。由模擬結果可清楚的觀察出每次最多只有一腳可以抬升離地，四足之間依照順序換階，以及存在著四足都處於地相的姿態。





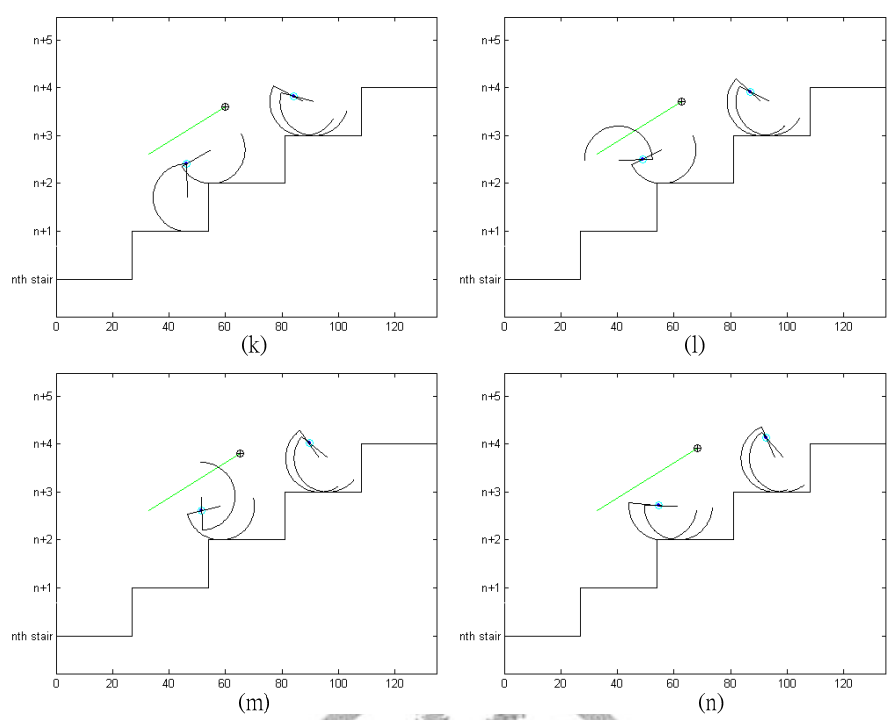


圖 57. 半圓腳運動模擬



第六章 結論與未來展望

目前在四足機器人樓梯爬升演算法中，分別分析了利用直型腳爬升樓梯單足、二足、四足各種狀況的討論，透過演算法的分析流程，當面對不同平均尺寸的樓梯組，可透過干涉討論的標準流程找出合適的換階腳長 ℓ_{\max} 值進行適應；在誤差分析上，亦針對運動過程中發生側傾的狀況進行探討，以及提供了透過軌跡的校正來適應具有尺寸誤差階梯的方法。最後並驗證了透過直型腳及機器人平台已可實現開路控制的爬升（亦即無視樓梯尺寸誤差）。雖然無法完全依照理想狀態運動，但其爬升成功率在開路控制下已可達 90% 以上，且因其穩定性良好，可爬升樓梯的階數無論為何，只要在可適應的尺寸下，機器人都可克服。而依照相同理念下所發展出的半圓腳，其樓梯爬升演算法的使用流程，包括 c 值的選取和雙足間的配合，以及針對不同半徑 ℓ_{\max} 下發展出的尺寸適應範圍探討方式也已完整的建立，並已實現其模擬。透過這些測試和討論，關於上升樓梯四足機器人，其省能軌跡的演算法可行性被充分驗證。

此實驗平台在未來尚有許多發展空間，省能的研究乃演算法核心，因此除了首要研究增加爬升時軌跡的穩定度以確保能量低耗損，諸如輕量化、轉移重心位置等之外，增強偵測迴授技術也是重要的研究方向；比較現有安裝的設備，除了紅外線距離感測器以外，亦可加入加速規、傾斜儀及陀螺儀等其他迴授資訊，以取得更加精確的真實運動軌跡。在演算法方面，直型腳四足間的協調方式可朝著其他配置方式來安排，找出同時可兼具不發生干涉和側傾的步態是可能存在的；半圓腳則可進一步仿照直型腳的模式探討四足間的協調以及防止干涉步態，並將其付諸實行，比較兩者不同幾何形狀腳在運動上表現的差異。另外，尋求其他步態的開發，以及不同模式間的切換，使其爬上樓梯後可自動切換走路模式，以擴

增其功能性、以及使機器人具負載功能，也都是值得研究的項目。目前的研究都在半靜態穩定下討論，日後，開發出動態運動演算法以適應更強大的移動速度，提升其性能的研究，亦在此下。



參 考 文 獻

1. Shuan-Yu Shen, C.-H.L., Chih-Chung Cheng, Jau-Ching Lu, Shao-Fan Wang, and Pei-Chun Lin, *Design of a Leg-Wheel Hybrid Mobile Platform*, in *IROS, International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE/RSJ*. 2009. p. 4682 - 4687.
2. Neveu, P., J. Villanovab, and J.P. Gasca, *Modelisation of an Unspecialised Quadruped Walking Mammal*. CBP, Comparative Biochemistry and Physiology - Part A, 2001.
3. Marhefka, D.W. and D.E. Orin, *Intelligent Control of Quadruped Gallops*, in *TM, Transactions on Mechatronics. IEEE/ASME*. 2003. p. 446 - 456.
4. Estremera, J. and P.G.d. Santos, *Generating Continuous Free Crab Gaits for Quadruped Robots on Irregular Terrain*, in *T-RO, Transactions on Robotics. IEEE*. 2005. p. 1067 - 1076.
5. Smith, J.A., *Gallop, Bounding and Wheeled-Leg Modes of Locomotion on Underactuated Quadrupedal Robots*, in *Mechanical Engineering*. 2006, McGill University: Montreal, Canada. p. 177.
6. Smith, J.A., et al., *Bounding with Active Wheels and Liftoff Angle Velocity Adjustment*. *IJRR, The International Journal of Robotics Research*, 2009. **0**: p. 0278364909336807v1.
7. TANAKA, T. and S. HIROSE, *Development of Leg-wheel Hybrid Quadruped "AirHopper" Design of Powerful Light-weight Leg With Wheel*, in *IROS, International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE/RSJ*. 2008. p. 3890 - 3895.
8. Park, H.S., S. Floyd, and M. Sitti, *Roll and Pitch Motion Analysis of a Biologically Inspired Quadruped Water Runner Robot*. *IJRR, The International Journal of Robotics Research*, 2009. **0**: p. 0278364909354391v1.
9. M. Buehler, R.B., A. Cocosco, G. Hawker, J. Sarkis, K. Yamazaki., *SCOUT: A Simple Quadruped That Walks, Climbs, and Runs*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. 1998. p. 1707 - 1712.
10. Poulakakis, I., J.A. Smith, and M. Buehler, *Experimentally Validated Bounding Models for the Scout II Quadrupedal Robot*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. 2004. p. 2595 - 2600.
11. Kimura, H., Y. Fukuoka, and A.H. Cohen, *Adaptive Dynamic Walking of a Quadruped Robot on Natural Ground Based on Biological Concepts*. *IJRR, The International Journal of Robotics Research*, 2007. **26**: p. 475 - 490.
12. Kato, K. and S. Hirose, *Development of the quadruped walking robot*,

- TITAN-IX --- mechanical design concept and application for the humanitarian de-mining robot*. Advanced Robotics, 2001. **15**(2): p. 191 - 204.
13. KIMURA, H., S. AKIYAMA, and K. SAKURAMA, *Realization of Dynamic Walking and Running of the Quadruped Using Neural Oscillator*. AR, Autonomous Robots, 1999. **7**: p. 247 - 258.
 14. Zhang, Z.G. and H. Kimura, *A Simple and Autonomous Quadruped Running Robot*. JSCE, Journal Systems and Control Engineering, 2009. **223**: p. 323 - 336.
 15. Buchli, J. and A.J. Ijspeert, *Self-organized Adaptive Legged Locomotion in a Compliant Quadruped Robot*. Auton Robot, 2008. **25**: p. 331-347.
 16. Estremera, J. and K. JWaldron, *Thrust Control, Stabilization and Energetics of a Quadruped Running Robot*. IJRR, The International Journal of Robotics Research, 2008. **27**: p. 1135 - 1151.
 17. Buehler, M., R. Playter, and M. Raibert, *Robots Step Outside*, in *AMAM, Adaptive Motion of Animals and Machines*. 2005.
 18. Zielinska, T. and J. Heng, *Multifunctional Walking Quadruped*. RO, Robotica, 2002. **20**: p. 585 - 593.
 19. Grand, C., et al., *Stability and Traction Optimization of a Reconfigurable Wheel-legged Robot*. IJRR, The International Journal of Robotics Research, 2004. **23**: p. 1041-1058.
 20. Endo, G. and S. Hirose, *Study on Roller-walker*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. 1999. p. 232 - 237.
 21. Buehler, M., *Dynamic Locomotion with One, Four and Six-Legged Robots*, in *RSJ, Journal of the Robotics Society of Japan*. 2002. p. 15 - 20.
 22. Estier, T., et al., *An Innovative Space Rover with Extended Climbing Abilities*. 2000.
 23. Choi, H.D., et al., *Independent Traction Control for Uneven Terrain Using Stick-slip Phenomenon : Application to a Stair Climbing Robot*. Auton Robot, 2007. **23**: p. 3 - 18.
 24. Sam D. Herbert, A.D., and Nikolaos Papanikolopoulos, *Loper: A Quadruped-Hybrid Stair Climbing Robot*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. 2008. p. 799 - 804.
 25. Kimmel, S.C., *Considerations for and Implementations of Deliberative and Reactive Motion Planning Strategies for the Novel Actuated Rimless Spoke Wheel Robot IMPASS in the Two-Dimensional Sagittal Plane*, in *Mechanical Engineering*. 2008, Virginia Polytechnic Institute and State University: Blacksburg, Virginia. p. 102.
 26. J. Blake Jeans, D.D.H., *IMPASS: Intelligent Mobility Platform with Active Spoke System*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. 2009. p. 1605 - 1606.

27. Kikuchi, K., et al., *A Study on a Wheel-based Stair-climbing Robot With a Hopping Mechanism*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008. **22**: p. 1316 - 1326.
28. MICHAUD, F.O., et al., *Multi-Modal Locomotion Robotic Platform Using Leg-Track-Wheel Articulations*. AR, Autonomous Robots, 2005. **18**(137 - 156).
29. Vu, Q.-H., B.-S. Kim, and J.-B. Song, *Autonomous Stair Climbing Algorithm for a Small Four-Tracked Robot*, in *ICCAS, International Conference on Control, Automation and Systems*. IEEE. 2008. p. 2356 - 2360.
30. Ben-Tzvi, P., S. Ito, and A.A. Goldenberg, *Autonomous Stair Climbing with Reconfigurable Tracked Mobile Robot*, in *ROSE, International Workshop on Robotic and Sensors Environments*. IEEE. 2007. p. 1 - 6.
31. Yool, K.H., et al., *Swarm Robotics: Self Assembly, Physical Configuration, and Its Control*, in *IJC, International Joint Conference. SICE-ICASE/IEEE*. 2006. p. 4276 - 4279.
32. iRobot. Available from: www.irobot.com.
33. Hashimoto, J., et al., *Realization by Biped Leg-wheeled Robot of Biped Walking and Wheel-driven Locomotion*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. 2005. p. 2970 - 2975.
34. Y. Ota, K.Y., T. Tamaki, and S. Hirose, *A Walking and Wheeled Hybrid Locomotion With Twin-frame Structure Robot*, in *IROS, International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE/RSJ*. 2002. p. 2645 - 2651.
35. Boxerbaum, A.S., et al., *Design of an Autonomous Amphibious Robot for Surf Zone Operation: Part I Mechanical Design for Multi-Mode Mobility*, in *AIM, International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics Monterey. IEEE/ASME*. 2005. p. 1459 - 1464.
36. Theeravithayangkura, C., et al., *Stair Recognition with Laser Range Scanning by Limb Mechanism Robot "ASTERISK"*, in *ROBIO, International Conference on Robotics and Biomimetics. IEEE*. 2008. p. 915 - 920.
37. Uluc. Saranli, M.B., Daniel E. Koditschek, *RHex: A Simple and Highly Mobile Hexapod Robot*. IJRR, International Journal of Robotics Research, 2001. **20**: p. 616 - 631.
38. Moore, E.Z. and M. Buehler, *Stable Stair Climbing in a Simple Hexapod Robot*, in *ICCW*. 2001.
39. E. Z. Moore, D.C., F. Grimmering, and M. Buehler, *Reliable Stair Climbing in the Simple Hexapod 'RHex'*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. 2002. p. 2222 - 2227.
40. Campbell, D. and M. Buehler, *Stair Descent in the Simple Hexapod 'RHex'*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. 2003. p. 1380 - 1385.
41. Yuan, J. and S. Hirose, *Research on Leg-wheel Hybrid Stair Climbing Robot*,

- Zero Carrier*, in *ROBIO, International Conference on Robotics and Biomimetics. IEEE*. 2004. p. 654 - 659.
42. Takita, Y., N. Shimoi, and H. Date, *Development of a Wheeled Mobile Robot Octal Wheel Realized Climbing Up and Down Stairs*, in *IROS, International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE/RSJ*. 2004. p. 2440 - 2445.
43. Pongas, D., M. Mistry, and S. Schaal, *A Robust Quadruped Walking Gait for Traversing Rough Terrain*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. 2007. p. 1474 - 1479.
44. Rebula, J.R., et al., *A Controller for the LittleDog Quadruped Walking on Rough Terrain*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. 2007. p. 1467 - 1473.
45. Stolle, M., et al., *Transfer of Policies Based on Trajectory Libraries*, in *IROS, International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE/RSJ*. 2007. p. 2981 - 2986.
46. Kolter, J.Z., M.P. Rodgers, and A.Y. Ng, *A Control Architecture for Quadruped Locomotion Over Rough Terrain*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. 2008. p. 811 - 818.
47. Cuzzillo, E., C.G. Atkeson, and M. Zucker, *Designing Dynamic Actions for a Position Controlled Legged Robot*, in *ICRA, International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. 2009.
48. Tantichattanont, P., S. Songschon, and S. Laksanacharoen, *Quasi-static Analysis of a Leg-wheel Hybrid Vehicle for Enhancing Stair Climbing Ability*, in *ROBIO, International Conference on Robotics and Biomimetics. IEEE*. 2007. p. 1601 - 1605.