Metody optymalizacji Lista 1

Radosław Wojtczak, numer indeksu: 254607

02.04.2023

Spis treści

Zadanie 1

1.1 Wprowadzenie

Pierwszym zadaniem było przeprowadzenie testów na dokładność oraz odporność algorytmów LP z użyciem specjalnie spreparowanego przykładu wykorzystującego macierz Hilberta. Ze względu na swoją budowę, macierz ta powoduje złe uwarunkowanie zadania, nawet dla niewielkich wartości parametru n, który oznacza rozmiar problemu.

1.2 Model

1.2.1 Zmienne decyzyjne

$$x \geq 0 \tag{1.1}$$

Co oznacza, iż każdy z elementów wektora nie może być liczbą ujemną.

1.2.2 Ograniczenia

$$\boldsymbol{Ax = b} \tag{1.2}$$

Dla elementów macierzy zdefiniowanych w następujący sposób.

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, .., n \tag{1.3}$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, .., n \tag{1.4}$$

1.2.3 Funkcja celu

$$\boldsymbol{min\; c^T x} \tag{1.5}$$

1.3 Wyniki

n	$\frac{\|\|x-\hat{x}\|\|_2}{\|\|x\|\|_2}$
3	0.000000
4	0.000000
5	0.000000
6	0.000000
7	0.000000
8	0.514059
9	0.682911
10	0.990388
11	0.952197
12	1.292507

Table 1.1: Wartości błędów względnych dla wskazanych wartości parametru n

Zauważamy, iż ostatni rozmiar problemu, dla którego można rozwiązać zadanie z dokładnością do co najmniej 2 cyfr jest równy **7**. Od tej wartości błąd względny jest niezerowy, ponadto dla rosnący wartości parametru n, zwiększa się również błąd, co wskazuje na to, iż im większy rozmiar problemu tym większa niedokładność w otrzymanych wynikach. Wiedząc, iż rozwiązaniem rozpatrywanego równania jest wektor **x**, gdzie $x_i = 1, i = 1, ..., n$ poniżej zaprezentowano wyniki otrzymane dla dwóch wybranych rozmiarów problemów:

Indeks	n=7	n=8
x[0]	1	1.00006
x[1]	1	0.996503
x[2]	1	1.04662
x[3]	1	0.74359
x[4]	1	1.6993
x[5]	1	0
x[6]	1	1.71795
x[7]	—	0.795918

Table 1.2: Współrzędne wektorów dla wybranych rozmiarów problemu

1.4 Wnioski

Realizując problemy przy użyciu narzędzi programowania liniowego należy zwrócić uwagę na uwarunkowanie zadania, gdyż ma ono znaczny wpływ na otrzymywane wyniki. Im zadanie jest gorzej uwarunkowane tym otrzymane wyniki odbiegają bardziej od wartości rzeczywistych.

Zadanie 2

2.1 Wprowadzenie

Pewna firma transportowa miała problem z poprawnym rozdysponowaniem dźwigów samojezdnych w swoich 7 siedzibach umiejscowionych w południowo-zachodniej części Polski. W ramach zadania dana była tabela prezentująca nadmiar jak i niedobór dźwigów samojezdnych, występujących w dwóch typach, w każdej z placówek firmy Przy pomocy narzędzia Google Maps ustalono odległości między placówkami firmy, które zostały zaprezentowane w poniższej tabeli:

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	0	43	58	65	34	53	78
Brzeg	43	0	53	80	78	99	126
Nysa	58	53	0	33	86	75	89
Prudnik	65	80	33	0	69	48	62
Strzelce	34	78	86	69	0	26	61
Koźle	53	99	75	48	26	0	36
Racibórz	78	126	89	62	61	36	0

Table 2.1: Odległości między siedzibami firmy

Ze względu estetycznych nazwa miejscowości *Strzelce Opolskie* w tabeli, jak i w dalszej części sprawozdania została zredukowana do *Strzelce*. Ponadto koszt przeniesienia dźwigów z miasta A do miasta B jest zależne od jego typu. Koszt transportu dźwigu typu II jest o 20% wyższy, niż koszt transportu dźwigu I. Ponadto dźwig typu I może zostać zastąpiony dźwigiem typu II, jednakże konwersja jest jedynie jednostronna. Celem zadania jest wyznaczenie planu, zgodnie z którym firma powinna dokonać przemieszczania dźwigów między swoimi siedzibami, aby potrzeby każdej z placówek były zaspokojone, przy minimalnym koszcie transportu.

2.2 Model

W skład modelu wchodzą następujące elementy:

- Zbiór miast, określany mianem **Cities**, który zawiera wszystkie miasta, w których rozpatrywana firma posiada swoją placówkę

- Zbiór typów dźwigów, określany mianem **Cranes**

Ponadto zdefiniowano następujące parametry:

- Parametr $excess(crane \in Cranes, city \in Cities)$, która definiuje nadmiar dźwigów dla wskazanego miasta
- Parametr $deficiency(crane \in Cranes, city \in Cities)$, która definiuje niedobór dźwigów dla wskazanego miasta
- Parametr $transport\_cost(crane \in Cranes)$ definiujący koszt transportu dźwigów o wskazanym typie
- Parametr $could - replace(crane \in Cranes)$ wskazujący, który z dźwigów może zostać zastąpiony przez dźwig innego typu

2.2.1 Zmienne decyzyjne

Zmienną decyzyjną we wskazanym modelu jest liczba dźwigów, którą należy przetransportować z miasta **c1** do miasta **c2**

$$x_{c1,c2,crane} c1, c2 \in Cities, crane \in Cranes \tag{2.1}$$

2.2.2 Ograniczenia

W ramach zadania podane zostały następujące ograniczenia:

- Liczba dźwigów, która została przetransportowana do wskazanego miasta powinna być równa niedoborowi, który wskazane miasto posiadało.

$$(\forall c1 \in Cities)(\sum_{c2 \in Cities, c \in Cranes} x_{c1,c2,c} = deficiency(c, c1)) \tag{2.2}$$

- Dźwig typu II nie może zostać zastąpiony przez dźwig typu I

$$(\forall c1 \in Cities)(x_{c1,c2,c_{II}} \geq deficiency(c_{II}, c1)) \tag{2.3}$$

- Liczba nadmiarowych dźwigów musi zostać zniwelowana dla każdego z miast

$$(\forall c1 \in Cities, c \in Cranes)(\sum_{c2 \in Cities} x_{c1,c2,c} = excess(c, c1)) \tag{2.4}$$

2.2.3 Funkcja celu

Celem tego zadania było zminimalizowanie funkcji celu:

$$min : \sum_{c1,c2 \in Cities, c \in Cranes} distance(c1, c2) * x_{c1,c2,crane} * transport\_cost(crane) \tag{2.5}$$

Wynika to z faktu, iż firma chce zapłacić jak najmniej za transport dźwigów, który zgodnie z powyższym opisem zadanej sytuacji jest zależny od dystansu, który musi zostać pokonany.

2.3 Wyniki

Uruchomienie programu, który implementuje wskazaną sytuację, skutkuje otrzymaniem następującego planu transportu dźwigów:

Z	Do	Liczba	Typ
Opole	Brzeg	4	I
Opole	Koźle	3	I
Brzeg	Brzeg	1	II
Nysa	Opole	2	II
Nysa	Brzeg	5	I
Nysa	Prudnik	1	I
Prudnik	Prudnik	3	II
Prudnik	Strzelce	4	II
Prudnik	Koźle	2	II
Prudnik	Racibórz	1	II
Strzelce	Koźle	5	I

Table 2.2: Wykreowany plan transportu dźwigów między placówkami firmy

Sytuacja występująca chociażbym w trzecim wierszu planu wskazuje na sytuację, w której doszło do zamiany typów dźwigu (gdyż zgodnie z założeniami, dźwig typu I mógł zostać zastąpiony przez dźwig typu II) Wartość funkcji celu wyniosła: **1419** Ponadto, założenie całkowitoliczbowości zmiennych decyzyjnych okazało się być **niepotrzebne** w tym zadaniu. Pomijając wskazane ograniczenie program zwrócił ten sam plan z tą samą wartością funkcji celu.

2.4 Wnioski

Programowanie liniowe jest użytecznym narzędziem rozwiązującym w skuteczny sposób problemy natury rzeczywistej.

Zadanie 3

3.1 Wprowadzenie

W ramach zadania rozpatrzono pewną rafinerię, która dysponuje jednostką destylującą, która pozwala otrzymać cztery rodzaje produktów: paliwa silnikowe, oleje, destylaty ciężkie oraz resztki. Ponadto posiada jednostkę reformowania oraz jednostkę krakowania katalitycznego, która może przetwarzać destylaty ciężkie. W ramach zadania należało zminimalizować koszt produkcji wskazanej rafinierii, która posiada do dyspozycji dwa typy ropy, ropę **B1** oraz robię **B2**. Wydajności procesów, oraz koszty operacji były dane w ramach treści zadania.

3.2 Model

W skład modelu wchodzą następujące elementy:

- Zbiór typów ropy o nazwie **Oils**, w skład którego wchodzą dwa wyżej wymienione typy: $\{B1, B2\}$
- Zbiór elementów otrzymanych w ramach destylacji o nazwie **Types**, w skład którego wchodzą: $\{Petrol, Oil, Distill, Leftovers\}$

3.2.1 Zmienne decyzyjne

W ramach modeulu rozpatrujemy następujące zmienne decyzyjne

- b1 - Liczba ton ropy B1, która została przetworzona przez rafinerię
- b1_ho - Liczba ton oleju z ropy B1, która została przeznaczona na domowe paliwa
- b1_he - Liczba ton oleju z ropy B1, która została przeznaczona na ciężkie paliwa
- b1_d_c - Liczba ton destylatu z ropy B1, która została przeznaczona na krakowanie
- b1_d_h - Liczba ton destylatu z ropy B1, która został preznaczony na ciężkie paliwa

- b2 - Liczba ton ropy B2, która została przetworzona przez rafinerię
- b2_ho - Liczba ton oleju z ropy B2, która została przeznaczona na domowe paliwa
- b2_he - Liczba ton oleju z ropy B2, która została przeznaczona na ciężkie paliwa
- b2_d_c - Liczba ton destylatu z ropy B2, która została przeznaczona na krakowanie
- b2_d_h - Liczba ton destylatu z ropy B2, która został preznaczony na ciężkie paliwa

3.2.2 Ograniczenia

Treść zadania determinowała następujące ograniczenia:

- Ograniczenie dotyczące liczby wyprodukowanego paliwa silnikowego
$$b1_{petrol} * b1 + b2_{petrol} * b2 + 0.5 * d\_c + 0.5 * d\_h \geq 200000 \tag{3.1}$$
- Ograniczenie dotyczące liczby wyprodukowanego domowego paliwa
$$b1\_ho + b2\_ho + 0.2 * b1\_d\_c + 0.2 * b2\_d\_c \geq 400000 \tag{3.2}$$
- Ograniczenie dotyczące liczby wyprodukowanego ciężkiego paliwa
$$b1\_he + b1\_d\_h + b1_d * b1 + b2\_he + b2\_d\_h + b2_d * b2 + 0.06 * b1\_d\_c + 0.06 * b2\_d\_c \geq 250000 \tag{3.3}$$
- Ograniczenia dotyczące zawartości siarki
$0.002 * b1\_ho + 0.003 * b1\_d\_c * 0.2 + 0.012 * b2\_ho + 0.025 * b2\_d\_c * 0.2 \leq (b1\_ho + b2\_ho + b1\_d\_c * 0.2 + b2\_d\_c * 0.2) * 0.005$
- Ograniczenie odnośnie ilości oleju
$$b1\_ho + b1\_he = b1_{oil} * b1 \tag{3.4}$$
$$b2\_ho + b2\_he = b2_{oil} * b2 \tag{3.5}$$
- Ograniczenie odnośnie ilości destylatu
$$b1\_d\_c + b1\_d\_h = b1_d * b1 \tag{3.6}$$
$$b2\_d\_c + b2\_d\_h = b2_d * b2 \tag{3.7}$$

Ze względów estetycznych nie wykorzystano zmiennych aby zaprezentować przeliczniki ustalone w ramach zadnia, zostały one wprost zaaplikowane do równań.

3.2.3 Funkcja celu

Funkcja celu prezentuje się następująco:

$$min: \ (1300 + 10) * b1 + (1500 + 10) * b2 + 20 * b1\_d\_c + 20 * b2\_d\_c \tag{3.8}$$

Co sprowadza się do minimalizacji kosztów przetwarzania ropy

3.3 Wyniki

Program po uruchomieniu wygenerował wartość funkcji kosztu równą: **1345943600.86768**. W ramach operacji wykonywanych w rafinerii wykorzystano **1026030.36876356** ton ropy B1 i 0 ton ropy B2. Ostatecznie otrzymano **381562** ton oleju wykorzystanego na domowe paliwa, **28850.3** ton oleju wykorzystanego na ciężkie paliwa. Ponadto przeznaczono **61713.7** ton destlatu na ciężkie paliwa oraz **92190.9** ton na krakowanie katalityczne.

3.4 Wnioski

Powyższy test jest kolejny praktyczny przykładem zastosowania programowania liniowego w rozwiązywaniu skomplikowanych, rzeczywistych problemów.