Les fonctions

1. Une **fonction** est un procédé qui relie un ou plusieurs nombres à un unique autre nombre.
2. Soit f une fonction, et soit a et b 2 nombres réels tels que :

   f(a) = b

   - ‘b’ est **l’image** de ‘a’ par f,
   - ‘a’ est un **antécédent** de ‘b’ par f,
   - Une image est **unique**,
   - Il **peut exister plusieurs antécédents** à une image.

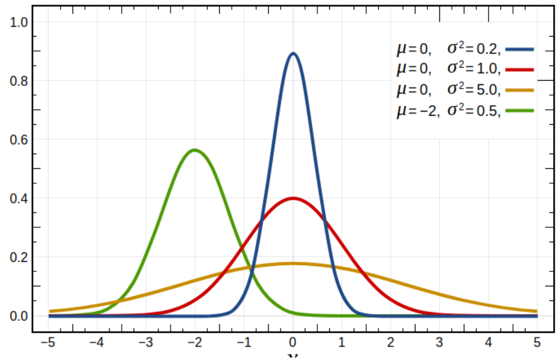
3. La **représentation graphique** d’une fonction est la courbe constituée de l’ensemble des points de coordonnées (x;f(x)).
4. L’**ensemble de définition** d’une fonction, noté usuellement D est l’ensemble des nombres pour lesquels il existe une image par la fonction.
5. Soit f une fonction, soit D_f l’ensemble de définition de f, soit $x \in D_f$.

   L’**expression algébrique** de la fonction f donne f(x) en fonction de la variable x.

1. La fonction donnant le volume d’un cube d’arête x : $\mathcal{V}(x) = x^3$
   La fonction g(x,y,z) représentant la loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) de paramètre σ centrée au point de coordonnées (0;0;0) :

$$g(x,y,z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{\sigma^2}\right)$$

3. Représentation graphique de la loi normale à une seule variable



4. Domaine de définition :

$$D_{\mathcal{V}} = [0;+\infty[$$

$$D_{g(x,y,z)} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

Les fonctions de références

La fonction carré :

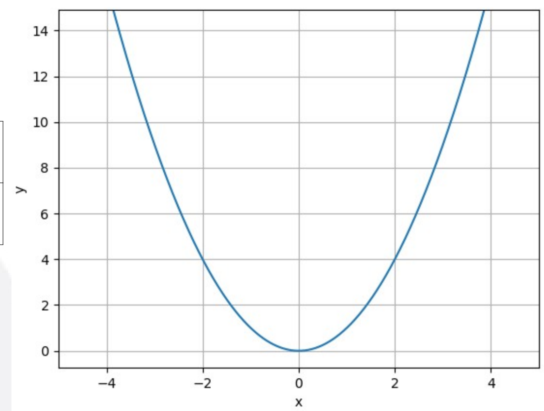
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$

Équation : $y = x^2$

Tableau de valeur :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

Représentation graphique :



La fonction inverse :

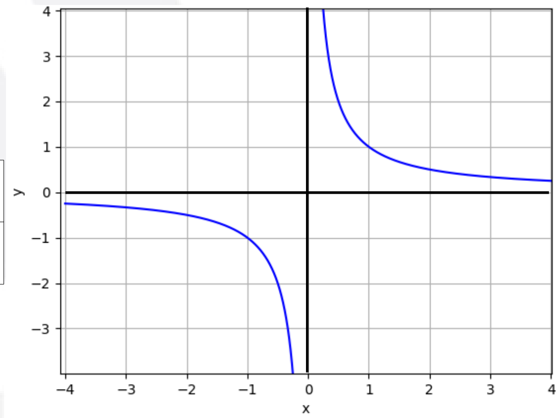
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$

Équation : $y = \dfrac{1}{x}$

Tableau de valeur :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-1/3	-1/2	-1	X	-1	1/2	1/3

Représentation graphique :



La fonction racine carrée :

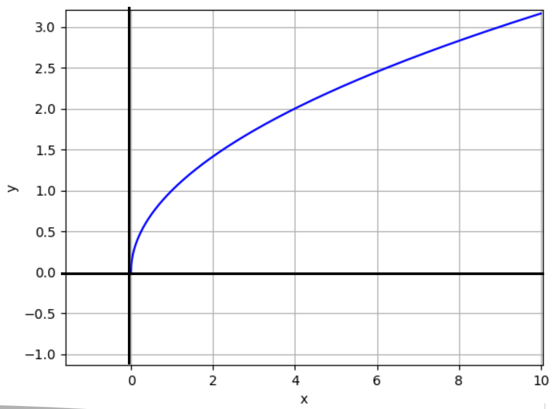
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^+$

Équation : $y = \sqrt{x}$

Tableau de valeur :

x	0	1	4	9	16	25	36
f(x)	0	1	2	3	4	5	6

Représentation graphique :



Somme, produit généralisés et sommation d’Einstein

Somme généralisée :

La somme généralisée permet d’abréger des expressions algébriques.

$$\sum_{i=0}^{100} i = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{12} + ... + a_{23} + a_{33}$$

Produit généralisée :

Le produit généralisé permet d’abréger des expressions algébriques.

$$\prod_{i=0}^{4} a_i = a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$$

Convention de sommation d’Einstein :

C’est également une notation permettant d’alléger les expressions algébriques. Un indice « i » répété 2 fois dans un terme indique qu’une somme généralisée d’indice « i » est effectuée. Cet indice est également appelé indice muet.

$$i \in \{0, 1, 23\} \quad : \quad b_{ii} = b_{00} + b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3\} \quad : \quad a_{kl}x_k = a_{1l}.x_1 + a_{2l}.x_2 + a_{3l}.x_3$$

La convention de notation d’Einstein est communément utilisé dans les expressions faisant intervenir des opérations entre vecteurs et matrices.

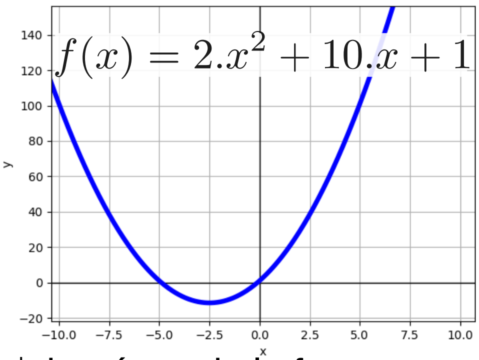
Polynôme du 2nd degré

Fonction polynomiale :

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est qualifiée de polynomiale d'ordre 2 s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ tels que :

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

Représentation graphique :



Équation du 2nd degré :

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, une équation du 2nd degré est de la forme :

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Discriminant :

Le discriminant de f(x) se note Δ et est donnée par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta < 0$, alors l'équation $a.x^2+b.x+c = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- $\Delta = 0$, l'équation $a.x^2+b.x+c = 0$ n'a 1 solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- $\Delta > 0$, l'équation $a.x^2+b.x+c = 0$ admet 2 solutions dans $\mathbb{R}$.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemples :

$f_1(x) = x^2 + 4.x - 5$

On calcul le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$

$\Delta > 0$, $f_1(x)$ admet 2 racines réelles :

$x_1 = -5$ et $x_2 = 1$

$f_2(x) = 6.x^2 + 4.x + 1$

On calcul le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4 \times 6 \times 1 = -8$

$\Delta < 0$, $f_2(x)$ n'admet aucunes racines réelles.

Polynôme du 2nd degré

Variation de f(x) :

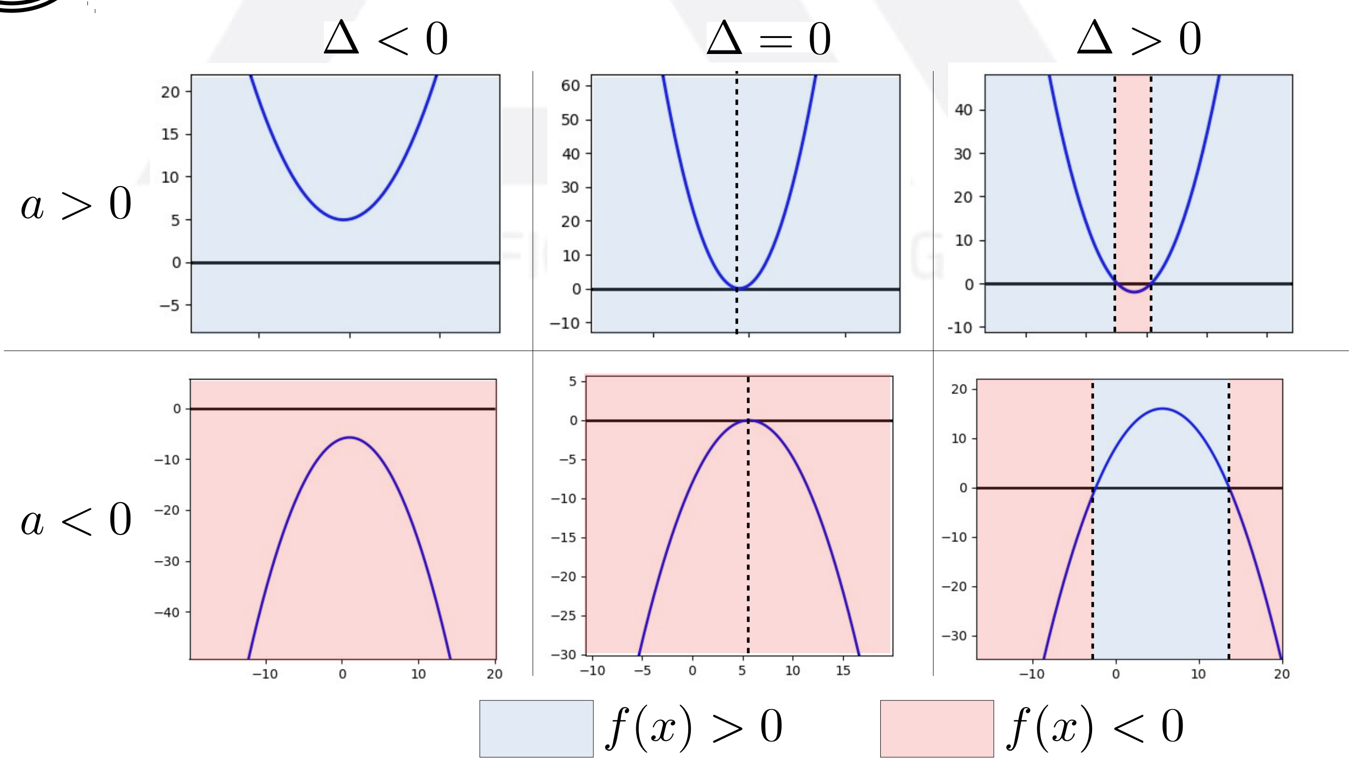
Les variations et le signe de celle-ci sur son domaine de définition peuvent être synthétisés dans un tableau (ici a > 0):

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
signe		signe a	0		signe -a		0	signe a	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	β	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha)$$

Différents scénarios de variation de f(x) :

En fonction du signe du coefficient “a” et du discriminant, on peut distinguer 6 cas :



Les polynômes

Formule générale :

Les polynômes du 2nd degré sont des cas particuliers de la famille des polynômes. Un polynôme de **degré n** est définit par la formule :

$$P = a_0 + a_1.x + ... + a_n.x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i$$

L'exposant n du terme **x^n** correspondant au terme à la puissance la plus élevée du polynôme est également ce que l'on appelle le **degré du polynôme** P et se note **deg(P)**.

Forme factorisée :

Une seconde forme du polynôme est sa forme factorisée qui s'écrit :

$$P(x) = \lambda \prod_{i=0}^{N} (x - a_i)$$

Où λ est un scalaire (ici dans ce contexte un réel) et a_i est la ie racine du polynôme P. Ici, cette forme implique que P est autant de racine réelle que son degré, ce qui n'est pas forcément le cas dans ℝ.

Propriétés :

- La somme, le produit ou la composée de polynômes est un polynôme.
- Le produit d'un polynôme de degré *p* et d'un polynôme de degré *q* est un polynôme de degré *p+q*.
- Le produit de 2 polynômes P et Q est nul si au moins un des 2 polynômes est nul :

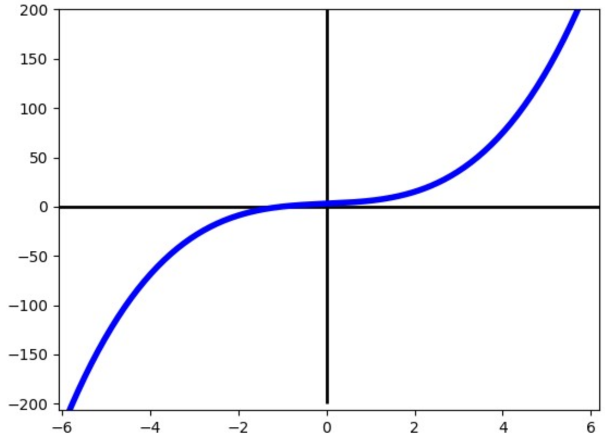
$$P \times Q = 0 \Longleftrightarrow P = 0 \ ou \ Q = 0$$

Les polynômes

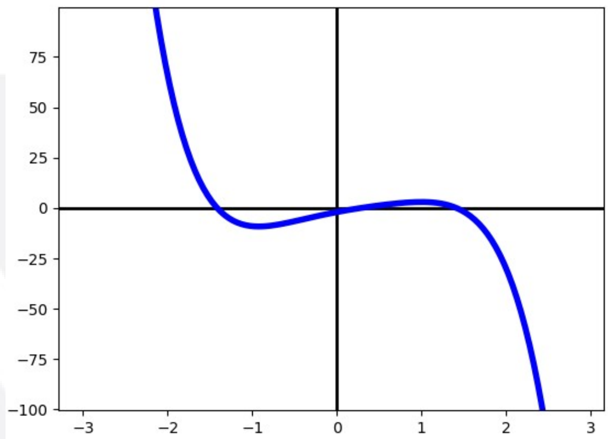
Exemple de fonctions polynomiales :

Voici quelques exemples de fonctions polynomiales $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ et $p_4(x)$ respectivement de degré 3, 5, 4 et 6 :

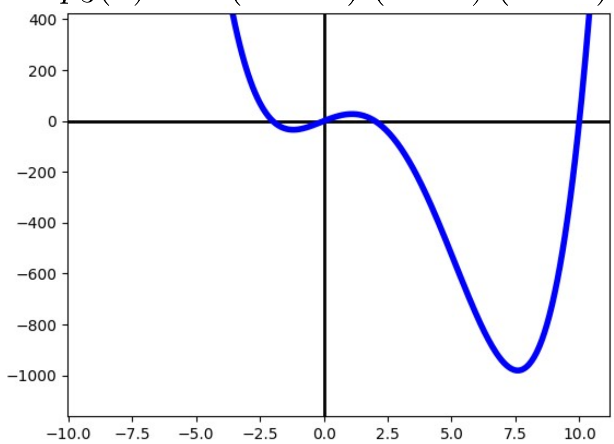
$$p_1(x) = x^3 + 2.x + 3$$



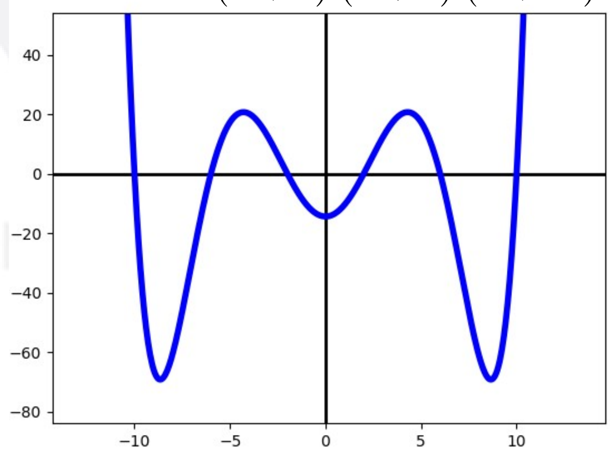
$$p_2(x) = -2.x^5 + 2.x^4 - 3.x^2 + 8.x - 2$$



$$p_3(x) = x.(x-10).(x-2).(x+2)$$



$$p_4(x) = (x-10).(x-6).(x-2)$$
$$.(x+2).(x+6).(x+10)$$



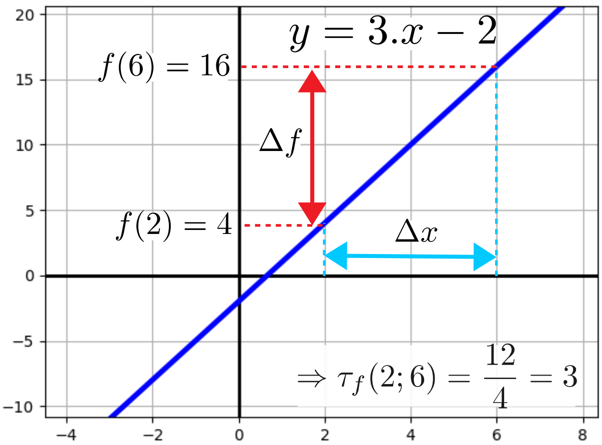
La dérivation

Taux de variation:

Le taux de variation d'une fonction f entre a et b est donné par :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Le taux de variation est usuellement noté τ_f(a;b) ou $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a;b)$.



Dérivée en un point:

La fonction f est dite **dérivable au point d'abscisse a** si et seulement si le taux de variation de f entre a et a+h tend vers **un nombre réel unique lorsque h tend vers 0**. Ce nombre est le nombre dérivée de f en a que l'on note **f'(a)** :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Par « tend vers un nombre » signifie « se rapproche de plus en plus de ce nombre ».

Dérivée en un point:

La fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si elle est **dérivable en tout réel x appartenant à cet intervalle**.

Soit la fonction f dérivable sur un intervalle I, on appelle fonction dérivée de la fonction f, la fonction notée **f'**, qui à tout réel x de I associe le réel f'(x).

Autrement dit, **l'ensemble des valeurs dérivées de f en x**, où x appartient au domaine de dérivabilité de f , forme la fonction dérivée f'.

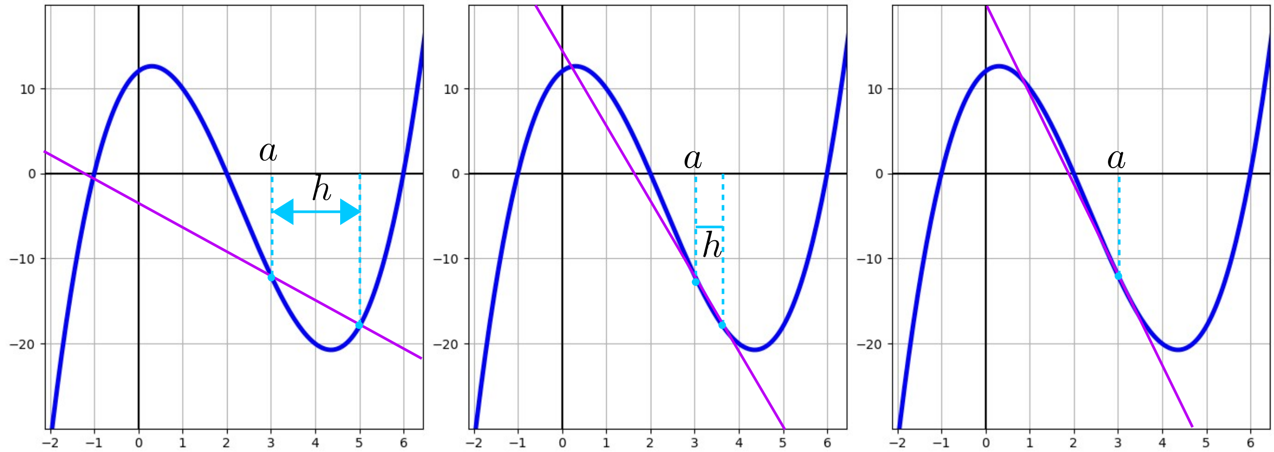
L'**ensemble de dérivabilité** d'une fonction est l'ensemble des points où f est dérivable.

La dérivation

Illustration de la notion de dérivée:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La valeur de h tend vers 0



De manière grossière on peut assimiler la dérivée d'une fonction en un point comme le taux de variation pour une valeur de Δx infinitésimale, qui correspond aussi à la pente de la tangente à f au point d'abscisse a.

Formulaire sur les dérivées :

$$\forall k \in \mathbb{R},\ f(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n \times x^{n-1}$$

$$f(x) = \exp(u(x)) \Longrightarrow f'(x) = u'(x).\exp(u(x))$$

$$f(x) = \ln(u(x)) \Longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2}$$

La dérivation

Exemples de fonctions dérivées:

$$f(x) = 5$$

f(x) est une **fonction constante**, on en déduit que la dérivée f'(x) est :

$$f'(x) = 0$$

$$g(x) = 3x^5$$

g(x) est une fonction de la forme **k.x^n**,((k,n)∈ℝxℤ*) on en déduit que la dérivée f'(x) est :

$$g'(x) = 3 \times 5.x^{5-1} = 15.x^4$$

$$h(x) = \exp(2.x^3 - x)$$

h(x) est une fonction de la forme **exp(u(x))** on en déduit que la dérivée h'(x) est :

$$h'(x) = (6.x^2 - 1)\exp(2.x^3 - x)$$

$$i(x) = \ln(x^2 - 5x + 3)$$

i(x) est une fonction de la forme **ln(u(x))** on en déduit que la dérivée i'(x) est :

$$i'(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 3}$$

$$j(x) = (2x^2 - x).\exp(x^3)$$

j(x) est une fonction de la forme **u(x).v(x)** on en déduit que la dérivée j'(x) est :

$$j'(x) = (4x - 1).\exp(x^3) + (2x^2 - x).(3x^2).\exp(x^3)$$

$$\Leftrightarrow j'(x) = (6x^4 - 3x^3 + 4x - 1).\exp(x^3)$$

Notation df/dx :

Le processus de dérivation peut s'écrire d'une autre manière que celle où « ' » est placée en exposant de la fonction que l'on dérive. La seconde notation s'exprime comme suit :

$$\frac{df}{dx} \equiv f'(x)$$

La dérivation

Composition de fonction:

Comme vous avez pu le voir, il arrive d'avoir des fonctions ''imbriquées'' dans d'autres fonctions. On appelle cela des fonctions composées. Par exemple la fonction f suivante :

$$f(u) = \exp(u(x)) + \exp(3.u(x))$$
$$u(x) = 3.x^2 + \sqrt{x}$$

On constate que f dépend de la fonction u qui dépend elle même de la variable x.
Il est possible d'écrire la fonction f directement en fonction de x pour dériver ensuite la fonction, mais cela peut devenir assez technique.
Il est alors préférable de dériver f en fonction de u puis u en fonction de x :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Il faut ensuite exprimer la dérivée de f en fonction de u, de même pour la dérivée de u en fonction de x :

$$\frac{df}{du} = \exp(u(x)) + 3.\exp(3.u(x)) \qquad \frac{du}{dx} = 6.x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La dérivée de f en fonction de x est donc :

$$\frac{df}{dx} = (\exp(u(x)) + 3.\exp(3.u(x)))\,.\left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$\frac{df}{dx} = \left(\exp(3.x^2 + \sqrt{x}) + 3.\exp(9.x^2 + 3\sqrt{x})\right).\left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

La fonction exponentielle

Définition :

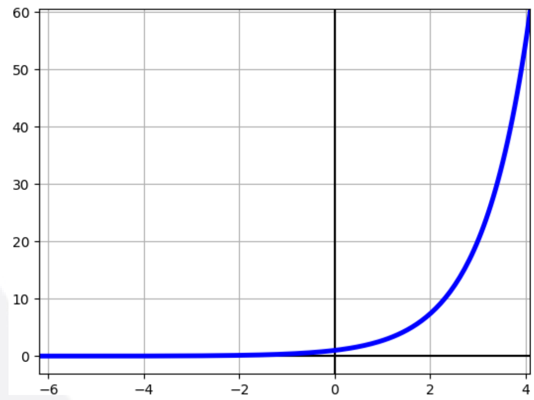
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$

Équation : $y = exp(x)$

Notations : $exp(x),\ e^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Représentation graphique

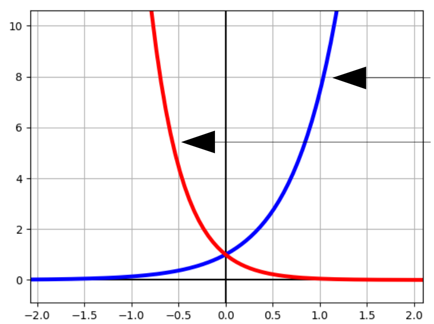


Propriétés :

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e \approx 2,72$
- $(\exp(x))' = \exp(x)$
- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $(\exp(a))^n = \exp(n.a)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$

Composition de l'exponentielle:

- Si f(x) et g(x) 2 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = \exp(g(x))$
  la dérivée de la fonction f est donnée par : $f'(x) = g'(x) \times \exp(g(x))$
- Soit k >0, la fonction $f(x) = \exp(k.x)$ est strictement croissante.
- Soit k < 0, la fonction $f(x) = \exp(k.x)$ est strictement décroissante.



$f(x) = e^{2.x}$

$f(x) = e^{-3.x}$

La fonction logarithme

Définition :

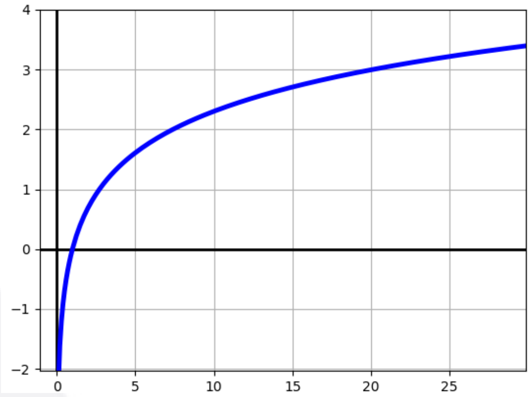
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^{+*}$

Équation : $y = \ln(x)$

Notation : $\ln(x), \log(x)$

x	0	1	$+\infty$
ln	$-\infty$	0	$+\infty$

Représentation graphique



Remarque :

La notation log est abusive car elle est normalement réservée pour le logarithme décimal

Propriétés :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $\ln(\frac{1}{a}) = \ln(1) - \ln(a) = -\ln(a)$
- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$
- $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \exp(\ln(x)) = x \end{cases}$

Composition du logarithme:

- Si f(x) et g(x) 2 fonctions définies sur R telles que $f(x) = \ln(g(x))$ la dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\ln(g(x))}$$

Les fonctions multivariables

Définition :