

# 初學者的研究之路：以圖著色問題為案例

## Towards Research for Beginners: A Case Study

國立臺北商業大學 彭聖倫教授

2025/04/22

### 壹、概述

本報告探討研究的基本流程與方法，並以圖論中的「衝突自由連通著色問題」作為案例說明如何從觀察現象到提出解法，逐步走上研究之路。

報告首先從研究的定義與科學方法開始說起，強調研究是一種反覆尋找真理與解決問題的過程。接著說明進行研究的具體步驟，包括尋找題目、文獻回顧、提出假設與驗證方案，並展示了一個實際研究案例：圖著色問題中特定的「衝突自由連通著色（conflict-free connection coloring）」。

該研究案例不僅涉及圖論的基本概念，也涵蓋了計算複雜度理論（如 NP-hard 問題）與演算法設計，最終提出在特定圖形結構（如 split graph 與 co-bipartite graph）上可行的多項式解法。報告最後強調研究精神的重要性，包括誠信、合作與持續投入的熱情。



(圖一) 演講 PowerPoint Page 3

簡報中所介紹的研究方向以電腦科學與離散數學為主軸，特別著重於圖論中的「衝突自由連通著色問題」。這是一種實際應用性與理論性兼具的問題，在無線網路頻道配置、感測器網路等領域中具有潛在應用價值。

### 1. 衝突自由連通著色問題定義

衝突自由著色 (Conflict-Free Coloring) 是一種頂點或邊的著色方式，確保在任何兩點間的某條連通路徑中，至少有一種顏色只出現一次。這類著色方式可避免通訊干擾，具有實用價值。

更進一步的「強衝突自由連通著色 (Strong Conflict-Free Connectivity)」則要求所有最短路徑皆滿足此性質。該問題在計算理論中屬於困難問題 (NP-Hard)，因此研究人員關注在某些圖形類別中是否可用多項式時間解決。

## 2. 算法與理論貢獻

該研究中，彭教授與其合作者針對以下兩種圖形結構，提出可行解法：

- **Split Graphs**：頂點集合可分成一個團與一個獨立集合，證明該問題在此類圖中可多項式求解。
- **Co-bipartite Graphs**：補圖為二分圖，亦證明此類圖中問題可解。

此外，研究也利用「從 3-SAT 的歸約」證明問題的一般形式為 NP-Hard，展示其計算複雜度與理論挑戰。

## 貳、未來延伸

本研究聚焦於「衝突自由連通著色問題」及其變形問題，在特定圖類（如 split graphs 與 co-bipartite graphs）中成功提出了多項式時間演算法。然而，該領域仍有諸多值得探討與延伸的方向，未來可以從以下幾個面向進一步深入：

首先，針對其他特殊圖類進行研究，例如樹 (trees)、圓環圖 (cycle graphs)、弦圖 (chordal graphs) 及平面圖 (planar graphs) 等。初步的問題是：「svcfc 問題 (Strong Conflict-free Connection Coloring) 是否在這些圖類中亦具有多項式可解性？」若能針對不同圖形結構設計專屬演算法，不僅能擴展理論基礎，亦可增進實際應用層面的彈性與效率。

其次，研究可延伸至近似演算法 (approximation algorithms) 與固定參數可解 (Fixed-Parameter Tractability, FPT) 分析。由於一般圖形上的 svcfc 問題已證明為 NP-Hard，若能設計在合理誤差範圍內有效近似解的演算法，或針對特定參數（如圖的直徑、最大度數等）進行固定參數分析，將對理論研究與實務應用產生重要貢獻。

第三，結合隨機化方法 (randomized algorithms) 及機器學習技術，探索圖著色問題的新解法也是一大潛力方向。特別是於大規模圖資料（如社群網路、物聯網系統）中，傳統演算法難以高效運作，若能引入自適應式或學習式的演算法模型，將更能符合現代應用需求。

此外，衝突自由連通著色問題與實際通訊網路的頻道分配、感測器網路的干擾最小化密切相關。未來研究可朝向跨領域應用延伸，將圖論理論與無線

網路設計、資源分配優化等領域相結合，促進學術研究與產業實踐之間的互動與發展。

### 叁、心得

透過本簡報與研究案例的學習，有以下幾點心得：

#### 1. 研究是條學習與成長之路

研究不是一次性的知識輸出，而是持續觀察、反思與修正的歷程。從初期的靈感或問題意識開始，到深入文獻探索與反覆嘗試，整個過程需要高度的耐心與毅力。

#### 2. 從基礎出發，切入有興趣的問題

簡報鼓勵初學者從興趣出發，選擇一個值得投入的問題，逐步深入。以圖論為例，其問題往往簡潔明確但內涵深遠，是訓練邏輯思維與數學能力的絕佳素材。

#### 3. 跨學科的整合能力至關重要

本案例結合了數學推理（圖論與證明）、計算理論（複雜度與算法）、實務應用（網路與資源分配），顯示現代研究已不再是單一學科的遊戲，而是需具備整合能力與跨域思維。

#### 4. 學術倫理與合作精神的重要性

簡報也提及學術誠信、抄襲問題與全球合作等議題，提醒研究者不僅要專業精進，也需維持誠實與開放的學術態度，這是持續走在研究之路上的根本。

### 肆、參考文獻

1. 彭聖倫，《Towards Research for Beginners: A Case Study》，國立臺北商業大學。
2. DK Mak et al. *Solving Everyday Problems with the Scientific Method*, World Scientific, 2nd Edition, 2017.
3. Czap, J., Jendrol, S., Valiska, J. (2018). *Conflict-free connections of graphs*. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 38(4): 911-920.
4. Li, X., Zhang, Y., Zhu, X., Mao, Y., Zhao, H., Jendrol, S. (2020). *Conflict-free vertex-connections of graphs*. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 40(1): 51-65.
5. Ji, M., Li, X. (2020). *Strong Conflict-free connections of graphs*. *Applied Mathematics and Computation*, 364.
6. Ji, M., Li, X., Zhu, X. (2020). *(Strong) Conflict-free connectivity: Algorithm and Complexity*. *Theoretical Computer Science*, 804: 72-80.