Practise Sheet 2
Analysis

42 ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Les fonctions de référence

Objectifs:

L'objectif principal de cette série d'exercices est de vous familiariser avec un ensemble de fonctions classiques.

Exercice 1: Échauffement

Le but de l'exercice est d'améliorer l'acquisition des connaissances sur les fonctions. Partie 1: Images et antécédents Rien de nouveau ici, juste des fonctions différentes.

1. Donner les ensembles de définition et image des fonctions suivantes:

   $$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x}h(x) = x + 1, \quad i(x) = \sqrt{x}$$

   Pourquoi la fonction g n'est pas définie en $x = 0$?

2. Calculer les images par les fonctions précédentes, des nombres présents dans la liste (si c'est possible) $X = [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$

3. Tracer les représentations graphiques des fonctions f, g, h et i.

4. Considérons la fonction f_1:

   $$f_1(x) = \sqrt{x} + 2$$

   (a) Déterminer les antécédents des valeurs suivantes: 2, 4, 14 et 14.5.

   (b) Existe-t-il des antécédents pour les valeurs appartenant à l'intervalle $]\infty; 0]$? Pourquoi ?

5. Même chose pour la fonction f_2:

   $$f_2(x) = \sqrt{x + 4}$$

   (a) Déterminer les antécédents des valeurs suivantes: 0, 2, 4, 14 et 25.

   (b) Existe-t-il des antécédents pour les valeurs appartenant à l'intervalle $[-4; 0]$?

   (c) Sur quel intervalle la fonction f_2 n'est pas définie ?

6. De même que pour la fonction f_3:

   $$f_3 = \frac{1}{4}x^2$$

   (a) Déterminer les antécédents des valeurs 2, 3, 4, 5 et 6.

   (b) Donner le domaine image de la fonction f_3.

7. Et enfin pour la fonction f_4:

   $$f_4 = 2x^2 - 16$$

   (a) Déterminer les antécédents des valeurs 2, -16, -8, 0 et 34.

   (b) Donner le domaine image de la fonction f_4.

Exercice 2: Tableau de valeurs et représentation graphique

Nous continuons l'étude des fonctions avec encore des tableaux de valeurs et les représentations graphiques.
Nous allons également aborder la notion de parité pour les fonctions.
L'objectif est de renforcer votre capacité d'analyse sur les fonctions, développer votre intuition en quelque sorte.

Concernant la parité. Les fonctions qui sont possiblement paires impaires doivent au préalable avoir un **domaine de définition** D_f que l'on qualifie de **symétrique**. Un domaine de définition (*plus largement un ensemble*) est symétrique si pour **tout nombre de ce domaine, son opposé appartient aussi au domaine**. Toute fonction dont le domaine de définition n'est pas symétrique ne peut ni être paire ni impaire.

Enfin,

une fonction f est dite paire si son domaine de définition D_f est symétrique et si pour tout $x \in D_f$:

$$f(-x) = f(x)$$

une fonction f est dite impaire si son domaine de définition D_f est symétrique et si pour tout $x \in D_f$:

$$f(-x) = -f(x)$$

Pour finir sur la parité, il peut être noté une particularité graphique. Les fonctions **paires** sont **symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**. Quant aux fonctions **impaires**, elles sont **symétriques par rapport au point d'origine du repère** (point de coordonnées $(0;0)$).

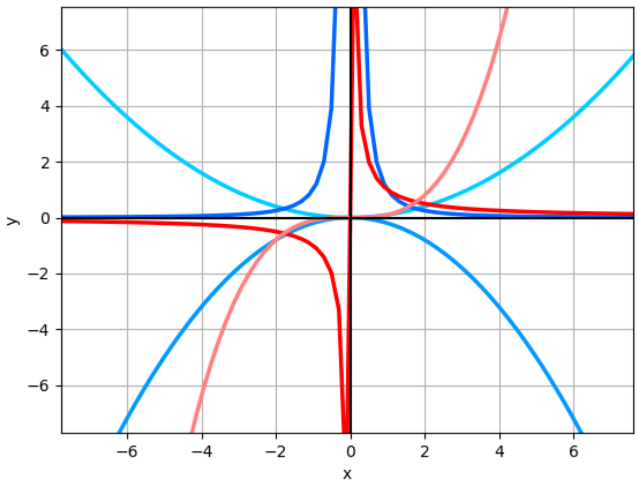


Figure 1: Les courbes en bleues sont des représentations graphiques de fonctions paires et les courbes en rouges/oranges sont les représentations graphiques de fonctions impaires.

Remarques:

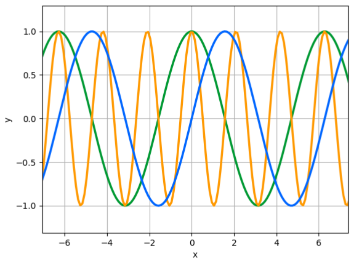
Vous vous demandez probablement à quoi cela peut vous servir pour faire du ML. Et bien cela peut vous aider à choisir un ou plusieurs modèles avant de les entraîner.
Notamment, après une étape de standardisation des données, il est possible d'observer si les données

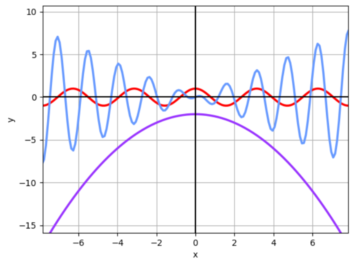
peuvent être modélisé par une fonction paire, impaire ou n'ayant sans parité.
Un choix cohérent de modèle participe à l'obtention d'un score plus faible une fois le modèle entraîné.

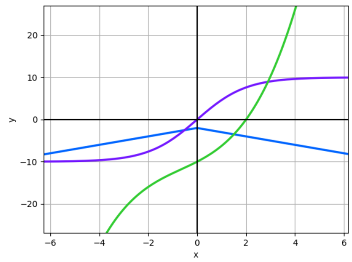
Partie 1:

Vous allez vous exercer à la reconnaissance de la parité des fonctions visuellement et à partir de l'expression algébrique.

1. Pour chacune les fonctions représentées ci dessous, préciser lesquelles sont paires, impaires où ni l'une ou l'autre.







2. À partir des expressions algébriques des fonctions suivantes, déterminer lesquelles sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre. Le domaine de définition des différentes fonctions est $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} f_1(x) = x^2 + 4, & f_2(x) = -2x - 3 & f_3(x) = x^2 + 1 \\ f_4(x) = -2x^2 + x & f_5(x) = \frac{-2}{x} & f_6(x) = \frac{1}{x^2} \\ f_7(x) = \frac{2}{x+1} & f_8(x) = \sqrt{|x|} & f_9(x) = 3x^3\sqrt{|x|} \end{array}$$

Partie 2: Coding time !

Coder une fonction python capable de dire si une fonction est possiblement paire ou impaire ou sans parité.

Il vous faut prendre en compte 2 choses:

- le domaine de définition de la fonction,
- le *"comportement"* de la fonction pour x et $-x$.

Dans la librairie `Sympy`, il n'y a (à la connaissance de l'auteur des exercices) pas de fonction permettant de donner le domaine de définition de la fonction, uniquement le domaine de continuité (`continuous_domain`). Ainsi, vous ne devrez pas vérifier la condition de symétrie du domaine de définition de la fonction.

1. Coder une fonction qui permet de dire (sans que ça soit démontrer, donc ça reste une supposition) si la fonction est paire, impaire ou sans parité.

```python
def parity_guess(f, nb_list):
    """
    Arguments:
        f : a function or an expression.
        nb_list : a list of positive numbers.
    Description:
        The function calculate the image by the function of each
numbers and its opposite values.
```

```
            Then the function compares the 2 lists of images to conclude on   the guess of the parity.
        Return:
            "La fonction semble paire"
            "La fonction semble impaire"
            "La fonction n'a pas de parit "
        """

```

2. **Version dure : (facultatif)** Une version améliorer du code peut être faite en prenant en compte le domaine de définition.
   Une manière d'obtenir le domaine de définition est de résoudre les 3 équations suivantes:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & > & 0 \\ f(x) & = & 0 \\ f(x) & < & 0 \end{array}$$

   et d'unir les intervalles de chaque équation. Il faut ensuite vérifier que le domaine est symétrique. Ensuite il faut vérifier si l'expression de la fonction est invariable en substituant x par $-x$ ou bien déterminer que les expressions de $f(x) + f(-x)$ ainsi que $f(x) - f(-x)$. *(Un peu compliqué, donc je ne le recommande que pour ceux les plus motivés et/ou à l'aise)* Voici un petit coup de pouce pour ceux qui tenterai de le faire, vous pouvez regarder les éléments suivants.

```
    sympy.Symbol
    sympy.Lambda
    sympy.Intersection
    sympy.Union
    sympy.expr
    sympy.subs

```

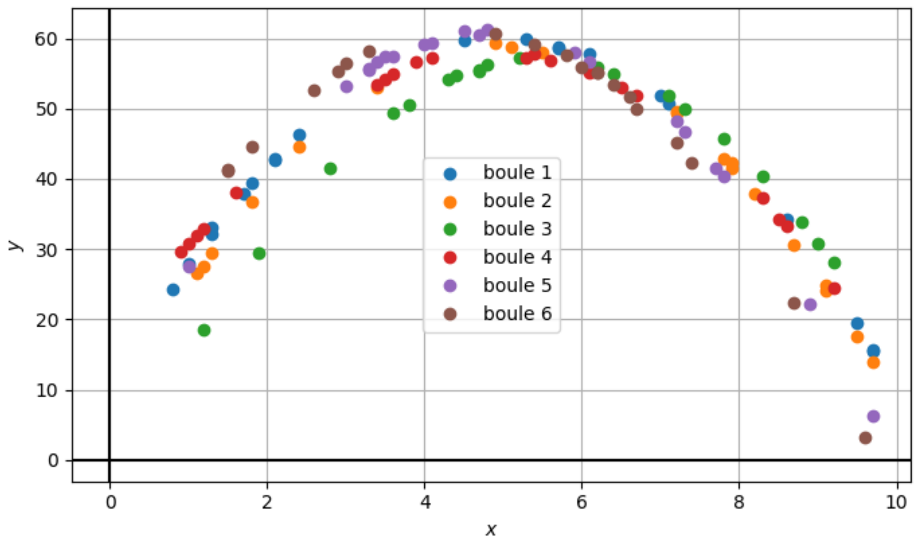
Exercice 3 : Trouver le bon modèle

Pour les 2 parties suivantes, l'objectif est de trouver les modèles les plus pertinents.

Partie 1:

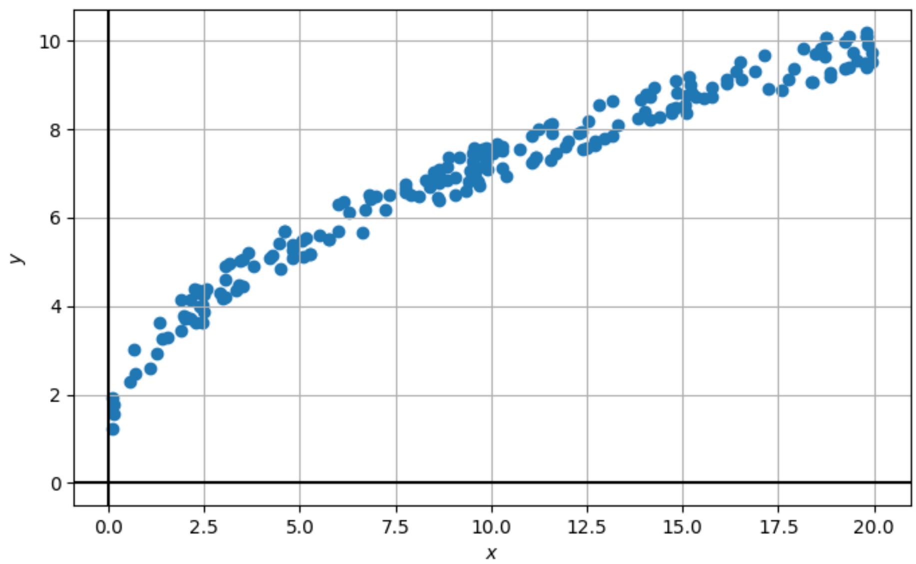
Une entreprise produit et vend des boules de Noël. Le prix unitaire est fixé entre 1 et 10 €. Le gérant a effectué une étude sur la recette (en milliers d'euros) issue de différentes boules en fonction du prix de vente de celles-ci (vous trouverez les données dans le fichier data_analysis_practise_sheet_2_ex03.csv)

- Tracer l'évolution de la recette quotidienne en fonction du prix de vente unitaire pour chaque boule de Noël.
- Tracer l'évolution de la recette quotidienne moyenne en fonction du prix de vente unitaire pour toutes les boules de Noël.
- Proposer un modèle pouvant décrire l'évolution de la recette moyenne.
- Représenter le modèle avec les données et plusieurs autres modèles que vous jugez moins bon pour prédire la l'évolution de la recette quotidienne.



Partie 2:

La quantité de boules de Noël vendu dans plusieurs magasins entre le 1er novembre et le 10 décembre a été enregistré et les données son représentée dans le graphique suivant.



- Tracer vous même les données.
- Proposer plusieurs modèles qui vous semblent possible.
- Tracer ces différents modèles en même temps que les données, conclure sur lequel est le meilleur modèle.