Elaborazione dei segnali

Oudeys

December 7, 2024

Indice

Part I
Teoria dei segnali

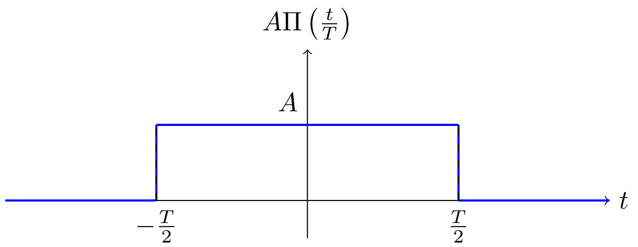
1 Proprietà dei segnali

Definizione 1.1 (Segnale causale)

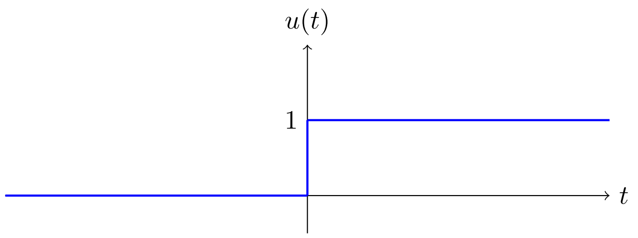
$$x(t) = \begin{cases} x_s(t) & \forall\ t \geq t_0 \\ 0 & \forall\ t < t_0 \end{cases}$$

1.1 Forme d'onda elementari

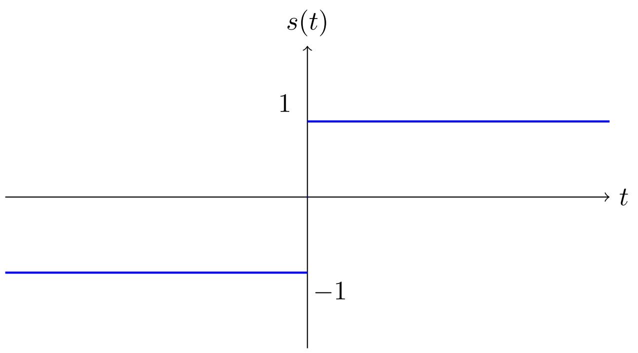
Definizione 1.2 (Funzione rettangolo simmetrico)
$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & \forall |t| < T/2 \\ 0 & \end{cases}$



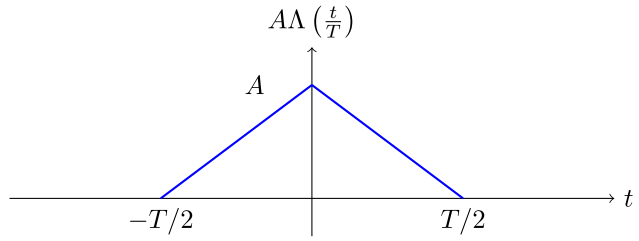
Definizione 1.3 (Funzione gradino unitario)
$u(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & \end{cases}$



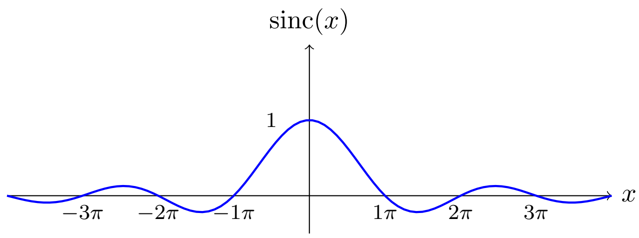
Definizione 1.4 (Funzione segno)
$s(t) = \begin{cases} 1 & \forall t > 0 \\ -1 & \forall t < 0 \end{cases}$



Definizione 1.5 (Funzione triangolo simmetrico)
$A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{A(T/2-|t|)}{T/2} & \forall t \leq T/2 \\ 0 & \end{cases}$

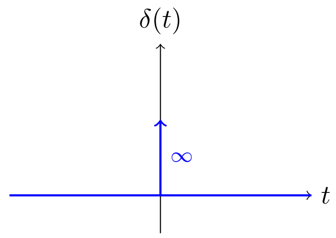


Definizione 1.6 (Funzione seno cardinale)
$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \forall x \neq 0, \\ 1 & \forall x = 0. \end{cases}$



Definizione 1.7 (Distribuzione impulso unitario - Delta di Dirac)

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} +\infty & \forall t = 0 \\ 0 & \end{cases}$$



i. $\forall \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$

ii. $\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t)$

Definizione 1.8 (Treno di impulsi)
$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

1.2 Manipolazione dei segnali

Definizione 1.9 (Traslazione temporale)

i. Ritardo
$$x(t - \Delta t)$$

ii. Anticipo
$$x(t + \Delta t)$$

Definizione 1.10 (Riscalamento temporale)

i. *Espansione*

$$x(kt) \quad \forall k < 1$$

ii. *Compressione*

$$x(kt) \quad \forall k > 1$$

Definizione 1.11 (Fattore di guadagno)

i. *Amplificazione*

$$kx(t) \quad \forall k > 1$$

ii. *Attenuazione*

$$kx(t) \quad \forall k < 1$$

Definizione 1.12 (Derivazione)

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Definizione 1.13 (Integrazione)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$

1.3 Statistiche dei segnali

Definizione 1.14 (Valor medio)

i.

$$< x(t) >_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{|t_2 - t_1|}\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

ii.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= < x(t) > \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt\end{aligned}$$

Definizione 1.15 (Valore quadratico medio)

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= < x(t)^2 > \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt\end{aligned}$$

Definizione 1.16 (Varianza)

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \overline{x^2} - x^{-2} \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - \overline{x})^2 dt\end{aligned}$$

Definizione 1.17 (Energia di un segnale)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt \qquad [Watt]$$

Definizione 1.18 (Potenza media di un segnale)

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt \qquad [Joule]$$

Definizione 1.19 (Segnale di energia)

$$\begin{cases} E_x = k \in \mathbb{R} \\ P_x = 0 \end{cases}$$

Definizione 1.20 (Segnale di potenza)

$$\begin{cases} E_x = \infty \\ P_x = k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Definizione 1.21 (Cross-correlazione)

i. *Cross-correlazione tra segnali di energia*

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

ii. *Cross-correlazione tra segnali di potenza*

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)dt$$

Definizione 1.22 (Autocorrelazione)

i. *Autocorrelazione per segnali di energia*

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

ii. *Autocorrelazione per segnali di potenza*

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

Proposizione 1.23 (Proprietà dell'Autocorrelazione)

i. *Segnali di potenza*

$$R_x(0) = \overline{x^2}$$

ii. *Segnali di energia*

$$R_x(0) = E_x$$

2 Sistemi analogici

Definizione 2.1 (Sistema)

$$\overline{y}(\overline{v}) = \varphi(\overline{x}(\overline{u}))$$

2.1 Sistemi lineari tempo invarianti

Definizione 2.2 (Sistemi LTI)

$$y(t) = f(x(t))$$

Proposizione 2.3 (Principio di sovrappozione degli effetti)

$$\begin{cases} f(x_1(t)) = y_1(t) \\ f(x_2(t)) = y_2(t) \end{cases} \Rightarrow f(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Definizione 2.4 (Tempo invarianza)

$$f(x(t)) = y(t) \Rightarrow f(x(t - t_0)) = y(t - t_0)$$

2.2 Risposta dei sistemi LTI

Definizione 2.5 (Integrale di convuluzione)

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} y_R(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= y(t) \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

Proposizione 2.6 (Proprietà della convoluzione)

i. Proprietà commutativa della convoluzione

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

ii. Proprietà associativa della convoluzione

$$x(t) * y(t) * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$$

iii. Proprietà distributiva della convoluzione

$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

2.3 Convoluzioni notevoli

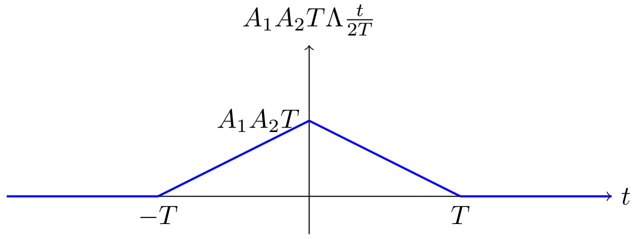
Proposizione 2.7 (Convoluzione di impulsi)

i.
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

ii.
$$x(t) * \delta(t - T) = x(t - T)$$

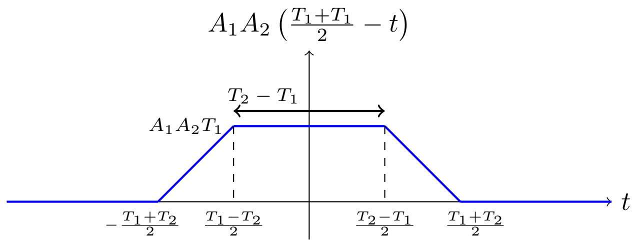
Proposizione 2.8 (Convoluzione di rettangoli simmetrici di pari durata)
$x_1(t) = A_1 \Pi(t/T)$
$x_2(t) = A_2 \Pi(t/T)$

$$x_1(t) * x_2(t) = A_1 A_2 T \Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$$



Proposizione 2.9 (Convoluzione di rettangoli simmetrici di diversa durata)
$\forall T_1 < T_2$

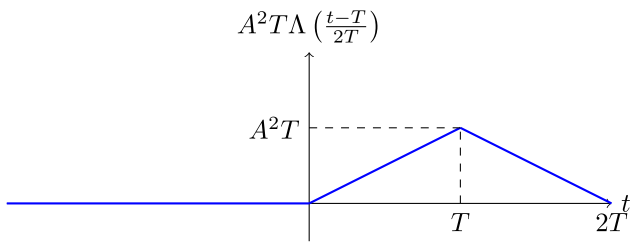
$$y(t) = A_1 A_2 \left(\frac{T_1 + T_1}{2} - t\right)$$



Proposizione 2.10 (Convoluzione di rettangoli non simmetrici di pari durarta e ampiezza)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t) \\ &= A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \\ &= A\Pi(t/T) * \delta(t - T/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= A\Pi(t/T) * \delta(t - T/2) * A\Pi(t/T) * \delta(t - T/2) \\ &= A\Pi(t/T) * A\Pi(t/T) * \delta(t - T/2) * \delta(t - T/2) \\ &= A^2 T \Lambda\left(\frac{t}{2T}\right) * \delta(t - T) \\ &= A^2 T \Lambda\left(\frac{t - T}{2T}\right) \end{aligned}$$



Proposizione 2.11 (Convoluzione di gaussiane)

$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$

$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

$$x_1(t) * x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{[t-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2(\sigma_2^2+\sigma_2^2)}}$$

Definizione 2.12 (Causalità di un sistema in base alla risposta impulsiva)
$\forall t < 0$

$$h(t) = 0$$

3 Serie di Fourier

3.1 Serie di Fourier

Definizione 3.1 (Serie di Fourier)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T_0} + \theta_k\right)$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

i. $f_0 = \frac{1}{T_0}$ *: frequenza fondamentale;*

ii. a_k *: armonica di ordine k;*

iii. a_0 *: componente continua.*

Definizione 3.2 (Serie di Forurier in forma complessa)
$\forall \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k) = (e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_k)})/2$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t}$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_k)}]/2$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

i. X_k *: coefficienti complessi della serie di Fourier.*

3.2 Coefficienti della serie di Fourier

Definizione 3.3 (Coefficienti di Fourier)

$$X_k = \begin{cases} \frac{a_k}{2} e^{j\theta_k} & k > 0 \\ \frac{a_{-k}}{2} e^{j\theta_{-k}} & k < 0 \\ a_0 & k = 0 \end{cases}$$
$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

i. $e^{-j2\pi k f_0 t}$ *: sinusoide complessa - fasore;*

ii. X_k *equivale alla cross-correlazione per segnali di potenza tra il segnale* $x(t)$ *ed il fasore* $e^{-j2\pi k f_0 t}$ *calcolato nell'origine.*

Definizione 3.4 (Coefficienti di Fourier per k=0)

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt$$

i. X_0 *equivale al valor medio di* $x(t)$.

3.3 Proprietà della serie di Fourier

Proposizione 3.5 (Proprietà della serie di Fourier)

i. Simmetria Hermitiana

$$X_n = -X_{-n}^* \Leftrightarrow \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \arg(X_n) = -\arg(X_{-n}) \end{cases}$$

ii. Linearità

$$z(t) = \alpha x(t) \beta y(t) \Rightarrow Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$

iii. Segnale pari

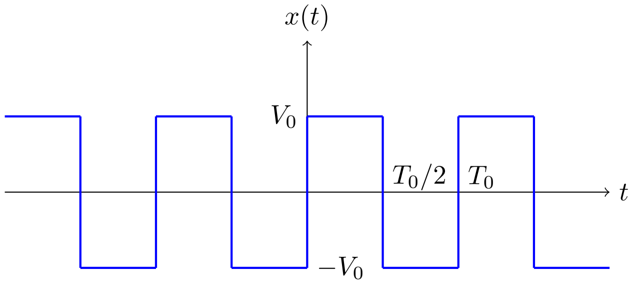
$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

iv. Segnale dispari

$$X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

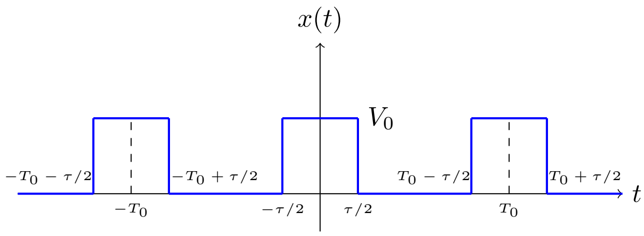
3.4 Coefficienti di forme d'onda notevoli

Proposizione 3.6 (Onda quadra)



$$X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$
$$= -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} V_0 \sin(2\pi k f_0 t) dt$$
$$= \left[j \frac{2V_0 \cos(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0 T_0} \right]_0^{T_0/2}$$
$$= \frac{jV_0}{\pi k} [\cos(\pi k) - 1]$$
$$= \frac{jV_0}{\pi k} [(-1)^k - 1]$$
$$= \begin{cases} 0 & k\, pari \\ \frac{-2jV_0}{\pi k} & k\, dispari \end{cases}$$

Proposizione 3.7 (Onda quadra con ritorno a zero)



$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt \\
&= \frac{2}{T_0}\int_0^{\tau/2} V_0\cos(2\pi k f_0 t)dt \\
&= \left[\frac{2V_0\sin(2\pi k f_0 t)}{T_0 2\pi k f_0}\right]_0^{\tau/2} \\
&= \frac{V_0\tau\sin(\pi k f_0 \tau)}{T_0\pi k f_0\tau} \\
&\frac{V_0\tau}{T_0}\operatorname{sinc}(k f_0 \tau)
\end{aligned}
$$

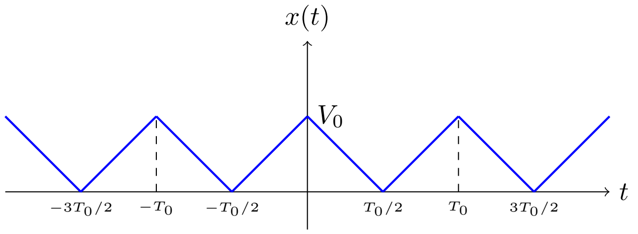
i. τ/T_0 *: duty cycle.*

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi n f_0 t}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right\} dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_n X_k \int_0^T e^{j2\pi(n+k)f_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_n X_{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2
\end{aligned}
$$

i. $\int_0^T e^{j2\pi(n+k)f_0 t}dt = \begin{cases} T & n+k=0 \\ 0 \end{cases}$

ii. La potenza media del segnale è pari alla somma delle potenze delle singole armoniche.

Proposizione 3.8 (Onda triangolare)



$$
\begin{aligned}
X_K &= \frac{2V_0}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt \\
&= \frac{2V_0}{T_0}\int_0^{T_0/2}\left(1-\frac{2V_0}{T_0}\cos(2\pi k f_0 t)dt\right) \\
&= \frac{2V_0}{T_0}\int_0^{T_0/2}\cos(2\pi k f_0 t)dt - \frac{4V_0}{T_0^2}\int_0^{T_0/2} t\cos(2\pi k f_0 t)dt \\
&= \frac{4V_0}{T_0^2}\left[\frac{t}{2\pi k f_0}\sin(2\pi k f_0 t)\Big|_0^{T_0/2} - \frac{1}{2\pi k f_0}\int_0^{T_0/2}\sin(2\pi k f_0 t)dt\right] \\
&= \frac{4V_0}{T_0^2(2\pi k f_0)^2}[1-\cos(\pi k)] \\
&= \frac{8V_0}{T_0^2(2\pi k f_0)^2}\sin^2(\pi k/2) \\
&= \frac{2V_0}{(\pi k)^2}\sin^2(\pi k/2) \\
&= \frac{V_0\sin^2(\pi k/2)}{2(\pi k/2)^2} \\
&= \frac{V_0}{2}\operatorname{sinc}^2(k/2)
\end{aligned}
$$

Teorema 3.9 (Teorema di Parseval)

4 Trasformata di Fourier

4.1 Dalla serie alla Trasformata di Fourier

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-kT_0}{\tau}\right) \leftrightarrow x_k = \frac{\tau}{T_0}\,\text{sinc}(kf_0\tau)$
$\forall\ \lim_{T_0\to\infty}\{x(t)\} = w(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(t-kT_0) \\ &= w(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0) \end{aligned}$$

Definizione 4.1 (Coefficiente di Fourier modificato)

$$\begin{aligned} X(kf_0) &= T_0 X_k \\ &\int_{-T_0/2}^{T_0/2} w(t)e^{-j2\pi kf_0 t}dt \end{aligned}$$

Definizione 4.2 (Serie di Fourier modificata)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)e^{j2\pi kf_0 t} f_0$$

$$\begin{aligned} \lim_{T_0\to\infty} x(t) &= w(t) \\ &= \lim_{f_0\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)e^{j2\pi kf_0 t} f_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \lim_{f_0\to 0} X(kf_0) \\ &= \lim_{\substack{T_0\to\infty \\ f_0\to 0}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} w(t)e^{-2\pi jkf_0 t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-j2\pi ft}dt \end{aligned}$$

4.2 Trasformata di Fourier

Definizione 4.3 (Trasformata di Fourier - Rappresentazione in frequenza)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Definizione 4.4 (Antitrasformata di Fourier- Ricostruzione nel tempo)

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Definizione 4.5 (Coppia di Fourier)

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

4.3 Proprietà della trasformata di Fourier

Proposizione 4.6 (Proprietà della trasformata di Fourier)

i. *Simmetria Hermitiana*

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow X(f) = X^*(-f)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\} \\ |X(f)| = |X(-f)| \\ \arg\{X(f)\} = -\arg\{X(-f)\} \end{cases}$$

ii. *Simmetria del segnale nel tempo*

$$x(-t) = x(t) \Rightarrow X(f) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt$$

$$x(-t) = -x(t) \Rightarrow X(f) = -2j\int_0^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt$$

iii. *Linearità*

$$\begin{cases} x(t) \leftrightarrow X(f) \\ y(t) \leftrightarrow Y(f) \end{cases} \Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow aX(f) + \beta Y(f)$$

iv. *Fattore di scala*

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

v. *Traslazione*

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(t-T) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi fT}$$

vi. *Dualità*

$$x(t) \to X(f) \Leftrightarrow X(t) \to x(-f)$$

vii. *Derivazione*

$$y(t) = \frac{d}{dx}x(t) \leftrightarrow Y(f) = j2\pi f \cdot X(f)$$

viii. *Integrazione*

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\zeta)d\zeta \leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

ix. *Convoluzione*

$$\begin{cases} x(t) \leftrightarrow X(f) \\ y(t) \leftrightarrow Y(f) \end{cases} \Rightarrow x(t) * y(t) = X(f) \cdot Y(f)$$

x. *Prodotto*

$$\begin{cases} x_1(t) \leftrightarrow X_1(f) \\ x_2(t) \leftrightarrow X_2(f) \end{cases} \Rightarrow x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

xi. Modulazione

$$X(f) = M(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] \\ = \frac{1}{2}\left[M(f-f_0) + M(f+f_0)\right]$$

4.4 Trasformate notevoli

Proposizione 4.7 (Rettangolo)

$$x(t) = V_0\Pi(t/T) \to X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} V_0 e^{-2\pi jft}dt \\ = \frac{V_0}{2\pi jf}[e^{\pi jfT} - e^{-\pi jfT}] \\ = \frac{V_0T[e^{\pi jfT} - e^{-\pi jfT}]}{2\pi jfT} \\ = V_0T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \\ = V_0T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

Proposizione 4.8 (Costante)

$$x(t) = V_0\Pi(t/T) \to X(f) = V_0T\,\mathrm{sinc}(fT) \\ \Rightarrow \lim_{T\to\infty} V_0\Pi(t/T) = V_0 \to V_0\delta(f)$$

Proposizione 4.9 (Esponenziale causale)
$\forall\alpha > 0$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\cdot 1(t) \to X(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cdot e^{-j2\pi ft}dt \\ = \int_0^\infty e^{-(\alpha+j2\pi f)t}dt \\ = -\frac{[e^{-(\alpha+j2\pi f)t}]_0^\infty}{\alpha + j2\pi f} \\ = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Proposizione 4.10

i.

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0t)] = \frac{1}{2}[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

ii.

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0t)] = \frac{j}{2}[\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$$

Proposizione 4.11 (δ di Dirac)

i.

$$\delta(t) \to 1$$

ii.

$$\delta(t-\Delta T) \to e^{-j2\pi f\Delta T}$$

iii.

$$\delta'(t-\Delta T) \to j2\pi fe^{-j2\pi f\Delta T}$$

Proposizione 4.12 (Gradino unitario)

$$1(t) \to \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

Proposizione 4.13

$$Af_0\int_{-\infty}^{t}\sin(f_0\zeta)d\zeta \to \frac{A\pi(f/f_0)}{j2\pi f} + \frac{A}{2}\delta(f)$$

Proposizione 4.14 (Seno cardinale)

$$A\,\mathrm{sinc}(\alpha t) \to \frac{A}{\alpha}\Pi(f/\alpha)$$

Proposizione 4.15 (Trasformate notevoli)

i.

$$\mathcal{F}\left[V_0\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = V_0T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

ii.

$$\mathcal{F}[V_0] = V_0\delta(f)$$

iii.

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

iv.

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0t)] = \frac{1}{2}[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

v.

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0t)] = \frac{j}{2}[\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$$

4.5 Trasformata di Fourier di segnali periodici

Definizione 4.16 (Rappresentazione alternativa del generico segnale periodico)

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} w(t-\eta T) \\ = w(t) * \sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\eta T)$$

Definizione 4.17 (Trasformata di Fourier di segnali periodici)

$$X(f) = W(f)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-k/T) \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}W(K/T)\delta(f-k/T)$$

4.6 Energia nel dominio delle frequenze

Teorema 4.18 (Teorema di Rayleigh)

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df
\end{aligned}
$$

Definizione 4.19 (Densità spettrale di energia)

$$E(f) = |X(f)|^2$$

5 Sistemi analogici in frequenza

5.1 Risposta in frequenza

Definizione 5.1 (Risposta impulsiva)
$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

Definizione 5.2 (Risposta in frequenza ad un fasore)
$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

$$\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\zeta) e^{j2\pi f_0 (t-\zeta)} d\zeta \\
&= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\zeta) e^{-j2\pi f_0 \zeta} d\zeta \\
&= x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\zeta) e^{-j2\pi f_0 \zeta} d\zeta \\
\Rightarrow \frac{y(t)}{x(t)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\zeta) e^{-j2\pi f_0 \zeta} d\zeta \\
&= \mathcal{F}\{h(t)\}|_{f=f_0} \\
&= H(f_0)
\end{aligned}$$

Definizione 5.3 (Risposta in ampiezza)

$$|H(f)|$$

Definizione 5.4 (Risposta in fase)

$$\Phi(f) = \arg[H(f)]$$

Definizione 5.5 (Ritardo di gruppo)

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} \Phi(f)$$

5.2 Composizione di funzioni di trasferimento

Definizione 5.6 (Sequenza)

$$\begin{aligned}
Y(f) &= [X(f) \cdot H_1(f)] \cdot H_2(f) \\
&= X(f) \cdot [H_1(f) \cdot H_2(f)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow H_{eq}(f) &= \frac{Y(f)}{X(f)} \\
&= H_1(f) \cdot H_2(f)
\end{aligned}$$

Definizione 5.7 (Parallelo)

$$\begin{aligned}
Y(f) &= X(f) \cdot H_1(f) \pm X(f) \cdot H_2(f) \\
&= X(f) \cdot [H_1(f) \pm H_2(f)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{eq}(f) &= \frac{Y(f)}{X(f)} \\
&= H_1(f) \pm H_2(f)
\end{aligned}$$

Definizione 5.8 (Retroazione negativa)

$$\begin{aligned}
Y(f) &= [X(f) - Y(f) \cdot H_2(f)] \cdot H_1(f) \\
&= X(f) \cdot H_1(f) - Y(f) \cdot H_1(f) \cdot H_2(f)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(f)[1 + H_1(f) \cdot H - 2(f)] = X(f) \cdot H_1(f)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_{eq}(f) &= \frac{Y(f)}{X(f)} \\ &= \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)} \end{aligned}$$

5.3 Banda passante di un sistema LTI

Definizione 5.9 (Guadagno di un sistema in funzione della frequenza)

$$G(f) = |H(f)|$$

Definizione 5.10 (Banda passante)
$\forall\, G_{dB} = 10 \log_{10} G = -3dB \Rightarrow G = 10^{-\frac{3}{10}} \approx \frac{1}{2}$

$$B = f_{max} : G_{dB}(f_{max}) \geq -3dB$$

5.4 Filtri LTI

Definizione 5.11 (Risposta di un filtro ideale)

$$H(f) = \begin{cases} ke^{-j2\pi ftd} & f_1 < f < f_2 \\ 0 \end{cases}$$

Definizione 5.12 (Filtro passa-tutto (APF))

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = \infty \end{cases}$$

Definizione 5.13 (Filtro passa-basso (LPF))

$$|f| < f_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 > 0 \end{cases}$$

Definizione 5.14 (Filtro passa-alto (HPF))

$$|f| > f_1 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 > 0 \\ f_2 = \infty \end{cases}$$

Definizione 5.15 (Filtro passa-banda (BPF))

$$f_1 < |f| f_2 \Leftrightarrow$$

Definizione 5.16 (Filtro non causale)
$\forall\, t < 0$

$$h(t) \neq 0$$

Definizione 5.17 (Regola della banda frazionaria)

$$B = \frac{\Delta f}{f_1}$$

Definizione 5.18 (Analizzatore di spettro)
$$\begin{aligned} X(f) &= X_1(f) + \ldots + X_n(f) \\ &= X(f)H_0(f) + \ldots + X(f)H_n(f) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(f)df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X_0^2(f)df + \ldots + \int_{-\infty}^{+\infty} X_n^2(f)df \\
&= 2\int_{0}^{f_0} X^2(f)df + 2\int_{f_0}^{f_1} X^2(f)df + \ldots + 2\int_{f_{n-1}}^{\infty} X^2(f)df \\
&= E_0 + \ldots + E_n
\end{aligned}
$$

6 Distorsione e equalizzazione

6.1 Sistemi non distorcenti

Definizione 6.1 (Canale ideale)

$$H_{ci}(f) = ke^{-j2\pi f t_0}$$

6.2 Distorsione lineare

6.3 Equalizzazione

Definizione 6.2 (Equalizzazione)

$$\begin{aligned} H_{TOT}(f) &= H_S(f) \cdot H_{EQ}(f) \\ &= ke^{-j2\pi f t_0} \\ \Rightarrow H_{EQ}(f) &= \frac{H_{TOT}(f)}{H_S(f)} \\ &= \frac{ke^{-j2\pi f t_0}}{H_S(f)} \end{aligned}$$

Definizione 6.3 (Distorsione multi-path)

6.4 Distorsioni non lineari

7 Conversione AD-DA

7.1 Campionamento ideale

Definizione 7.1 (Campione ideale)
$\forall\, T_c : periodo\, di\, campionamento$

$$x[n] = x(nT_c)$$

Definizione 7.2 (Campionamento ideale)

$$\begin{aligned} x_c(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c) \end{aligned}$$

7.2 Spettro del segnale campionato

Definizione 7.3 (Spettro del segnale campionato)

$$\begin{aligned} X_c(f) &= X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c) \\ &= \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_c) \end{aligned}$$

7.3 Teorema del campionamento

Teorema 7.4 (Condizione di Nyquist)

$$f_c \geq 2f_{max}$$

Definizione 7.5 (Sovracampionamento)
$\forall\, \epsilon :\; banda\, di\, guardia$

$$f_c = 2f_{max} + \epsilon$$

7.4 Ricostruzione del segnale continuo

7.5 Interpolazione dei campioni

7.6 Sample and Hold

Definizione 7.6 (Sample and Hold)
$x_{sh}(t) = x_c(t) * h_H(t)$
$\Rightarrow X_{sh}(f) = X_C(f) \cdot H_H(f)$

$$H_{eq}(f) = \begin{cases} \frac{1}{H_H(f)} & |f| < f_{max} \\ 0 \end{cases}$$

7.7 Quantizzazione

Definizione 7.7 (Quantizzazione)
$\forall \begin{cases} x(nT_c) & segnale\, campionato \\ x_q(nT_c) & segnale\, quantizzato \\ \epsilon_q(nT_c) & errore\, di\, quantizzazione \end{cases}$

$$x(nT_c) = x_q(nT_c) + \epsilon_q(nT_c)$$

Definizione 7.8 (Quantizzatore uniforme)

$$\Delta = \frac{2}{M} \Rightarrow |\epsilon_{q_{max}}| = \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{M}$$

7.8 Rumore di quantizzazione

Definizione 7.9 (Rumore di quantizzazione)

$$\begin{aligned} E\{\epsilon_q^2\} &= \sigma_q^2 \\ &= \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \epsilon^2 f_{\epsilon_q}(\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \epsilon^2 d\epsilon \\ &= \frac{1}{\Delta} \frac{\epsilon^3}{3} |_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \\ &= \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

7.9 Rapporto segnale-rumore

Definizione 7.10 (Rapporto segnale-rumore)

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{S_x}{S_n} \quad [dB]$$

Definizione 7.11 (Segnale-Rumore del quantizzatore uniforme)

$$\begin{aligned} E\{x^2\} &= \sigma_x^2 \\ &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} x^2 f_x(x) dx \\ &= \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} x^2 dx \\ &= \frac{A^2}{12} \\ \Rightarrow \frac{S}{N} &= 10 \log_{10} \frac{\frac{A^2}{12}}{\frac{\Delta^2}{12}} \\ &= 10 \log_{10} \frac{A^2}{\Delta^2} dB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SNR &= 10 \log_{10} \frac{A^2}{\frac{A^2}{2^{2B}}} \\ &= 10 \log_{10} (2^{2B}) \\ &= 10 \frac{\log_2 2^{2B}}{\log_2 10} \\ &\approx 10 \frac{2B}{3.32} \\ &\approx 6B \end{aligned}$$

i. $\forall \, \Delta = A/M$

ii. $\forall \, M = 2^B$: *numero livelli quantizzatore*

iii. $\forall \, B = \log_2 M$: *numero bit quantizzatore*

7.10 Algoritmo di Lloyd-Max

7.11 Codificatore PCM

7.12 Bitrate

Definizione 7.12 (Bitrate)

$$r_b = N \cdot \log_2 M = N \cdot B \quad [bit/s]$$

7.13 Modulazione delta

8 Sistemi e filtri digitali

8.1 Proprietà dei segnali discreti

Definizione 8.1 (Simmetria)

i. *Pari*

$$x[n]x[-n]\forall n$$

ii. *Dispari*

$$x[n] = -x[-n]\forall n$$

Definizione 8.2 (Guadagno)

i. *Amplificazione*

$$\alpha x[n] : \alpha > 1$$

ii. *Attenuazione*

$$\alpha x[n] : \alpha < 1$$

Definizione 8.3 (Ritardo)

$$x[n-k]$$

Definizione 8.4 (Integrazione)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Definizione 8.5 (Derivazione)

$$y[n] = \frac{1}{T_c}(x[n] - x[n-1])$$

Definizione 8.6 (Valor medio)

$$\overline{x} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} x[k]$$

Definizione 8.7 (Varianza)

$$\sigma_x^2 = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} [x[n] - \overline{x}]^2$$

Definizione 8.8 (Segnali discreti di energia)
$\forall E_x \neq \infty$

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^2[k]$$

Definizione 8.9 (Segnali discreti di potenza)
$P_x \neq 0$

$$P_x = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} x^2[k]$$

Definizione 8.10 (Cross-correlazione)

i. *Segnali discreti di energia*

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n+k]$$

ii. *Segnali discreti di potenza*

$$R_{xy}(k) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{n=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} x[n]y[n+k]$$

Definizione 8.11 (Auto-correlazione)

i. *Segnali discreti di energia*

$$R_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n+k]$$

ii. *Segnali discreti di potenza*

$$R_x(k) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{n=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} x[n]x[n+k]$$

Definizione 8.12 (Istogramma)
$\forall\, l = 1, \ldots, L$

$$h[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \begin{cases} 1 & \forall\, x[n] = v(l) \\ 0 & \end{cases}$$

Proposizione 8.13 (Calcolo delle statistiche da istogramma)

i. *Valor meio*

$$\overline{x} = \sum_{l=1}^{L} v[l] \cdot h[l]$$

ii. *Varianza*

$$\sigma_x^2 = \sum_{l=1}^{L} (v[l] - \overline{x})^2 \cdot h[l]$$

8.2 Sistemi numerici LTI

Definizione 8.14 (Linearità)

$$\begin{cases} f(x_1[n]) = y_1[n] \\ f(x_2[n]) = y_2[n] \end{cases} \Rightarrow f(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

Definizione 8.15 (Tempo invarianza)

$$f(x[n]) = y[n] \Rightarrow f(x[n-k]) = y[n-k]$$

8.3 Impulso di Kronecker

Definizione 8.16 (Impulso di Kronecker)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \end{cases}$$

i.

$$\sum \delta[n] = 1$$

ii.
$$\delta[n] = \delta[-n]$$

iii.
$$x[n] \cdot \delta[n-k] = x[k]$$

8.4 Risposta all'impulso discreto

8.5 Convoluzione discreta

Definizione 8.17 (Convoluzione discreta)

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

Definizione 8.18 (LPF a media mobile)

$$\begin{aligned} h[k] &= \left[\frac{1}{K} \cdots \frac{1}{K}\right] \\ &= \frac{1}{K} \cdot [1 \ldots 1] \end{aligned}$$

Definizione 8.19 (LPF gaussiano)
$\forall\, k \in \left[-\frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right]$

$$h[k] = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$$

i. $\forall\, \lambda = \sum_k^{max} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$ *: fattore di normalizzazione*

ii. $\forall\, K$ *: proporzionale alla deviazione standard*

Definizione 8.20 (Filtro gradiente)

$$h_{HPF}[k] = [-1\,1]$$

Definizione 8.21 (Filtro Laplaciano)

$$h[k] = [0\ -1\,2\ -1\,0]$$

Definizione 8.22 (Filtri di rango)

i. Massimo
$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq N \\ 1 & i = N \end{cases}$$

ii. Minimo
$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq 1 \\ 1 & i = 1 \end{cases}$$

iii. Mediano
$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq N/2 \\ 1 & i = N/2 \end{cases}$$

9 Segnali e sistemi digitali in frequenza

9.1 Rappresentazione di segnali discreti in frequenza

Definizione 9.1 (Trasformata discreta di Fourier - DFT)
$\forall\, k = 0, \dots, N-1$

$$X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Definizione 9.2 (Antitrasformata discreta di Fourier - IDFT)
$\forall\, n = 0, \dots, N-1$

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Definizione 9.3 (Convoluzione circolare)
$\forall\, y[\dots]_N$: *periodizzazione di* $y[n]$

$$\begin{aligned} w[n] &= x[n] \circledast y[n] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[(n-k)]_N \end{aligned}$$

Teorema 9.4 (Teorema di convoluzione discreto)

$$\begin{gathered} x[n] \circledast h[n] \\ \leftrightarrow \\ X[k] \cdot H[k] \end{gathered}$$

9.2 Risposta in frequenza di sistemi discreti

Definizione 9.5 (Trasformata veloce di Fourier - FFT)

10 Segnali e sistemi in più dimensioni

Definizione 10.1 (Segnali multidimensionali)

$$\vec{x}(v_1, \ldots, v_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$$

Definizione 10.2 (Sistemi multidimensionali)
$\forall\, \vec{x}(\vec{u}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$
$\forall\, \vec{y}(\vec{v}) : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^L$

$$\vec{y}(\vec{v}) = f(\vec{x}(\vec{u}))$$

Definizione 10.3 (Sistemi multidimensionali lineari-dominio-invarianti (LDI))

i. Linearità
$\forall\, \alpha,\, \beta$

$$\begin{cases} f(i(\vec{v})) = \hat{i}(\vec{v}) \\ f(j(\vec{v})) = \hat{j}(\vec{v}) \end{cases} \Rightarrow f(\alpha i(\vec{v}) + \beta j(\vec{v})) = \alpha \hat{i}(\vec{v}) + \beta \hat{j}(\vec{v})$$

ii. Tempo invarianza
$\forall\, \vec{v}_0$

$$f(i(\vec{v})) = \hat{i}(\vec{v}) \Rightarrow f(i(\vec{v} - \vec{v}_0)) = \hat{i}(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

Definizione 10.4 (Risposta di sistemi LDI)

$$\begin{aligned} y(v_1, \ldots, v_N) &= x(v_1, \ldots, v_N) * h(v_1, \ldots, v_N) \\ &= \int_{\lambda_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{\lambda_N=-\infty}^{+\infty} x(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \cdot h(v_1 - \lambda_1, \ldots, v_N - \lambda_N) \partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_N \end{aligned}$$

Definizione 10.5 (Trasformata di Fourier multidimensionale)

$$X(f_1, \ldots, f_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} x(v_1, \ldots, v_N) e^{j2\pi(f_1 v_1 + \ldots + f_N v_N)} dv_1 \ldots v_N$$

Definizione 10.6 (Antitrasformata di Fourier multidimensionale)

$$x(v_1, \ldots, v_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f_1, \ldots, f_N) e^{j2\pi(f_1 v_1 + \ldots + f_N v_N)} df_1 \ldots df_N$$

Teorema 10.7 (Teorema di convoluzione per sistemi LDI)

$$\begin{gathered} y(v_1, v_2, \ldots, v_N) = x(v_1, v_2, \ldots, v_N) * h(v_1, v_2, \ldots, v_N) \\ \leftrightarrow \\ Y(f_1, \ldots, f_N) = X(f_1, \ldots, f_N) \cdot H(f_1, \ldots, f_N) \end{gathered}$$

Definizione 10.8 (Risposta di sistemi digitali multidimensionali)

$$\begin{aligned} y[n_1, \ldots, n_N] &= x[n_1, \ldots, n_N] * h_{DW}[n_1, \ldots, n_N] \\ &= \sum_{k_1=-K_1/2}^{K_1/2} \ldots \sum_{k_N=-K_K/2}^{K_K/2} x[k_1, \ldots, k_N] h_{DW}[n_1 - k_1, \ldots, \ldots, n_N - k_N] \end{aligned}$$

Definizione 10.9 (DFT multidimensionale)

$$X[k_1, \ldots, k_N] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \ldots \sum_{n_N=0}^{N_N-1} x[n_1, \ldots, n_N] \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{k_1 n_1}{N1} + \ldots + \frac{k_N n_N}{N_N}\right)}$$

Definizione 10.10 (IDFT multidimensionale)

$$x[n_1, \ldots, n_N] = \frac{1}{N_1 \cdot \ldots \cdot N_N} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \ldots \sum_{k_N=0}^{N_N-1} X[k_1, \ldots, k_N] \cdot e^{j2\pi\left(\frac{k_1 n_1}{N1} + \ldots + \frac{k_N n_N}{N_N}\right)}$$

Teorema 10.11 (Teorema di convoluzione discreto multidimensionale)

Part II

Appendice

A Trigonometria

x	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	$\arctan x$
0	1	0	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{3}+2$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\nexists$	0
π	-1	0	0	$\nexists$
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	$\nexists$	0
2π	1	0	0	$\nexists$

B Derivate

Funzione	**Derivata**
$f(x)$	$\frac{d}{dx}\lvert f(x)\rvert = \frac{f(x)}{\lvert f(x)\rvert}$
$\log f(x)$	$\frac{d}{dx}[\log f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log_a f(x)$	$\frac{d}{dx}[\log_a f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)\cdot\log(a)}$
$a^{f(x)}$	$\frac{d}{dx}[a^{f(x)}] = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \log(a)$
$e^{f(x)}$	$\frac{d}{dx}[e^{f(x)}] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$g(x)^{f(x)}$	$\frac{d}{dx}[g(x)^{f(x)}] = g(x)^{f(x)} \cdot \frac{d}{dx}[f(x) \cdot \log g(x)]$
$f(x)^n$	$\frac{d}{dx}[f(x)^n] = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt[n]{f(x)^p}$	$\frac{d}{dx}[\sqrt[n]{f(x)^p}] = \frac{p\cdot f'(x)}{n\cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-p}}}$
$\sin(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\sin(f(x))] = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
$\cos(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\cos(f(x))] = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
$\tan(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\tan(f(x))] = (\tan^2(f(x)) + 1) \cdot f'(x)$
$\arcsin(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\arcsin(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$\arccos(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\arccos(f(x))] = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$\arctan(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\arctan(f(x))] = \frac{f'(x)}{f^2(x)+1}$
$\cot(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\cot(f(x))] = (-\cot^2(f(x)) - 1) \cdot f'(x)$
$\sinh(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\sinh(f(x))] = \cosh(f(x)) \cdot f'(x)$
$\cosh(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\cosh(f(x))] = \sinh(f(x)) \cdot f'(x)$
$\tanh(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\tanh(f(x))] = (1 - \tanh^2(f(x))) \cdot f'(x)$
$\mathrm{arcsinh}(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\mathrm{arcsinh}(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$
$\mathrm{arccosh}(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\mathrm{arccosh}(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)-1}\sqrt{f(x)+1}}$
$\mathrm{arctanh}(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\mathrm{arctanh}(f(x))] = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$
$\mathrm{arccot}(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\mathrm{arccot}(f(x))] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)+1}$
$\coth(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\coth(f(x))] = -\frac{f'(x)}{\sinh^2(f(x))}$
$\mathrm{arccoth}(f(x))$	$\frac{d}{dx}[\mathrm{arccoth}(f(x))] = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$

C Integrali

Funzione	Primitiva
$\int [f(x)]^b f'(x)\,dx$	$\frac{f(x)^{b+1}}{b+1} + c$
$\int \left[\frac{1}{f(x)}\right] f'(x)\,dx$	$\log\lvert f(x)\rvert + c$
$\int [e^{f(x)}] f'(x)\,dx$	$e^{f(x)} + c$
$\int [a^{f(x)}] f'(x)\,dx$	$\frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$
$\int [\log(f(x))] f'(x)\,dx$	$f(x)\log f(x) - f(x) + c$
$\int [\log_a(f(x))] f'(x)\,dx$	$f(x)\log_a f(x) - \frac{f(x)}{\log a} + c$
$\int [\sin(f(x))] f'(x)\,dx$	$-\cos f(x) + c$
$\int [\cos(f(x))] f'(x)\,dx$	$\sin f(x) + c$
$\int [\tan(f(x))] f'(x)\,dx$	$-\log(\cos(f(x))) + c$
$\int [\cot(f(x))] f'(x)\,dx$	$\log(\sin(f(x))) + c$
$\int [\arcsin(f(x))] f'(x)\,dx$	$\sqrt{1-f(x)^2} + f(x)\arcsin(f(x)) + c$
$\int [\arccos(f(x))] f'(x)\,dx$	$-\sqrt{1-f(x)^2} + f(x)\arccos(f(x)) + c$
$\int [\arctan(f(x))] f'(x)\,dx$	$f(x)\arctan(f(x)) - \frac{\log(f(x)^2+1)}{2} + c$
$\int [\sinh(f(x))] f'(x)\,dx$	$\cosh f(x) + c$
$\int [\cosh(f(x))] f'(x)\,dx$	$\sinh f(x) + c$
$\int [\tanh(f(x))] f'(x)\,dx$	$f(x) - \log(\tanh(f(x)) + 1) + c$
$\int [\text{arcsinh}(f(x))] f'(x)\,dx$	$-\sqrt{f(x)^2+1} + f(x)\text{arcsinh}(f(x)) + c$
$\int \left[\frac{1}{\cos^2(f(x))}\right] f'(x)\,dx$	$\tan(f(x)) + c$
$\int \left[\frac{1}{\sin^2(f(x))}\right] f'(x)\,dx$	$-\cot(f(x)) + c$
$\int \left[\frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\right] f'(x)\,dx$	$\arcsin(f(x)) + c$
$\int \left[\frac{1}{1+f(x)^2}\right] f'(x)\,dx$	$\arctan(f(x)) + c$

D Integrali di convoluzione

E Serie di Fourier

F Trasformata di Fourier

Funzione	Trasformata
$V_0\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$V_0 T\,\text{sinc}(fT)$
V_0	$V_0\delta(f)$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha+j2\pi f}$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2}[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$

F.1 Dimostrazione della proprietà di convoluzione della trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[X_1(f) \cdot X_2(f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f) X_2(f) e^{j2\pi f t} df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\zeta) e^{-j2\pi f \zeta} d\zeta \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\eta) e^{-j2\pi f \eta} d\eta \right] \cdot e^{j2\pi f t} df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\eta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f (t-\zeta-\eta)} df \right] d\eta d\zeta \\
&= \int x_1(\zeta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\eta) \delta(t-\zeta-\eta) d\eta \right] d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\zeta) x_2(t-\zeta) d\zeta \\
&= (x_1 * x_2)(t)
\end{aligned}$$