数学笔记

RC

2019 年 5 月 17 日

目录

Part I

高等数学

Chapter 1

无穷级数

1.1 概念和性质

1.1.1 等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n \ldots \begin{cases} = \frac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{发散}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

1.1.2 调和级数

TODO

1.1.3 p 级数

TODO

1.1.4 敛散性

级数收敛的必要条件: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

1.2 常数项级数审敛法

1.2.1 正项级数

正向级数收敛的充要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

比较审敛法

若 $u_n \le v_n$, 则

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散}. \end{cases}$$

比较审敛法的极限形式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} 0, & \text{则} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛}, \\ +\infty, & \text{则} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散}, \\ A \ne 0, & \text{同敛散}. \end{cases}$$

比值审敛法 (达朗贝尔判别法)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} < 1 \Longrightarrow \text{收敛}, \\ > 1 \Longrightarrow \text{发散}, \\ = 1 \Longrightarrow \text{不确定}. \end{cases}$$

根值审敛法 (柯西判别法)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} < 1 \Longrightarrow \text{收敛}, \\ > 1 \Longrightarrow \text{发散}, \\ = 1 \Longrightarrow \text{不确定}. \end{cases}$$

1.2.2 交错级数

莱布尼茨定理

对 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, 若有

1. $u_n \ge u_{n+1}$ (绝对值递减),
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则收敛, 且和 $S \le u_1$.

1.2.3 绝对收敛与条件收敛

绝对收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.
条件收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

1.3 幂级数

1.3.1 阿贝尔定理

1. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时收敛, 则 $|x| < |x_0|$ 时绝对收敛,
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_1$ 时发散, 则 $|x| > |x_1|$ 时发散.

由此推出, 若不是只在 $x = 0$ 点收敛, 则必存在 $R > 0$, 使

1. $|x| < R$ 时, 绝对收敛,
2. $|x| > R$ 时, 发散,
3. $x = \pm R$ 时, 不确定.

求收敛域方法

1. 先通过 $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \rho(x) < 1$ 或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \rho(x) < 1$ 求出收敛区间,
2. 在讨论两个端点处的敛散性, 得收敛域.

1.3.2　函数展开成幂级数

常用展开式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, && -1 < x < 1 \\
&\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, && -1 < x < 1 \\
&\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, && -1 < x \leq 1 \\
&e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, && -\infty < x < +\infty \\
&a^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n, && -\infty < x < +\infty \\
&\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, && -\infty < x < +\infty \\
&\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, && -\infty < x < +\infty \\
&\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, && -1 < x < 1 \\
&\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, && -1 < x \leq 1
\end{aligned}
$$

1.4　傅里叶级数