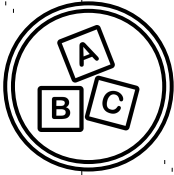




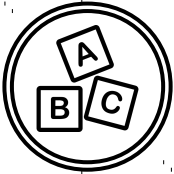
Les matrices III



Matrice particulière : la matrice identité :

La matrice identité est obligatoirement une matrice diagonale (et donc carrée aussi, rappelez-vous) que l'on note I_n (n pour la taille). La particularité de cette matrice est que l'ensemble des ces éléments diagonaux sont égaux à 1 :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La transposée d'une matrice:

La transposition d'une matrice est l'opération qui consiste à permuter les lignes d'une matrice avec ses colonnes. La transposée d'une matrice A est notée A^T :

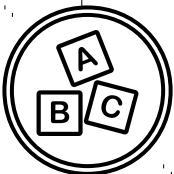
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

D'un point de vue pratique, la 1^{ère} ligne devient la 1^{ère} colonne, la 2nd ligne devient la 2nd colonne, etc.

Notons que la transposée d'une matrice $(m \times n)$ est une matrice $(n \times m)$.

Notons également que la transposée de la transposée d'une matrice est la matrice initiale :

$$(A^T)^T = A$$



L'inverse d'une matrice:

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle le produit matricielle de A par B soit égale à la matrice identité d'ordre n :

$$AB = BA = I_n$$

- L'inverse d'une matrice A se note A^{-1} .
- L'inverse d'une matrice carrée existe si le déterminant de la matrice n'est pas nul (la notion de déterminant est dans la prochaine fiche).
- Ne pas confondre l'inverse A^{-1} avec une matrice au dénominateur, bien que parfois il y a un abus de notation et l'inverse d'une matrice est spécifié par cette matrice au dénominateur d'une fraction.





Les matrices III



Méthode d'inversion de matrice de taille (2x2) :

Les matrices de tailles 2 par 2 sont facilement inversibles et cela se fait en 3 étapes :

- Intervertir les éléments de la diagonale,
- Prendre les opposés pour les autres éléments,
- Multiplier la matrice par le facteur : $1/(ad - bc)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Si $(ad - bc) = 0$ alors la matrice n'est pas inversible.



Méthode générale d'inversion de matrice (à la dur):

Voici une méthode générale pour inverser une matrice carrée. Tout d'abord il faut poser la matrice à inverser à côté de la matrice identité :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

L'objectif est alors d'effectuer des opérations sur les lignes ou colonnes des matrices afin d'obtenir la matrice identité à gauche. La matrice à droite sera alors la matrice inverse de A.

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{c}{a}L_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{da-bc}{a} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \\ L_1 &\leftarrow L_1 - \frac{ba}{da-bc}L_2 : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 + \frac{bc}{da-bc} & -\frac{ba}{da-bc} \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \frac{da}{da-bc} & -\frac{ba}{da-bc} \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \\ L_1 &\leftarrow \frac{1}{a}L_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \frac{d}{da-bc} & -\frac{b}{da-bc} \\ -\frac{c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{pmatrix} \\ L_2 &\leftarrow \frac{a}{da-bc}L_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \frac{d}{da-bc} & -\frac{b}{da-bc} \\ -\frac{c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{da-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} \end{aligned}$$

