习题一

1. 一个工厂为一结点；若两个工厂之间有业务联系，则此两点之间用边相联；这样就得到一个无向图。若每点的度数为 3，则总度数为 27，与图的总度数总是偶数的性质矛盾。若仅有四个点的度数为偶数，则其余五个点度数均为奇数，从而总度数为奇数，仍与图的总度数总是偶数的性质矛盾。

2. 若存在孤立点，则 m 不超过 K_{n-1} 的边数，故

$$m <= (n-1)(n-2)/2,$$ 与题设矛盾。

3. 记 a_i^+ 为结点 v_i 的正度数，a_i^- 为结点 v_i 的负度数，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{+\,2} = \sum_{i=1}^{n}[(n-1)-a_i^-]^2 = n(n-1)^2 - 2(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^- + \sum_{i=1}^{n} a_i^{-\,2},$$

因为 $\sum_{i=1}^{n} a_i^- = C_n^2 = n(n-1)/2$，所以 $\sum_{i=1}^{n} a_i^{+\,2} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{-\,2}$。

4. 用向量(a_1,a_2,a_3)表示三个量杯中水的量，其中 a_i 为第 i 杯中水的量，$i = 1,2,3$.

以满足 $a_1+a_2+a_3 = 8$ (a_1,a_2,a_3 为非负整数)的所有向量作为各结点，如果(a_1,a_2,a_3)中某杯的水倒满另一杯得到（a'_1, a'_2, a'_3），则由结点到结点画一条有向边。这样可得一个有向图。

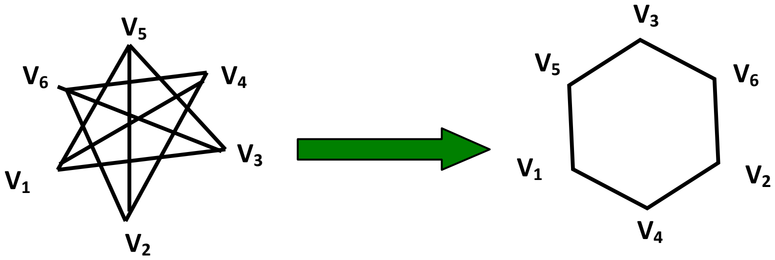
本题即为在此图中找一条由**(8, 0, 0)**到**(4, 4, 0)**的一条有向

路，以下即是这样的一条：

(8, 0, 0) ⟶ (5, 0, 3) ⟶ (5, 3, 0) ⟶ (2, 3, 3) ⟶ (2, 5, 1)

⟶ (7, 0, 1) ⟶ (7, 1, 0) ⟶ (4, 1, 3) ⟶ (4, 4, 0)

5. 可以。



7. 同构。同构的双射如下：

v	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
f (v)	b	a	c	e	d	f

8. 记 $e_1=(v_1,v_2)$, $e_2=(v_1,v_4)$, $e_3=(v_3,v_1)$, $e_4=(v_2,v_5)$, $e_5=(v_6,v_3)$, $e_6=(v_6,v_4)$, $e_7=(v_5,v_3)$, $e_8=(v_3,v_4)$, $e_9=(v_6,v_1)$, 则

邻接矩阵为：
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
关联矩阵为：
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

边列表为：A= (1,1,3,2,6,6,5,3,6), B= (2,4,1,5,3,4,3,4,1).

正向表为：A= (1,3,4,6,6,7,10), B= (2,4,5,1,4,3,3,4,1).

习题二

1. 用数学归纳法。k=1 时，由定理知结论成立。设对于 k 命题成立。

对于 k+1 情形，设前 k 个连通支的结点总个数为 n_1, 则由归纳假设，前 k 个连通支的总边数 $m_1 \le (n_1-k+1)(n_1-k)/2$。最后一个连通支的结点个数为 $n-n_1$, 其边数

$$m_2 \le (n-n_1)(n-n_1-1)/2,$$

所以，G 的总边数

$$m= m_1+ m_2 <= (n_1 - k+1)(n_1 - k)/2 + (n - n_1)(n - n_1 - 1)/2$$

$n_1=n-1$ 时，$m<= ((n-1)-k+1)((n-1)-k)/2 +0= ((n-k)((n-k-1)/2$，命题成立。

$n_1 <= n-2$ 时，由于 $n_1<=k$，故

$$m<= ((n-2)-k+1)(n_1-k)/2 + (n-n_1)(n-k-1)/2 = (n-k)(n-k-1)/2,$$

命题成立。

2．若 G 连通，则 $\overline{G}$ 命题已成立；否则，$\overline{G}$ G 至少有两个连通支。

任取结点 $v_1, v_2 \in$ $\overline{G}$，若边(v_1, v_2)不在 $\overline{G}$ 中，则 v_1, v_2 在 G 的同一个连通支（假设为 G_1）中。设 G_2 是 G 的另一连通支，取 $v_3 \in G_2$，则 $v_1 \to v_3 \to v_2$ 是 $\overline{G}$ 中 v_1 到 v_2 的一条道路，即结点 v_1, v_2 在 $\overline{G}$ 中有路相通。

由 v_1, v_2 的任意性，知 $\overline{G}$ 连通。

3．设 L_1,L_2 是连通图 G 的两条最长路，且 L_1,L_2 无公共结点。设 L_1,L_2 的长度(边数)为 p.

由于 G 是连通的，故 L_1 上必有一结点 v_1 与 L_2 上一结点 v_2 有道路 L′相通。

结点 v_1 将 L_1 分为两部分，其中一部分的长度 $\geq p/2$，记此

部分道路为 L_3。同样，结点 v_2 将 L_2 分为两部分，其中一部分 L_4 的长度 $\geq p/2$ 。

这样，L_3＋L'＋L_4 就是 G 的一条新的道路，且其长度大于 p，这与 G 的最长路(L_1)的长度是 p 的假设矛盾。

4. 对结点数 n 作归纳法。

（1）n= 4 时 m≥5. 若有结点的度≤1，则剩下的三结点的度数之和≥4，不可能。于是每个结点的度≥2，从而存在一个回路。

若此回路为一个三角形，则还有此回路外的一结点，它与此回路中的结点至少有二条边，从而构成一个新的含全部四个结点的回路，原来三角形中的一边（不在新回路中）即是新回路的一条弦。

若此回路为含全部四个结点的初等回路，则至少还有一边不在回路上，此边就是该回路的一条弦。

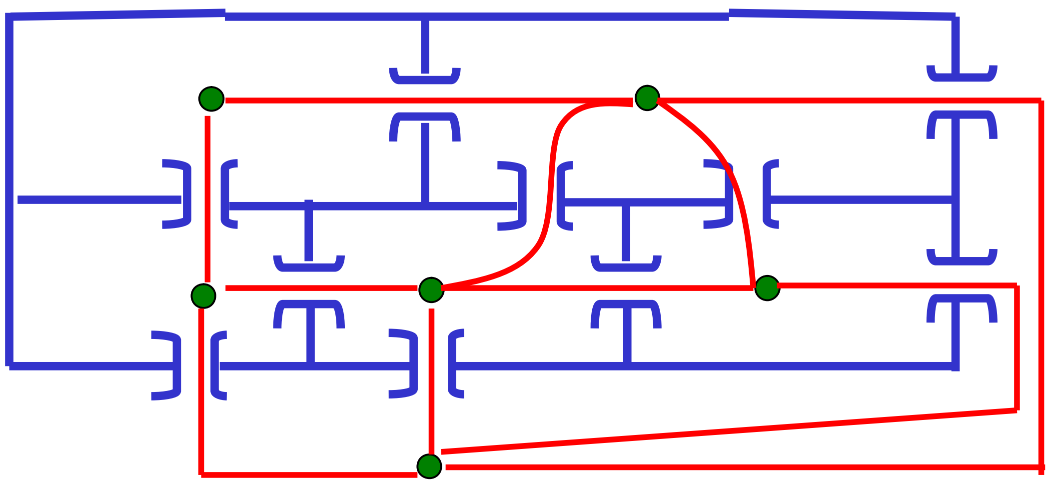
（2）设 n-1 情形命题已成立。 对于 n 情形：

若有结点的度≤1，则去掉此结点及关联边后，依归纳假设命题成立。

若有结点 v 的度=2，设 v 关联的两结点为 s,t，则去掉结点 v 及关联边、将 s,t 合并为一个结点后，依归纳假设命题成立。

若每个结点的度≥3，由书上例 2.1.3 的结果知命题成立。

6．问题可化为求下列红线表示的图是否存在一条欧拉道路的问题：存在欧拉道路！



8．由推论 2.4.1，只需验证 G 的任意一对结点的度数之和大于或等于 n 即可。

若存在结点 v_1, v_2 满足 $\deg(v_1)+\deg(v_2)<n$，则

$G-\{v_1, v_2\}$ 的边数<= K_{n-2} 的边数= $(n-2)(n-3)/2$.

另一方面，由题设知

$G-\{v_1, v_2\}$ 的边数 $= m-(\deg(v_1)+\deg(v_2)) > [(n-1)(n-2)/2+2]-n= (n-2)(n-3)/2$,

与上式矛盾。

13．1）将边按权值由小到大排序：

边：	a_{23}	a_{35}	a_{15}	a_{13}	a_{34}	a_{45}	a_{24}	a_{12}	a_{25}	a_{14}
权：	26	27	29	33	34	35	38	42	49	52

2) 分支定界：

S1: a_{23} a_{35} a_{15} a_{13} a_{34}，非 H 回路,d (S1)=149;

将 a_{34} 置换为其后的 a_{45}, a_{24}，a_{12}，a_{25}，a_{14}，也全都是非 H 回路；

S2: a_{23} a_{35} a_{15} a_{34} a_{45}, 非 H 回路,d(S2)=151;

将 a_{45} 置换为其后的 a_{24}，a_{12}，a_{25}，a_{14}，也全都是非 H 回路；

S3: a_{23} a_{35} a_{15} a_{45} a_{24}，非 H 回路,d (S8)=155;

将 a_{24} 置换为其后的 a_{12}，a_{25}，a_{14}，也全都是非 H 回路；

S4: a_{23} a_{35} a_{15} a_{24} a_{12}，非 H 回路,d (S4)=162;

S5: a_{23} a_{35} a_{15} a_{24} a_{25}，非 H 回路,d (S5)=169;

S6: a_{23} a_{35} a_{15} a_{24} a_{14}，H 回路,d_0:=172;

S7: a_{23} a_{35} a_{15} a_{12} a_{25}，非 H 回路,d (S7)=173;

S8: a_{23} a_{35} a_{13} a_{34} a_{45}，非 H 回路,d (S8)=155;

将 a_{34} , a_{45} 置换为其后的数，也全都是非 H 回路；

S9: a_{23} a_{35} a_{34} a_{45} a_{24}，非 H 回路,d (S9)=160;

将 a_{45} , a_{24} 置换为其后的数，也全都是非 H 回路；

S10: a_{23}　a_{35}　a_{45}　a_{24}　a_{12}，非 H 回路,d (S10)=168;

将 a_{12} 置换为其后的 a_{25} , a_{14}，也全都是非 H 回路；

S11: a_{23}　a_{35}　a_{45}　a_{12}　a_{25}，非 H 回路,d (S11)=179;

将 a_{12} ,a_{25} 置换为其后的数，其路长差于 d_0，故不必考虑；

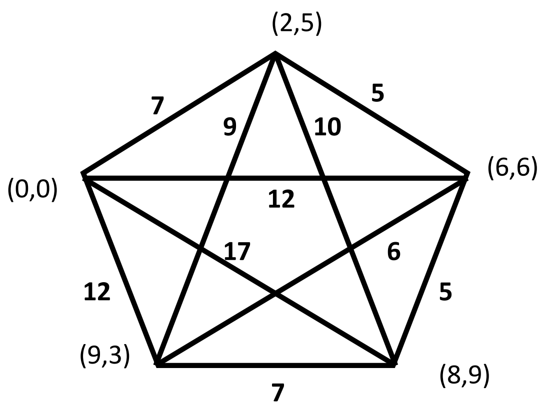
S12: a_{23}　a_{35}　a_{24}　a_{12}　a_{25}, 非 H 回路,d (S12)=182;

将 a_{24} ，a_{12} ，a_{25},置换为其后的数，其总长差于 d_0，故不必考虑；

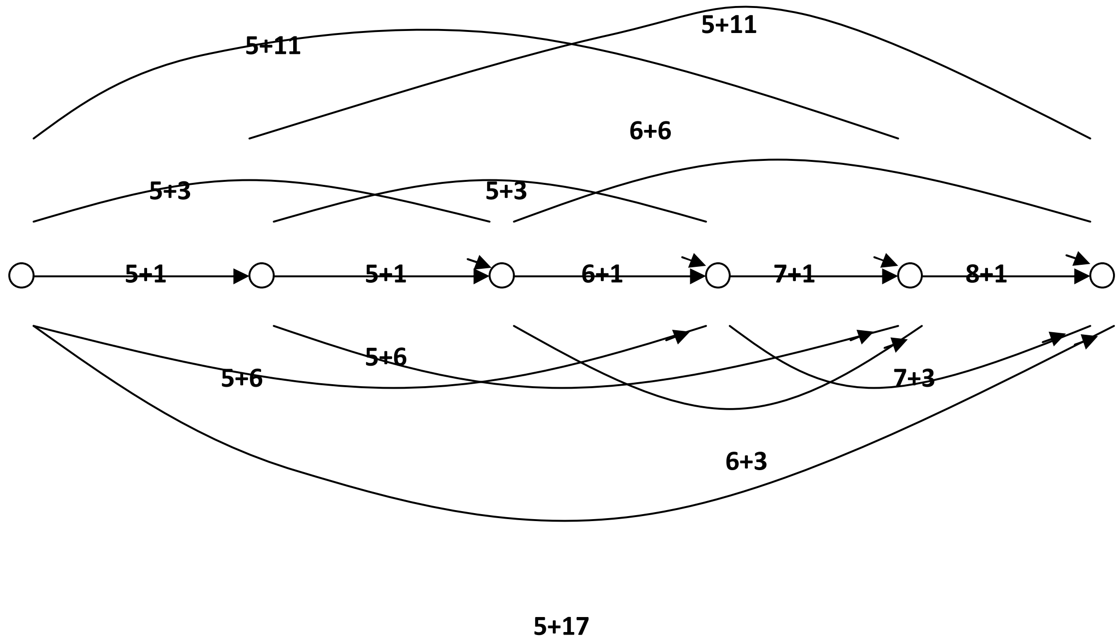
继续下去所得组长度会比 S6 差，故可终止计算。

所以，H 回路为 S6, 路长为 172。

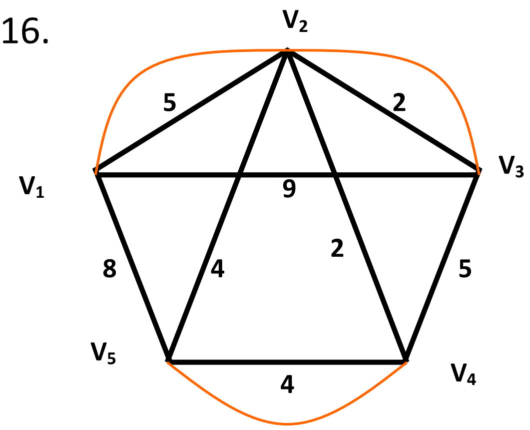
14. 这是一个旅行商问题(具体计算略)：

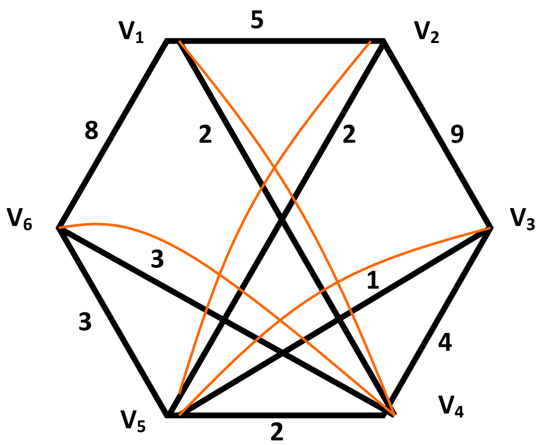


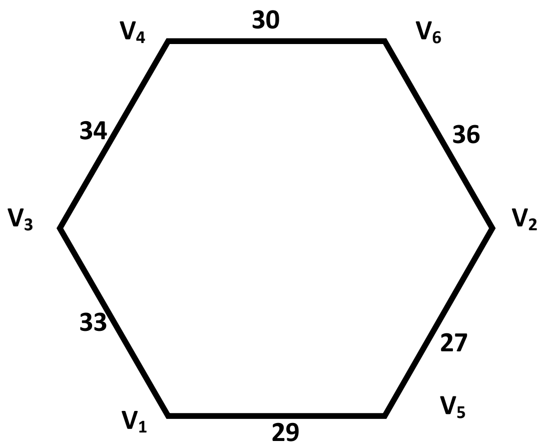
15. 这是一个最短路问题(具体计算略)：



16.






V_4
30
V_6
34
36
V_3
V_2
33
27
V_1
29
V_5

23.

习题三

1\. 因为 n 个结点的树的边有 n-1 条，故其总度数为 2（n-1），故度为 1 的结点个数为

$$2(n-1)-2n_2-3n_3-\cdots\cdots-kn_k.$$

2\. 设L是树T的一条最长路,L中的结点依次为 v_1，v_2，…,

v_k。因为L中各结点都有边相连，所以它们的度数均大于或等于1。

若 deg（v_1)>1，则除了边(v_1，v_2)外，还存在边(v_1，v’）。因为树中不存在回路，故v’$\notin${v_1，v_2，…，v_k}，于是，(v’，v_1，v_2，…，v_k)是T的一条新的路，其长度比L更长。这与L是T的最长路矛盾。

所以deg（v_1)＝1，类似可证deg（v_k)＝1。

4．(a) 直接根据图确定$B_5B_5^T$可得树的棵数：

$$\det(\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{B}_5^T)=\begin{vmatrix}3&-1&0&-1\\-1&4&-1&0\\0&-1&4&-2\\-1&0&-2&4\end{vmatrix}=101.$$

(b) 去掉边(v_1，v_5)，则直接根据图确定$B_5B_5^T$可得不含边(v_1，v_5)的树的棵数：

$$\det(\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{B}_5^T)=\begin{vmatrix}2&-1&0&-1\\-1&4&-1&0\\0&-1&4&-2\\-1&0&-2&4\end{vmatrix}=75,$$

于是，含边(v_1，v_5)的树的棵数为：101－75＝26。

(c) 去掉边(v_4，v_5)，则直接根据图确定$B_5B_5^T$可得不含边(v_1，v_5)的树的棵数：

$$\det(\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{B}_5^T)=\begin{vmatrix}3&-1&0&-1\\-1&4&-1&0\\0&-1&4&-2\\-1&0&-2&3\end{vmatrix}=60$$

.

5. (a) 因为

$$B_1=\begin{bmatrix}-1&0&0&1&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&1&-1&-1&0\\0&0&-1&0&0&0&-1&1&0&-1\\0&-1&0&0&-1&1&0&0&1&1\end{bmatrix},$$

$$B_1^*=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&-1&-1&0\\0&0&-1&0&0&0&-1&0&0&-1\\0&-1&0&0&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因此以v_1为根的根树的个数为

$$\det(B_1^*B_1^T)=\begin{vmatrix}2&0&0&-1\\-1&3&-1&-1\\0&-1&3&-1\\-1&0&0&2\end{vmatrix}=24.$$

.

(b) 去掉边(v_1, v_5)后，有

$$B_1=\begin{bmatrix}-1&0&1&1&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&1&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&-1&1&0&-1\\0&0&0&-1&1&0&0&1&1\end{bmatrix},$$

$$B_1^*=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&-1&0&0&-1\\0&0&0&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因此以 v_1为根且不含边 (v_1,v_5)的根树的个数为

$$\det(B_1^*B_1^T)=\begin{vmatrix}2&0&0&-1\\-1&3&-1&-1\\0&-1&3&-1\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=8.$$

.

(c) 去掉到 v_3 的其它全部边(v_4, v_3)、(v_5, v_3)后，有

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}-1&0&0&1&1&-1&0&0\\0&0&0&-1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&0&-1&-1\\0&-1&0&0&-1&1&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1^*=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&-1&-1\\0&-1&0&0&-1&0&0&0\end{bmatrix},$$

因此以 $\boldsymbol{v}_1$ 为根且含边 $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)$ 的根树的个数为

$$\mathbf{det(B_1^*B_1^T)}=\begin{vmatrix}2&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&-1&3&-1\\-1&0&0&2\end{vmatrix}=9.$$

.

10. (1) 余树为 {e_1, e_2, e_5, e_8}，重排 B_5 的各列得

$$B_5=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}e_1 & e_2 & e_5 & e_8 & e_3 & e_4 & e_6 & e_7\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|cccc}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right]\end{array}=(\mathbf{B}_{11}\quad \mathbf{B}_{12}),$$

余树　　　　树 T

则 $\mathbf{B}_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_{12}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

由定理3.4.4,

$$\mathbf{C}_{f12}=-B_{11}^{T}B_{12}^{-1\,T}=-\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

基本回路矩阵为

$$\mathbf{C}_f=(\ \mathbf{I}\quad \mathbf{C}_{f12}\ )=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}e_1 & e_2 & e_5 & e_8 & e_3 & e_4 & e_6 & e_7\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{array}.$$

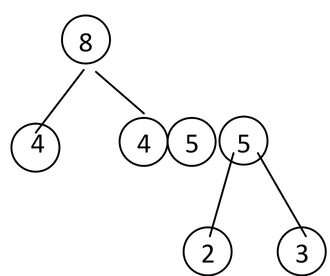
(2) 由定理 3. 4. 8，基本割集矩阵为

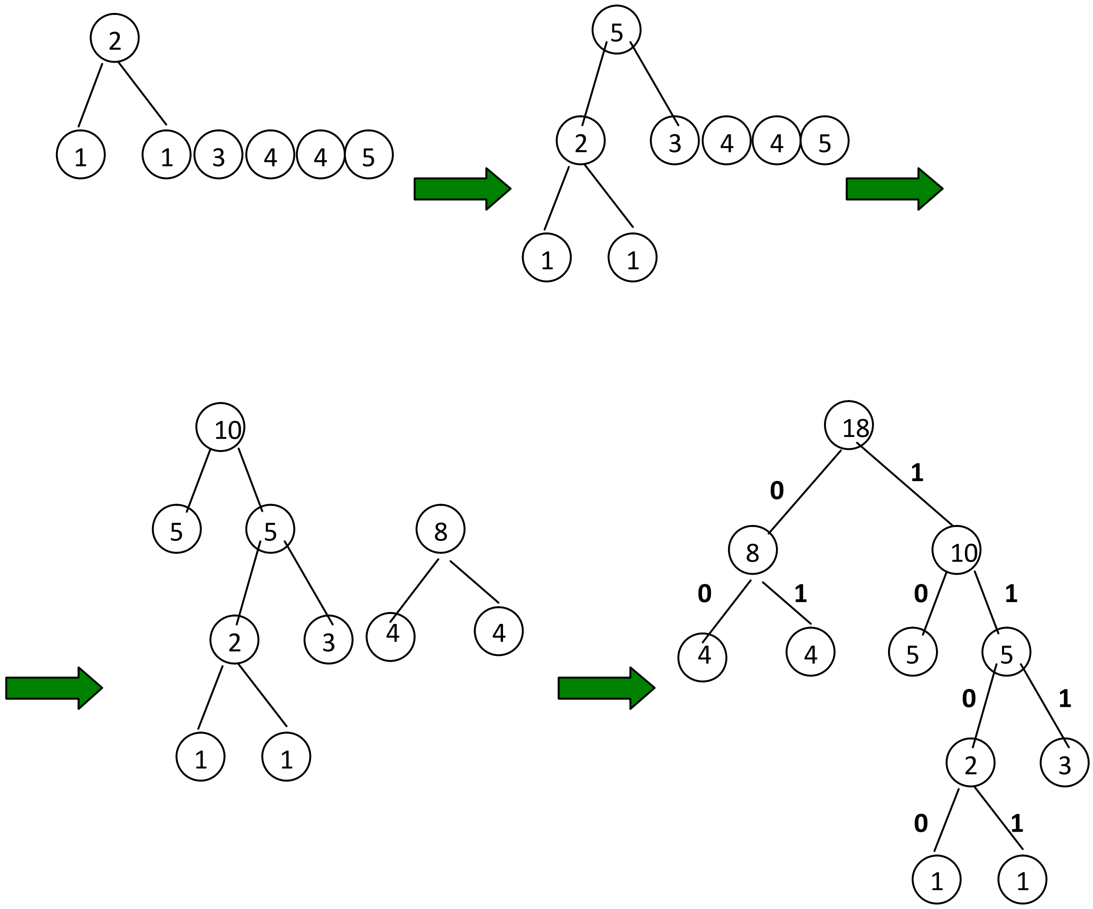
$$\mathbf{S}_f=(\ \mathbf{S}_{f11}\quad \mathbf{I}\ )=(\ -\mathbf{C}_{f12}^{T}\quad \mathbf{I}\ )=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}e_1 & e_2 & e_5 & e_8 & e_3 & e_4 & e_6 & e_7\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}.$$

14. (a) 这是一个求最优二叉树的问题。

各字符出现次数为： s　t　a　e　c　空格

3　4　5　1　1　4





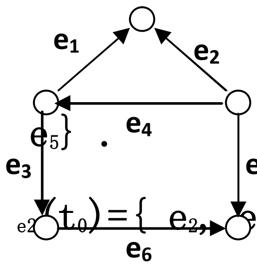
所以最优二进制编码为：

e：1100　c：1101　s：111　t：00　**空格：**01　a：10

此时字符串的二进制编码总长度为 43 .

(b) 去掉空格，类似(a)计算。

15. 将图中各边进行编号得右图。



取参考支撑树 $t_0=\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$.

(1) 因为 $S_{e1}(t_0)=\{e_1, e_4, e_6\}$, $S_{e2}(t_0)=\{e_2, e_4, e_6\}$,

$S_{e3}(t_0)=\{e_3, e_6\}$, $S_{e5}(t_0)=\{e_5, e_6\}$, 所以

$T^{e1}=\{\{e_4, e_2, e_3, e_5\}, \{e_6, e_2, e_3, e_5\}\}=\{t_1, t_2\}$,

$T^{e2}=\{\{e_1, e_4, e_3, e_5\}, \{e_1, e_6, e_3, e_5\}\}=\{t_3, t_4\}$,

$T^{e3}=\{\{e_1, e_2, e_6, e_5\}\}=\{t_5\}$,

$T^{e5}=\{\{e_1, e_2, e_3, e_6\}\}=\{t_6\}$,

从而 $T^1=\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$.

(2) 因为 $S_{e2}(t_1)=\{e_2, e_1\}$, $S_{e3}(t_1)=\{e_3, e_6\}$, $S_{e5}(t_1)=\{e_5, e_6\}$,

$S_{e2}(t_2)=\{e_2, e_1\}$, $S_{e3}(t_2)=\{e_3, e_1, e_4\}$, $S_{e5}(t_2)=\{e_1, e_4, e_5\}$,

$S_{e3}(t_3)=\{e_3, e_6\}$, $S_{e5}(t_3)=\{e_6, e_5\}$,

$S_{e3}(t_4)=\{e_3, e_2, e_4\}$, $S_{e5}(t_4)=\{e_2, e_4, e_5\}$,

$S_{e5}(t_5)=\{e_5, e_3\}$,

所以

$S_{e2}(t_0)\cap S_{e2}(t_1)=\{e_2\}$, $S_{e2}(t_0)\cap S_{e2}(t_2)=\{e_2\}$,

从而 $T^{e1\ e2}=\varnothing$;

$S_{e3}(t_0)\cap S_{e3}(t_1)=\{e_3, e_6\}$, $S_{e3}(t_0)\cap S_{e3}(t_2)=\{e_3\}$,

从而 $T^{e1\ e3}=\{\{e_4, e_2, e_6, e_5\}\}=\{t_7\}$;

$S_{e5}(t_0)\cap S_{e5}(t_1)=\{e_5, e_6\}$, $S_{e5}(t_0)\cap S_{e5}(t_2)=\{e_5\}$,

从而 $T^{e1\ e5}=\{\{e_4, e_2, e_3, e_6\}\}=\{t_8\}$；

$S_{e3}(t_0)\cap S_{e3}(t_3)=\{e_3, e_6\}$，$S_{e3}(t_0)\cap S_{e3}(t_4)=\{e_3\}$，

从而 $T^{e2\ e3}=\{\{e_1, e_4, e_6, e_5\}\}=\{t_9\}$；

$S_{e5}(t_0)\cap S_{e5}(t_3)=\{e_5, e_6\}$，$S_{e5}(t_0)\cap S_{e5}(t_4)=\{e_5\}$，

从而 $T^{e2\ e5}=\{\{e_1, e_4, e_3, e_6\}\}=\{t_{10}\}$；

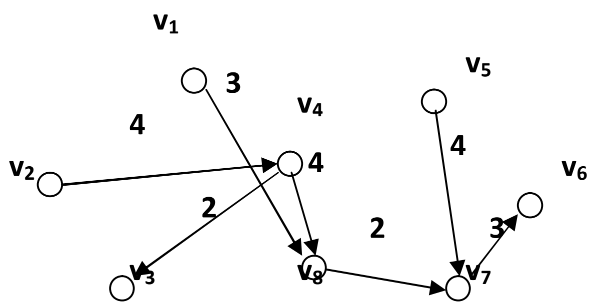
$S_{e5}(t_0)\cap S_{e5}(t_5)=\{e_5\}$，从而 $T^{e3\ e5}=\varnothing$；

于是 $T^2=\{t_7, t_8, t_9, t_{10}\}$.

(3) 可以验证 $T^{e1\ e2\ e3}=T^{e1\ e3\ e5}=T^{e2\ e3\ e5}=\varnothing$，所以 $T^3=\varnothing$.

最后，由以上计算可知，全部生成树为$\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}\}$.

16. 用 Kruskal 算法。先将权排序，而后按权由小到大选边 8-1 条(构成回路时所选边不放入)，可得一棵最小生成树（总权为 22)：



习题四

1．因为 $d=m-n+2<12$，所以 $m-n<10$.

如果命题不成立，则每个域的边界数≥5，于是有 $5d\leqslant 2m$。利用 $d=m-n+2$，得

$$3m+10\leqslant 5n\ .$$

结合 $m-n<10$，可得 $m<3n/2$.

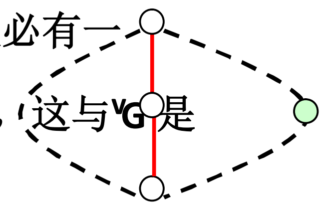
另一方面，由于 $3n\leqslant \Sigma\, d(v_i)\leqslant 2m$，知 $m\geqslant 3n/2$，矛盾。

2. 设 G 是一个结点个数≥4 的极大平面图，但 G 中至少有一个结点 v 的度≤2.

由于 G 是一个平面图，因此 G-v 仍为平面图，从而结点 v 及其关联的全部边(至多两条)在 G-v 中某个区域 D 中。

因为 G-v 是一个简单图，故没有重边和环，因此区域 D 至少有三条边。

如果 D 是一个内部域，则 D 的边界上必有一结点与 v 可用一条不与其它边相交的边相连，这与 G 是极大平面图的题设相矛盾。



如果 D 是一个外部域，同样可以在 D 的边界上

找一结点与 **v** 用一条不与其它边相交的边相连，仍与 **G** 是极大平面图的题设相矛盾。

以上矛盾说明 **G** 的每个结点的度至少是 **3**。

3. 用反证法。若 **G** 和 $\overline{G}$ 均为可平面的，设它们的边数分别是 m_1, m_2，则有

$$m_1 \leqslant 3n-6, \quad m_2 \leqslant 3n-6,$$

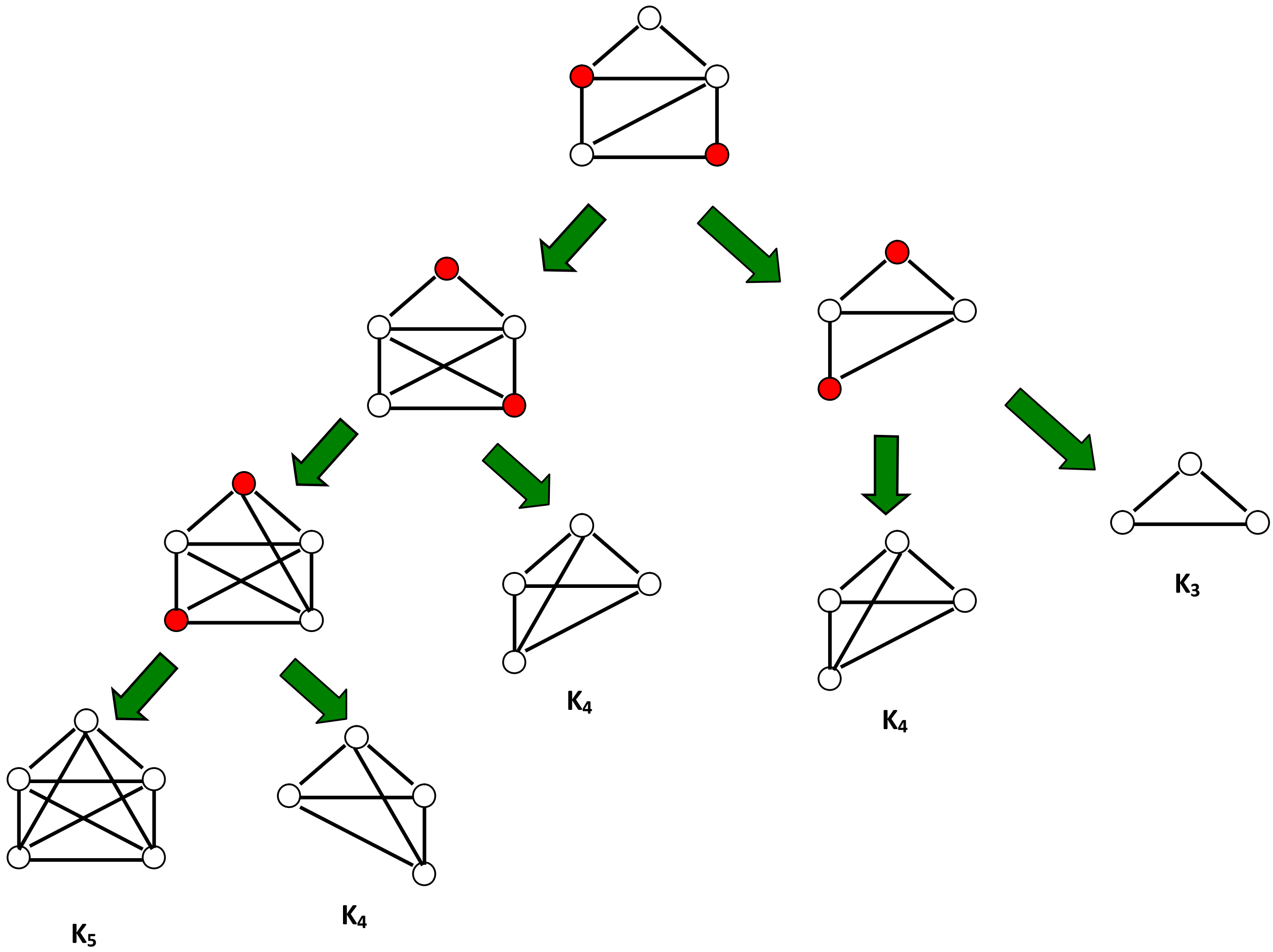
于是 $m_1 + m_2 \leqslant 6n-12$，即 $n(n-1)/2 \leqslant 6n-12$，其中 $n \geqslant 11$.

考虑函数 $f(x)=x(x-1)/2-6x+12, \quad x \geqslant 11$.

因为 $f(11)=1>0$，$f'(x)>0 (x>11)$，故 $f(x)$ 在 $[11,+\infty]$ 范围内严格递增，所以 $f(n)>0$, $n \geqslant 11$. 这与刚得到的不等式 $n(n-1)/2 \leqslant 6n-12$ 相矛盾。

13. 因为图中含有一个 K_3 子图，故其色数至少为 3。又因为用三种颜色可以为此图结点着色，故其色数等于 3。

由于



所以色数多项式

$$f(G, t)=f(K_5,t)+3 f(K_4,t)+ f(K_3,t)$$
$$=t(t-1) (t-2) (t-3) (t-4)+3 t(t-1) (t-2) (t-3)+ t(t-1) (t-2)$$
$$= t(t-1) (t-2) (t^2-4t+4).$$

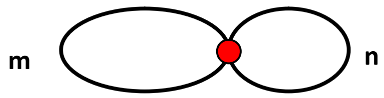
14．显然中心点的颜色与回路上各点的均不同，而回路上结点数为偶数时色数为 **2**，结点数为奇数时色数为 **3**，故整个图 W_n 当 **n** 为为偶数时色数为 **1+3**，结点数为奇数时色数为 **1+2**。

因为对于回路 C_n，已知其色数多项式 $f(C_n, t)=(t-1)^n+(-1)^n(t-1)$，所以

$$f(G, t)=t\cdot f(C_{n-1}, t-1)=t[(t-2)^{n-1}+(-1)^{n-1}(t-2)].$$

16. G 当 m,n 均为偶数时色数为 2，其它情形时色数为 3。

因为 $f(C_{n+m}, t)= f(G, t)+ f(G', t)$，其中 G'为下图:



根据色数多项式的定义，直接可知

$$f(G', t)=\max\{ f(C_m, t), f(C_n, t)\}= f(C_k, t),$$

其中 $k=\max\{m,n\}$，故

$$f(G, t)= f(C_{n+m}, t) – f(G', t)$$

$$=(t-1)^{n+m-1}+(-1)^{n+m-1}(t-1)- (t-1)^{k-1}- (-1)^{k-1}(t-1).$$

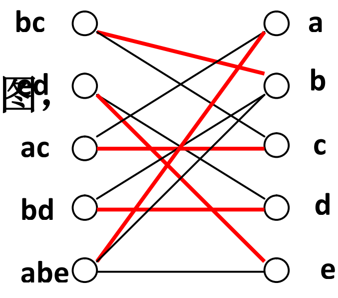
习题五

1. 一个最大匹配是：

$(x_1,y_5), (x_2,y_1), (x_3,y_2), (x_4,y_3), (x_5,y_4)$.

2. 这可以看成是以下二分图是否存在完美匹配的问题：

完美匹配是存在的。如图，



红线表示的是一个完美匹配。所以：

字符串 **bc** 可以用 **b** 表示，

字符串 **ed** 可以用 **e** 表示，

字符串 **ac** 可以用 **c** 表示，

字符串 **bd** 可以用 **d** 表示，

字符串 **abe** 可以用 **a** 表示。

8. 每行中用此行的最大数减去此行的每一个数，得到一个等价的最小成本问题:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{每列减去列最小数}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

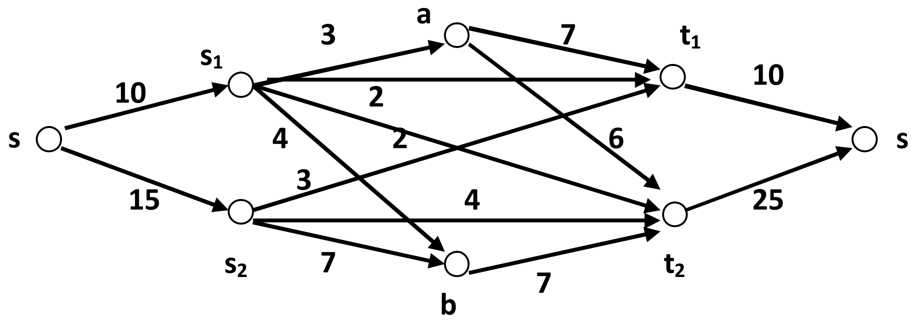
由于可选出每行每列恰有一个零元素的方案，故此方案即为最优方案.

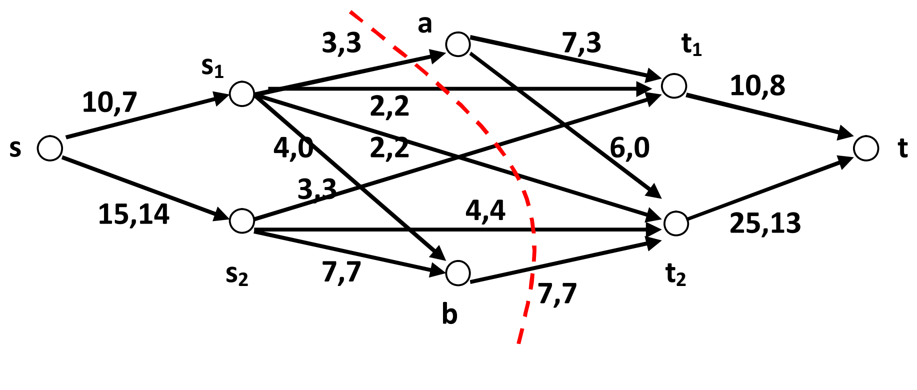
9. 每行中减去此行的最小数:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{每列减去列最小数}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

由于可选出每行每列恰有一个零元素的方案，故此方案即为最优方案.

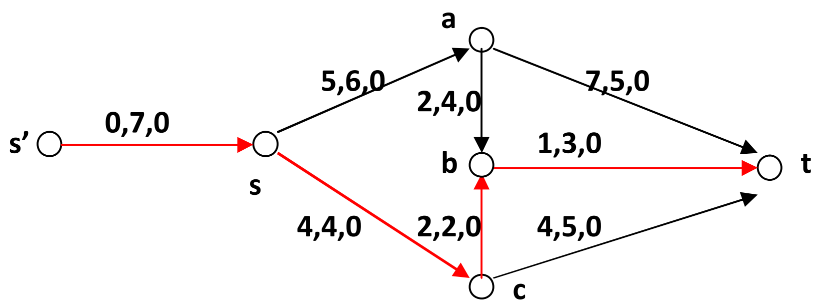
11. 增加一个虚拟总发点 **s** 和一个虚拟总收点和 **t**，则问题变为

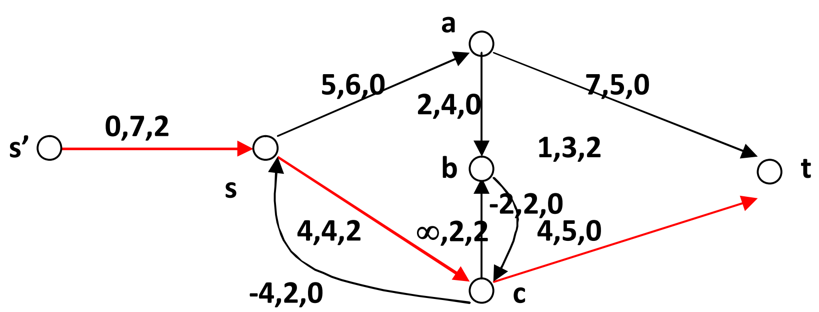


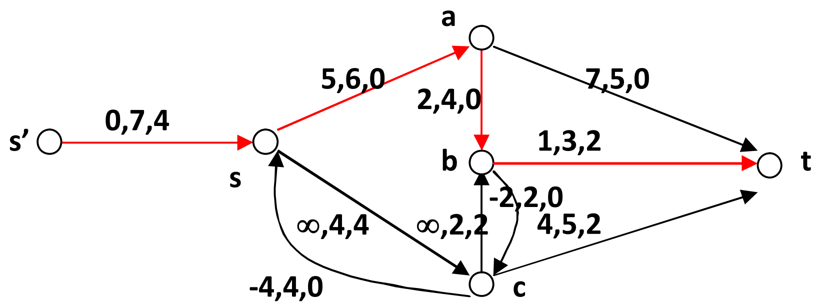


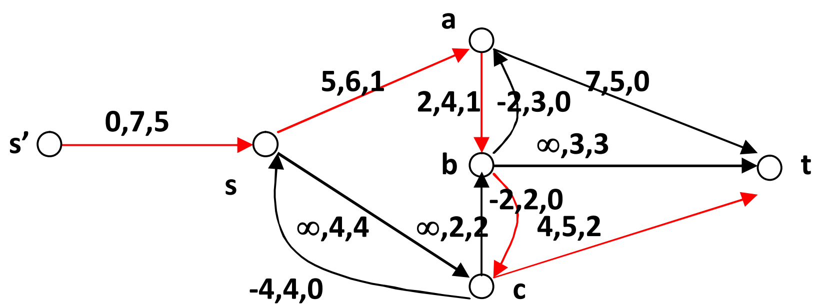
应用 **Ford-Fulkerson** 算法，可得一个最大流(如上图)，最大流量为 **21**. 在最后图中，可得到标号的全部结点为 **s, s_1, s_2, b**，其余结点均不能得到标号，故最小割集为**(U,V)**，其中 **U={s, s_1, s_2, b}, V={t, t_1, t_2, a}**,可以验证其割量等于此容许流流量.

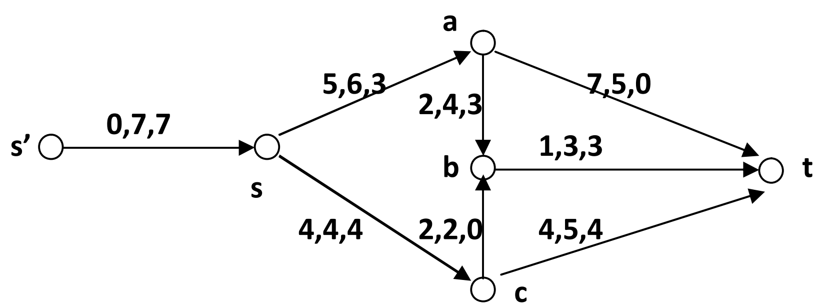
14. 增加一个虚拟发点 **s'**，初始容许流为零流，则有






a
5,6,0
2,4,0
7,5,0
s'
0,7,4
s
b
1,3,2
t
-2,2,0
∞,4,4
∞,2,2
4,5,2
-4,4,0
c


a
5,6,1
2,4,1
-2,3,0
7,5,0
s'
0,7,5
s
b
∞,3,3
t
-2,2,0
∞,4,4
∞,2,2
4,5,2
-4,4,0
c


a
5,6,3
2,4,3
7,5,0
s'
0,7,7
s
b
1,3,3
t
4,4,4
2,2,0
4,5,4
c

这就是最小费用流.

习题六

1. n≥2 时, n 个结点的简单图 G 最多有 n-2 个割点, n-1 条割边。

证明如下:

先证 G 最多有 n-1 条割边。因为 G 中任何一个回路中的每一条边都不是割边，因此将 G 中所有回路上的一切边去除后，剩下的边才可能是割边。剩下的图不含回路，边最多时至多此图是一棵树，其边数为 n-1, 故割边最多有 n-1 条。

再证 G 最多有 n-2 个割点。考虑 G 的含结点个数在两个以上的连通分支 C (如果这样的连通分支不存在，则每个结点的度不超过 1，因而都不是割点，故此时命题成立)。

如果 C 是一棵树，则 C 至少有两个树叶结点，这两个结点都不可能是割点, C 的割边条数也比其结点数少 1, 此时命题成立。

如果 C 不是一棵树，则 C 有一棵支撑树 T。在 C-T 中取一边

e，则 T+e 含一个回路。此回路至少含三个结点，且这三个结点都不是割点，此时命题仍成立。

2. 设 v 同时为 G 和 $\overline{G}$ 的割点，则存在结点 A,B,C,D，使得边(A,v)和边(v,B)均在 G 中，且 A 与 B 间在 G 中的道路必经过结点 v；边(C,v)和边(v,D)均在 $\overline{G}$ 中，且 C 与 D 间在 $\overline{G}$ 中的道路必经过结点 v。

显然 $\overline{G}$ 中存在边(A,B)。若 A,B 与 v 在 $\overline{G}$ 中不属于同一个连通分支，则边(A, C)和边(D, B)属于 G。由于边(C, D)也在 G 中，则 A 到 B 有道路 A－C－D－B，它并不经过结点 v，矛盾。

若 A,B 与 v 在 $\overline{G}$ 中属于同一个连通分支，则边(A,B)与C或D属于 $\overline{G}$－v 的同一个连通分支，不妨设边(A,B)与C属于 $\overline{G}$－v 的同一个连通分支。由于D到 A,B 的道路必须经过结点 v，故G中必有边(A,D)和边(B,D)。于是在G中有一条A到B的道路 A－D－B，它并不经过结点 v，矛盾。

以上证明说明G的割点不可能同时是 $\overline{G}$ 的割点。

3. 对于第一个图：κ(G)=4, λ(G)=4.

对于第二个图：κ(G)=３, λ(G)=３.