

國立虎尾科技大學
機械設計工程暨精密機械工程科
專題製作報告

ODOO PLM 在協同設計上的應用 - 以鋼球平衡台設計為例

**Application of ODOO PLM
in collaborative design
- taking the Design of Steel Ball
Balancing Platform as an example**

指導教授：嚴家銘老師

班級：四設三乙

學生：陳岳樑 (41023218)

蔡弦霖 (41023248)

鄭立揚 (41023251)

謝鴻元 (41023254)

中華民國 一 一 三 年 六 月

國立虎尾科技大學
機械設計工程暨精密機械工程科
學生專題製作合格認可證明

專題製作修習學生：四設三乙 41023218 陳岳樑
四設三乙 41023248 蔡弦霖
四設三乙 41023251 鄭立揚
四設三乙 41023254 謝鴻元

專題製作題目：ODOO PLM 在協同設計上的應用
-以鋼球平衡台設計為例

經評量合格，特此證明

評 審 委 員： _____

指 導 老 師： _____

系 主 任： _____

中 華 民 國 一 一 三 年 月 日

摘要

本專題主要研究有限元素法 (FEM)，由於近代計算機快速的發展，數值計算、開發環境、生程式設計等，都有公司或個人創作者製作軟體進行分析、計算，藉由這些軟體我們將對四足機器人進行生成式設計並且觀察其受力情況。

以四足機器人為例，將結構以剛體狀況導入 CoppeliaSim 進行動作模擬後，求出最大反力分別帶入 Ansys 和 Solid Edge，並在此轉換為柔性結構，進行有限元素 (FEM) 分析，評估各柔性結構下分析的應力、應變等受力情況，對其做生成式設計以簡化模組，在保有強度的同時減輕重量造成最少的能源浪費。並嘗試透過網路展示 CoppeliaSim 機器人運動情況，證明其設計可行性。

關鍵字: 偏微分方程 (PDE)、有限元素分析 (FEM)、CoppeliaSim、
Ansys、Solid Edge

Abstract

The main focus of this project is on the Finite Element Method (FEM). With the rapid development of modern computers, numerical calculations, development environments, and software programming, various companies or individual creators have developed software for analysis and calculations. With the help of these software programs, we will perform generative design on a quadruped robot and observe its structural integrity under various load conditions.

Taking the quadruped robot as an example, we will import the structure as a rigid body into CoppeliaSim for motion simulation. After obtaining the maximum reaction forces, we will input them into Ansys and Solid Edge for further analysis. The rigid structure will then be converted into a flexible structure to perform Finite Element Method (FEM) analysis. We will evaluate the stress, strain, and other load conditions for each flexible structure to assess their performance. Through generative design, we aim to simplify the modules while maintaining their strength and minimizing energy waste caused by excessive weight. Additionally, we will attempt to showcase the motion of the robot in CoppeliaSim through online demonstrations to prove the feasibility of the design.

Keywords: partial differential equation (PDE), finite element analysis (FEM), CoppeliaSim, Ansys, Solid Edge.

誌 謝

本專題能完成有著許多人員的幫忙，大四學長他們不吝嗇地將往年的製作經驗傳授給我們，讓我們在製作的時候少走了許多錯路，還總是貼心找出重點提醒我們可以加以描述。再來是我們的指導教授嚴家銘教授，他提供了多方面的資訊，拋出問題並給予建議，擬定了我們小組有限元素法研究和學習方向，開會也時常提出建議以及未來發展，得以順利解決遇到的技術問題，同時也給了相當程度的自由，讓小組得以有彈性去尋探索及摸索，而本專題組員也充分地付出了許多，讓專題研究能順利完成，從中獲益良多，特此感謝。

目 錄

摘 要.....	i
Abstract	ii
誌 謝.....	iii
第一章 前言	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 研究目的及方法	2
1.3 專題說明.....	3
1.4 文獻探討.....	3
第二章 有限元素法	4
2.1 基本概念.....	5
2.1.1 邊界條件.....	6
2.1.2 網格劃分基本原則.....	6
2.2 計算及公式介紹	8
2.2.1 變形分析.....	8
2.2.2 應力方程.....	13
2.3 分析步驟.....	17
第三章 理論公式	1
3.1 數學系統模型	1
3.2 簡化與假設.....	1

第四章 前言	1
4.1 研究動機.....	1
參考文獻	1
附錄	3
作者簡介	5

圖 目 錄

圖 1.1 虛擬四足機器人	1
圖 1.2 研究架構	2
圖 2.1 有限元素法介紹	4
圖 2.2 基本概念	5
圖 2.3 較密網格	7
圖 2.4 較粗網格	7
圖 2.5 較密網格所得應力雲圖	7
圖 2.6 較粗網格所得應力雲圖	7
圖 2.7 有限元素法分析流程	17
圖 1 足端軌跡(直線)	4
圖 2 足端軌跡(橢圓)	4
圖 3 足端軌跡(圓形)	4
圖 4 足端軌跡(弧線)	4
圖 5 足端軌跡(不規則)	4

表 目 錄

表 1 文字編輯軟體比較表	3
-------------------------	---

第一章 前言

1.1 研究動機

材料分析軟體的應用在機械領域愈來愈廣泛，能夠將繪製零件進行分析，但卻鮮少人知道分析是怎麼進行的，所以我們對四足機器人套用有限元素法，在其身上觀察有限元素法是如何計算出受力情況。

本專題研究方向將由四足機器人(圖 1.1)作為載體，目的將有限元素分析的公式套入其中計算，進行有限元素分析，利用偏微分方程解出受力情況，才能對零件進行挖空處理，達到輕量化的目的，透過此過程從了解到運動模擬和有限元素法分析等。

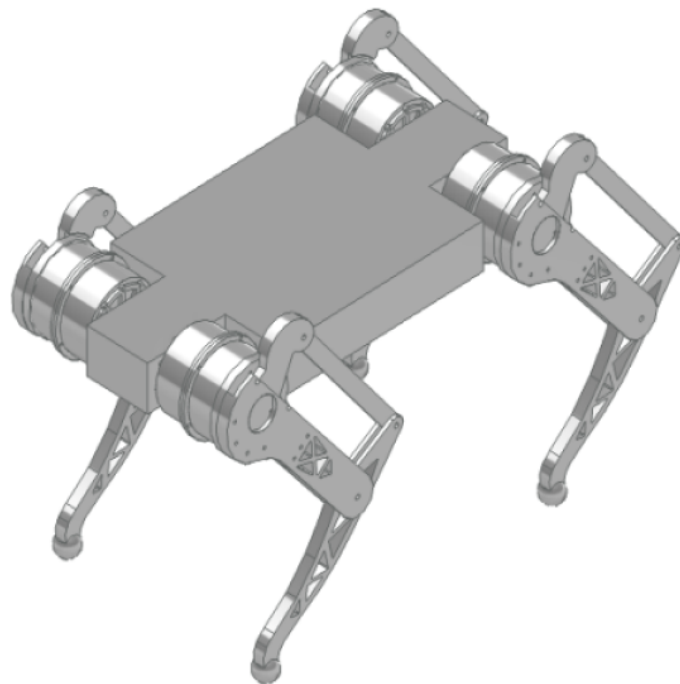


圖 1.1: 虛擬四足機器人

1.2 研究目的及方法

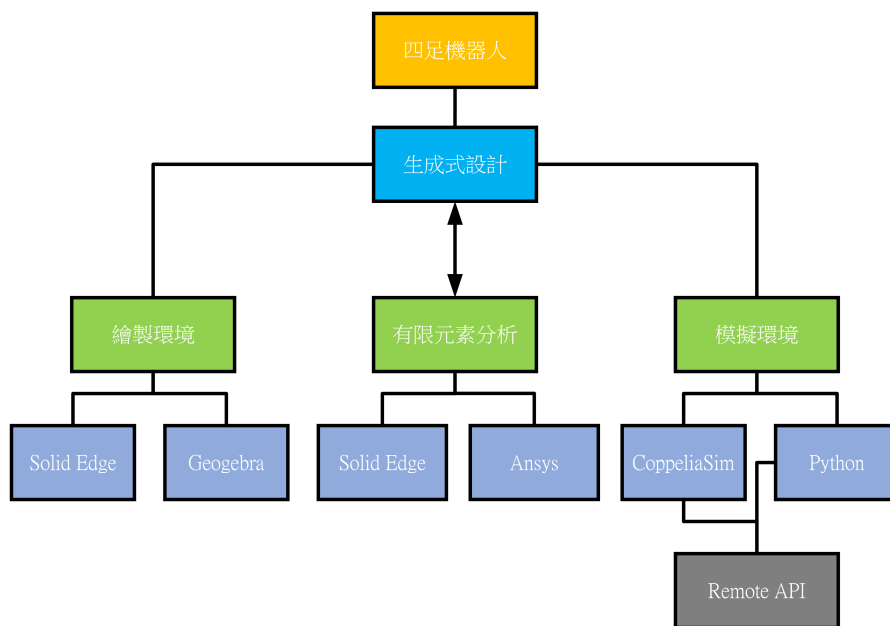


圖 1.2: 研究架構

本專題研究分為幾部分，其一繪製模型，進行路徑模擬，計算運動軌跡並調整設計，其二將模型導入虛擬環境進行運動模擬，找出運動姿態，其三為進行生成式設計，優化零件。

參考的四足機器人模型，將其利用繪製出模型並進行路徑分析，找出運動軌跡並用此調整連桿參數及推導運動學公式。

建立 CoppeliaSim 模擬環境，導入 3D 圖檔並組立進行結合，透過 Python 語言控制各步行機構作動及旋轉角度，以求得各零件最大受力情況，並結合 Remote API 對四足機器人進行遠端控制。

進行有限元素分析，透過上述過程即可得出受力狀況及 3D 模型，利用有限元素分析得知零件受力狀況，將可對其進行生成式設計，對零件非必要部分做挖空處理，減輕零件重量。

1.3 專題說明

此專題主要研究有限元素法在四足機器人上的應用，模型部分參考了四足機器人 [9] 及 Goegebra 路徑模擬，繪製出硬體架構，將其視為剛體代入 CoppeliaSim，由此可得知機器人在機構為剛體狀態下的受力情況。

對零件做有限元素分析，此狀態下的零件為柔性狀態會因為受力不同有變形情況，產生許多變量，像是位移、速度、加速度等，因此使用偏微分方程 (PDE) 對零件計算，進行離散化、代數方程導入、求解等步驟，此種方法稱為有限元素法。

比較兩軟體分析結果，進行生成式設計，進行四足機器人步行機構的輕量化處理，減輕零件重量並同時保有強度。

1.4 文獻探討

有限元素分析在設計領域運用得相當廣泛，在現今開發或製作幾乎成為必要的分析之一，對開發者而言，可以免去相當多的成本浪費，節省許多設計及修改時間，將目標模型直接進行分析得出受力情況，這些功能用來進行設計修正，也透過近來的 AI 機器學習的發展，誕生了生成式設計，給定參數就能利用 AI 迭代運算生成模型，不再受限於設計者的想像力。

近年來圍著機器人技術的發展，步行機器人的應用領域越來越廣，在軍用及工業等領域都可看見其身影，加上機械臂或其他工具，就可以勝任許多工作，漸漸替代傳統人力進行各式任務，進行高危或負重工作，因此我們將兩種結合，因為四足機器人在開發過程中通常會進行有限元素分析，主要用來做輕量化並找出最大負荷力，去除些許體積，在保有其性能的同時降低最多的能源消耗。

第二章 有限元素法

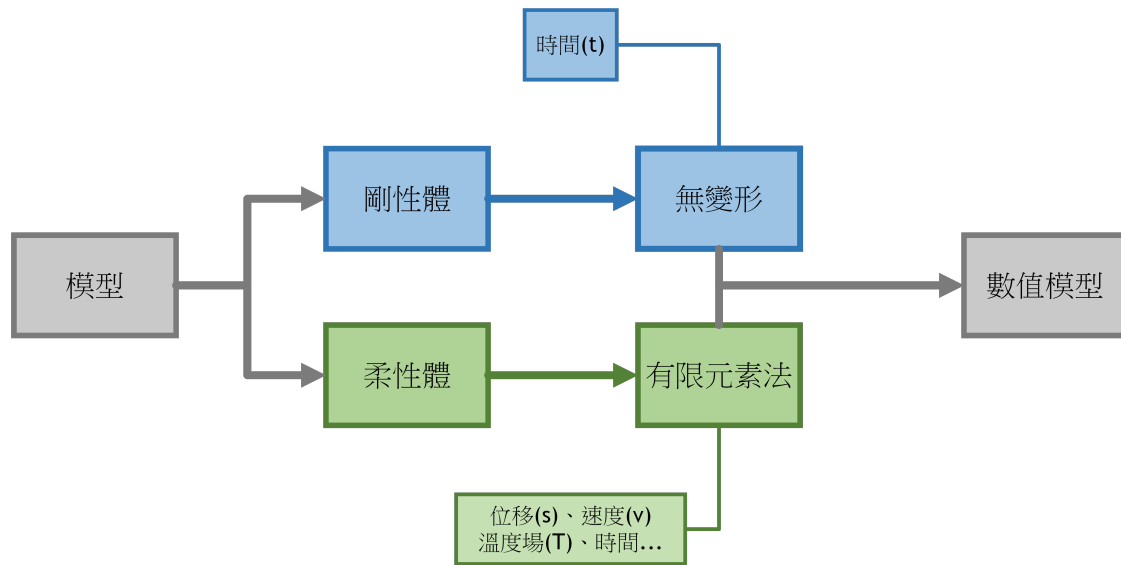


圖 2.1: 有限元素法介紹

時間及空間等問題常用偏微分方程 (PDE) 做數值求解，將根據不同的模型進行弱化、離散化等求解，此動作稱為有限元素法 (FEM)。

通過在模型上簡化連續變量的複雜性來實現近似求解，常用於複雜的工程結構或物理系統的行為。

正因為剛體是理想狀態，現實中機器人為柔性體，會因為受力情況的不同而產生多種變量，才需要利用偏微分方程對物體進行計算，此動作稱為有限元素法。

有對複雜模型進行分析及簡化的功能，所以在近代被廣泛的使用，在機械、建築等領域都可以看到其身影。

2.1 基本概念

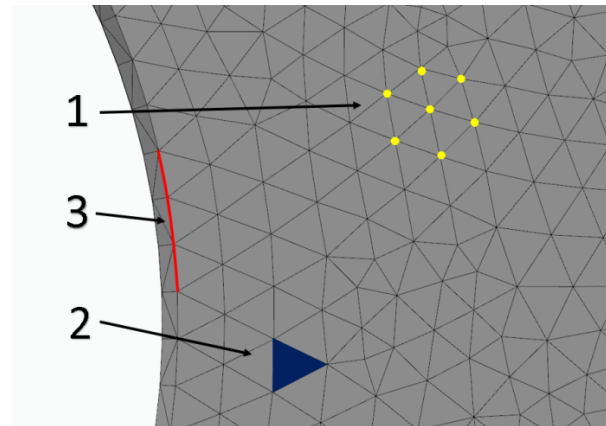


圖 2.2: 基本概念

1. 節點: 每個元素的角落或中心點，用於連接元素之間的邊界條件和解決方程，如 (圖 2.2) 上 1 指示。
2. 元素: 通常由三角形或者四邊形等形成的區域結構，如 (圖 2.2) 上 2 所示。
3. 邊界條件: 存在於物理系統邊界如 (圖 2.2) 上 3 所示的約束及負荷力，模擬實際情況下的條件約束和外界影響。
4. 自由度: 節點上變量的個數，例如位移的節點自由度為 3，表示單個節點擁有三個坐標方向的位移，又例如熱分析時節點自由度為 1，表示某個節點處的溫度。
5. 網格: 由數個元素經由節點連接所組成，表示在需分析的區域上。
6. 變形: 邊界條件的影響下的形變，為分析後計算每個元素的變形及變形之間的相互影響，用以預測整體系統變化。
7. 離散化: 將物理系統或結構等連續變量通過計算轉換為數格元素的過程，目的在於減化連續變量的複雜性，便於處理及分析。關於公式及步驟會因為模型或求解類型不同而有不一樣的計算方式。

8. 材料特性: 物理系統 (模型) 的材料性質，不同的材料有著不一樣的參數 (彈性模數、蒲松比、極限強度、降伏強度等)。

2.1.1 邊界條件

分為兩種邊界條件，位移或施加力條件。

1. 位移邊界條件: 規定了結構或邊界上的位移及變形的特定值或關係。
 - 固定邊界條件: 也稱為約束邊界條件，令特定的某些節點或自由度的位移為零，使其無法發生位移。
 - 位移約束: 指定特定節點或自由度的位移值，可以是定值或隨時間變化的函數。
 - 斜率約束: 規定特定節點的自由度的位移斜率 (導數)，用於描述特定邊界上的傾斜或旋轉。
2. 力邊界條件: 規定了結構或邊界上施加的外部力或力的分布。
 - 負荷: 施加在結構上的集中力或分布力，可以是靜態或動態負荷。
 - 壓力: 施加在邊界上的或表面力，可以是均勻或非均勻的。
 - 動力學條件: 施加在結構上的動態加載。

2.1.2 網格劃分基本原則

1. 網格數量: 將決定計算精度及規模大小，一般狀況中，網格數量增加計算精度也會跟著提升，但伴隨而來的是更大的計算量，所以在制定網格大小時應權衡兩個因素。
2. 網格疏密: 在某些變化梯度較大的部位 (應力集中處)，需要大密集的網格，密集網格將更好反映數據變化，反之變化梯度較小的部位則用較稀疏的網格，而不同單元之間的連接則採用特殊的過度單元或多點約束等方法連接，才能更好的分配資源，兼顧計算量和計算精度。

3. 網格質量: 網格形狀的合理性，質量的好壞將直接影響計算精度，質量較差的除了造成局部的計算精度偏差甚至會直接終止計算，因此在重要部位時應該確保其擁有高品質的表現，如果網格都是由等邊三角形、正方形、正四面體、立方六面體等組成，則求解精度可以非常接近實際值，但這種只存在於理想狀態下，實際運用卻很難做到。

- 元素質量評價指標

1. 單元的邊長比、面積比及體積比，理想的邊長比為 1，以正三角形、正四面體、正六面體為參考基準。
2. 扭曲度: 單元內部扭轉及面外的翹曲程度。
3. 疏密過渡: 應力梯度方向和橫向過渡情況，應力集中部分應較為密集，則反之。
4. 節點、元素排布: 合理的節點及元素有助於帶入方程式計算，可以提高求解效率，但須注意消除重複的節點及元素。

下列為網格疏密不同造成的分析差

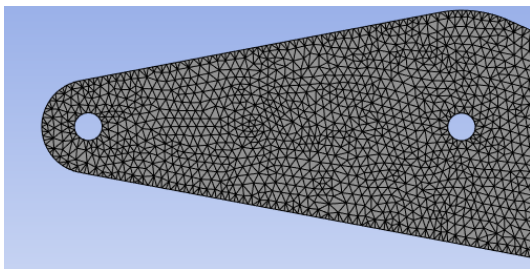


圖 2.3: 較密網格

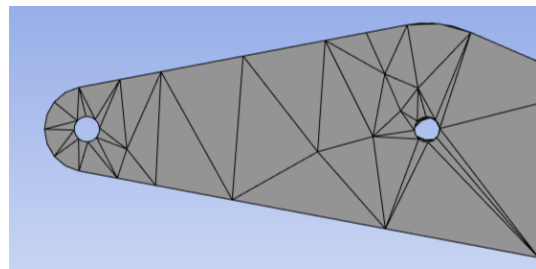


圖 2.4: 較粗網格

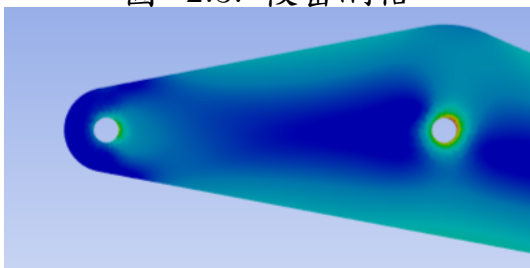


圖 2.5: 較密網格所得應力雲圖

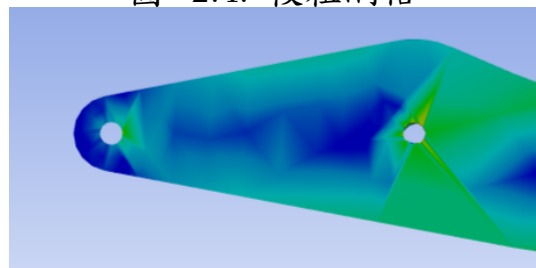


圖 2.6: 較粗網格所得應力雲圖

2.2 計算及公式介紹

此章節主要介紹常見的結構力學的有限元計算公式及方法順序，了解平時由電腦計算的有限元素法及代數方程式，觀察固體結構上變形及應力是如何進行分析計算以及選用原因 (算式參考自 [1])。

2.2.1 變形分析

在有限元素分析中，通常使用拉格朗日公式，透過觀察材料的平移或旋轉來建立力學方程。在材料上設置隨意點 (X)，觀察點 (X) 隨時間 (t) 變化後的材料位移矢量 $u(X,t)$ ，轉換為空間坐標系 $x=X+u$ 即可以得到一個拉格朗日公式，只要材料為柔性體就會產生局部變化，此現象稱為應變或伸長，下列將透過多種方式來描述材料變形過程。

- 變形梯度

變形梯度 F 定義為

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

其中, \mathbf{I} 是等同張量, 展開為矩陣形式為:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

上述矩陣包含材料局部旋轉和變形的完整解釋，其中還顯示許多訊息，例如：

由於 $dx=FdX$ ，未變形體 dX 中小線段是如何旋轉並拉伸，成為變形體 dX 中的線段，我們將 F 張量看做一個矩陣，第一列提供線段最開始沿 X 方向的大小和方向等信息。從數學角度來看， F 是從 X 改變到 x 的 Jacobi 矩陣，因此它的行列式 $J=\det(F)$ 為局部體積比例因子，而不可壓

縮材料 $J = 1$ 。

極分解定理表明，任何二階張量都可以分解為純轉動和對稱張量的乘積，利用這一定理將剛體轉動與變形分開：

$$F = RU$$

這可以解釋為先發生變形（伸長張量 U ），再進行剛性旋轉（旋轉矩陣 R ）。如此一來，如果沒有旋轉，右伸長張量則為變形梯度，因此 U 的解釋與 F 類似。

同樣也可以將變形梯度分解為

$$F = VR$$

此過程中，會先發生剛體轉動，然後轉動的體發生變形，變形透過左伸長張量 V 描述。

這兩個伸長張量 U 、 V 通過純轉動進行關聯，例如 $V = FR^T = RUR^T$ 。事實上此處旋轉矩陣的轉置也是自身的逆（ $R^T R = RR^T = I$ ）。

在實際操作中，極分解的計算成本通常較高，因此，人們會盡量避免這種類型的計算。但在理論思考方面，這個概念非常有用。我們可以在不確定旋轉矩陣的情況下，計算與旋轉無關的變形測量：

$$F^T F = (RU)^T RU = U^T R^T RU = U^T U = U^2 = C$$

張量 C 稱為右 Cauchy-Green 變形張量。

這個張量經常用於描述超彈性材料的本構特性等，僅由 U 張量構成，因此用於描述材料在旋轉“之前”的變形。

由此可知

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}\mathbf{R}(\mathbf{V}\mathbf{R})^T = \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2 = \mathbf{B}$$

張量 \mathbf{B} 稱為左 Cauchy-Green 變形張量。

\mathbf{B} 和 \mathbf{C} 都與旋轉無關，但它們描述的是兩個不同坐標系中的變形。

張量 \mathbf{C} 是描述材料坐標系中變形的材料張量， \mathbf{B} 是描述空間坐標系中變形的空間張量。

- 伸長率

從非正式意義上來說，伸長率可定義為當前長度與原始長度之比

$$\lambda = \frac{L}{L_0}$$

因此在未變形狀態下，伸長率為 1。一般情況下，人們更傾向於使用張量 \mathbf{U} 和 \mathbf{C} 的特徵值。 \mathbf{U} 的三個特徵值 ($\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$) 稱為主伸長率，其對應的特徵向量在材料坐標系中給出三個正交方向。如果我們研究一個小立方體 (正方體)，其中三條邊沿著這三個方向，則它將會發生變形，成為長方體，但所有邊仍保持直角相交。邊長變化由主伸長率表示。如此一來體積變化可以寫為主伸長率的乘積：

$$\frac{V}{V_0} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

張量 \mathbf{C} 的計算更加簡單，它的主方向與 \mathbf{U} 相同，但特徵值為 λ_1^2 、 λ_2^2 和 λ_3^2 。因此通常使用 \mathbf{C} 而非 \mathbf{U} 來計算主伸長率。

對於未變形材料 (剛體) $\mathbf{C}=\mathbf{I}$ 。解釋了為甚麼在實際中人們主要使用 \mathbf{C} 來描述較大伸縮性的材料。

左 Cauchy-Green 變形張量 \mathbf{B} 也具有主伸長率作為特徵值。但由於 \mathbf{V} 描述剛體轉動之後的伸長率，因此主方向依照空間方向來確定。

- 應變張量

要得到基于零的變形測量值，需要從 \mathbf{C} 中減去等同張量，從而得到格林-拉格朗日應變張量 \mathbf{E} 定義為

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

該張量也描述材料在發生任何轉動之前產生的變形，但在未變形狀態下的所有分項均為零，其分項可以寫為

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

其中假設對重複指標求和。

格林-拉格朗日應變張量的對角元素如下

$$E_{XX} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right)$$

非對角元素的示例為

$$E_{XY} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right)$$

當應變和剛體轉動幅度都很小時，格林-拉格朗日應變張量中的二次項可以忽略不計，由此可得到工程應變張量

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

其分量如下

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial u}{\partial X}$$

和

$$\varepsilon_{XY} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right)$$

該應變張量的對角項稱為法向應變或正應變，用於描述沿每個坐標軸的延伸。非對角項是應變張量的剪切分量，用於描述線段之間夾角的變化。這裡的術語很容易被混淆，因為在工程領域，由於 γ_{ij} 直接測量角度的變化（以弧度表示），所以人們習慣使用“剪切應變”一詞來描述物理量 $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ 。剪切應變產生等體積變形；即變形不引起體積改變。

對於小應變相對體積變化通過正應變之和求得：

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \text{trace}(\varepsilon)$$

- 真實應變

有時，我們會使用真實應變這個術語。在真實應變的單軸定義中，應變增量定義為

$$d\varepsilon = \frac{dL}{L}$$

真實應變的定義基於當前長度，因此在積分後可以得到

$$\varepsilon = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) = \ln(\lambda)$$

這就是真實應變也稱為對數應變的原因。

- 應變協調性

由於應變張量由位移的導數構成，因此並非所有應變場均適用。位移矢量只有三個分量，這意味著，除非各個應變分量都滿足特定的協調性標準，否則它們的積分無法給出唯一的一組位移。工程應變必須滿足以下方程：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial X_k \partial X_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial X_i \partial X_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial X_j \partial X_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial X_i \partial X_k} = 0$$

由於應變張量的對稱性，這 81 個方程中只有 6 個是非平凡方程。

如下所示：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

2.2.2 應力方程

- 動量平衡

作用在變形區域上的表面力可以表示為

$$d\mathbf{F}_s = \mathbf{t}_n da = \mathbf{T}_N dA$$

其中 \mathbf{t}_n 稱為牽引力，而 \mathbf{T}_N 通常稱為標稱牽引力，原因是它將實際變形狀態下的作用力與未變形區域關聯起來。

此外，我們還可以基於法向量將牽引分量寫為以下線性展開式：

$$T_i = P_{iJ} N_J$$

在此處和下文中，假設對重複指標求和。空間分量和材料分量分別使用小寫和大寫字母。這種表示有時稱為柯西定律或柯西公式，僅適用於 P_{iJ} 為特定二階張量的分量的情況。對於任意未變形的材料體積 V_0 ，動量守恆可以用以下積分形式表示：

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{v} dV = \int_{V_0} \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial V_0} \mathbf{T} dA$$

其中 \mathbf{f}_V 表示體積力

速度場根據位移場 \mathbf{u} 計算為

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, t)$$

根據高斯定理，使用柯西公式可以將表面積分轉換為體積積分：

$$\int_{\partial V_0} T_i dA = \int_{\partial V_0} P_{iJ} N_J dA = \int_{V_0} \frac{\partial P_{iJ}}{\partial X_J} dV$$

因此可以得到動量平衡方程的微分形式如下所示：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_{V,i} + \frac{\partial P_{i,J}}{\partial X_J}$$

或者使用張量符號得到：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f}_V + \nabla_X \cdot \mathbf{P}^T$$

張量 \mathbf{P} 稱為第一類 Piola-Kirchhoff 應力張量，它將空間方向的作用力與原始未變形構型中的區域關聯起來。因此他的分量指標涉及不同的構型。有時這種數學對象稱為兩點張量。

在實際的變形構型中，可以對牽引向量 \mathbf{t}_n 和材料體積應用類似的方法，可用下式表示：

$$\mathbf{t}_n = \sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i$$

張量 σ 稱為柯西應力張量或真實應力張量，原因是它表示與實際變形區域相關的實際構型中的力。由其空間分量表示。

由於柯西應力張量和第一類 Piola-Kirchhoff 應力張量對同一個表面力有著不同的表示

$$\mathbf{P} \mathbf{N} dA = \sigma \mathbf{n} da$$

要確定這兩種應力測量方式之間的關係，我們可以使用 Nanson 公式計算變形引起的面積變化，表示為

$$\mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA$$

其中， \mathbf{F} 為變形梯度張量，由此可得

$$J = \det(\mathbf{F}) = dV/dV_0$$

體積因子 J 可以給出變形引起的體積變化。因此，應力張量可通過下式與之關聯

$$\mathbf{P} = J \sigma \mathbf{F}^{-T}$$

通過引入一個稱為基爾霍夫應力張量（定義為 $\tau = J\sigma$ ）的張量，可以進一步簡化這個公式及類似公式。基爾霍夫應力張量是一個幾乎沒有實際用途的物理量，但卻具有理論上的便利性。

- 機械能平衡

將動量方程的微分形式乘以速度向量，並基於材料對其進行積分，

可以得到以下方程：

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_V \sigma : \mathbf{L} dV = \int_V \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} dA$$

這個方程給出了機械能平衡的積分形式，也稱為冪定理。速度的空間梯度為 $\mathbf{L} = \nabla_x \mathbf{V}$ ，其中的運算符表示對兩個指標求和變形分析頁面對速度梯度的特性進行了詳細論述。

方程右側的兩個積分項分別表示體積力和表面力的功率輸入，它們分別是這些力在每單位時間內對材料所做的功。左側的項分別為動能變化率以及為體提供的應力功率。對於彈性材料，應力功率是應變能密度變化率。通過使用以下關係式：

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{L} &= J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T : \mathbf{L} = \\ &= J^{-1} \mathbf{P} : (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) = J^{-1} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \end{aligned}$$

應力功率可以表示為以下等價形式：

$$\int_V \sigma : \mathbf{L} dV = \int_{V_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV_0$$

因此第一類 Piola-Kirchhoff 應力張量和變形梯度形成了能量共軛對。這種共軛對也可以稱為功率共軛或功共軛應力和應變測度。

速度梯度可以分解為對稱和反對稱部分，分別稱為應變率張量 (\mathbf{L}_d) 和自旋張量 (\mathbf{L}_w)。由於柯西應力張量是對稱的 $\sigma : \mathbf{L} = \sigma : \mathbf{L}_d$ ，，因此與柯西應力形成功率共軛的應變測量是應變率張量。後者也可以寫為

$$\mathbf{L}_d = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}$$

其中

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

為格林-拉格朗日應變張量。由此應力功率積分可以改寫為：

$$\int_V \sigma : \mathbf{L}_d dV = \int_{V_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV_0$$

其中

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-T}$$

稱為第二類 Piola-Kirchhoff 應力張量，這是一個對稱張量，與格林-拉格朗日應變形成能量共軛。

第一類和第二類 Piola-Kirchhoff 應力張量通過下式相關：

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})\mathbf{S}$$

基於此公式，我們可以將動量平衡方程改寫為：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{F}_V + \nabla_X \cdot [(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})\mathbf{S}]$$

再結合以下形式的本構關係

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$$

可以形成位移向量的封閉方程組。

- 旋轉平面上的應力分量

對於承受軸向載荷的桿，我們很容易將應力 σ_x 看作一個標量，並認為這個桿上只存在正應力。全應力張量為

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在 x 軸與桿的方向一致的坐標系中表示該應力張量的分量，而在任何其他坐標系中，則同時存在正應力和剪切應力。我們設想一個不與桿軸垂直的概念內表面，就能看出這一點。在這個表面上，實際上存在法向 (σ) 應力和剪切 (τ) 應力。

這種應力狀態通常稱為單軸應力；不過，只有在特定的坐標系中，它才能用單個正應力分量表示。

2.3 分析步驟

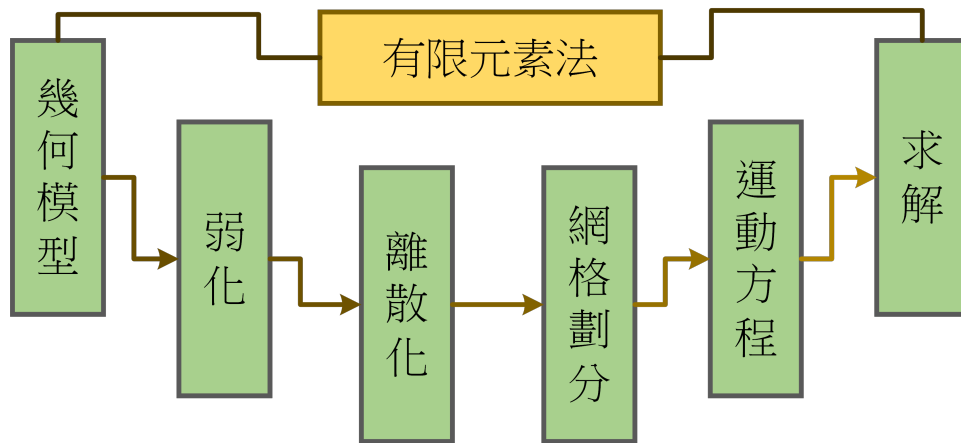


圖 2.7: 有限元素法分析流程

- 幾何模型: 透過繪圖軟體將模型畫出，將模型以數據方式在電腦裡呈現二維或三維的外觀，便於軟體將其代入且計算。
- 離散化及元素劃分: 將物理系統或結構等連續變量通過計算轉換為數格元素的過程，對於複雜的連續變量，需先進行弱化的動作，才能進行離散化將其轉變為各個元素，此動作由分析軟體內部公式計算。
- 導入函數並組成代數方程: 模型或問題不同，力學性質及物理方程相應的關係式(應力、應變、變形、熱傳等)也會跟著變化，因此需要根據對應的問題分別導入不同的函數，需在軟體內設定問題，讓其可以對特定問題進行求解，此動作為設計者提問，軟體負責計算。
- 求解方程: 在經過有限元素法分析後，將會在每個表面得知各元素的受力情況，設計者可以根據此數據了解到模型的受力狀態或位移及負載等相關訊息，以利於後續的設計或生產。

第三章 理論公式

3.1 數學系統模型

3.2 簡化與假設

第四章 前言

4.1 研究動機

參考文獻

- [1] <https://cn.comsol.com/multiphysics/fea-software?parent=fite-element-method-042-62-22>
- [2] <https://www.guyuehome.com/37628>
- [3] <https://hdl.handle.net/11296/b8emug>
- [4] <https://forums.autodesk.com/autodesk/attachments/autodesk/915/18197/2/一種四足步行机器人结构设计与分析.pdf>
- [5] <https://www.mdpi.com/2218-6581/12/1/28>
- [6] <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/有限元素法>
- [7] <https://wiki.mbalib.com/zh-tw/有限单元法>
- [8] <https://github.com/chaitravi-ce/Eklavya-QuadrupedMotionSimulation>
- [9] <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/9/3762>

附錄

LaTeX

LaTeX 為一種程式語言，支援標準庫 (Standard Libraries) 和外部程式庫 (External Libraries)，不過與一般程式語言不同的是，它可以直接表述 Tex 排版結構，類似於 PHP 之於 HTML 的概念。但是直接撰寫 LaTeX 仍較複雜，因此可以藉由 Markdown 這種輕量的標註式語言先行完成文章，再交由 LaTeX 排版。此專題報告採用編輯軟體為 LaTeX，綜合對比 Word 編輯方法，LaTeX 較為精準正確、更改、製作公式等，以便符合規範、製作。

表 1: 文字編輯軟體比較表

	相容性	直觀性	文件排版	數學公式	微調細部
LaTeX	✓		✓	✓	✓
Word		✓			✓

- 特點:

1. 相容性：以 Word 為例會有版本差異，使用較高版本編輯的文件可能無法以較低的版本開啟，且不同作業系統也有些許差異；相比 LaTeX 可以利用不同編譯器進行編譯，且為免費軟體也可移植至可攜系統內，可以搭配 Github 協同編譯。
2. 文件排版：許多規範都會要求使用特定版型，使用文字編譯環境較能準確符合規定之版型，且能夠大範圍的自定義排定所需格式，並能不受之後更改而整體格式變形。
3. 數學公式呈現：LaTeX 可以直接利用本身多元的模組套件加入、編輯數學公式，在數學推導過程能夠快速的輸入自己需要的內容即可。
4. 細部調整：在大型論文、報告中有多項文字、圖片、表格，需要調整細部時，要在好幾頁中找尋，而 LaTeX 可以分段章節進行編譯，再進行合併處理大章節。

足端軌跡

利用 GeoGebra 軟體求得各種足端軌跡所需的轉軸角度。

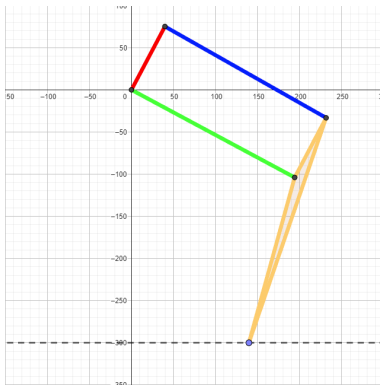


圖 1: 足端軌跡 (直線)

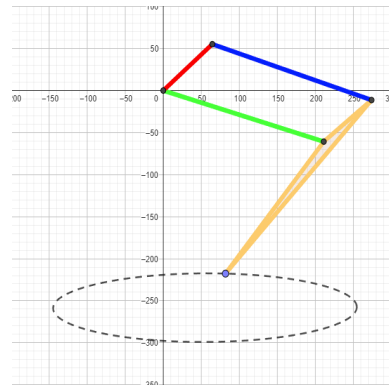


圖 2: 足端軌跡 (橢圓)

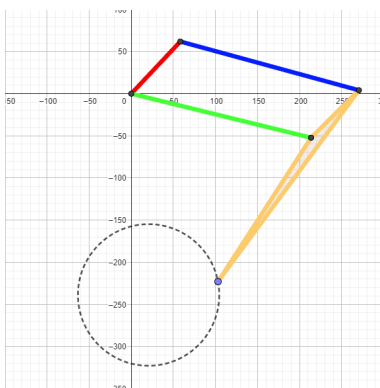


圖 3: 足端軌跡 (圓形)

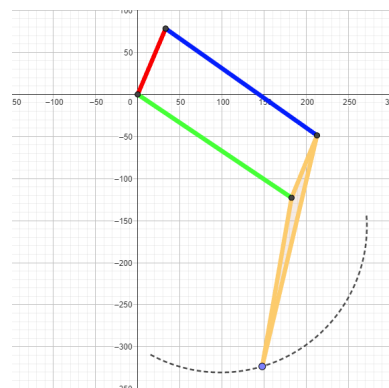


圖 4: 足端軌跡 (弧線)

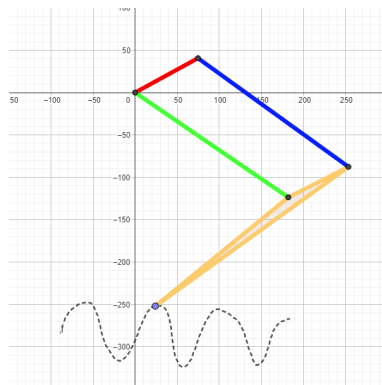


圖 5: 足端軌跡 (不規則)

作者簡介



姓名：陳岳樑
學號：41023218
就讀學校：國立虎尾科技大學機械設計工程系
經歷：國立彰化師範大學附屬高級工業職業學校
機電科



姓名：蔡弦霖
學號：41023248
就讀學校：國立虎尾科技大學機械設計工程系
經歷：國立秀水高級工業職業學校
機械科



姓名：鄭立揚
學號：41023251
就讀學校：國立虎尾科技大學機械設計工程系
經歷：新北市立新莊高級中學



姓名：謝鴻元
學號：41023254
就讀學校：國立虎尾科技大學機械設計工程系
經歷：國立秀水高級工業職業學校
製圖科

【05】

分類編號・112-4-CAE-3006・3004-1 有限元素法在四足機器人上的應用 一百三十三級