

Algebra elementare

Oudeys

September 23, 2024

Abstract

Questo documento contiene un formulario tecnico-scientifico di Algebra elementare, pensato per studenti universitari e ricercatori. Esso raccoglie teoremi, definizioni, e strumenti matematici essenziali.

CONTENTS

Contents	1
1 Insiemistica	4
2 Calcolo letterale	4
2.1 Frazioni	4
2.2 Proporzioni	4
2.3 Potenze	4
2.4 Radicali	4
2.5 Logaritmi	4
2.6 Esponenziali	4
2.7 Regole di scomposizione polinomi	4
2.7.1 Sviluppo del quadrato	5
2.7.2 Sviluppo del cubo di un binomio	5
2.7.3 Somma di cubi	5
2.7.4 Differenza di cubi	5
2.7.5 Differenza di potenze con uguale esponente	5
2.7.6 Differenza di potenze con uguale esponente pari	5
2.7.7 Differenza di potenze con uguale esponente dispari	5
2.7.8 Trinomio caratteristico di secondo grado	5
2.7.9 Trinomio di secondo grado	6
2.8 Divisione fra polinomi	7

2.8.1	Regole di divisibilità somma/differenza potenze aventi stesso esponente	7
3	Calcolo combinatorio	8
3.1	Fattoriale e semifattoriale	8
3.2	Coefficiente binomiale	8
4	Insiemi numerici	9
4.1	Numeri naturali	9
4.2	Numeri interi	9
4.3	Numeri razionali	9
4.4	Numeri irrazionali	9
4.5	Numeri reali	9
4.6	Numeri complessi	9
4.6.1	Potenze unità immaginaria	9
4.6.2	Numeri immaginari	9
4.6.3	Rappresentazione algebrica numeri complessi	9
4.6.4	Addizione	9
4.6.5	Moltiplicazione	9
4.6.6	Parte reale	9
4.6.7	Parte immaginaria	10
4.6.8	Reciproco complesso	10
4.6.9	Complesso coniugato	10
4.6.10	Modulo	10
4.6.11	Argomento	10
4.6.12	Rappresentazione trigonometrica	10
4.6.13	Quadrato di un numero complesso	10
4.6.14	Formula di De Moivre per la potenza n-esima	10
4.6.15	Rappresentazione esponenziale	11
4.6.16	Radici complesse	11
4.6.17	Radici equazione quadratica	11
5	Equazioni algebriche	12
6	Disequazioni algebriche	12
7	Funzioni	12
7.1	Funzione simmetrica	12
7.2	Funzione elementari	12
7.2.1	Funzioni lineari	12

7.2.2	Funzioni quadratiche	12
7.2.3	Funzioni potenza	12
7.2.4	Funzioni esponenziali	14
7.2.5	Funzioni logaritmiche	14
7.2.6	Funzioni trigonometriche	14
7.3	Potenze	15
7.4	Logaritmi	15
7.5	Iperboliche	15
7.6	Successioni	16
8	Curve	16
9	Superfici	16

1 INSIEMISTICA**2 CALCOLO LETTERALE****2.1 Frazioni****2.2 Proporzioni****2.3 Potenze****2.4 Radicali****2.5 Logaritmi****2.6 Esponenziali****2.7 Regole di scomposizione polinomi**

Proposizione 2.1 (Somma per differenza)

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

Proposizione 2.2 (Quadrato)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n$$

Proposizione 2.3 (Cubo binomio)

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Proposizione 2.4 (Potenza n-esima binomio)

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Proposizione 2.5 (Differenza di quadrati)

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

2.7.1 Sviluppo del quadrato

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

2.7.2 Sviluppo del cubo di un binomio

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

2.7.3 Somma di cubi

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

2.7.4 Differenza di cubi

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

2.7.5 Differenza di potenze con uguale esponente

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

2.7.6 Differenza di potenze con uguale esponente pari

$$a^n - b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

2.7.7 Differenza di potenze con uguale esponente dispari

$$a^n - b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

2.7.8 Trinomio caratteristico di secondo grado

$$s = a + b, \quad p = a \cdot b$$

$$x^2 + sx + p = (x + a) \cdot (x + b)$$

2.7.9 Trinomio di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

2.8 Divisone fra polinomi

2.8.1 Regole di divisibilità somma/differenza potenze aventi stesso esponente

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

3 CALCOLO COMBINATORIO

3.1 Fattoriale e semifattoriale

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \dots \cdot n!$$

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n \Leftrightarrow n \text{ dispari} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n \Leftrightarrow n \text{ pari} \end{cases}$$

3.2 Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

4 INSIEMI NUMERICI

4.1 Numeri naturali

4.2 Numeri interi

4.3 Numeri razionali

4.4 Numeri irrazionali

4.5 Numeri reali

4.6 Numeri complessi

4.6.1 Potenze unità immaginaria

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = -1 \quad i^7 = -i$$

$$i^8 = 1$$

$$i^9 = i$$

4.6.2 Numeri immaginari

$$(ai)^2 = a^2 i^2 = a^2 \cdot (-1) = -a^2$$

4.6.3 Rappresentazione algebrica numeri complessi

$$z = a + ib$$

4.6.4 Addizione

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

4.6.5 Moltiplicazione

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

4.6.6 Parte reale

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = x$$

4.6.7 Parte immaginaria

$$\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2} = y$$

4.6.8 Reciproco complesso

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

4.6.9 Complesso coniugato

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

4.6.10 Modulo

$$\rho = |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

4.6.11 Argomento

$$\Re z = \rho \cos(\theta)$$

$$\Im z = \rho \sin(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \forall x \neq 0$$

4.6.12 Rappresentazione trigonometrica

$$z = \rho(\cos(\theta) + i \sin \theta)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

4.6.13 Quadrato di un numero complesso

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

4.6.14 Formula di De Moivre per la potenza n-esima

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

4.6.15 Rappresentazione esponenziale

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$e^{2k\pi i} = 1$$

$$e^{i\theta+2k\pi i} = e^i$$

$$|e^{i\theta}| = 1$$

$$e^{\pi i} = -1$$

$$e^{\pi i/2} = i$$

$$e^{3\pi i/2} = -i = (-1 + i)/\sqrt{2}$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4.6.16 Radici complesse

$$z^n = w \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\theta w + 2k\pi)/n}$$

$$w_k = \rho^{1/n} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

4.6.17 Radici equazione quadratica

$$a_x^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5 EQUAZIONI ALGEBRICHE

6 DISEQUAZIONI ALGEBRICHE

7 FUNZIONI

7.1 Funzione simmetrica

$$\text{Pari} \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$$

$$\text{Dispari} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$$

$$\text{Periodica} \Leftrightarrow f(x+T) = f(x)$$

7.2 Funzione elementari

7.2.1 Funzioni lineari

7.2.2 Funzioni quadratiche

7.2.3 Funzioni potenza

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pari}$$

$$f(x) = x^n \tag{1}$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R}$$

$$\text{im} f = [0, +\infty) \quad f' < 0 \in (-\infty, 0]$$

$$f' > 0 \in [0, +\infty)$$

$$f \text{ pari}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}$$

$$f(x) = x^n \tag{2}$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R}$$

$$\text{im} f = \mathbb{R}$$

$$f' > 0 \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ dispari}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}$$

$$f(x) = x^{-n} \tag{3}$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{im} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f' < 0 \in (-\infty, 0)$$

$$f' > 0 \in (0, +\infty)$$

$$f \text{ dispari}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ pari}$$

$$f(x) = x^{-n} \quad (4)$$

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{im} f = (0, +\infty)$$

$$f' < 0 \in (-\infty, 0)$$

$$f' > 0 \in (0, +\infty)$$

$$f \text{ pari}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ pari}$$

$$f(x) = x^{1/n} \quad (5)$$

$$\operatorname{dom} f = [0, +\infty)$$

$$\operatorname{im} f = [0, +\infty)$$

$$f' > 0 \in [0, +\infty)$$

$$n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}$$

$$f(x) = x^{1/n} \quad (6)$$

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{im} f = \mathbb{R}$$

$$f' > \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ dispari}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

$$f(x) = x^\alpha \quad (7)$$

$$\operatorname{dom} f = [0, +\infty)$$

$$\operatorname{im} f = [0, +\infty)$$

$$f' > 0 \in [0, +\infty)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 0$$

$$f(x) = x^\alpha \quad (8)$$

$$\text{dom} f = (0, +\infty)$$

$$\text{im} f = (0, +\infty)$$

$$f' < 0 \in (0, +\infty)$$

7.2.4 Funzioni esponenziali

$$\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

$$f(x) = a^x \quad (9)$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R}$$

$$\text{im} f = (0, +\infty)$$

$$f' > 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a > 1$$

$$f' < 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \in (0, 1)$$

7.2.5 Funzioni logaritmiche

$$\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

$$f(x) = \log_a x \quad (10)$$

$$\text{dom} f = (0, +\infty)$$

$$\text{im} f = \mathbb{R}$$

$$f' > 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 1$$

$$f' < 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a \in (0, 1)$$

7.2.6 Funzioni trigonometriche

$$f(x) = \sin x \quad (11)$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \quad \text{im} f = [-1, 1]$$

$$f' > 0 \forall x \in [-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$$

$$f' < 0 \forall x \in [\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$$

$$f(x) = \cos x \quad (12)$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \quad \text{im} f = [-1, 1]$$

$$f' > 0 \forall x \in [\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi]$$

$$f' < 0 \forall x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$$

$$f(x) = \tan x \quad (13)$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{im} f = \mathbb{R}$$

$$f' > 0 \forall x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$$

7.3 Potenze

$$a^1 = a$$

$$0^n = 0 \forall x \neq 0$$

$$1^n = 1$$

$$a^0 = 1 \forall a \neq 0$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

7.4 Logaritmi

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a(b)^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a}$$

7.5 Iperboliche

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

7.6 Successioni**8 CURVE****9 SUPERFICI**