

Teoria dei circuiti

Oudeys

November 3, 2024

CONTENTS

Contents	2
1 Circuiti a parametri concentrati	6
1.1 Leggi di Kirchhoff	6
1.1.1 Legge delle correnti di Kirchhoff	6
1.1.2 Legge delle tensioni di Kirchhoff	6
2 Elementi circuitali	6
2.1 Resistori	6
2.1.1 Resistori lineari	6
2.1.2 Resistori non lineari	7
2.2 Generatori indipendenti	7
2.2.1 Generatore di tensione	7
2.2.2 Generatore di corrente	7
2.2.3 Circuiti equivalenti di Thèvenin e Norton	7
2.2.4 Forme d'onda	7
2.3 Condensatori	7
2.3.1 Condensatori lineari	7
2.3.2 Condensatori non lineari	8
2.4 Induttori	8
2.4.1 Induttori lineari	8
2.4.2 Induttori non lineari	9
3 Circuiti semplici	9
3.1 Resistori	9
3.2 Condensatori	10
3.3 Induttori	10
4 Circuiti del I ordine	11
4.1 Risposta con ingresso zero	11
4.1.1 Circuito RC (Resistore-Condensatore)	11
4.1.2 Circuito RL (Resistore-Induttore)	11
4.2 Risposta con stato zero	11
4.2.1 Ingresso corrente costante	11
4.2.2 Ingresso sinusoidale	11
4.3 Risposta completa	11
4.3.1 Risposta completa	11
4.3.2 Transitorio e regime	11
4.3.3 Circuiti con due costanti di tempo	11
4.4 Linearità della risposta con stato zero	11

4.5	Linearità ed invarianza temporale	11
4.5.1	Risposta al gradino	11
4.5.2	Invarianza temporale	11
4.5.3	Traslazione	11
4.6	Risposta all'impulso	11
4.7	Risposta al gradino e all'impulso per circuiti semplici	11
5	Circuiti del II ordine	11
5.1	Risposta con ingresso zero	11
5.2	Risposta con stato zero	11
5.2.1	Risposta al gradino	11
5.3	Spazio degli stati	11
5.3.1	Equazioni di stato e traiettoria	11
5.3.2	Rappresentazione matriciale	11
5.3.3	Metodo approssimato per il calcolo della traiettoria	11
5.3.4	Equazioni di stato e risposta completa	11
6	Circuiti lineari tempo invarianti	11
6.1	Analisi dei nodi e delle maglie	11
6.1.1	Analisi dei nodi	11
6.1.2	Analisi delle maglie	11
6.2	Rappresentazione ingresso-uscita	11
6.2.1	Risposta con ingresso zero	11
6.2.2	Risposta con stato zero	11
6.2.3	Risposta all'impulso	11
6.3	Risposta ad un ingresso arbitrario	11
6.3.1	Integrale di convoluzione	11
7	Analisi in regime sinusoidale	11
7.1	Risposta completa e risposta in regime sinusoidale	11
7.1.1	Risposta completa	11
7.1.2	Risposta in regime sinusoidale	11
7.1.3	Sovrapposizione nel regime stazionario	11
7.2	Impedenza e ammettenza	11
7.3	Analisi in regime sinusoidale dei circuiti semplici	11
7.3.1	Collegamenti in serie e in parallelo	11
7.3.2	Analisi dei nodi e delle maglie in regime sinusoidale	11
7.4	Circuiti risonanti	11
7.5	Potenza in regime sinusoidale	11
7.6	Normalizzazione della frequenza e della impedenza	11

8 Elementi di accoppiamento e circuiti accoppiati	11
8.1 Induttori accoppiati	11
8.2 Trasformatori ideali	11
8.3 Generatori pilotati	11
9 Grafi delle reti	11
10 Teorema di Tellegen	11
11 Analisi dei nodi e degli anelli	11
11.1 Trasformazioni di generatori	11
11.2 Analisi dei nodi delle reti lineari tempo-invarianti	11
11.2.1 Analisi di reti sesistive	11
11.2.2 Formulazione rapida delle equazioni dei nodi	11
11.2.3 Analisi in regime sinusoidale	11
11.2.4 Equazioni integrodifferenziali	11
11.3 Dualità	11
12 Analisi delle maglie e degli insiemi di taglio	11
12.1 Teorema fondamentale della teoria dei grafi	11
12.2 Analisi delle maglie	11
12.3 Analisi degli insiemi di taglio	11
13 Equazioni di stato	11
13.1 Reti lineari tempo-invarianti	11
13.2 Concetto di stato	11
13.3 Reti non lineari e tempo-invarianti	11
13.3.1 Caso lineare tempo-variante	11
13.3.2 Caso non lineare	11
13.3.3 Equazioni di stato per reti lineari tempo-invarianti	11
14 Trasformate di Laplace	12
14.1 Trasformata di Laplace	12
14.2 Proprietà fondamentali della trasformata di Laplace	12
14.3 Trasformate di Laplace di funzioni elementari	12
14.4 Soluzione di circuiti semplici	13
14.4.1 Calcolo di una risposta all'impulso	13
14.4.2 Espansione in frazioni parziali	15
14.5 Soluzione di reti generali	15
14.5.1 Formulazione di equazioni lineari algebriche	15
14.5.2 Metodo del cofattore	15
14.5.3 Funzioni di rete e regime sinusoidale	15
14.5.4 Proprietà fondamentali delle reti lineari tempo-invarianti	15

14.6 Reti degeneri	15
14.7 Condizioni sufficienti per l'unicità	15
15 Frequenze naturali	15
15.1 Frequenza naturale di una variabile di rete	15
15.2 Metodo di eliminazione	15
15.3 Frequenze naturali di una rete	15
15.4 Frequenze naturali ed equazioni di stato	15
16 Funzioni di rete	15
16.1 Definizione e proprietà generali	15
16.2 Poli, zeri e risposta in frequenza	15
16.3 Poli, zeri e risposta all'impulso	15
16.4 Proprietà di simmetria	15
17 Teoremi delle reti	15
17.1 Teorema di sostituzione	15
17.2 Teorema di sovrapposizione	15
17.3 Teorema delle reti equivalenti di Thévenin e Norton	15
17.4 Teorema di reciprocità	15
18 Doppi bipoli	15
18.1 Doppi bipoli resistivi	15
18.2 Transistore	15
18.3 Induttori accoppiati	15
18.4 Matrici di impedenza ed ammettenza dei doppi bipoli	15
18.5 Matrici ibride	15
18.6 Matrici di trasmissione	15
19 Reti resistive	15
19.1 Reti fisiche e modelli di reti	15
19.2 Analisi delle reti resistive dal punto di vista della potenza	15
19.3 Guadagno di tensione e guadagno di corrente di rete resistiva	15
20 Energia e passività	15
20.1 Condensatore lineare tempo-variante	15
20.2 Energia immagazzinata in elementi non lineari tempo-varianti	15
20.3 Bipoli passivi	15
20.4 Ingresso esponenziale e risposta esponenziale	15
20.5 Bipoli costituiti di elementi passivi lineari tempo-invarianti	15
20.6 Stabilità delle reti passive	15
20.7 Amplificatore parametrico	15

1 CIRCUITI A PARAMETRI CONCENTRATI

1.1 Leggi di Kirchhoff

1.1.1 Legge delle correnti di Kirchhoff

Definizione 1.1 (Legge delle correnti)

$$\sum_{k=0}^N i_k(t) = 0$$

1.1.2 Legge delle tensioni di Kirchhoff

Definizione 1.2 (Legge delle tensioni)

$$\sum_{k=0}^N V_i = 0$$

2 ELEMENTI CIRCUITALI

2.1 Resistori

2.1.1 Resistori lineari

Definizione 2.1 (Resistori lineari tempo invarianti)

i.

$$v(t) = Ri(t)$$

ii.

$$i(t) = Gv(t)$$

iii.

$$R = 1/G$$

Definizione 2.2 (Resistori lineari tempo varianti)

i.

$$v(t) = R(t)i(t)$$

ii.

$$i(t) = G(t)v(t)$$

iii.

$$R(t) = 1/G(t)$$

2.1.2 Resistori non lineari

Definizione 2.3 (Resistori non lineari tempo invarianti)

i. Controllato in corrente

$$v(t) = f(i(t))$$

ii. Controllato in tensione

$$i(t) = g(v(t))$$

Definizione 2.4 (Resistori non lineari tempo varianti)

i. Controllato in corrente

$$v(t) = f(i(t), t)$$

ii. Controllato in tensione

$$i(t) = g(v(t), t)$$

2.2 Generatori indipendenti

2.2.1 Generatore di tensione

2.2.2 Generatore di corrente

2.2.3 Circuiti equivalenti di Thèvenin e Norton

2.2.4 Forme d'onda

2.3 Condensatori

2.3.1 Condensatori lineari

Definizione 2.5 (Condensatori lineari tempo invarianti)

i.

$$q(t) = Cv(t)$$

ii.

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

iii.

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

Definizione 2.6 (Condensatori lineari tempo varianti)

i.

$$q(t) = C(t)v(t)$$

ii.

$$i(t) = \frac{dC}{dt}v(t) + C(t)\frac{dv}{dt}$$

2.3.2 Condensatori non lineari

Definizione 2.7 (Condensatori non lineari tempo invarianti)

i.

$$q(t) = f(v(t))$$

ii.

$$i(t) = \left. \frac{df}{dv} \right|_{v(t)} \frac{dv}{dt}$$

Definizione 2.8 (Condensatori non lineari tempo varianti)

i.

$$q(t) = f(v(t), t)$$

ii.

$$i(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{v(t)} \frac{dv}{dt}$$

2.4 Induttori

2.4.1 Induttori lineari

Definizione 2.9 (Induttori lineari tempo invarianti)

i.

$$\phi = Li(T)$$

ii.

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

iii.

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$

Definizione 2.10 (Induttori lineari tempo varianti)

i.

$$\phi = L(t)i(t)$$

ii.

$$v(t) = \frac{dL}{dt}i(t) + L(t)\frac{di}{dt}$$

2.4.2 Induttori non lineari

Definizione 2.11 (Induttori non lineari tempo invarianti)

i.

$$\phi(t) = f(i(t))$$

ii.

$$v(t) = \left. \frac{df}{di} \right|_{i(t)} \frac{di}{dt}$$

Definizione 2.12 (Induttori non lineari tempo varianti)

i.

$$\phi(t) = f(i(t), t)$$

ii.

$$v(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{i(t)} \frac{di}{dt}$$

3 CIRCUITI SEMPLICI

3.1 Resistori

i. Serie

$$R = \sum_{k=1}^m R_k$$

ii. Parallelo

$$G = \sum_{k=1}^m G_k$$

3.2 Condensatori

i. Serie

$$S = \sum_{k=1}^m S_k$$

ii. Parallelo

$$C = \sum_{k=1}^m C_k$$

3.3 Induttori

1. Serie

$$L = \sum_{k=1}^m L_k$$

2. Parallelo

$$\Gamma = \sum_{k=1}^m \Gamma_k$$

4 CIRCUITI DEL I ORDINE

4.1 Risposta con ingresso zero

4.1.1 *Circuito RC (Resistore-Condensatore)*

4.1.2 *Circuito RL (Resistore-Induttore)*

4.2 Risposta con stato zero

4.2.1 *Ingresso corrente costante*

4.2.2 *Ingresso sinusoidale*

4.3 Risposta completa

4.3.1 *Risposta completa*

4.3.2 *Transitorio e regime*

4.3.3 *Circuiti con due costanti di tempo*

4.4 Linearità della risposta con stato zero

4.5 Linearità ed invarianza temporale

4.5.1 *Risposta al gradino*

4.5.2 *Invarianza temporale*

4.5.3 *Traslazione*

4.6 Risposta all'impulso

4.7 Risposta al gradino e all'impulso per circuiti semplici

5 CIRCUITI DEL II ORDINE

5.1 Risposta con ingresso zero

5.2 Risposta con stato zero

5.2.1 *Risposta al gradino*

5.3 Spazio degli stati

5.3.1 *Equazioni di stato e traiettoria*

5.3.2 *Rappresentazione matriciale*

5.3.3 *Metodo approssimato per il calcolo della traiettoria*

5.3.4 *Equazioni di stato e risposta completa*

6 CIRCUITI LINEARI TEMPO INVARIANTI

6.1 Analisi dei nodi e delle maglie

14 TRASFORMATE DI LAPLACE

14.1 Trasformata di Laplace

Definizione 14.1 (Trasformata di Laplace)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

14.2 Proprietà fondamentali della trasformata di Laplace

Proposizione 14.2 (Proprietà fondamentali della Trasformata di Laplace)

i. Unicità

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

ii. Linearità

$$\mathcal{L}[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)] = c_1\mathcal{L}[f_1(t)] + c_2\mathcal{L}[f_2(t)]$$

iii. Differenziazione

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-)$$

iv. Integrazione

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t f(t')dt'\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

14.3 Trasformate di Laplace di funzioni elementari

Proposizione 14.3

i.

$$f(t) \leftrightarrow F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

ii.

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

iii. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\delta^n(t) \leftrightarrow s^n$$

iv.

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

v. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{t^n}{n!} \leftrightarrow \frac{1}{s^{n+1}}$$

vi.

$$e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

vii. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{t^n}{n!} e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

viii.

$$\cos(\beta t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \beta^2}$$

ix.

$$\sin(\beta t) \leftrightarrow \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

x.

$$e^{-\alpha t} \cos(\beta t) \leftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

xi.

$$e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \leftrightarrow \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

xii.

$$ae^{-\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{(b - a\alpha)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \leftrightarrow \frac{as + b}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

xiii.

$$2|k|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle k) \leftrightarrow \frac{k}{s + \alpha - j\beta} + \frac{\bar{k}}{s + \alpha + j\beta}$$

14.4 Soluzione di circuiti semplici

14.4.1 Calcolo di una risposta all'impulso

Proposizione 14.4 (Risposta all'impulso per circuiti RLC)

$$\frac{L}{R} \frac{dv}{dt} + v + \frac{1}{RC} \int_{0^-}^t v(t') dt' + v_c(0^-) = e(t)$$

$$\frac{L}{R} \frac{dh}{dt} + h + \frac{1}{RC} \int_{0^-}^t h(t') dt' = \delta(t)$$

$$\frac{L}{R} \mathcal{L} \left[\frac{dh}{dt} \right] + H(s) + \frac{1}{RC} \mathcal{L} \left[\int_{0^-}^t h(t') dt' \right] = 1$$

$$\left[\frac{L}{R} s + 1 + \frac{1}{RCs} \right] H(s) = 1 \Leftrightarrow H(s) = \frac{R}{L} \frac{s}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$H(s) = \frac{R}{L} \frac{s}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

$$h(t) = \frac{\omega_0 R}{\omega_d L} u(t) e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

$$\frac{V}{E} = \frac{R}{L} \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + (R/L)j\omega + 1/LC}$$

$$\frac{V}{E} = H(j\omega)$$

*14.4.2 Espansione in frazioni parziali***14.5 Soluzione di reti generali***14.5.1 Formulazione di equazioni lineari algebriche**14.5.2 Metodo del cofattore**14.5.3 Funzioni di rete e regime sinusoidale**14.5.4 Proprietà fondamentali delle reti lineari tempo-invarianti***14.6 Reti degeneri****14.7 Condizioni sufficienti per l'unicità****15 FREQUENZE NATURALI****15.1 Frequenza naturale di una variabile di rete****15.2 Metodo di eliminazione****15.3 Frequenze naturali di una rete****15.4 Frequenze naturali ed equazioni di stato****16 FUNZIONI DI RETE****16.1 Definizione e proprietà generali****16.2 Poli, zeri e risposta in frequenza****16.3 Poli, zeri e risposta all'impulso****16.4 Proprietà di simmetria****17 TEOREMI DELLE RETI****17.1 Teorema di sostituzione****17.2 Teorema di sovrapposizione****17.3 Teorema delle reti equivalenti di Thévenin e Norton****17.4 Teorema di reciprocità****18 DOPPI BIPOLI****18.1 Doppi bipoli resistivi****18.2 Transistore****18.3 Induttori accoppiati****18.4 Matrici di impedenza ed ammettenza dei doppi bipoli****18.5 Matrici ibride**