4 UKŁADY Z FAZOWĄ PĘTLĄ SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO

4.1. WPROWADZENIE

Układy z fazową pętlą sprzężenia zwrotnego, często nazywane pętlami fazowymi PLL (ang. phase - locked - loop), znajdują bardzo szerokie zastosowanie we współczesnej elektronice do synchronizacji, podziału/powielania częstotliwości, pośredniej demodulacji częstotliwości, przemiany częstotliwości itp. Ciągle rosnący obszar licznych i różnorodnych zastosowań pętli fazowej w układach przetwarzania sygnałów analogowych i cyfrowych wiąże się z tym, że parametry układów z pętlą PLL są na ogół korzystniejsze niż parametry układów konwencjonalnych.

Układy z pętlą PLL wytwarzane są w postaci oddzielnych monolitycznych układów scalonych lub wykorzystywane są jako bloki funkcjonalne bardziej złożonych układów scalonych. W zależności od rodzaju i techniki przetwarzania sygnałów rozróżniamy pętle analogowe APLL (ang. *analogue phase - locked loop*) i cyfrowe - DPLL (ang. *digital phase - locked loop*).

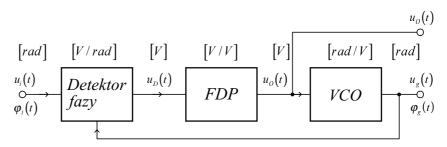
Pętla fazowa jest układem silnie nieliniowym, stąd jej analiza pozwala najczęściej na uzyskanie jedynie wyników przybliżonych lub w postaci numerycznej.

W większości praktycznych zastosowań interesuje nas praca w tzw. stanie synchronizacji kiedy to, przy spełnieniu pewnych warunków, jej działanie można opisać modelem liniowym znacznie prostszym do analizy.

W niniejszym rozdziale nasze rozważania ograniczymy do omówienia podstawowych właściwości i wybranych zastosowań analogowych pętli fazowych.

4.2. ZASADA DZIAŁANIA. MODEL PĘTLI FAZOWEJ

Podstawowy schemat blokowy pętli fazowej przedstawiono na rys.4.1.



Rys.4.1. Schemat blokowy układu z fazowa pętlą sprzężenia zwrotnego

Pętla fazowa składa się zasadniczo z trzech podstawowych bloków: detektora fazy, filtru dolnoprzepustowego FDP i generatora przestrajanego napięciem VCO (ang. voltage controlled oscillator). Jest to układ automatycznej regulacji, którego zadaniem jest śledzenie chwilowej fazy sygnału wejściowego $\varphi_i(t) - \varphi_g(t)$ przez sygnał $u_g(t)$ wytwarzany w lokalnym generatorze VCO.

VCO jest generatorem, którego częstotliwość drgań jest proporcjonalna do napięcia sterującego $u_o(t)$. Detektor fazy porównuje fazy sygnałów $u_i(t)$ i $u_g(t)$, a w wyniku tego porównania wytwarza sygnał błędu $u_D(t)$, zależny od różnicy faz. Po odfiltrowaniu z sygnału $u_D(t)$ niepożądanych składowych przez filtr dolnoprzepustowy i ewentualnym wzmocnieniu otrzymuje się sygnał $u_o(t)$, który steruje VCO w taki sposób, aby różnica faz uległa zmniejszeniu. W ślad za śledzeniem chwilowej fazy sygnału wejściowego uzyskuje się także śledzenie chwilowej częstotliwości tego sygnału przez sygnał $u_g(t)$. Układ wykazuje właściwości synchronizacji obu sygnałów, a sygnał wejściowy $u_i(t)$ nosi nazwę sygnału odniesienia lub sygnału synchronizujacego. Na rys.4.1 zaznaczono również wymiarowe, w których wyrażane są charakterystyki przejściowe poszczególnych bloków oraz sygnały na wejściu i wyjściu tych bloków.

Załóżmy, że sygnał wejściowy $u_i(t)$ i sygnał wytwarzany w generatorze VCO sa określone zależnościami

$$u_{i}(t) = U_{i} \sin \left[\omega_{0} t + \varphi_{i}(t)\right]$$

$$u_{g}(t) = U_{g} \cos \left[\omega_{0} t + \varphi_{g}(t)\right]$$

$$(4.1)$$

gdzie: $\varphi_i(t)$ i $\varphi_g(t)$ są fazami chwilowymi każdego z sygnałów. Pulsacje chwilowe sygnałów (4.1) określają zależności

$$\omega_{i}(t) = \omega_{0} + \frac{d}{dt} [\varphi_{i}(t)]
\omega_{g}(t) = \omega_{0} + \frac{d}{dt} [\varphi_{g}(t)]$$
(4.2)

Jako detektor fazy zastosujemy układ mnożący opisany w rozdz. 3.2.5.2. Gdy na jego wejścia podamy sygnały o postaci (4.1), to na jego wejściu otrzymamy sygnał $u_D(t)$ opisany zależnością

$$u_{D}(t) = k_{m} u_{i}(t) u_{g}(t) = \frac{1}{2} k_{m} U_{i} U_{g} \sin \left[\varphi_{i}(t) - \varphi_{g}(t) \right] + \frac{1}{2} k_{m} U_{i} U_{g} \sin \left[2\omega_{0} + \varphi_{i}(t) + \varphi_{g}(t) \right]$$

$$(4.3)$$

gdzie: k_m jest stałą układu mnożącego.

Pierwszy składnik wyrażenia (4.3) jest sygnałem wolnozmiennym, natomiast drugi składnik ma widmo skupione wokół pulsacji $2\omega_0$. Jeżeli rolę detektora fazy pełni układ mnożący, to z sygnału $u_D(t)$ należy usunąć niepożądany składnik wielkiej częstotliwości za pomocą filtru dolnoprzepustowego, otrzymując

$$\frac{\overline{u_D(t)} = \frac{1}{2} k_m U_i U_g \sin \left[\varphi_i(t) - \varphi_g(t) \right] = k_D \sin \left[\varphi_b(t) \right]}{\text{lub}}$$

$$u_D(\varphi_b) = U_{D\text{max}} \sin \varphi_b$$
(4.4)

przy czym

$$\varphi_b(t) = \varphi_i(t) - \varphi_g(t)$$
 jest błędem fazy, (4.4a)

$$k_D = 1/2 k_m U_i U_g$$
 stanowi wzmocnienie detektora fazy, (4.4b)

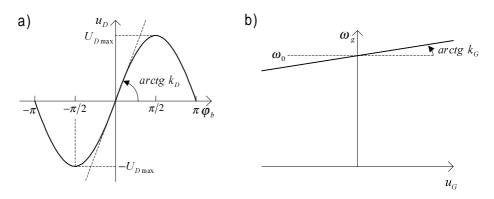
 $U_{\scriptscriptstyle D\,\mathrm{max}}$ - maksymalna wartość napięcia detektora fazy.

Równanie (4.4) opisuje charakterystykę detektora fazy, która jest funkcją sinusoidalną o okresie 2π , a jej nachylenie w punkcie $\varphi_b = 0$ określa współczynnik k_D (rys.4.2a).

Przy założeniu, że filtr dolnoprzepustowy FDP usunie niepożądane składowe z sygnału wyjściowego detektora fazy $u_D(t)$ i nie będziemy ich rozpatrywać w dalszych rozważaniach, to napięcie na jego wyjściu określone jest splotem funkcji

$$u_{O}(t) = \overline{u_{D}(t)} * h(t) = [k_{D} \sin \varphi_{b}(t)] * h(t) = k_{D} \int_{0}^{t} \sin \varphi_{b}(t) h(t - \tau) dt$$
 (4.5)

gdzie: h(t) jest odpowiedzią impulsową $h(t) = \mathbf{L}^{-1}[H(s)]$ filtru opisanego transmitancją H(s).



Rys.4.2. a) Charakterystyka przejściowa detektora fazy, b) charakterystyka przestrajania generatora VCO

Jak pokazano na rys.4.2b, pulsacja generatora VCO powinna być liniową funkcją napięcia sterującego $u_o(t)$ w całym zakresie częstotliwości pracy.

Zatem

$$\omega_{g}(t) = \omega_{0} + k_{G} u_{O}(t) \tag{4.6}$$

Z porównania zależności (4.2) i (4.6) otrzymujemy

$$\frac{d\varphi_g(t)}{dt} = k_G u_O(t) \tag{4.7}$$

Sygnał $u_o(t)$ moduluje częstotliwość drgań generatora VCO, przy czym na podstawie równań (4.4a, 4.5, 4.7) otrzymujemy

$$\frac{d\varphi_g(t)}{dt} = k_G k_D \left\{ \sin \left[\varphi_i(t) - \varphi_g(t) \right] * h(t) \right\}$$
(4.8)

Podstawiając $K = k_G k_D$, przy czym K jest wzmocnieniem pętli $[1/\sec]$, otrzymujemy ostateczne równanie opisujące związek pomiędzy fazą sygnału wejściowego i fazą generatora VCO.

$$\frac{d\varphi_{g}(t)}{dt} = K \left\{ \sin \left[\varphi_{i}(t) - \varphi_{g}(t) \right] * h(t) \right\} =$$

$$= K \int_{0}^{t} \sin \left[\varphi_{i}(t) - \varphi_{g}(t) \right] h(t - \tau) d\tau \tag{4.9}$$

Inną postać tego równania możemy otrzymać na podstawie zależności (4.4a) i (4.9)

$$\frac{d\varphi_{b}(t)}{dt} = \frac{d\varphi_{i}(t)}{dt} - K\left\{\sin\varphi_{b}(t)\right\} * h(t) =
= \frac{d\varphi_{i}(t)}{dt} - K\int_{0}^{t} \sin\varphi_{b}(t) h(t-\tau) d\tau$$
(4.10)

Pętla PLL opisana równaniami (4.9), (4.10) jest układem silnie nieliniowym z powodu nieliniowości charakterystyki przejściowej detektora fazy. Nachylenie charakterystyki przejściowej $u_D(\varphi_b)$ detektora fazy (w przypadku zastosowania układu mno żącego) ulega nie tylko znacznym zmianom co do wartości, lecz również zmienia swój znak przy zmianie błędu fazy od $\varphi_b = -\infty$ do $\varphi_b = +\infty$ (rys.2a). Przy zmianach błędu fazy w przedziałach $\varphi_b = \left(-\frac{\pi}{2} \text{ do } + \frac{\pi}{2}\right) \pm 2 \pi n$, dla $n = 1, 2, \ldots$, nachylenie charakterystyki jest dodatnie i w tym przypadku w pętli występuje fazowe ujemne sprzężenie zwrotne. Dla pozostałych φ_b nachylenie charakterystyki przejściowej detektora jest ujemne i w pętli występuje fazowe dodatnie sprzężenie zwrotne.

4.3. PĘTLA W STANIE SYNCHRONIZACJI

4.3.1. Liniowy model pętli fazowej

Pętla znajduje się w stanie synchronizacji, gdy

$$\omega_i(t) = \omega_g(t) \tag{4.11}$$

Na podstawie zależności (4.2) i (4.11) możemy stwierdzić, że w stanie synchronizacji

$$\varphi_i(t) - \varphi_{\sigma}(t) = \varphi_{h0} = const \tag{4.12}$$

W stanie synchronizacji $|\varphi_{b0}| \le \frac{\pi}{2}$, co oznacza, że punkt pracy detektora

fazy leży w podstawowym przedziale jego charakterystyki, w którym jest ona monotoniczna. Łatwo możemy wyznaczyć zakres przestrajania lokalnego generatora pętli, wokół swej pulsacji spoczynkowej ω_0 , przez sygnał $u_O(t)$.

Dla harmonicznego sygnału wejściowego $u_i(t)$ o stałej pulsacji

$$u_i(t) = \omega_i = const \tag{4.13}$$

na wyjściu detektora fazy (równ. 4.4) otrzymujemy składową stałą

napięcia

$$U_{D0} = \overline{u_D(t)} = \frac{1}{2} k_m U_s U_g \sin \varphi_{b0} = k_D \sin \varphi_{b0}$$
 (4.14)

Przy $-\frac{\pi}{2} \le \varphi_{b0} \le \frac{\pi}{2}$ napięcie to zawiera się w granicach

$$-k_D \le U_{D0} \le k_D \tag{4.15}$$

Składowa stała U_{D0} po przeniesieniu przez filtr przyjmuje wartość $H(0)U_{D0}$ i po ewentualnym wzmocnieniu (H(0)>1) steruje generatorem VCO. Najczęściej wzmocnienie nie jest potrzebne, tj. H(0)=1.

Zgodnie z zależnością (4.6) pulsacja generatora VCO może przyjmować wartości z przedziału

$$\omega_0 - k_G k_D H(0) \le \omega_g \le \omega_0 + k_G k_D H(0)$$
 (4.16)

Jeżeli zakres zmian pulsacji sygnału wejściowego $u_i(t)$ będzie się utrzymywać w przedziale określonym wyrażeniem (4.16), to wówczas pętla fazowa pozostaje w stanie synchronizacji.

Ten właśnie przedział pulsacji sygnału wejściowego, dla których pętla fazowa pozostaje w stanie synchronizacji, nosi nazwę *zakresu trzymania* (ang. *hold - in range*) lub *zakresu śledzenia* (ang. *tracking range*) tej pętli.

W rozważanym przypadku zakres trzymania jest symetryczny względem pulsacji ω_0 i wynosi

$$\Delta \omega_T = k_G k_D H(0) = K \tag{4.17}$$

przy czym najczęściej H(0) = 1

W stanie synchronizacji błąd fazy φ_{b0} jest mały i możemy założyć, że $\varphi_{b0} << \pi/2$. Przy tym założeniu charakterystyka detektora fazy może być aproksymowana zależnością liniową

$$U_{D0} = k_D \sin \left(\varphi_i - \varphi_g \right) \approx k_D \left(\varphi_i - \varphi_g \right) = k_D \varphi_{b0}$$
 (4.18)

Podstawiając zależność (4.18) do równań (4.9) i (4.10) otrzymujemy

$$\frac{d\varphi_{g}(t)}{dt} = K \left[\varphi_{i}(t) - \varphi_{g}(t) \right] * h(t)$$

$$\frac{d\varphi_{b}(t)}{dt} = \frac{d\varphi_{i}(t)}{dt} - K \left[\varphi_{b}(t) \right] * h(t)$$
(4.19)

Równania (4.19) są liniowe, zatem stosując przekształcenie Laplace'a

otrzymujemy równania algebraiczne w postaci

$$s\phi_{g}(s) = K \left[\phi_{i}(s) - \phi_{g}(s)\right] H(s)$$

$$s\phi_{b}(s) = s\phi_{i}(s) - K \phi_{b}(s) H(s)$$

$$(4.20)$$

gdzie $\phi_s(s)$, $\phi_i(s)$, $\phi_b(s)$, H(s) są transformatami Laplace'a wyrażeń $\varphi_s(t)$, $\varphi_i(t)$, $\varphi_b(t)$ oraz h(t), a H(s) jest transmitancją filtru FDP.

Na podstawie równań (4.20) możemy wyznaczyć transmitancję zamkniętej pętli fazowej

$$G(s) = \frac{\phi_g(s)}{\phi_i(s)} = \frac{K H(s)}{s + K H(s)}$$
(4.21)

w której $\phi_i(s)$ jest wymuszeniem, zaś $\phi_g(s)$ odpowiedzią układu.

Podobnie możemy wyznaczyć transmitancję odniesioną do błędu fazy $\phi_b(s)$

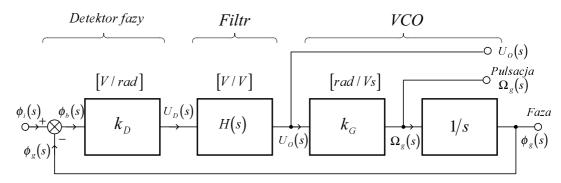
$$G_b(s) = \frac{\phi_b(s)}{\phi_i(s)} = 1 - G(s) = \frac{s}{s + K H(s)}$$
 (4.22)

Na podstawie równania (4.7) możemy wyznaczyć transmitancję samego generatora VCO

$$\frac{\phi_g(s)}{U_O(s)} = \frac{k_G}{s} \tag{4.23}$$

czyli generator VCO zachowuje się jak układ całkujący.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że w stanie synchronizacji, przy $|\varphi_{b\theta}| << \pi/2$, schemat blokowy pętli może być zastąpiony modelem liniowym przedstawionym na rys.4.3.



Rys.4.3. Liniowy model pętli fazowej w stanie synchronizacji

Na podstawie schematu blokowego z rys.4.3 możemy wyznaczyć transmitancję pętli otwartej

$$G_O(s) = \left[\frac{\phi_g(s)}{\phi_i(s)}\right]_O = k_D k_G \frac{H(s)}{s} = K \frac{H(s)}{s}$$
(4.24)

gdzie K, jak oznaczono wcześniej, jest wzmocnieniem pętli.

Z zależności (7.9) i (7.21) można zauważyć, że k_G wyraża się w

$$\left[\frac{\text{rad}}{\text{V sec}}\right]$$
, k_D w $\left[\frac{\text{V}}{\text{rad}}\right]$, stąd wzmocnienie pętli ma wymiar $\left[\frac{1}{\text{sec}}\right]$.

Właściwości pętli w istotny sposób zależą od transmitancji H(s) filtru, dlatego niżej rozpatrzymy kilka przykładów, które mają największe znaczenie praktyczne.

4.3.2. Wpływ transmitancji filtru na właściwości śledzące pętli

Właściwości śledzące pętli fazowej w quasiliniowym zakresie jej pracy w istotny sposób zależą od transmitancji zastosowanego filtru dolnoprzepustowego. Wyróżnia się przy tym kilka najbardziej typowych układów filtrów dolnoprzepustowych pierwszego rzędu, które są najczęściej stosowane w pętlach fazowych PLL. Jak wynika z zależności (4.21) zastosowanie filtru 1-go rzędu powoduje, że transmitancja pętli w zakresie quasiliniowym jest 2-go rzędu. W literaturze pętle fazowe klasyfikuje się jak układy automatycznej regulacji w oparciu o transmitancje pętli otwartej (równ. 4.24), przy czym liczba biegunów $G_O(s)$ określa rząd pętli, natomiast liczba biegunów w początku układu współrzędnych określa typ pętli.

Najczęściej rozważa się pętle fazowe 1-go rzędu (bez filtru) oraz pętle 2-go rzędu z typowymi pasywnymi lub aktywnymi filtrami 1-go rzędu. Dokonując tej klasyfikacji, podobnie jak w [45], niżej przedstawiono najbardziej typowe transmitancje stosowanych filtrów H(s) i wiążące się z nimi (zgodnie z równ. 4.21) transmitancje pętli G(s):

1. Pętla pierwszego rzędu, typu pierwszego

$$H_0(s) = 1$$
 (4.25a)

$$G(s) = \frac{K}{s+K} \tag{4.25b}$$

2. Pętla drugiego rzędu, typu pierwszego z pasywnym filtrem całkującym o strukturze

$$G(s) = \frac{K \tau_1^{-1}}{s^2 + \tau_1^{-1} s + K \tau_1^{-1}}$$
 (4.27)

3. Pętla drugiego rzędu, typu pierwszego z pasywnym filtrem proporcjonalno - całkującym o strukturze

$$H(s) = H_{2}(s) = \frac{1 + \tau_{2} s}{1 + (\tau_{1} + \tau_{2}) s}$$

$$gdzie:$$

$$\tau_{1} = R_{1} C$$

$$\tau_{2} = R_{2} C$$

$$(4.28)$$

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_2 s) (\tau_1 + \tau_2)^{-1}}{s^2 + \frac{1+K\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} s + \frac{K}{\tau_1 + \tau_2}}$$
(4.29)

Transmitancja G(s) określona zależnością (4.29) może być wyrażona w dogodniejszej, unormowanej postaci

$$G(s) = \frac{\omega_n \left(2 \xi - \frac{\omega_n}{K}\right) s + \omega_n^2}{s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2}$$
(4.29a)

gdzie:

$$\omega_n = \left(\frac{K}{\tau_1 + \tau_2}\right)^{1/2}$$
 jest pulsacją drgań swobodnych pętli, (4.29b)

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{K}{\tau_1 + \tau_2} \right)^{1/2} \left(\frac{1 + K \tau_2}{K} \right) \text{ jest współczynnikiem tłumienia.}$$
 (4.29c)

4. Pętla drugiego rzędu, typu drugiego z aktywnym filtrem proporcjonalno - całkującym o strukturze

$$H(s) = H_3(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{\tau_1 s}$$

$$\text{gdzie:}$$

$$\tau_1 = R_1 C$$

$$\tau_2 = R_2 C$$

$$(4.30)$$

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_2 s) \tau_1^{-1}}{s^2 + \left(K\frac{\tau_2}{\tau_1}\right) s + \frac{K}{\tau_1}}$$
(4.31)

lub w postaci unormowanej

$$G(s) = \frac{2 \xi \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2}$$
(4.31a)

gdzie:
$$\omega_n = \left(\frac{K}{\tau_1}\right)^{1/2}$$
 (4.31b)

$$\xi = \frac{\tau_2}{2} \left(\frac{K}{\tau_1} \right)^{1/2} \tag{4.31c}$$

W zasadzie wystarczy rozważać transmitancje filtrów o postaci $H_2(s)$ (równ. 4.28) lub $H_3(s)$ (równ.4.30), bowiem przy ich pomocy można opisać transkonduktancje dowolnego filtru 1-go rzędu. Przykładowo, filtr o transmitancji $H_1(s)$ (równ. 4.26) jest szczególnym przypadkiem filtru o transmitancji $H_2(s)$ (równ. 4.28) dla $\tau_2 = 0$.

Podobnie, aktywny filtr całkujący zrealizowany na wzmacniaczu operacyjnym i posiadający transmitancję

$$H_4(s) = \frac{1}{s \, \tau_1} \tag{4.32}$$

jest szczególnym przypadkiem filtru o transmitancji $H_3(s)$ (równ. 4.30), dla $\tau_2 = 0$.

Badając rozkład zer i biegunów transmitancji pętli G(s), dla różnych filtrów, możemy określić charakter odpowiedzi układu przy skokowych zmianach fazy sygnału wejściowego. Odpowiedź ta w istotny sposób zależy od współczynnika tłumienia ξ oraz od pulsacji drgań swobodnych ω_n i może być oscylacyjna, aperiodyczno - krytyczna lub aperiodyczna.

Charakterystyka amplitudowo - częstotliwościowa pętli fazowej 1-go rzędu jest taka, jak dolnoprzepustowej transmitancji jednobiegunowej, przy czym wzmocnienie pętli K jest zarazem szerokością pasma pętli. Ponieważ wzmocnienie pętli bezpośrednio wpływa na zakres trzymania $(\Delta\omega_T)$ pętli, dlatego ta współzależność szerokości pasma pętli i zakresu trzymania powoduje, że pętla fazowa 1-go rzędu jest bardzo rzadko stosowana w praktyce.

Dla wszystkich rozważanych transmitancji filtrów (tj.

 $H_0(s)-H_4(s)$) pętla jest stabilna [45], chociaż w praktyce może się zdarzyć, że nieuwzględnione w transmitancji pętli bieguny pasożytnicze, odsunięte od biegunów dominujących w kierunku wielkich częstotliwości, wnoszą dodatkowe przesunięcia fazy, prowadzące do niestabilności układu. Marginesy stabilności pętli w quasiliniowym zakresie pracy, dla różnych transmitancji filtrów, mogą być łatwo wyznaczone w oparciu o transmitancje pętli otwartych (równ. 4.24).

Na rys.4.4 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe: amplitudowe i fazowe pętli otwartych dla trzech transmitancji filtrów: $H_0(s)$, $H_1(s)$, $H_2(s)$.

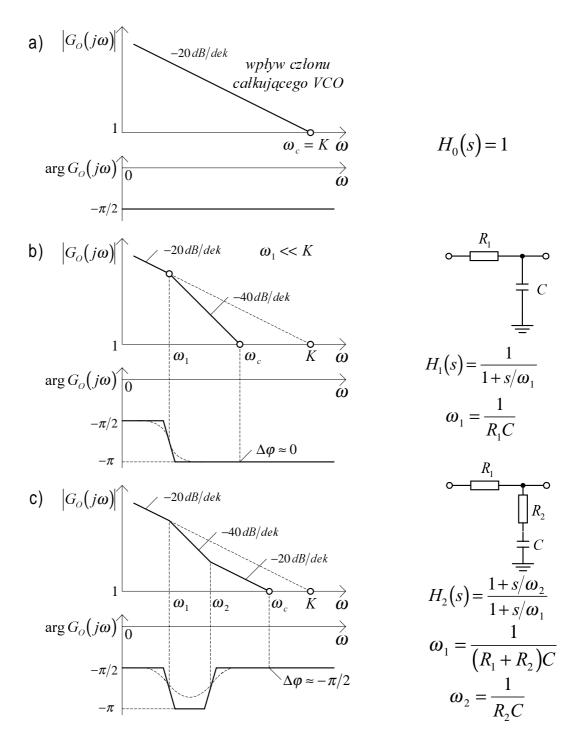
Pulsacja ω_C przy której moduł transmitancji pętli otwartej osiąga wartość równą 1 $\left(\left| G_o(j \, \omega_C) \right| = 1 \right)$ nazywa się *pulsacją odcięcia* (ang. *crossover frequency*).

Transmitancja $G_0(j\omega)$ pętli drugiego rzędu, typu pierwszego z pasywnym filtrem całkującym, którego pulsacja ω_1 jest znacznie mniejsza od K (aby osiągnąć wąskie pasmo) powoduje, że przesunięcie fazy pętli jest bliskie $-\pi$ przy pulsacji odcięcia ω_c (rys.4.4b). Wynikiem tego może być niestabilność pętli zamkniętej.

Zastosowanie filtru o transmitancji jednobiegunowej z zerem umo żliwia zwiększenie marginesu fazy (jak pokazuje rys.4.4c). Zauważmy, że dla tego przypadku szerokość pasma pętli, która jest równa pulsacji odcięcia, może być znacznie mniejsza od K. Możliwość niezależnej regulacji szerokości pasma pętli oraz wzmocnienia pętli K jest zaletą stosowania tego typu filtrów.

W stanie synchronizacji pętla śledzi zmiany częstotliwości sygnału wejściowego. Przykładowo, jeżeli sygnałem tym jest sygnał zmodulowany częstotliwościowo (FM), to napięcie $u_o(t)$ (które jest napięciem wejściowym generatora VCO) jest przebiegiem odwzorowującym zmiany częstotliwości sygnału wejściowego, czyli występuje proces demodulacji FM.

Załóżmy że w stanie początkowym, gdy pętla PLL jest w stanie synchronizacji, następuje zaburzenie w sygnale wejściowym, które wywołuje proces przejściowy. Zaburzenie to jest na tyle małe, że nadal obowiązuje model liniowy pętli. Na rys.4.5 przedstawiono przykładowo przebiegi czasowe napięcia na wejściu generatora VCO $u_o(t)$ pętli fazowej pierwszego rzędu $(H_o(s)=1)$ na sinusoidalny sygnał wejściowy, w którym nastąpiło zaburzenie w postaci skokowej zmiany częstotliwości.

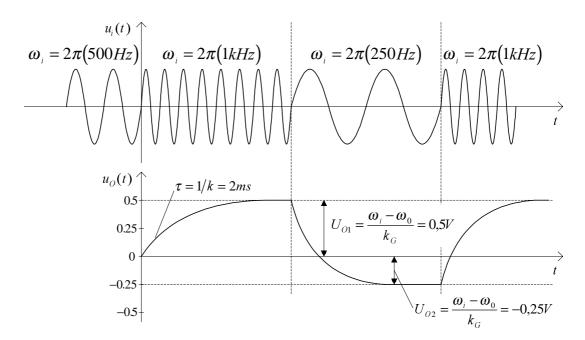


Rys.4.4. Charakterystyki częstotliwościowe: amplitudowe i fazowe otwartych pętli fazowych dla różnych transmitancji filtru: a) $H_0(s)$, b) $H_1(s)$, c) $H_2(s)$

Przebieg napięcia $u_o(t)$ na rys.4.5 został wyznaczony dla pętli pierwszego rzędu o parametrach:

$$k_G = 2 \pi \left[rad \right] 1 \left[kHz \right] \left[\frac{1}{V} \right]$$

$$K = 500 \left[\frac{1}{s} \right]$$
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2 \pi} = 500 \left[\text{Hz} \right]$$



Rys.4.5. Odpowiedź pętli fazowej pierwszego rzędu na sinusoidalny sygnał wejściowy ze skokową zmianą częstotliwości

Stałą czasową zmian napięcia na wejściu generatora VCO możemy wyznaczyć na podstawie transmitancji

$$\frac{U_o(s)}{\Omega_i(s)} = \frac{1}{k_G} \frac{K}{s+K}$$

stąd $\tau = 1/K = 2$ msec

Zmiany pulsacji generatora VCO opisuje zależność

$$\omega_g = \omega_0 + k_G u_O$$

Zatem przy skokowej zmianie częstotliwości sygnału wejściowego z 500 Hz do 1 kHz, napięcie na wejściu generatora VCO zmienia się wykładniczo ze stałą czasową τ od wartości 0 do U_{O1}

$$U_{O1} = \frac{\omega_i - \omega_0}{k_G} = \frac{2 \pi 1000 - 2 \pi 500}{2 \pi 1000} \approx 0.5 \text{ V}$$

Przy skokowej zmianie częstotliwości f_i od wartości 1 kHz do wartości 250 Hz napięcie sterujące generatorem VCO wykładniczo zmienia się do wartości $U_{\it O2}$

$$U_{O2} = \frac{\omega_i - \omega_0}{k_C} = \frac{2 \pi 250 - 2 \pi 500}{2 \pi 1000} = -0.25 \text{ V}$$

Zdolność śledzenia przez pętlę zmian fazy sygnału wejściowego określa się zwykle dla standardowych zaburzeń tego sygnału o postaci:

- skokowej zmiany fazy,
- skokowej zmiany częstotliwości,
- liniowej zmiany częstotliwości.

Przyjmując, że zaburzenie sygnału wejściowego nastąpiło w chwili t=0, wymienione trzy sygnały standardowe i ich transformaty Laplace'a przedstawiono w tabeli 4.1.

Zdolność śledzenia przez pętlę zmian fazy sygnału wejściowego wyznaczymy w oparciu o równanie (4.22) określające transmitancję pętli odniesioną do błędu fazy

$$\phi_b(s) = \frac{s}{s + K H(s)} \phi_i(s) \tag{4.33}$$

Wykorzystując równanie (4.33) możemy wyznaczyć $\phi_b(s)$, a tym samym $\phi_b(t)$ dla wybranej transmitancji filtru zastosowanego w pętli oraz dla każdego z podanych w tabeli 1 pobudzeń.

Rozwiązanie równania (4.33) można dokonać dobrze znanymi metodami. W naszych rozważaniach ograniczymy się jedynie do wyznaczenia wartości asymptotycznych rozwiązań szczegółowych, dla $t\to\infty$.

W dziedzinie czasuL - transformata1Skokowa zmiana fazy $\varphi_i(t) = \Delta \varphi \ 1(t)$ $\varphi_i(s) = \frac{\Delta \varphi}{s}$ 2Skokowa zmiana pulsacji $\varphi_i(t) = \Delta \omega t \ 1(t)$ $\varphi_i(s) = \frac{\Delta \omega}{s^2}$ 1Liniowa zmiana pulsacji $\varphi_i(t) = \frac{1}{2} \upsilon_\omega t^2 \ 1(t)$ $\varphi_i(s) = \frac{\upsilon_\omega}{s^3}$

TABELA 4.1

Wykorzystując twierdzenie o wartości granicznej, w odniesieniu do równania (4.33), otrzymujemy

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \lim_{s \to 0} s \, \phi_b(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2}{s + K \, H(s)} \, \phi_i(s) \tag{4.34}$$

a) Skokowa zmiana fazy

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \lim_{s \to 0} \frac{s \,\Delta \varphi}{s + K \,H(s)} = 0 \tag{4.35}$$

Z równania (4.35) wynika, że pętla jest w stanie śledzić każdą zmianę fazy ($\Delta \varphi$ musi być małe, aby można stosować model liniowy pętli), jeśli tylko $H(0) \neq 0$. W tym przypadku błąd fazy w stanie ustalonym osiąga wartość zerową.

b) Skokowa zmiana pulsacji

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \lim_{s \to 0} \frac{\Delta \omega}{s + K H(s)} = \frac{\Delta \omega}{K H(0)}$$
(4.36)

Asymptotyczna wartość błędu fazy zależy od rodzaju zastosowanego w pętli filtru. Dla filtrów o transmitancjach $H_0(s)$ i $H_1(s)$ mamy H(0) = 1, zatem

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \frac{\Delta \omega}{K} \tag{4.37}$$

W tym przypadku wartość błędu fazy w stanie ustalonym zależy od wzmocnienia pętli oraz od początkowej różnicy pulsacji sygnałów $u_i(t)$ i $u_g(t)$.

Dla filtru o transmitancji $H_3(s)$ asymptotyczna wartość błędu $\varphi_{b0} = 0$, ponieważ $H_3(s) = \infty$, przy $s \to 0$.

c) Liniowa zmiana pulsacji

Dla filtrów o transmitancjach $H_0(s)$, $H_1(s)$, $H_2(s)$, tj. takich, dla których KH(0) ma wartość skończoną,

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_b(t) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \frac{\upsilon_\omega}{s + K H(s)} = \infty$$
 (4.38)

Błąd fazy narasta nieograniczenie z szybkością

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d\varphi_b(t)}{dt} = \lim_{s \to 0} s \left[s \, \Phi_b(s) \right] = \lim_{s \to 0} s^2 \, \frac{s}{s + K \, H(s)} \, \frac{\upsilon_\omega}{s^3} = \frac{\upsilon_\omega}{K} \tag{4.39}$$

Błąd fazy narasta w miarę upływu czasu, powodując wyjście detektora fazy z liniowego obszaru pracy, aż przy pewnej wartości błędu fazy następuje *utrata synchronizacji*.

Dla petli z filtrem o transmitancji $H_3(s)$

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0}(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{s}{s + K H_3(s)} \frac{v_{\omega}}{s^3}$$
 (4.40)

Podstawiając (4.30) i (4.31b) do (4.40), otrzymujemy

$$\varphi_{b0} = \lim_{s \to 0} \frac{v_{\omega}^{2}}{s^{2} + 2 \xi \omega_{n} s + \omega_{n}^{2}} = \frac{v_{\omega}}{\omega_{n}^{2}}$$
(4.41)

Dla wystarczająco dużego współczynnika tłumienia ξ przebieg $\varphi_b(t)$ osiąga wartość asymptotyczną w sposób aperiodyczny, tj. bez oscylacji o dużych amplitudach i przy dostatecznie małym stosunku υ_ω / ω_n^2 pętla pozostaje w stanie synchronizacji.

Jeżeli zastosujemy filtr o transmitancji $H_5(s) = H_3(s) H_4(s)$ (równ.4.30, 4.32) wówczas otrzymujemy pętlę fazową 3 - go rzędu, typu trzeciego, której błąd fazy przy liniowej zmianie pulsacji sygnału wejściowego w quasiliniowym zakresie pracy wynosi zero.

Minimalizacja błędu śledzenia fazy w stanie synchronizacji, przy zmianach częstotliwości wejściowej, nie stanowi jedynego kryterium doboru wzmocnienia pętli i transmitancji filtru dolnoprzepustowego. Zarówno wzmocnienie pętli jak i transmitancja filtru w istotny sposób wpływają również na właściwości szumowe pętli, charakteryzowane tzw. $pasmem szumowym B_n$ [4].

$$B_{n} = \int_{0}^{\infty} \left| \frac{\varphi_{g}(j\Omega)}{\varphi_{i}(j\Omega)} \right|^{2} df \tag{4.42}$$

Należy przy tym podkreślić, że układy z pętlami fazowymi wykazują bardzo korzystne właściwości zmniejszania stosunku sygnał/szum na wyjściu układu w porównaniu do wejścia. Dla pętli PLL 1-go oraz 2-go rzędu z filtrem całkującym $(H_1(s))$ pasmo szumowe B_n zależy tylko od wzmocnienia pętli i wynosi: $B_n = K/4$. Wzrost wzmocnienia z jednej strony zmniejsza błąd śledzenia fazy, lecz zarazem powiększa pasmo szumowe B_n , wskutek czego pętla jest bardziej podatna na szumy i pogarsza się stosunek sygnał/szum na wyjściu układu. Znacznie korzystniejsze właściwości szumowe wykazują pętle PLL z filtrem proporcjonalno - całkującym $(H_2(s), H_3(s))$, które ponadto zależnie od rodzaju wymuszenia charakteryzują się takimi samymi lub mniejszymi statycznymi błędami fazy. Z tego powodu są najczęściej stosowane w praktyce.

4.4. PROCESY SYNCHRONIZACJI PĘTLI PLL

4.4.1. Dochodzenie do stanu synchronizacji - zakres chwytania

Model liniowy pętli nie może być wykorzystany do określenia stanu przejściowego w pętli. Proces ten, oraz określenie warunków przy których pętla może dojść do stanu synchronizacji, możemy znaleźć wyłącznie w drodze rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego opisującego tę pętlę. Załóżmy, że w chwili t = 0 pętla sprzężenia zwrotnego jest rozwarta w miejscu połączenia detektora fazy i filtru dolnoprzepustowego, a do wejścia jest przyłożony sygnał

$$u_i(t) = U_i \sin\left[\omega_{i0} t + \varphi_i(0)\right] \tag{4.43}$$

natomiast przebieg wytwarzany przez generator VCO ma postać

$$u_g(t) = U_g \cos \left[\omega_0 t + \varphi_g(t) \Big|_{t=0} \right] = U_g \cos \left[\omega_0 t + \varphi_g(0) \right]$$
 (4.44)

Pulsacje obu sygnałów różnią się od siebie o $\Delta\omega$, tzn.

$$\omega_{i0} - \omega_0 = \Delta \omega \tag{4.45}$$

Sygnał $u_i(t)$ możemy zatem zapisać w postaci

$$\mathbf{u}_{i}(t) = U_{i} \sin \left[\omega_{0} t + \varphi_{i}(t) \right] \tag{4.46}$$

gdzie:
$$\varphi_i(t) = \Delta \omega t + \varphi_i(0)$$
 (4.46a)

Składowa wolnozmienna napięcia na wyjściu detektora fazy opisana jest wtedy zależnością

$$u_{D1}(t) = k_D \sin\left[\Delta\omega \, t + \varphi_b(0)\right]$$
gdzie $\varphi_b(0) = \varphi_i(0) - \varphi_g(0)$

$$(4.47)$$

jest początkowym błędem fazy.

W czasie $t \ge 0$ następuje zamknięcie pętli sprzężenia zwrotnego i rozpoczyna się proces przejściowy dochodzenia do stanu synchronizacji.

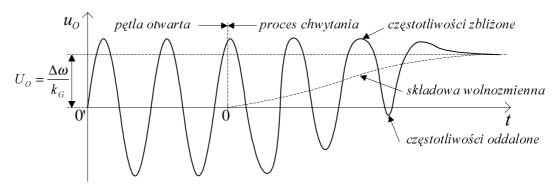
Dla $t \ge 0$ ogólne równanie pętli (4.10), przy wykorzystaniu zależności (4.46), przyjmuje postać

$$\frac{d\varphi_b(t)}{dt} = \Delta\omega - K\sin\varphi_b(t) * h(t)$$
(4.48)

Po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego składowa wolnozmienna na wyjściu detektora nie jest już przebiegiem

sinusoidalnym opisanym równaniem (4.47).

Charakterystyczny przebieg napięcia $u_o(t)$ na wejściu generatora VCO w pętli osiągającej stan synchronizacji, przy założeniu $\omega_{i0} > \omega_0$, przedstawiono na rys.4.6.



Rys.4.6. Napięcie $u_o(t)$ na wejściu generatora VCO pętli osiągającej stan synchronizacji

Napięcie $u_O(t)$, które otrzymujemy w wyniku przejścia napięcia $u_{D1}(t)$ przez filtr dolnoprzepustowy, i ewentualnie wzmacniacz, moduluje w częstotliwości generator VCO. Przy zamkniętej pętli napięcie $u_{D1}(t)$ na wyjściu detektora jest wynikiem mnożenia wejściowego przebiegu sinusoidalnego $u_i(t)$ i zmodulowanego w częstotliwości przebiegu $u_g(t)$.

Szybkość zmian napięcia na wyjściu generatora VCO $du_o(t)/dt$ wskazuje równocześnie na wzajemną relację pomiędzy pulsacjami $\omega_g(t)$ i $\omega_i(t)$. Gdy zmiany napięcia $u_o(t)$ zachodzą wolno, to oznacza, że pulsacja $\omega_g(t)$ generatora VCO zbliża się do wartości ω_{i0} . Wzrost bezwzględnej wartości $du_o(t)/dt$ oznacza, że pulsacja $\omega_g(t)$ oddala się od wartości ω_{i0} (rys.4.6). Jak widać na rys.4.6, przebieg $u_o(t)$ w stanie nieustalonym jest niesymetryczny względem osi czasu. Zawiera on składową wolnozmienną (linia przerywana na rys.4.6), która wymusza zbliżenie wartości średniej pulsacji $\omega_g(t)$ do ω_{i0} .

W stanie ustalonym napięcie $u_o(t)$ osiąga wartość wynikającą z charakterystyki przestrajania generatora (równ. 4.6) i określone jest zależnością

$$U_O = \frac{\Delta \omega}{k_G} = \frac{\omega_{i0} - \omega_0}{k_G} \tag{4.49}$$

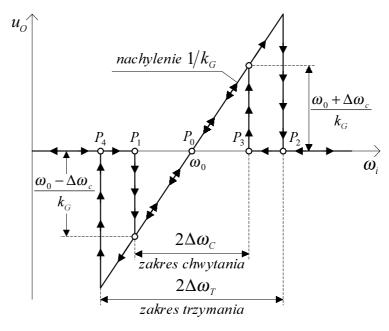
Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami (rów. 4.17), dopuszczalna

początkowa różnica pulsacji $\Delta\omega$ nie może przekroczyć zakresu trzymania pętli $\Delta\omega_T$, bowiem w przeciwnym wypadku niemożliwe byłoby wejście w stan synchronizacji. Zatem

$$\max |\Delta \omega| \le \Delta \omega_{\scriptscriptstyle T} \tag{4.50}$$

Z uwagi na konieczność eliminacji szumów wejściowych, w pętli fazowej stosuje się filtry o paśmie przenoszenia znacznie mniejszym od $\Delta\omega_T$. W tym przypadku omówiony wyżej efekt przeciągania częstotliwości generatora VCO w procesie przejściowym będzie zbyt słaby, aby doprowadzić do zrównania częstotliwości ω_{iO} i $\omega_{o}(t)$.

Maksymalną różnicę pulsacji sygnałów $\omega_g(t)$ i $\omega_i(t)$ (przy skokowym odstrojeniu od pulsacji środkowej ω_0), przy której pętla osiąga stan synchronizacji nazywamy *zakresem chwytania* (ang. *capture range*) lub *zakresem wciągania* (ang. *pull - in range*) i oznaczamy przez $\Delta\omega_C$. Wzajemne usytuowanie zakresów chwytania i trzymania ilustruje rys.4.7.



Rys.4.7. Zakresy chwytania i trzymania pętli fazowej

Charakterystyki na rys.4.7. przedstawiają zależność napięcia u_o na wejściu generatora VCO od pulsacji sygnału wejściowego $\omega_i(t)$, wyznaczoną przy bardzo wolnych zmianach częstotliwości sygnału.

Jeżeli początkowa pulsacja sygnału wejściowego jest bardzo mała, to $u_o = 0$, a generator VCO wytwarza napięcie o częstotliwości spoczynkowej ω_0 . Przy wzroście pulsacji sygnału napięcie u_o jest równe zeru (nieco różne od zera wskutek omawianej już niesymetrii

przebiegu na wyjściu detektora fazy) aż do krańca zakresu chwytania (punkt P_1 na rys.4.7), kiedy to skokowo osiąga wartość wynikającą z charakterystyki przestrajania generatora VCO: $U_O = k_G^{-1} \left(\omega_g - \omega_0 \right)$.

Przy dalszym wzroście pulsacji sygnału wejściowego napięcie u_o jest liniową funkcją ω_i , o nachyleniu k_G^{-1} , aż do górnego krańca zakresu trzymania (punkt P_2 na rys.4.7), kiedy to następuje powrót napięcia u_o do wartości zerowej, a pulsacja generatora VCO powraca do wartości ω_0 . Zmniejszając z kolei pulsację sygnału, osiągniemy synchronizację generatora po zbliżeniu się do górnego krańca zakresu chwytania (punkt P_3 na rys.4.7). Wtedy napięcie u_o osiąga skokowo wartość $(\omega_0 + \Delta \omega_C)/k_G$, a pulsacja generatora VCO wynosi $(\omega_0 + \Delta \omega_C)$. Zerwanie synchronizacji nastąpi przy pulsacji sygnału równej $(\omega_0 - \Delta \omega_T)$, kiedy to zostanie osiągnięty dolny kraniec zakresu trzymania (punkt P_4 na rys.4.7).

4.4.2. Proces synchronizacji pętli pierwszego rzędu

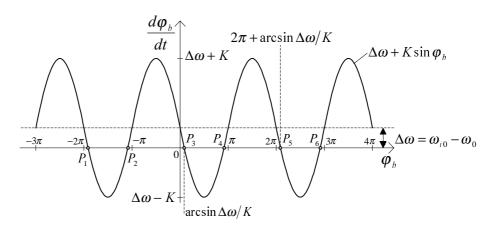
Pętla pierwszego rzędu nie zawiera filtru (praktycznie, zastosowany filtr dolnoprzepustowy ma pasmo szersze od zakresu trzymania). Transmitancji H(s) = 1 odpowiada $h(t) = \delta(t)$, wobec czego wyrażenie (4.48) przyjmuje postać

$$\frac{d\varphi_b(t)}{dt} = \Delta\omega - K\sin\left[\varphi_b(t)\right] \tag{4.51}$$

Istotne informacje o zachowaniu układu możemy otrzymać na podstawie odwzorowania równania (4.51) na płaszczyźnie o współrzędnych $d\phi_b(t)/dt$ i $\phi_b(t)$ zwanej *płaszczyzną fazową*.

Graficzne rozwiązanie równania (4.51) na płaszczyźnie fazowej otrzymujemy w postaci trajektorii fazowej, gdzie każdy punkt trajektorii obrazuje stan układu w chwili t (czas t jest parametrem). Jak pokazano na rys.4.8, otrzymana trajektoria jest sinusoidą przesuniętą na osi rzędnych o $\Delta\omega$.

Punkty w których trajektoria przecina oś odciętych są punktami odwzorowującymi stan równowagi układu $(d\varphi_b/dt=0)$. Spośród punktów widocznych na rys.4.8, punkty P_I , P_3 , P_5 są punktami równowagi trwałej, natomiast w punktach P_2 , P_4 , P_6 układ jest w stanie równowagi nietrwałej. Wynika to stąd, że jeśli $d\varphi_b/dt>0$, to $\varphi_b(t)$ musi wzrastać, jeśli natomiast $d\varphi_b/dt<0$, to $\varphi_b(t)$ musi maleć.



Rys.4.8. Odwzorowanie równania (4.51) na płaszczyźnie fazowej

Po zsynchronizowaniu pętla fazowa zawsze znajduje się w jednym ze stanów równowagi trwałej. Jak wynika z rys.4.8, warunkiem wystąpienia punktów równowagi trwałej jest, aby wstępne rozstrojenie $\Delta \omega$ było co najwyżej równe wzmocnieniu pętli K.

Jeżeli początkowy błąd fazy $\varphi_b(0)$ zawarty jest w przedziale

$$-\pi - \arcsin \frac{\Delta \omega}{K} < \varphi_b(0) < \pi - \arcsin \frac{\Delta \omega}{K}$$
 (4.52)

to najbliższym punktem równowagi trwałej jest punkt P_3 , którego współrzędna na osi φ_b wynosi

$$\varphi_{b0} = \arcsin \frac{\Delta \omega}{K} \tag{4.53}$$

Przebieg błędu fazy $\varphi_b(t)$ od wartości początkowej $\varphi_b(0)$ (określonej zależnością (4.47)) do wartości ustalonej φ_{b0} (określonej zależnością (4.53)) jest aperiodyczną funkcją czasu. Czas T_{ε} , po upływie którego błąd fazy zbliży się na odległość $|\varepsilon|$ do wartości ustalonej $\varphi_b(t=\infty)=\varphi_{b0}$, możemy wyznaczyć ze wzoru, który otrzymujemy przez odpowiednie scałkowanie równania (4.51)

$$T_{\varepsilon} = \int_{\varphi_b(0)}^{\varphi_{b0}+\varepsilon} \frac{1}{\Delta \omega - K \sin \varphi_b} d\varphi_b \tag{4.54}$$

przy czym:

$$\varepsilon < 0$$
 dla $\varphi_b(0) < \varphi_{b0}$

$$\varepsilon > 0$$
 dla $\varphi_b(0) > \varphi_{b0}$

Wielkość T_{ε} nazywamy czasem osiągania synchronizacji lub czasem chwytania (ang. acquisition time). Czas T_{ε} (przy ustalonym ε)

jest szczególnie długi, gdy $\varphi_b(0)$ ma wartość zbliżoną do współrzędnej stanu równowagi niestabilnej.

4.4.3. Proces synchronizacji petli drugiego rzedu

Bardzo często w pętli fazowej drugiego rzędu stosowany jest dolnoprzepustowy filtr proporcjonalno - całkujący o transmitancji

$$H_2(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + (\tau_1 + \tau_2) s} \tag{4.55}$$

Równanie różniczkowe opisujące pętlę fazową pobudzoną skokiem częstotliwości $\Delta \omega$ (tak samo jak w pętli pierwszego rzędu) i zawierającej filtr o transmitancji $H_2(s)$ ma postać

$$\frac{d^{2}\varphi_{b}(t)}{dt^{2}} + \frac{1 + \tau_{2} K \cos \varphi_{b}(t)}{\tau_{1} + \tau_{2}} \frac{d\varphi_{b}(t)}{dt} + \frac{K}{\tau_{1} + \tau_{2}} \sin \varphi_{b}(t) = \frac{\Delta \omega}{\tau_{1} + \tau_{2}}$$
(4.56)

Jeżeli $1/\tau_2 \ll K$, to równanie (4.56) upraszcza się do postaci

$$\frac{d^2 \varphi_b(t)}{dt^2} + 2 \xi \omega_n \cos \varphi_b(t) \frac{d \varphi_b(t)}{dt} + \omega_n^2 \sin \varphi_b(t) = \frac{\omega_n^2}{K} \Delta \omega \qquad (4.57)$$

Badanie procesu synchronizacji pętli drugiego rzędu, ze względu na nieliniowość równania różniczkowego (4.57), najlepiej jest prowadzić metodami numerycznymi. Niżej, proces ten zostanie opisany raczej poglądowo oraz zostaną przytoczone niektóre wyniki końcowe na podstawie literatury [45].

Przy tych samych założeniach jakie poczyniono przy analizie pętli pierwszego rzędu napięcie $u_o(t)$ na wejściu generatora VCO w momencie rozpoczęcia procesu synchronizacji określone jest zależnością

$$u_O(t) \approx k_D |H(\Delta \omega)| \sin(\Delta \omega t)$$
 (4.58)

Równanie (4.58) otrzymano na podstawie zależności (4.47), przy pominięciu początkowych faz sygnałów.

Sygnał $u_o(t)$ moduluje generator VCO, przy czym maksymalna odchyłka pulsacji $\omega_g(t)$ od ω_0 , zgodnie z zależnościami (4.6) i (4.58) wynosi

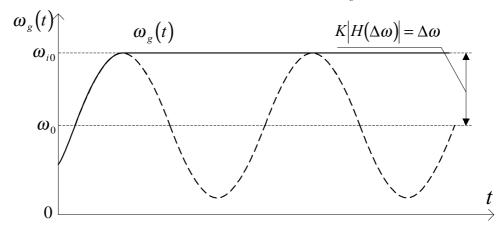
$$\left|\omega_{g}(t) - \omega_{0}\right|_{\text{max}} = k_{G} U_{O \max} \approx K \left|H(\Delta \omega)\right| \tag{4.59}$$

gdzie: $K = k_D k_G$ jest wzmocnieniem pętli.

Jeżeli maksymalna odchyłka $\omega_g(t)$ będzie równa lub większa od $\Delta\omega$ tzn., gdy spełniona zostanie nierówność

$$K |H(\Delta \omega)| \ge \Delta \omega \tag{4.60}$$

to wówczas, jak zaznaczono na rys.4.9, w ciągu jednego okresu $u_o(t)$ wystąpi moment zrównania się pulsacji $\omega_g(t)$ z pulsacją ω_{i0} i w chwili tej nastąpi synchronizacja przebiegów $u_i(t)$ i $u_g(t)$.



Rys.4.9. Osiąganie stanu synchronizacji w ciągu jednego okresu $u_o(t)$

Zakres pulsacji $\Delta\omega_L$ spełniający warunek

$$K|H(\Delta\omega_L)| = \Delta\omega_L \tag{4.61}$$

nazywamy zakresem chwytania, w którym następuje synchronizacja w ciągu jednego okresu $u_o(t)$ (ang. lock - in range).

Można wykazać, że przy zastosowaniu filtru o transmitancji $H_1(s)$ (równ.4.26) słuszna jest zależność

$$\Delta\omega_L \approx \omega_n \tag{4.62}$$

Natomiast w przypadku filtru o transmitancji $H_2(s)$ (równ. 4.28) otrzymuje się

$$\Delta\omega_L \approx 2\,\xi\,\omega_n\tag{4.63}$$

W obu przypadkach stan synchronizacji osiąga się po czasie

$$t_L \approx 1/\omega_n \tag{4.64}$$

W przypadku, gdy maksymalna odchyłka $\omega_g(t)$ od ω_0 (wyrażenie 4.59) jest mniejsza od początkowej różnicy pulsacji sygnałów $u_i(t)$ i $u_g(t)$, oznaczonej przez $\Delta\omega$, to początkowo nie

wystąpi w żadnym momencie zrównanie się pulsacji $\omega_g(t)$ oraz ω_{i0} tych sygnałów. Proces przeciągania pulsacji generatora VCO do pulsacji sygnału wejściowego ω_{i0} został opisany poglądowo w rozdz. 4.4.1. Składowa wolnozmienna $u_{D1}(t)$ na wyjściu detektora fazy ma postać

$$u_{D1}(t) = k_D \sin\left[\Delta\omega_r(t)t\right] \tag{4.65}$$

gdzie:
$$\Delta \omega_r(t) = \omega_{i0} - \omega_g(t)$$
 (4.65a)

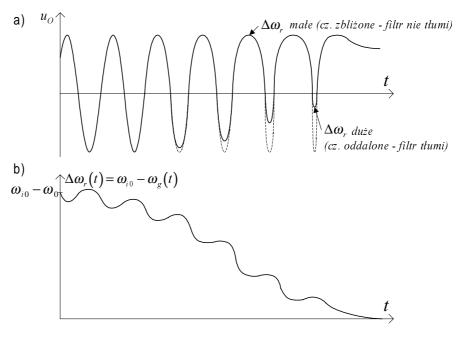
jest chwilową różnicą pulsacji sygnału wejściowego i generatora VCO. Wielkość ta zmienia się w czasie i tylko w momencie t=0 ma wartość $\Delta\omega_r(0) = \Delta\omega = \omega_{i0} - \omega_0$.

Napiecie przestrajające generator VCO ma teraz postać

$$u_{O}(t) = k_{D} \left| H[\Delta \omega_{r}(t)] \right| \sin \left[\Delta \omega_{r}(t) t \right]$$
(4.66)

przy czym pulsacja $\omega_{g}(t)$ nie zmienia się sinusoidalnie.

Kształt przebiegu napięcia $u_o(t)$ oraz wielkości $\Delta \omega_r(t)$ w procesie synchronizacji przedstawiono poglądowo na rys.4.10.



Rys.4.10. Proces synchronizacji pętli fazowej: a) przebieg napięcia $u_o(t)$, b) przebieg różnicy pulsacji $\Delta \omega_r(t) = \omega_{i0} - \omega_v(t)$

Część okresu przebiegu $u_o(t)$, kiedy $\Delta \omega_r(t)$ jest małe, jest dłuższa niż część okresu tego przebiegu, gdy $\Delta \omega_r(t)$ jest duże. Wynikiem tej asymetrii jest pojawienie się składowej wolnozmiennej przebiegu $u_o(t)$ i doprowadzenie w określonych warunkach do stanu

synchronizacji pętli. Początkowa różnica pulsacji $\Delta\omega = \Delta\omega_C$ sygnałów $u_i(t)$ i $u_g(t)$, przy której wystąpi jeszcze w układzie synchronizacja, jest zakresem chwytania. W języku angielskim, dla odróżnienia od przypadku omówionego poprzednio, stosuje się nazwę *pull - in range*.

Pomiędzy wielkościami $\Delta\omega_L$, $\Delta\omega_C$ i $\Delta\omega_T$ zachodzą relacje

$$\Delta\omega_{\scriptscriptstyle I} < \Delta\omega_{\scriptscriptstyle C} < \Delta\omega_{\scriptscriptstyle T} \tag{4.67}$$

Dla pętli drugiego rzędu zakres chwytania wynosi [45]

$$\Delta\omega_C \approx \frac{8}{\pi} \sqrt{K \,\xi \,\omega_n - \omega_n^2} \tag{4.68}$$

Czas trwania procesu synchronizacji określony jest zależnością

$$t_C \approx \frac{\left(\Delta\omega\right)^2}{2\,\xi\,\omega_n^2}\tag{4.69}$$

Czas synchronizacji t_C może być długi, gdy $\Delta \omega$ jest zbliżone do $\Delta \omega_C$.

4.5. SCALONE PETLE FAZOWE

Wszystkie bloki funkcjonalne tworzące pętlę fazową są łatwe do wytwarzania w technologii monolitycznej, stąd też, obecnie produkuje się wiele scalonych pętli fazowych pracujących w szerokim paśmie częstotliwości i wymagających minimalnej liczby elementów dołączanych z zewnątrz.

Głównymi elementami pętli fazowej są: generator przestrajany napięciem (lub prądem), detektor fazy oraz filtr dolnoprzepustowy.

4.5.1. Detektor fazy

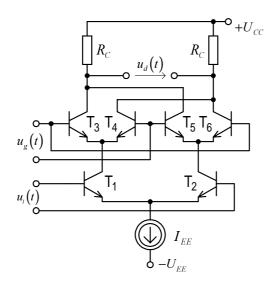
W scalonych układach PLL jako detektory fazy powszechnie stosuje się modulatory zrównoważone (najprostsze, uproszczone czteroćwiartkowe układy mnożące), opisane w rozdz. 3.2.5.2.

Wprowadzając nowe oznaczenia zmiennych (w rozdz. 3.2.5.2 modulator zrównoważony rozważano jako układ mnożący)

$$u_X(t) = u_i(t), \quad u_Y(t) = u_g(t)$$

przeanalizujemy trzy możliwe przypadki pod kątem wykorzystania modulatora jako detektora fazy.

Uproszczony schemat ideowy modulatora zrównowa żonego przedstawiono na rys.4.11.



Rys.4.11. Schemat ideowy modulatora zrównoważonego

Przypadek 1

$$\left|u_{i}(t)\right| << \varphi_{T}; \qquad \left|u_{g}(t)\right| << \varphi_{T}$$
 (4.70)

Dla układu z rys.4.11, zależność (3.26) przekształca się do postaci

$$u_D(t) = i_R(t) R_C = \frac{I_{EE} R_C}{4 \varphi_T^2} u_i(t) u_g(t)$$
(4.71)

Dla dwóch przebiegów przesuniętych w fazie

$$u_i(t) = U_i \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$u_g(t) = U_g \cos\omega_0 t$$

$$(4.72)$$

na podstawie zależności (4.71), (4.72) otrzymujemy charakterystykę układu jako detektora fazy

$$U_{D0} = \overline{u_D(t)} = \frac{I_{EE} R_C}{8 \varphi_T^2} U_g U_i \cos \varphi$$
 (4.73)

Przypadek 2

$$\left|u_{g}(t)\right| >> 2 \varphi_{T}; \qquad \left|u_{i}(t)\right| << 2 \varphi_{T} \tag{4.74}$$

Tranzystory T_3 - T_6 (rys.4.11) sterowane sygnałem $u_g(t)$ o dużej amplitudzie zachowują się w przybliżeniu jak sterowane klucze. Jeśli sygnał $u_g(t)$ ma wartość dodatnią, to wtedy tranzystory T_3 i T_6 można traktować jako klucze zwarte, a tranzystory T_4 i T_5 jako klucze rozwarte. Dla ujemnej wartości sygnału $u_g(t)$ tranzystory przyjmują stany przeciwne. W tym przypadku napięcie wyjściowe uzależnione jest tylko od poziomu napięcia $u_i(t)$. Przebieg napięcia wyjściowego jest wynikiem mnożenia sygnału $u_i(t)$ o małej amplitudzie z

synchronizowanym przebiegiem prostokątnym, którego amplituda jest duża i nie ma wpływu na wynik mnożenia. Odpowiednie przebiegi czasowe, przy sinusoidalnym przebiegu $u_i(t)$, przedstawiono na rys.4.12a.

Średnia wartość napięcia wyjściowego U_{D0} detektora wynosi

$$U_{D0} = \overline{u_D(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_D(t) d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\int_0^{\varphi} U_{Dm} \sin \omega t d(\omega t) + \int_{\varphi}^{\pi} U_{Dm} \sin \omega t d(\omega t) \right] =$$

$$= \frac{2U_{Dm}}{\pi} \cos \varphi$$
(4.75)
a)
$$u_g(t) \int_0^{\pi} \frac{2g_m R_c U_t}{\pi} dt$$

$$u_g(t) \int_0^{\pi} \frac{2g_m R_c U_t}{\pi} dt$$

$$u_g(t) \int_0^{\pi} \frac{2g_m R_c U_t}{\pi} dt$$

Rys.4.12. Modulator zrównoważony sterowany sygnałem sinusoidalnym i synchronizowany przebiegiem prostokątnym: a) przebiegi czasowe, b) charakterystyki detektora

Amplitudę U_{Dm} napięcia wyjściowego $u_D(t)$ można uzależnić od amplitudy U_i napięcia wejściowego $u_i(t)$.

$$U_{Dm} = g_m R_C U_i \tag{4.76}$$

gdzie: g_m jest transkonduktancją tranzystorów T_1 i T_2 .

Z równań (4.75), (4.76) otrzymujemy charakterystykę detektora (rys.4.12b)

$$U_{D0} = \frac{2 g_m R_C U_i}{\pi} \cos \varphi \tag{4.77}$$

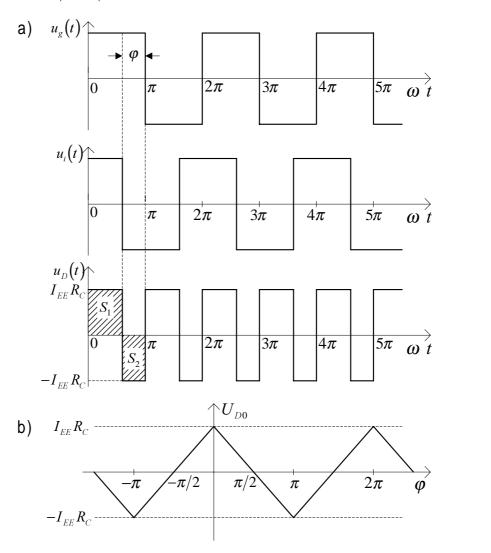
Maksymalne nachylenie charakterystyki detektora fazy wynosi

$$k_{D} = \frac{dU_{D0}}{d\phi} \bigg|_{\text{max}} = -\frac{2U_{i}}{\pi} g_{m} R_{C}$$
 (4.78)

Przypadek 3

$$\left|u_{i}(t)\right|, \quad \left|u_{g}(t)\right| >> 2 \, \varphi_{T}$$

$$\tag{4.79}$$



Rys.4.13. Modulator zrównoważony dla dużych amplitud sygnałów wejściowych: a) prostokątne sygnały sterujące, b) charakterystyka detektora

Jeżeli obydwa układy wejściowe mają odpowiednio duże amplitudy, to wszystkie tranzystory pracują jako dwustanowe klucze.

Po wymnożeniu odpowiednich prostokątnych przebiegów kluczujących (przełączających prąd I_{EE}) i po scałkowaniu otrzymujemy charakterystykę detektora. Odpowiednie przebiegi czasowe

przedstawiono na rys.4.13a.

Średnia wartość $U_{\scriptscriptstyle D0}$ napięcia wyjściowego detektora wynosi

$$U_{D0} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} u_{D}(t) d(\omega t) = I_{EE} R_{C} \frac{\pi - \varphi}{\pi} - I_{EE} R_{C} \frac{\varphi}{\pi} =$$

$$= I_{EE} R_{C} \left(1 - \frac{2 \varphi}{\pi} \right)$$
(4.80)

Przebieg charakterystyki $U_{D0}=f(\varphi)$ detektora fazy przedstawiono na rys.4.13b. Nachylenie charakterystyki detektora fazy w przedziale $0 \le \varphi \le \pi$ wynosi

$$k_D = \frac{dU_{D0}}{d\varphi} = -\frac{2 I_{EE} R_C}{\pi}$$
 (4.81)

4.5.2. Generatory przestrajane napięciem - VCO

Pętla fazowa działa poprawnie zarówno, gdy zostanie w niej zastosowany generator VCO drgań sinusoidalnych, jak również drgań prostokątnych. Jest to konsekwencją działania detektora fazy, który porównuje fazy przebiegów wejściowych, a nie ich kształty. W scalonych pętlach PLL stosuje się generatory VCO w postaci multiwibratorów wytwarzających przebiegi prostokątne. Spełniają one w zadowalający sposób wymagania stawiane generatorom VCO, takie jak:

- linowa zależność częstotliwości od napięcia,
- dobra stabilność częstotliwości,
- łatwość generowania w. cz.,
- duża sprawność energetyczna,
- szeroki zakres śledzenia,
- łatwość przestrajania.

Wśród multiwibratorów stosuje się najczęściej dwa układy: VCO typu integrator-przerzutnik i VCO typu multiwibrator z pojemno ściowym sprzężeniem emiterowym.

a) VCO typu integrator - przerzutnik

Schemat ideowy układu wraz z idealizowanymi przebiegami czasowymi napięć w układzie przedstawiono na rysunku 4.14. Międzyszczytowe wartości napięcia na kondensatorze, który okresowo jest ładowany i rozładowywany z regulowanych źródeł stałoprądowych, określone są progowymi napięciami komparatora z histerezą.

$$U_{p1,2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{k1,2} \tag{4.82}$$

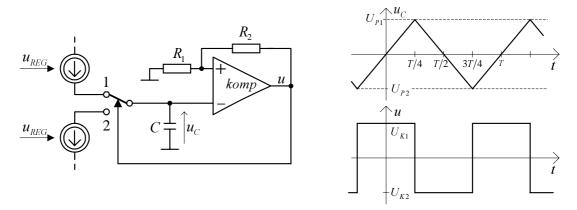
gdzie: $U_{k_{1,2}}$ - odpowiednio maksymalne i minimalne napięcie na wyjściu komparatora.

Częstotliwość generowanego przebiegu możemy wyznaczyć z warunku, że kondensator C przeładowywany jest stałym prądem I od progowej wartości napięcia U_{P1} do U_{P2} w ciągu połowy okresu T/2.

$$U_{P1} - U_{P2} = tg \ \alpha \frac{T}{2} = \frac{I}{C} \frac{T}{2}$$
 (4.83)

Skąd

$$f = \frac{1}{T} = \frac{I}{2 C (U_{P1} - U_{P2})} \tag{4.84}$$



Rys.4.14. VCO typu integrator - przerzutnik

Jak widać, częstotliwość drgań jest liniową funkcją prądu I. Zapewniając liniowe uzależnienie prądu I od napięcia sterującego u_{REG} otrzymujemy liniowa charakterystykę przestrajania generatora.

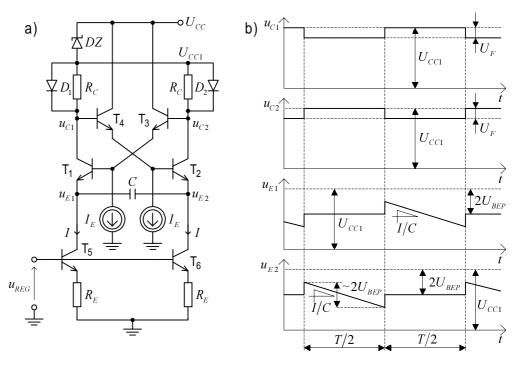
b) VCO typu multiwibrator z pojemnościowym sprzężeniem emiterowym - układ Bowesa - Grebene'a

Multiwibratory z pojemnościowym sprzężeniem emiterowym, wraz z ich licznymi modyfikacjami układowymi, pozwalają na generację przebiegów w szerokim zakresie częstotliwości - do kilkuset MHz, a nawet do 1 GHz. Układy te są najbardziej popularnymi rozwiązaniami generatorów VCO w scalonych pętlach fazowych.

Na rys.4.15a przedstawiono schemat ideowy multiwibratora z pojemnościowym sprzężeniem emiterowym, w którym zastosowano dodatkowe sprzężenie krzyżowe kolektorów i baz tranzystorów w celu

przyspieszenia procesu przerzutu w układzie.

Sprzężenie krzyżowe realizowane jest za pośrednictwem wtórników z tranzystorami T_3 , T_4 , zasilanych z oddzielnych źródeł prądowych I_E .



Rys.4.15. Generator VCO w zmodyfikowanym układzie Bowesa: a) schemat ideowy, b) idealizowane przebiegi czasowe napięć w układzie

Tranzystory T_1 , T_2 znajdują się na przemian w stanie odcięcia lub przewodzenia, wobec czego prąd I jednego ze źródeł prądowych w obwodach emiterów tych tranzystorów przepływa przez kondensator C raz w jednym, raz w drugim kierunku, wywołując na nim przebieg napięcia o kształcie trójkątnym. Tranzystory T_5 , T_6 o napięciu u_{REG} na bazach pełnią rolę źródeł prądowych w obwodach emiterów T_1 , T_2 o wartościach prądu I liniowo uzależnionych od napięcia sterującego u_{REG} . Diody D_1 , D_2 (tranzystory w połączeniu diodowym) ograniczają niepożądane zmiany amplitudy napięć na kolektorach tranzystorów T_1 , T_2 oraz ustalają poziomy napięć, przy których następuje załączenie tych tranzystorów. Na rys.4.15b przedstawiono przebiegi czasowe napięć w układzie.

Analizę pracy układu rozpoczniemy od momentu, w którym T_2 jest zatkany a T_1 przewodzi sumę prądów 2I. Wtedy napięcie na kolektorze T_1 jest mniejsze od napięcia zasilającego U_{CC1} o napięcie diody przewodzącej U_F , natomiast napięcie na jego emiterze jest mniejsze od U_{CC1} o $2U_{BEP} \approx 2U_F$ (przy pominięciu bardzo małego

spadku napięcia na rezystancji R_C od prądu bazy I_{B4} tranzystora T4). Wskutek przeładowywania kondensatora C potencjał emitera tranzystora T_2 obniża się z prędkością I/C, wskutek czego następuje jego odetkanie w chwili osiągnięcia poziomu: $u_{C1} - 2U_{BEP} \approx U_{CC1} - 3U_{BEP}$. Odetkanie tranzystora T_2 wywołuje regeneracyjny przerzut, w czasie którego tranzystor T_1 ulega zatkaniu, a sumę prądów 2I przewodzi tranzystor T_2 .

Skokowy zanik prądu kolektora T_1 wywołuje dodatni skok napięcia (o wartość $U_F \approx U_{BEP}$) na kolektorze, który przenosi się przez wtórnik T_4 i powoduje skokowy przyrost napięcia emitera tranzystora T_2 , a przez kondensator C również emitera tranzystora T_1 . Skokowa zmiana potencjału emitera T_2 do wartości $U_{CC1} - 2U_{BEP}$ jest utrzymywana, a wskutek przeładowywania kondensatora C zaczyna się obniżać potencjał emitera tranzystora T_1 .

Międzyszczytowa wartość napięcia trójkątnego na kondensatorze wynosi $2\,U_{\it BEP}$. W ciągu połowy okresu drgań multiwibratora kondensator ładuje się z prędkością I/C, a napięcie na nim zmienia się o wartość międzyszczytową $2\,U_{\it BEP}$. Stąd częstotliwość i okres drgań wynoszą

$$f = \frac{1}{T} = \frac{I}{4 U_{BEP} C} \tag{4.85}$$

Opisany układ umożliwia generację przebiegu prostokątnego o częstotliwości do 100 MHz dzięki pracy tranzystorów w obszarze aktywnym (bez wchodzenia w stan nasycenia). Napięcie wyjściowe jest przebiegiem prostokątnym o amplitudzie $U_{\it BE}$, przylegającym do napięcia $U_{\it CC1}$.

Częstotliwość drgań generatora jest zależna od temperatury, poprzez termiczną zależność napięcia U_{BE} $\left(dU_{BE} / dT_{\alpha} \approx -2 \text{ mV} / {}^{\circ}\text{C}\right)$.

Na podstawie zależności (4.85) otrzymujemy

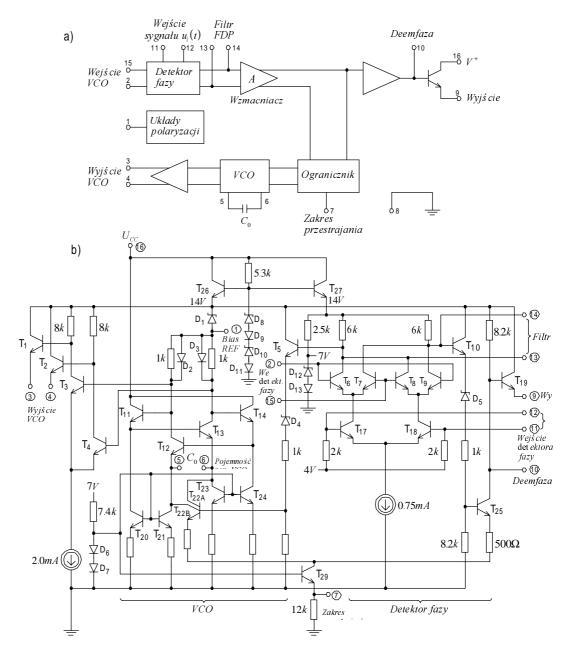
$$\frac{1}{\omega_0} \frac{d\omega_0}{dT_\alpha} = -\frac{1}{U_{BEP}} \frac{dU_{BEP}}{dT_\alpha} = \frac{2 \text{ mV} / {}^{\circ}\text{C}}{600 \text{ mV}} = 0,0033 \text{ 1} / {}^{\circ}\text{C} = 3300 \text{ ppm} / {}^{\circ}\text{C}$$
(4.86)

W układzie można uzyskać całkowitą kompensację termicznych zmian pulsacji środkowej poprzez uzależnienie prądu źródeł T₅, T₆ od temperatury. Charakterystyka przestrajania może być liniowa w zakresie 3 - 5 dekad.

Na identycznej zasadzie są budowane układy VCO z tranzystorami MOS z kanałem wzbogacanym.

4.5.3. Przykład realizacji układu scalonego PLL

Na rys.4.16 przedstawiono schemat blokowy i schemat ideowy układu PLL typu NE 562 firmy Signetics, wykonanego w monolitycznej technologii bipolarnej [62]. Schemat blokowy przedstawiony na rys.4.16a różni się od rozważanego wcześniej na rys.4.1 tym, że pętla zawiera dodatkowy wzmacniacz o wzmocnieniu A, dzięki czemu całkowite wzmocnienie pętli wynosi: $K = k_D k_G A$.



Rys.4.16. Pętla fazowa typu NE 562 firmy Signetics: a) schemat blokowy, b) schemat ideowy

Układ scalony składa się z detektora fazy w postaci modulatora

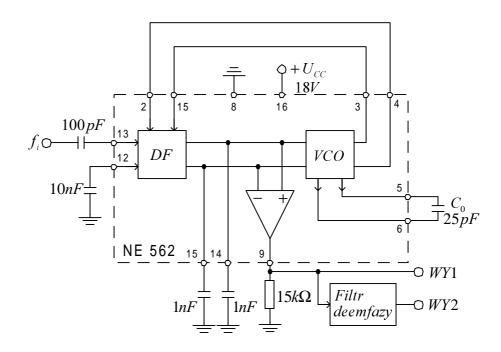
zrównoważonego, skompensowanego termicznie generatora VCO typu multiwibrator z pojemnościowym sprzężeniem emiterowym (układ Bowesa - Grebene'a), wzmacniacza i dołączonego zewnętrznie filtru.

Układ zasilany jest pojedynczym napięciem $U_{\rm CC}$, przy czym oddzielne, niższe napięcia zasilające generator VCO i detektor fazy wytwarzane są wewnętrznie przy pomocy tranzystorów T $_{26}$, T $_{27}$ i termicznie skompensowanych napięć odniesienia, zrealizowanych na diodach Zenera i tranzystorach w połączeniu diodowym.

Bazy tranzystorów T₁₇, T₁₈ detektora fazy są spolaryzowane wewnętrznie napięciem stałym 4 V, dlatego sygnał wejściowy $u_i(t)$ należy dołączyć poprzez zewnętrzne kondensatory sprzegające. W układzie nie ma stałego połaczenia generatora VCO z detektorem fazy. Połączenie to może być zrealizowane zewnętrznie, albo poprzez bezpośrednie połaczenie wyjść wtórnikowych generatora VCO (wyjścia 3, 4) z wejściami detektora fazy (wejście 2, 15), albo za pośrednictwem dodatkowego zewnętrznego dzielnika czestotliwości w celu poszerzenia zakresu częstotliwościowego generatora VCO. Tranzystory T₁ - T₄ zapewniają niskoimpedancyjne wyjście różnicowe generatora VCO. Generator VCO, zrealizowany na tranzystorach T₁₁ - T₂₉, sterowany jest z wyjścia różnicowego detektora fazy poprzez wtórniki emiterowe z tranzystorami T₅, T₁₀ i wzmacniacz różnicowy z tranzystorami T₂₅, T₂₂. Wzmacniacz różnicowy T₂₅, T₂₂ pełni rolę przetwornika napięcie - prąd, bowiem połowa prądu wyjściowego tranzystora T22 o podwójnym kolektorze jest zawsze częścią prądu ładowania pojemności emiterowej C_0 generatora VCO. W czasie, gdy przewodzi tranzystor T_{13} , kondensator C_0 jest ładowany prądem źródła stałoprądowego z tranzystorem T_{21} i prądem kolektora tranzystora T_{22B} , natomiast w czasie przewodzenia tranzystora T₁₂ prąd ładowania jest sumą prądu źródła stałoprądowego z tranzystorem T₂₃ i prądu wyjściowego tranzystora T_{22A} .

Częstotliwość własna generatora VCO jest zmieniana za pomocą pojemności C_0 w granicach od kilku Hz do 30 MHz. W celu pokazania połączeń aplikacyjnych na rys.4.17 przedstawiono schemat demodulatora FM z układem NE 562.

Na wyjściu demodulatora zastosowano również filtr deemfazy.



Rys.4.17. Schemat demodulatora FM z układem NE 562 firmy Signetics