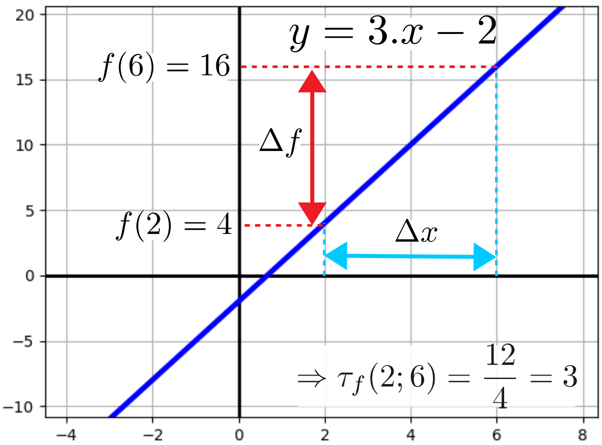
La dérivation

Taux de variation:

Le taux de variation d'une fonction f entre a et b est donné par :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Le taux de variation est usuellement noté τ_f(a;b) ou $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a;b)$.

Dérivée en un point:

La fonction f est dite **dérivable au point d'abscisse a** si et seulement si le taux de variation de f entre a et a+h tend vers **un nombre réel unique lorsque h tend vers 0**. Ce nombre est le nombre dérivée de f en a que l'on note **f'(a)** :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Par « tend vers un nombre » signifie « se rapproche de plus en plus de ce nombre ».

Dérivée en un point:

La fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si elle est **dérivable en tout réel x appartenant à cet intervalle**.

Soit la fonction f dérivable sur un intervalle I, on appelle fonction dérivée de la fonction f, la fonction notée **f'**, qui à tout réel x de I associe le réel f'(x).

Autrement dit, **l'ensemble des valeurs dérivées de f en x**, où x appartient au domaine de dérivabilité de f , forme la fonction dérivée f'.

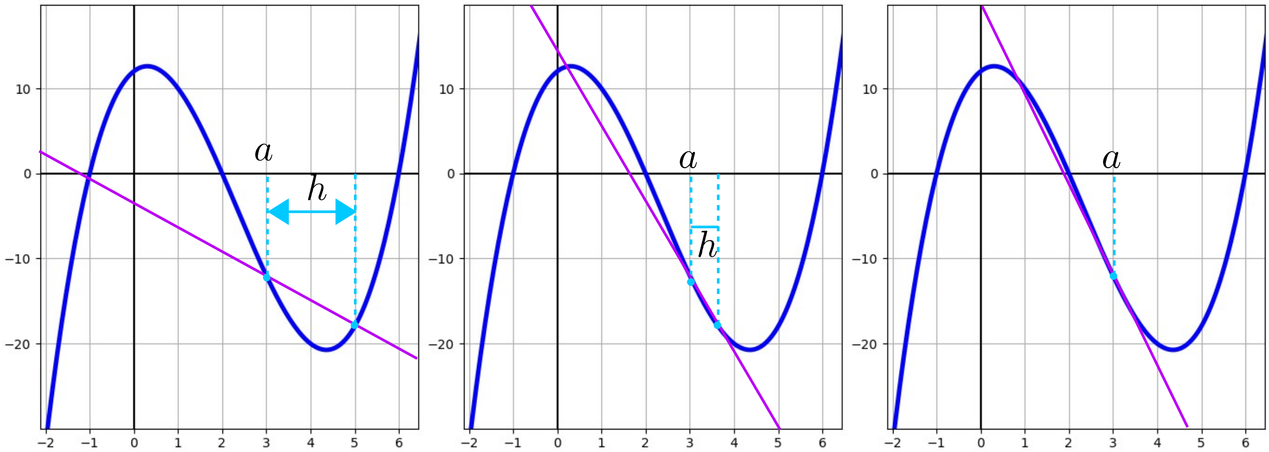
L'**ensemble de dérivabilité** d'une fonction est l'ensemble des points où f est dérivable.

La dérivation

Illustration de la notion de dérivée:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La valeur de h tend vers 0



De manière grossière on peut assimiler la dérivée d'une fonction en un point comme le taux de variation pour une valeur de Δx infinitésimale, qui correspond aussi à la pente de la tangente à f au point d'abscisse a.

Formulaire sur les dérivées :

$$\forall k \in \mathbb{R},\ f(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n \times x^{n-1}$$

$$f(x) = \exp(u(x)) \Longrightarrow f'(x) = u'(x).\exp(u(x))$$

$$f(x) = \ln(u(x)) \Longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2}$$

La dérivation

Exemples de fonctions dérivées:

$$f(x) = 5$$

f(x) est une **fonction constante**, on en déduit que la dérivée f'(x) est :

$$f'(x) = 0$$

$$g(x) = 3x^5$$

g(x) est une fonction de la forme **$k.x^n$**,((k,n)∈ℝxℤ*) on en déduit que la dérivée f'(x) est :

$$g'(x) = 3 \times 5.x^{5-1} = 15.x^4$$

$$h(x) = \exp(2.x^3 - x)$$

h(x) est une fonction de la forme **exp(u(x))** on en déduit que la dérivée h'(x) est :

$$h'(x) = (6.x^2 - 1)\exp(2.x^3 - x)$$

$$i(x) = \ln(x^2 - 5x + 3)$$

i(x) est une fonction de la forme **ln(u(x))** on en déduit que la dérivée i'(x) est :

$$i'(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 3}$$

$$j(x) = (2x^2 - x).\exp(x^3)$$

j(x) est une fonction de la forme **u(x).v(x)** on en déduit que la dérivée j'(x) est :

$$j'(x) = (4x - 1).\exp(x^3) + (2x^2 - x).(3x^2).\exp(x^3)$$

$$\Leftrightarrow j'(x) = (6x^4 - 3x^3 + 4x - 1).\exp(x^3)$$

Notation df/dx :

Le processus de dérivation peut s'écrire d'une autre manière que celle où « ' » est placée en exposant de la fonction que l'on dérive. La seconde notation s'exprime comme suit :

$$\frac{df}{dx} \equiv f'(x)$$

La dérivation

Composition de fonction:

Comme vous avez pu le voir, il arrive d'avoir des fonctions ''imbriquées'' dans d'autres fonctions. On appelle cela des fonctions composées. Par exemple la fonction f suivante :

$$f(u) = \exp(u(x)) + \exp(3.u(x))$$
$$u(x) = 3.x^2 + \sqrt{x}$$

On constate que f dépend de la fonction u qui dépend elle même de la variable x.
Il est possible d'écrire la fonction f directement en fonction de x pour dériver ensuite la fonction, mais cela peut devenir assez technique.
Il est alors préférable de dériver f en fonction de u puis u en fonction de x :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Il faut ensuite exprimer la dérivée de f en fonction de u, de même pour la dérivée de u en fonction de x :

$$\frac{df}{du} = \exp(u(x)) + 3.\exp(3.u(x)) \qquad \frac{du}{dx} = 6.x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La dérivée de f en fonction de x est donc :

$$\frac{df}{dx} = (\exp(u(x)) + 3.\exp(3.u(x)))\,.\left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \left(\exp(3.x^2 + \sqrt{x}) + 3.\exp(9.x^2 + 3\sqrt{x})\right).\left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$