

# 数学笔记

RC

2019 年 5 月 17 日

# 目录

<b>I</b>	<b>高等数学</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>无穷级数</b>	<b>2</b>
1.1	概念和性质 . . . . .	2
1.1.1	等比级数 . . . . .	2
1.1.2	调和级数 . . . . .	2
1.1.3	$p$ 级数 . . . . .	2
1.1.4	敛散性 . . . . .	2
1.2	常数项级数审敛法 . . . . .	2
1.2.1	正项级数 . . . . .	2
1.2.2	交错级数 . . . . .	3
1.2.3	绝对收敛与条件收敛 . . . . .	3
1.3	幂级数 . . . . .	3
1.3.1	阿贝尔定理 . . . . .	3

# **Part I**

## **高等数学**

# Chapter 1

## 无穷级数

### 1.1 概念和性质

#### 1.1.1 等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n \dots \begin{cases} = \frac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{发散}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

#### 1.1.2 调和级数

TODO

#### 1.1.3 p 级数

TODO

#### 1.1.4 敛散性

级数收敛的必要条件:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

### 1.2 常数项级数审敛法

#### 1.2.1 正项级数

收敛的充要条件: 部分和数列  $\{S_n\}$  有界.

## 比较审敛法

若  $u_n \leq v_n$ , 则

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \implies \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散}. \end{cases}$$

## 比值审敛法 (达朗贝尔判别法)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} < 1 \implies \text{收敛}, \\ > 1 \implies \text{发散}, \\ = 1 \implies \text{不确定}. \end{cases}$$

## 根值审敛法 (柯西判别法)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} < 1 \implies \text{收敛}, \\ > 1 \implies \text{发散}, \\ = 1 \implies \text{不确定}. \end{cases}$$

### 1.2.2 交错级数

#### 莱布尼茨定理

对  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ , 若有

1.  $u_n \geq u_{n+1}$  (绝对值递减),
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

则收敛, 且和  $S \leq u_1$ .

### 1.2.3 绝对收敛与条件收敛

绝对收敛:  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛.

条件收敛:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散.

## 1.3 幂级数

### 1.3.1 阿贝尔定理