线性代数期中考试

1. 考虑矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -20\\ -10 & 21 & -100\\ -2 & 4 & -19\end{pmatrix}$。

(1) 证明矩阵A可逆，并计算A的逆矩阵。(10分)

(2) 证明当n为正偶数时$A^n=I_3$, n为正奇数时$A^n=A$。（5分）

(3) 求解线性方程组：（5分）

$$\begin{cases}-x+4y-20z=1\\ -10x+21y-100z=-1\\ -2x+4y-19z=1\end{cases} \tag{1}$$

2. (1) 令$A=\begin{pmatrix}a & 0 & -1\\ 2 & 3 & b\end{pmatrix}$，假设$AA^T=\begin{pmatrix}26 & -11\\ -11 & 14\end{pmatrix}$，求$a$, b的取值。（10分）

(2) 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$的逆矩阵。（10分）

(3) 设有$\mathbb{R}^3$中三个向量$(1,0,-2)$, $(1,2,\lambda)$, $(2,1,-1)$。求使得这三个向量线性相关的所有λ的取值。（15分）

(4) 求n阶方阵$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$的行列式。（15分）

3. 对于一个数域K上的n阶方阵$A=(a_{i,j})$，我们定义A的迹$\mathrm{Tr}(A)$为其对角线元素的和，也就是：

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{2}$$

设有A,B两个n阶方阵，以及数域中任意元素k。

(1) 证明$\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$，以及$\mathrm{Tr}(kA)=k\mathrm{Tr}(A)$。（5分）

(2) 证明$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$。（10分）

(3) 设K为实数域，证明$\mathrm{Tr}(AA^T)=0$当且仅当$A=0$. （5分）

4. 令A为一个$s\times n$阶矩阵，x为一个$1\times s$阶矩阵, y为一个$n\times 1$阶矩阵。假设$xAy\neq 0$。

(1) 证明$\mathrm{rank}(AyxA)=1$。（5分）（提示：考虑$(xAy)^2$）

(2) 令$a:=xAy$（作为数域中元素），$B:=A-a^{-1}(AyxA)$。记W_A，W_B分别为以A，B为系数矩阵的n元齐次线性方程组的解空间。证明W_A包含于W_B。（5分）

(3) 证明$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(A)-1$ (Wedderburn's rank-one reduction theorem)。（10分）（提示：验证$y\in W_B$）