Analisi

Oudeys

April 9, 2025

Indice

Analisi reale

Calcolo infinitesimale

1.1 Intorni

Definizione 1.1.1 (Distanza)

$$d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

i. $d(x, y) \geq 0, d(x, y) \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definizione 1.1.2 (Distanza euclidea)

$$d_e(x, y) = |x - y|$$

Definizione 1.1.3 (Intorno sferico)

Definizione 1.1.4 (Topologia euclidea)

Definizione 1.1.5 (Punti di estremo)

Definizione 1.1.6 (Ampliamento di $\mathbb{R}$)

Definizione 1.1.7 (Intorno sferico di $+\infty$)

Definizione 1.1.8 (Intorno sferico di $-\infty$)

Definizione 1.1.9 (Punto di accumulazione)

Lemma 1.1.10

Teorema 1.1.11 (Teorema di Bolzano-Weierstrass)

Definizione 1.1.12 (Proprietà asintotica)

Definizione 1.1.13 (Punto interno)

Definizione 1.1.14 (Insieme interno)

Definizione 1.1.15 (Punto esterno)

Definizione 1.1.16 (Insieme esterno)

Definizione 1.1.17 (Punto di frontiera)

Definizione 1.1.18 (Insieme di frontiera)

Definizione 1.1.19 (Insieme aperto)

Definizione 1.1.20 (Insieme chiuso)

Teorema 1.1.21

1.2 Limiti

Definizione 1.2.1 (Limite di funzione)

Teorema 1.2.2 (Unicità del limite)

Lemma 1.2.3 (Permanenza del segno)

Definizione 1.2.4 (Punto di accumulazione destro)

Definizione 1.2.5 (Punto di accumulazione sinistro)

Definizione 1.2.6 (Limite destro)

Definizione 1.2.7 (Limite sinistro)

Definizione 1.2.8 (Limite per eccesso)

Definizione 1.2.9 (Limite per difetto)

1.2.1 Limiti di funzioni ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Proposizione 1.2.10 (Limiti di funzioni razionali)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & n = m \\ +\infty & \dfrac{a_n}{b_m} > 0\,,\, n > m \\ -\infty & \dfrac{a_n}{b_m} < 0\,,\, n > m \end{cases}$$

Proposizione 1.2.11 (Limiti di funzioni potenze) *i.*

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

ii.

$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Proposizione 1.2.12 (Limiti di funzioni esponenziali)

i.

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0^+ & 0 < a < 1 \end{cases}$$

ii.

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0^+ & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

iii.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \lim_{x\to x_0} g(x)\log_a f(x) & a \neq e \\ a^{\lim_{x\to x_0} g(x)\log_a f(x)} & a > 0, a \neq 1 \\ e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\log_e f(x)} & a = e \end{cases}$$

Proposizione 1.2.13 (Limiti di funzioni logaritmiche)

i.

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

ii.

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Proposizione 1.2.14 (Limiti di funzioni composte)
$\forall \lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$

Proposizione 1.2.15 (Algebra degli $o(1)$)

i. $\forall\, l \in \mathbb{R} : l \cdot o(1) = o(1)$

ii. $0 \cdot o(1) = o(1)$

iii. $o(1) \cdot o(1) = o(1)$

iv. $o(1) \pm o(1) = o(1)$

Proposizione 1.2.16 (Limiti di funzioni trigonometriche)

i. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ii. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

iii. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

iv. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

v. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

vi. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

vii. $\lim_{x\to +\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

viii. $\lim_{x\to x_0} \arctan x = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x_0 = -\infty \\ \arctan x_0 & x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} & x_0 = +\infty \end{cases}$

Proposizione 1.2.17 (Limiti di funzioni notevoli) *i.* $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ a > 1 : \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$

ii. $\lim_{x\to+\infty} \frac{|\log_b x|^\alpha}{x^\beta} = 0$

iii. $\lim_{x\to-\infty} a^x |x|^\alpha = 0$

iv. $\lim_{x\to 0^+} x^\beta |\log_b x|^\alpha = 0$

v. $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

vi. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

vii. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

viii. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ix. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

x. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = 1$

Proposizione 1.2.18 (Limiti funzioni generalizzate)

i. $\lim_{f(x)\to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$

ii. $\lim_{f(x)\to 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$

iii. $\lim_{f(x)\to 0} \frac{1-\cos(f(x))}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}$

iv. $\lim_{f(x)\to 0} \frac{\log[1+f(x)]}{f(x)} = 1$

v. $\lim_{f(x)\to 0} \frac{\log_a[1+f(x)]}{f(x)} = \log_a e$

vi. $\lim_{f(x)\to 0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$

vii. $\lim_{f(x)\to\infty} [1 + \frac{1}{f(x)}]^{f(x)} = e$

viii. $\lim_{f(x)\to 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$

Proposizione 1.2.19 (Limiti delle funzioni infinitesime)

i. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

ii. $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$

iii. $\lim_{x\to x_0^+} x - x_0 = 0$

iv. $\lim_{x\to x_0^-} x_0 - x = 0$

Proposizione 1.2.20 (Funzioni infinite)

i. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

ii. $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$

iii. $\lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{x-x_0} = +\infty$

iv. $\lim_{x\to x_0^-} \frac{1}{x_0-x} = +\infty$

v. $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$

vi. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_b x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

Proposizione 1.2.21 (Equivalenze asintotiche per $x \to 0$)

i. $\sin(\alpha x) \sim \alpha x$

ii. $\tan(\alpha x) \sim \alpha x$

iii. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

iv. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\log a}$

v. $\log(1+x) \sim x$

vi. $a^x - 1 \sim x \log a$

vii. $e^x - 1 \sim x$

viii. $\arcsin x \sim x$

ix. $\arctan x \sim x$

x. $(1+x)^k - 1 \sim kx$

Teorema 1.2.22 (Teorema del confronto)
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l,\ f(x) \le g(x) \le h(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

1.2.2 Limiti di successioni ($\mathbb{N} \to \mathbb{R}$)

Proposizione 1.2.23 (Gerarchia di infiniti)
$\forall\, n \to \infty$

$$\log_b n\, (\forall b > 1) \le n^\alpha\, (\forall \alpha > 0) \le r^n\, (\forall n > 1) \le n! \le n^n$$

Proposizione 1.2.24 (Operazioni con i limiti di successioni)
$\forall\ \lim_{n\to+\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = b$

i.

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

ii.

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = ab$$

iii. $\forall\, b_n \neq 0,\, b \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Definizione 1.2.25 (Forme indeterminate)

i. $+\infty - \infty$

ii. $+\infty \cdot 0$

iii. $-\infty \cdot 0$

iv. $\frac{0}{0}$

v. $\frac{\infty}{\infty}$

vi. 0^0

vii. 1^∞

viii. ∞^0

1.2.3 Limiti di funzioni a valori vettoriali ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

Definizione 1.2.26 (Limiti di funzioni vettoriali)
$\forall\, \mathbf{f}(x) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = l_1 \\ \vdots \\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) = l_m \end{cases}$$

1.2.4 Limiti di funzioni a valori scalari ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

1.3 Asintoti

Definizione 1.3.1 (Asintoto orizzontale)
$\forall\, \lim_{x\to\infty} f(x) = l$

$$y = l$$

Definizione 1.3.2 (Asintoto verticale)
$\forall \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

$$x = x_0$$

Definizione 1.3.3 (Asintoto obliquo)
$\forall \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty,$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = m,$

$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx] = q$

$$y = mx + q$$

1.4 Continuità

Definizione 1.4.1 (Continuità in un punto)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Definizione 1.4.2 (Discontinuità di I specie)

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Definizione 1.4.3 (Discontinuità di II specie)

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty \vee \nexists$$

Definizione 1.4.4 (Discontinuità III specie)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Teorema 1.4.5 (Teorema di Weierstrass)

$$f(x) \; \textit{continua}$$

$$\textit{in un intervallo chiuso e limitato}\, [a, b] \Rightarrow \exists x_1, x_2 : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

Teorema 1.4.6 (Teorema di Darboux)

$$f(x)\ continua \in [a,b] \Rightarrow \forall c \in (\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)) \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = c$$

Teorema 1.4.7 (Teorema degli zeri)

$$f(x)\ continua\ in\ un\ intervallo\, [a,b], f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow c \in [a,b] : f(c) = 0$$

Calcolo differenziale

2.1 Derivabilità

Definizione 2.1.1 (Derivata)

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Teorema 2.1.2 (Teorema di Rolle)

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow f'(c) = 0$$

Teorema 2.1.3 (Teorema di Cauchy)

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema 2.1.4 (Teorema di Lagrange)

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

Teorema 2.1.5 (Teorema di De L'Hopital)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

2.2 Calcolo delle derivate

2.2.1 Algebra delle derivate

Proposizione 2.2.1 (Algebra delle Derivate)

i. $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$

ii. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

iii. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

iv. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

v. $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

vi. $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

vii. $(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0)g^{(k)}(x_0)$

2.2.2 Derivate generalizzate

Proposizione 2.2.2 (Derivate generalizzate)

i. $\frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{f(x)}{|f(x)|}$

ii. $\frac{d}{dx}[\log f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$

iii. $\frac{d}{dx}[\log_a f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \log(a)}$

iv. $\frac{d}{dx}[a^{f(x)}] = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \log(a)$

v. $\frac{d}{dx}[e^{f(x)}] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

vi. $\frac{d}{dx}[g(x)^{f(x)}] = g(x)^{f(x)} \cdot \frac{d}{dx}[f(x) \cdot \log g(x)]$

vii. $\frac{d}{dx}[f(x)^n] = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

viii. $\frac{d}{dx}[\sqrt[n]{f(x)^p}] = \frac{p \cdot f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-p}}}$

ix. $\frac{d}{dx}[\sin(f(x))] = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

x. $\frac{d}{dx}[\cos(f(x))] = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$

xi. $\frac{d}{dx}[\tan(f(x))] = (\tan^2(f(x)) + 1) \cdot f'(x)$

xii. $\frac{d}{dx}[\arcsin(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

xiii. $\frac{d}{dx}[arcos(f(x))] = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

xiv. $\frac{d}{dx}[\arctan(f(x))] = \frac{f'(x)}{f^2(x)+1}$

xv. $\frac{d}{dx}[\cot(f(x))] = (-\cot^2(f(x)) - 1) \cdot f'(x)$

xvi. $\frac{d}{dx}[\sinh(f(x))] = \cosh(f(x)) \cdot f'(x)$

xvii. $\frac{d}{dx}[\cosh(f(x))] = \sinh(f(x)) \cdot f'(x)$

xviii. $\frac{d}{dx}[\tanh(f(x))] = (1 - \tanh^2(f(x))) \cdot f'(x)$

xix. $\frac{d}{dx}[arcsinh(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$

xx. $\frac{d}{dx}[arccosh(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)-1}\sqrt{f(x)+1}}$

xxi. $\frac{d}{dx}[arctanh(f(x))] = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$

xxii. $\frac{d}{dx}[arccot(f(x))] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)+1}$

xxiii. $\frac{d}{dx}[\coth(f(x))] = -\frac{f'(x)}{\sinh^2(f(x))}$

xxiv. $\frac{d}{dx}[arccoth(f(x))] = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$

Definizione 2.2.3 (Differenziale)

$$dy = \frac{d}{dx} f \, dx$$

Proposizione 2.2.4 (Regole di Differenziazione)

i. $d(f \pm g) = df \pm dg$

ii. $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$

iii. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$

2.3 Polinomio di Taylor

Definizione 2.3.1 (Polinomio di Taylor)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)$$

Proposizione 2.3.2 (Proprietà del Polinomio di Taylor)

i. $T_n[\alpha f + \beta g, x_0] = \alpha T_n[f, x_0] + \beta T_n[g, x_0]$

ii. $T_n'[f, x_0] = T_{n-1}[f', x_0]$

Definizione 2.3.3 (Polinomio di Mac Laurin)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x - 0)^k$$

Teorema 2.3.4 (Teorema di Peano)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(x_0)}}{k!}(x - x_0)^k$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x) = Tn(x) + o((x - x_0)^n)\, perx \to x_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \forall k = 0, 1, \dots, n$$

2.3.1 Sviluppi di Maclaurin

Proposizione 2.3.5 (Sviluppi di Maclaurin per funzioni elementari)

i. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

ii. $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

iii. $(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$

iv. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

v. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

vi. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

vii. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

viii. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

ix. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

x. $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{n! 2^n} x^n + o(x^n)$

xi. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

2.4 Derivate direzionali e parziali di funzioni a valori scalari

Definizione 2.4.1 (Derivata direzionale)

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x})}{t}$$

Definizione 2.4.2 (Derivata parziale)

$$f_{x_k} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_k+t,\ldots,x_n)-f(\mathbf{x})}{t}$$

Definizione 2.4.3 (Gradiente)

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}),\ldots,f_{x_n}(\mathbf{x}))$$

Proposizione 2.4.4 (Gradiente)

i. $\nabla(f\circ g)(\mathbf{x}) = f'(g(\mathbf{x}))\cdot\nabla g(\mathbf{x})$

ii. $\nabla(\alpha f+\beta g)(\mathbf{x}) = \alpha\nabla f(\mathbf{x})+\beta\nabla g(\mathbf{x})$

iii. $\nabla(f\cdot g)(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})+f(\mathbf{x})\cdot\nabla g(\mathbf{x})$

iv. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{\nabla f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})\cdot\nabla g(\mathbf{x})}{(g(\mathbf{x}))^2}$

2.5 Differenziabilità di funzioni a valori scalari

2.5.1 Differenziabilità

Definizione 2.5.1 (Piano tangente)

$$z = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

2.5.2 Teorema del differenziale totale

2.6 Derivate di ordine superiore

2.6.1 Derivate del secondo ordine

2.6.2 Funzioni k volte differenziabili

2.6.3 Teorema di Schwarz

Definizione 2.6.1 (Matrice Hessiana)

$$D^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}) & f_{x_nx_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

2.7 Polinomio di Taylor

2.7.1 Polinomio di Taylor di ordine 2

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

2.7.2 Polinomio di Taylor di ordine m

$$T_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} f_{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}}(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{0_{i_1}}) \cdots (x_{i_k} - x_{0_{i_k}})$$

2.8 Funzioni convesse e concave

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

: *i.* Convessità

$$D^2 f(\mathbf{x}) : \lambda_i \geq 0$$

ii. Concavità

$$D^2 f(\mathbf{x}) : \lambda_i \leq 0$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

: $i.$ Convessità

$$\begin{cases} \det D^2 f(\mathbf{x}) = f_{xx}(\mathbf{x}) f_{yy}(\mathbf{x}) - f_{xy}^2(\mathbf{x}) \geq 0 \\ f_{xx}\mathbf{x} \geq 0 \,\vee\, f_{yy}(\mathbf{x}) \geq 0 \,\vee\, f_{xx}(\mathbf{x}) + f_{yy}(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases}$$

$ii.$ Concavità

$$\begin{cases} \det D^2 f(\mathbf{x}) = f_{xx}(\mathbf{x}) f_{yy}(\mathbf{x}) - f_{xy}^2(\mathbf{x}) \geq 0 \\ f_{xx}\mathbf{x} \leq 0 \,\vee\, f_{yy}(\mathbf{x}) \leq 0 \,\vee\, f_{xx}(\mathbf{x}) + f_{yy}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

2.9 Estremi liberi di funzioni a valori scalari

2.9.1 Punto critico

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**:** $i.$ Massimo

$$D^2 f(\mathbf{x}) : \lambda_i \leq 0$$

$ii.$ Minimo

$$D^2 f(\mathbf{x}) : \lambda_i \geq 0$$

$iii.$ Sella

$$D^2 f(\mathbf{x}) : \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**:** $i.$ **Massimo**

$$\det D^2 f(\mathbf{x}) > 0 \,\wedge\, f_{xx}(\mathbf{x}) \geq 0$$

$ii.$ Minimo

$$\det D^2 f(\mathbf{x}) > 0 \,\wedge\, f_{xx}(\mathbf{x}) \leq 0$$

$iii.$ Sella

$$\det D^2 f(\mathbf{x}) < 0$$

2.10 Estremi vincolati

$$\begin{cases} \partial_{x_1} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial_{x_1} g_i(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial_{x_n} g_i(x_1, \dots, x_n) \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = g_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = g_m(\mathbf{x}_0) \end{cases}$$

2.11 Derivabilità e differenziabilità di funzioni a valori vettoriali

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Calcolo integrale

3.1 Proprietà integrali indefiniti

i. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

ii.
$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

iii.
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

iv. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

v. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

vi. $\int_a^a f(x)dx = 0$

vii. $f \leq g \Rightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g$

3.2 Teorema della media

$$f(x) \text{ medio} \in (a, b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

3.3 Integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

3.4 Integrazione per sostituzione

$$forall x = g(t), dx = g'(t)dt$$

$$\int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

3.5 Primitive fondamentali

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{settsinh} x + c = \log(x+\sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{settcosh} x + c = \log(x+\sqrt{x^2-1}) + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \operatorname{setttanh} x + c = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + c$$

3.6 Primitive generalizzate

Proposizione 3.6.1 (Derivate generalizzate)

i. $\frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{f(x)}{|f(x)|}$

ii. $\frac{d}{dx}[\log f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$

iii. $\frac{d}{dx}[\log_a f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)\cdot\log(a)}$

iv. $\frac{d}{dx}[a^{f(x)}] = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \log(a)$

v. $\frac{d}{dx}[e^{f(x)}] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

vi. $\frac{d}{dx}[g(x)^{f(x)}] = g(x)^{f(x)} \cdot \frac{d}{dx}[f(x) \cdot \log g(x)]$

vii. $\frac{d}{dx}[f(x)^n] = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

viii. $\frac{d}{dx}[\sqrt[n]{f(x)^p}] = \frac{p\cdot f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-p}}}$

ix. $\frac{d}{dx}[\sin(f(x))] = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

x. $\frac{d}{dx}[\cos(f(x))] = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$

xi. $\frac{d}{dx}[\tan(f(x))] = (\tan^2(f(x)) + 1) \cdot f'(x)$

xii. $\frac{d}{dx}[\arcsin(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

xiii. $\frac{d}{dx}[\arccos(f(x))] = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

xiv. $\frac{d}{dx}[\arctan(f(x))] = \frac{f'(x)}{f^2(x)+1}$

xv. $\frac{d}{dx}[\cot(f(x))] = (-\cot^2(f(x)) - 1) \cdot f'(x)$

xvi. $\frac{d}{dx}[\sinh(f(x))] = \cosh(f(x)) \cdot f'(x)$

xvii. $\frac{d}{dx}[\cosh(f(x))] = \sinh(f(x)) \cdot f'(x)$

xviii. $\frac{d}{dx}[\tanh(f(x))] = (1 - \tanh^2(f(x))) \cdot f'(x)$

xix. $\frac{d}{dx}[arcsinh(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$

xx. $\frac{d}{dx}[arccosh(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)-1}\sqrt{f(x)+1}}$

xxi. $\frac{d}{dx}[arctanh(f(x))] = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$

xxii. $\frac{d}{dx}[arccot(f(x))] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)+1}$

xxiii. $\frac{d}{dx}[\coth(f(x))] = -\frac{f'(x)}{\sinh^2(f(x))}$

xxiv. $\frac{d}{dx}[arccoth(f(x))] = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$

3.7 Integrali impropri

3.7.1 Integrale improprio - generalizzato

$$\lim_{\omega \to a} \int_{\omega}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{x \to \omega} F(x)$$

3.7.2 Criterio del confronto

$$\forall 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

i.

$$g \text{ integrabile in senso improprio}$$

$$\Rightarrow f \text{ integrabile in senso improprio}$$

ii.

$$f \text{ non integrabile in senso improprio}$$

$$\Rightarrow g \text{ non integrabile in senso improprio}$$

3.7.3 Criterio del confronto asintotico

$$f(x) = g(x)(1 + o(1))$$

i.

$$\int_a^b f(x)dx \text{ convergente}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_a^b g(x)dx \text{ convergente}$$

ii.

$$\int_a^b f(x)dx \text{ divergente}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\int_a^b g(x)dx \,\text{divergente}$$

3.7.4 Assoluta integrabilità in senso improprio

i.

$$f \text{ assolutamente integrabile in senso improprio}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$|f| \text{ integrabile in senso improprio}$$

ii.

$$f \text{ assolutamente integrabile in senso improprio}$$
$$\Rightarrow f \text{ integrabile in senso improprio :}$$
$$|\int f(x)dx| \leq \int |f(x)|dx$$

iii.

$$f \text{ integrabile in senso improprio}$$
$$\not\Rightarrow$$
$$|f| \text{ integrabile in senso improprio}$$

3.7.5 Integrali generalizzati all'infinito

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty & \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

3.8 Integrali dipendenti da un parametro

3.9 Integrali multipli

3.9.1 Formule di riduzione per domini semplici

Definizione 3.9.1 (Dominio y semplice)
$\Omega = \{(x, y) : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

$$\int\int_{\Omega} f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Definizione 3.9.2 (Dominio x semplice)
$\Omega = \{(x, y) : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(x)\}$

$$\int\int_{\Omega} f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

3.9.2 Integrazione per sostituzione

Definizione 3.9.3 (Cambiamento delle variabili di integrazione)

$$\int\int_{\mathbf{\Psi}(S)} f(x, y) dx dy = \int\int_S f(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v)) |\det \mathbf{J}_{\mathbf{\Psi}}(u, v)| du dv$$

Definizione 3.9.4 (Coordinate polari)

$$\begin{cases} x = \Psi_1(\rho, \phi) = x_0 + \rho \cos \phi \\ y = \Psi_2(\rho, \phi) = y_0 + \rho \sin \phi \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{bmatrix} \Rightarrow |\det \mathbf{J}_{\mathbf{\Psi}}| = \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho$$

$$\int\int_{\Omega = \mathbf{\Psi}(S)} f(x, y) dx dy = \int\int_S f(x_0 + \rho \cos \phi, y_0 + \rho \sin \phi) \rho d\rho d\phi$$

Definizione 3.9.5 (Coordinate ellittiche)

$$\begin{cases} x = \Psi_1(\rho, \phi) = x_0 + a\rho \cos \phi \\ y = \Psi_2(\rho, \phi) = y_0 + b\rho \sin \phi \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} a \cos \phi & -a\rho \sin \phi \\ b \sin \phi & b\rho \cos \phi \end{bmatrix} \Rightarrow |\det \mathbf{J}_{\mathbf{\Psi}}| = ab\rho$$

$$\int\int_{\Omega = \mathbf{\Psi}(S)} f(x, y) dx dy = \int\int_S f(x_0 + \rho \cos \phi, y_0 + \rho \sin \phi) ab\rho d\rho d\phi$$

3.9.3 Integrali tripli

Formule di riduzione per domini semplici

Definizione 3.9.6 (Integrazione per fili)
$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2, g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$

$$\iiint_\Omega f = \iint_E \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy$$

Definizione 3.9.7 (Integrazione per strati)
$\Omega = \Omega \cap (\mathbb{R} \times [a, b] \times \mathbb{R})$
$\Omega_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \Omega\}$

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_y} f(x, y, z) dxdz \right) dy$$

Integrazione per sostituzione

Definizione 3.9.8 (Cambiamento delle variabili di integrazione)
$(x, y, z) = \mathbf{\Psi}(u, v, w) = (\Psi_1(u, v, w), \Psi_2(u, v, w), \Psi_3(u, v, w))$
$\mathbf{J}_\mathbf{\Psi}(u, v, w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \psi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \psi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} & \frac{\partial \psi_3}{\partial w} \end{bmatrix}$

$$\iiint_{\mathbf{\Psi}(T)} f \, dx \, dy \, dz = \iiint_T (f \circ \mathbf{\Psi}) \, |\det \mathbf{J}_\mathbf{\Psi}(u, v, w)| \, du \, dv \, dw$$

Definizione 3.9.9 (Coordinate cilindriche)
$\begin{cases} x = \Psi_1(\rho, \phi, z) = x_0 + \rho \cos \phi \\ y = \Psi_2(\rho, \phi, z) = y_0 + \rho \sin \phi \\ z = \Psi_3(\rho, \phi, z) = z \end{cases}$

$$\mathbf{J}_\mathbf{\Psi}(\rho, \phi, z) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\det \mathbf{J}_\mathbf{\Psi}| = \rho$$

$$\iiint_{\Omega = \Psi(S)} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_S f(\Psi_1, \Psi_3, z) \, \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

Definizione 3.9.10 (Coordinate sferiche)

$$\begin{cases} x = \Psi_1(\rho, \phi, \theta) = x_0 + \rho \sin\theta \cos\phi \\ y = \Psi_2(\rho, \phi, \theta) = y_0 + \rho \sin\theta \sin\phi \\ z = \Psi_3(\rho, \phi, \theta) = z_0 + \rho \cos\theta \end{cases}$$

$$\mathbf{J_\Psi} = \begin{bmatrix} \sin\theta\,\cos\phi & -\rho\,\sin\theta\,\sin\phi & \rho\,\cos\theta\,\cos\phi \\ \sin\theta\,\sin\theta & \rho\,\sin\theta\cos\phi & \rho\,\cos\theta\,\sin\phi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\,\sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow |\det \mathbf{J_\Psi}| = \rho^2\,\sin\theta$$

$$\iiint_{\Omega=\mathbf{\Psi}(T)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)\,\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

3.10 Integrali curvilinei

3.10.1 Integrali curvilinei di I specie

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$$

3.10.2 Forme differenziali

$$\omega = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = F_1\,dx_1 + \ldots + F_n\,dx_n$$

3.10.3 Integrali curvilinei di II specie

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_\gamma F_1\,dx_1 + \ldots + F_n\,dx_n \\ &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\,dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t)\gamma_1'(t) + \ldots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\,dt \end{aligned}$$

3.10.4 Funzione potenziale

$$\int_\gamma \omega = U(\gamma(a)) - U(\gamma(b))$$

3.11 Integrali di superficie

Definizione 3.11.1 (Area)

$$A(\Sigma) = \iint_D \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_{\mathbf{v}}(u,v)\| \, du \, dv$$

Definizione 3.11.2 (Area Σ cartesiana)

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + f_u^2(u,v) + f_v^2(u,v)} \, du \, dv$$

Definizione 3.11.3 (Integrale di superficie)

$$\iint_\Sigma f \, dS = \iint_D f(\sigma(u,v)) \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_{\mathbf{v}}(u,v)\| \, du \, dv$$

Definizione 3.11.4 (Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientabile)

$$\mathbf{\Phi}_{\Sigma^+}(\mathbf{v}) = \iint_\Sigma \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}^+ \rangle \, dS$$

3.11.1 Divergenza

Definizione 3.11.5

$$div\,\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

Teorema 3.11.6 (Teorema della divergenza nel piano)

$$\iint_{\Omega} div\,\mathbf{v}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle\,ds = \int_{\partial\omega^+} v_1\,dy - v_2\,dx$$

Teorema 3.11.7 (Teorema della divergenza nello spazio)

$$\iiint_{\Omega} div\,\mathbf{v}\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e\,dS \rangle$$

3.11.2 Rotore

Definizione 3.11.8 (Rotore)

$$rot(\mathbf{v}) = \nabla \wedge \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.11.9 (Teorema del rotore nel piano)

$$\iint_{\Omega} \langle rot\,\mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle \, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}^+ \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega^+} v_1\, dx + v_2\, dy$$

Teorema 3.11.10 (Teorema del rotore nello spazio)

$$\iint_{\Sigma} \langle rot\,\mathbf{v}, \mathbf{n}^+ \rangle \, dS = \int_{\partial\Sigma} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}^+ \rangle \, ds = \int_{\partial\Sigma_+} (v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz)$$

Calcolo delle serie

4.1 Serie fondamentali

4.1.1 Proprietà delle serie

i.

$$\text{Convergenza semplice}$$
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$\Leftrightarrow s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ii.

$$\text{Divergenza}$$
$$s_n \to \pm\infty$$

iii.

$$\text{Condizione necessaria}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{Convergente}$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$
$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$
$$\not\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,\text{Convergente}$$

iv.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,,\ \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \text{stesso comportamento}\,\forall n_0 \in \mathbb{N}$$

v.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \,\text{convergente}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k \to 0 \,\text{per}\, n_0 \to +\infty$$

vi.

$$\text{Linearità di } \sum$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \,, \sum_{k=0}^{\infty} b_k \,\text{convergente}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k) \,\text{convergente}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k) = \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

vii.

$$\text{Aritmetica parziale in } \mathbb{R}^+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k) = -\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot a_k = +\infty \,\forall \lambda > 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \,, \sum_{k=1}^{\infty} b_k = s \neq -\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = +\infty$$

4.1.2 Serie di Mengoli

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$$

4.1.3 Serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \dots$$

i.

Convergenza

$$-1 < r < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

ii.

Divergenza

$$r \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k = +\infty$$

iii.

Irregolarità

$$r \leq -1$$

iv.

Generalizzazione

$$-1 < r < 1 \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} ar^k = \frac{ar^{k_0}}{1-r}$$

4.2 Serie a termini positivi

4.2.1 Serie armonica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty$$

4.2.2 Criterio del confronto per serie a termini positivi

$$\forall 0 \leq a_k \leq b_k \text{ per } k \to +\infty$$

i.

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ convergente}$$

ii.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$$

4.2.3 Serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log^{\beta} k} = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \beta \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \beta > 1 \end{cases}$$

4.2.4 Criterio del confronto asintotico

$$a_k \geq 0,\, b \geq \text{ per } k \to +\infty$$

$$a_k = b_k(1 + o(1)) \text{ per } k \to +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k,\, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ stesso comportamento}$$

4.2.5 Criterio del rapporto

i.

$$\lim_{k \to +\infty} a_k > 0$$

$$\exists r \in (0,1) : \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge}$$

ii.

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$$

iii.

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{convergenza} \\ l > 1 \Rightarrow \text{non convergenza} \\ l = 1 \Rightarrow \text{non si può concludere nulla} \end{cases}$$

iv.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 1$$

4.2.6 Criterio della radice

i.

$$\exists r \in (0,1) : \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} \le r$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ convergente}$$

ii.

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} \ge 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$$

iii.

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{convergenza} \\ l > 1 \Rightarrow \text{non converge} \end{cases}$$

4.3 Serie a termini di segno variabile

4.3.1 Convergenza assoluta

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ assolutamente convergente}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ semplicemente convergente}$$

4.3.2 Criterio di convergenza assoluta

i.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ assolutamente convergente}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ semplicemente convergente}$$

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

ii.

$$\text{Convergenza assoluta}$$
$$\Rightarrow \text{Convergenza semplice}$$

iii.

$$\text{Convergenza semplice}$$
$$\not\Rightarrow \text{Convergenza assoluta}$$

iv.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^{\alpha}} \ \text{ convergente } \ \forall\alpha > 0$$

4.3.3 Serie a termini di segno alterno

$$\forall a_k \geq 0 \ \text{ definitivamente per } \ k \to +\infty$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

4.3.4 Criterio di Leibniz

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \text{ semplicemente convergente}$$

4.4 Serie numeriche e integrali impropri

4.4.1 Criterio integrale per serie a termini positivi

i.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \ \text{ convergente}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx \ \text{ convergente}$$

ii.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \ \text{ divergente}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx \ \text{ divergente}$$

4.5 Serie di Taylor

4.5.1 Serie di Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

4.5.2 Sviluppi in serie di Taylor di funzioni elementari

Proposizione 4.5.1 (Serie di Taylor per le funzioni comuni)

i. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

iii. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

iv. $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

v. $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

vi. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \forall x \in (-1, 1)$

vii. $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad \forall x \in (-1, 1)$

viii. $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \forall x \in (-1, 1)$

Analisi complessa

Calcolo infinitesimale

Calcolo differenziale

Calcolo integrale

Calcolo delle serie

Analisi armonica

Trasformata di Laplace

Trasformata di Fourier

Equazioni differenziali

Equazioni differenziali del I ordine

11.1 Equazioni differenziali lineari

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx$$

$$A(x) = \int a(x) dx$$

11.2 Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

Equazioni differenziali del II ordine

12.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

$$ay'' + by' + cy =$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

i.
$$\Delta > 0$$
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

ii.
$$\Delta = 0$$
$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}$$

iii.
$$\Delta < 0$$
$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$$
$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos\beta + c_2 e^{\alpha x} \sin\beta$$

Equazioni differenziali di ordine n

Analisi funzionale