数学笔记

RC

2019 年 5 月 17 日

目录

Part I

高等数学

Chapter 1

无穷级数

1.1 概念和性质

1.1.1 等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n \ldots \begin{cases} = \frac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{发散}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

1.1.2 调和级数

TODO

1.1.3 p 级数

TODO

1.1.4 敛散性

级数收敛的必要条件: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

1.2 常数项级数审敛法

1.2.1 正项级数

收敛的充要条件: 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

比较审敛法

若 $u_n \le v_n$, 则

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散}. \end{cases}$$

比值审敛法 (达朗贝尔判别法)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} < 1 \Longrightarrow \text{收敛}, \\ > 1 \Longrightarrow \text{发散}, \\ = 1 \Longrightarrow \text{不确定}. \end{cases}$$

根值审敛法 (柯西判别法)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} < 1 \Longrightarrow \text{收敛}, \\ > 1 \Longrightarrow \text{发散}, \\ = 1 \Longrightarrow \text{不确定}. \end{cases}$$

1.2.2 交错级数

莱布尼茨定理

对 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, 若有

1. $u_n \ge u_{n+1}$ (绝对值递减),
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则收敛, 且和 $S \le u_1$.

1.2.3 绝对收敛与条件收敛

绝对收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.
条件收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

1.3 幂级数

1.3.1 阿贝尔定理