# Algèbre Linéaire

Semaine 1

February 12, 2019

## Les matrices

1. **Ressources**

   Avant de commencer les exercices, vous avez un petit cours sur les matrices avec quelques entrainements sur Khanacademy *ici*, et je mets l'accent sur les *propriétés du produit matriciel*.

   *Vidéo sur la transposition d'une matrice.*

2. **Mise en pratique**

   **Exercice 1** Effectuer les opérations de matrices suivantes :

   a. $4.\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   **Exercice 2** Ecrire les matrices suivantes sous forme de systèmes d'équations, puis les résoudre.

   a. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

   **Exercice 3** Commutativité de la multiplication. $\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$

   Soient deux matrices A et B telles que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

   Montrer que $A.B = 0$. Calculer $B.A$. Obtenez vous le même résultat ?

   **Exercice 4** Produit matriciel et ses propriétés.

   $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

   Pour les matrices **A, B et C**, calculer :
   1. *A(BC)* et *(AB)C* : Trouvez vous la même chose ?
   2. *A(B + C)* et *(B + C)A* : Trouvez vous la même chose ? Pourquoi ?
   3. Transposer les matrices A, B et C.

3. **Inverse d'une matrice pour résoudre des systèmes d'équation**

L'une des applications les plus utiles des matrices est la résolution de systèmes d'équations linéaires. Prenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 3x - 5y &= 1 \end{cases}$$

La forme matricielle de ce système peut être écrit de la façon suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

En notant : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nous pouvons représenter ce système en écrivant $AX = B$, où la matrice **X** est inconnue et la matrice **A** est la matrice de coefficients.

**Inverse d'une matrice**

L'inverse d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, noté $\mathrm{A}^{-1}$ est définie telle que

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \tag{1}$$

Pour une matrice de dimension (2, 2), la matrice $\mathrm{A}^{-1}$ est définie telle que :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2}$$

*NB : Si $ad - bc = 0$, alors la matrice $A$ n'admet pas d'inverse.*

Ainsi, pour résoudre léquation $AX = B$, c'est à dire pour isoler la matrice **X**, nous pouvons utiliser la matrice inverse $\mathrm{A}^{-1}$ : (Attention, nous multiplions toujours **du même côté**, ici par la gauche)

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

En utilisant la définition de la matrice inverse, nous avons $A^{-1}A = I$, nous obtenons $IX = A^{-1}B$. De plus, $IX = X$ par définition de la matrice identité; nous obtenons donc :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Pour résoudre notre système $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, nous avons donc besoin de trouver $\mathrm{A}^{-1}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{(1)(-5) - (2)(3)} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Donc $X$ est donné par :

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Donc $x = 2, y = 1$ est la solution de notre système d'équations

# Les vecteurs

1. **Ressources**

   Pour découvrir (ou revoir) les vecteurs, vous avez les liens suivants :

   *Qu'est ce qu'un vecteur ?*

   *Combinaisons linéaires*

   *Khanacademy* (Pas complet mais bon pour s'entraîner. Il manque juste les notions de norme et produit scalaire).

   *Wikiversité* (Norme et Produit Scalaire).

   *Kartable* (représentation graphique d'un vecteur, colinéarité).

2. **Mise en pratique**

   **Exercice 1** Ci dessous les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} et \overrightarrow{w}$ :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les opérations suivantes :

$a)$ $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$ et $\|\overrightarrow{w}\|$ $\quad$ $d)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ $\quad$ $e)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ $\quad$ $f)$ $4.\overrightarrow{v}$ $\quad$ $g)\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ $\quad$ $h)$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$