

数理逻辑

2019 年 1 月 7 日

1. 判断以下集合是否为联结词完全集

(1) $\{\rightarrow\}$

(2) $\{\vee\}$

(3) $\{\neg\}$

2. 在 P 中证明

$$(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$$

3. 若在 P 中加入下述公理

$$(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

得到推理系统 P^+ . 求证, 存在公式 γ , 使得 $\vdash_{P^+} \gamma$ 且 $\vdash_{P^+} \neg\gamma$.

4. α 和 β 是 \mathcal{L} 中公式, 在 $N_{\mathcal{L}}$ 中证明或给出反例

(1) $(\forall x\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \exists x(\alpha \rightarrow \beta)$

(2) $\exists x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \beta)$

5. F 是 \mathcal{L} 的谓词, 在 $K_{\mathcal{L}}$ 中证明或给出反例

(1) $\forall x\exists yF(x, y) \rightarrow \exists y\forall xF(x, y)$

(2) $\exists y\forall xF(x, y) \rightarrow \forall x\exists yF(x, y)$

6. c 是 $K_{\mathcal{L}}$ 的命题常元, 证明或证伪

(1) $\models \exists x\alpha \rightarrow \alpha(x/c)$

(2) 若 $\models \exists x\alpha$, 则 $\models \alpha(x/c)$