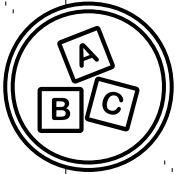




Les fonctions

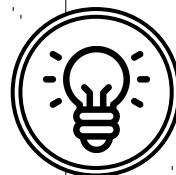


1. Une **fonction** est un procédé qui relie un ou plusieurs nombres à un unique autre nombre.
2. Soit f une fonction, et soit a et b 2 nombres réels tels que :

$$f(a) = b$$

- 'b' est l'**image** de 'a' par f ,
 - 'a' est un **antécédent** de 'b' par f ,
 - Une image est **unique**,
 - Il **peut exister plusieurs antécédents** à une image.
3. La **représentation graphique** d'une fonction est la courbe constituée de l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$.
 4. L'**ensemble de définition** d'une fonction, noté usuellement D est l'ensemble des nombres pour lesquels il existe une image par la fonction.
 5. Soit f une fonction, soit D_f l'ensemble de définition de f , soit $x \in D_f$.

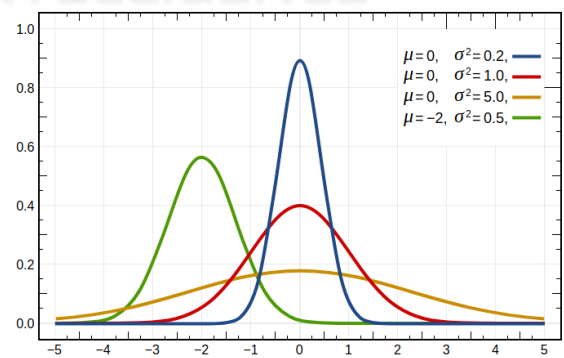
L'**expression algébrique** de la fonction f donne $f(x)$ en fonction de la variable x .



1. La fonction donnant le volume d'un cube d'arête x : $\mathcal{V}(x) = x^3$
La fonction $g(x,y,z)$ représentant la loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) de paramètre σ centrée au point de coordonnées $(0;0;0)$:

$$g(x, y, z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{\sigma^2}\right)$$

3. Représentation graphique de la loi normale à une seule variable



4. Domaine de définition :

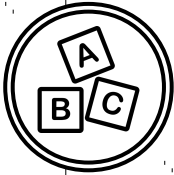
$$D_{\mathcal{V}} = [0; +\infty[$$

$$D_{g(x,y,z)} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$





Les fonctions de références



La fonction carré :

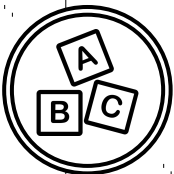
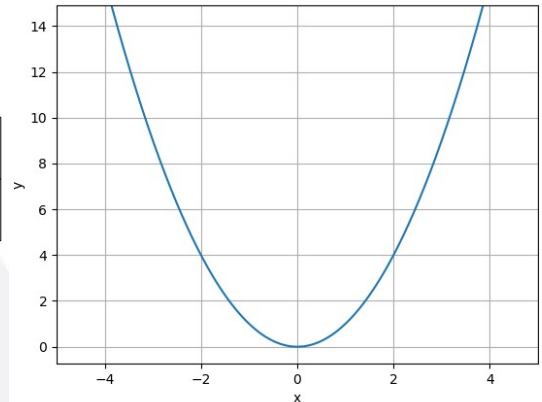
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$

Équation : $y = x^2$

Tableau de valeur :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

Représentation graphique :



La fonction inverse :

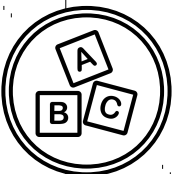
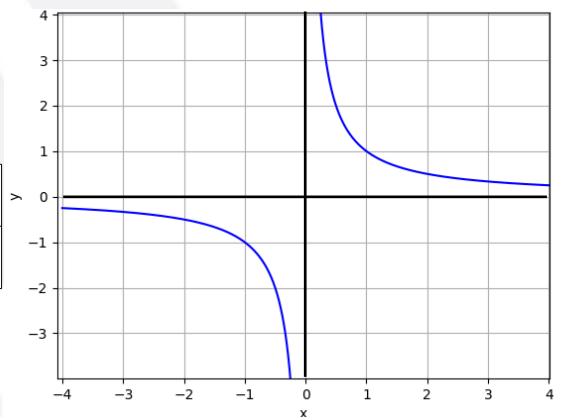
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$

Équation : $y = \frac{1}{x}$

Tableau de valeur :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-1/3	-1/2	-1	×	-1	1/2	1/3

Représentation graphique :



La fonction racine carrée :

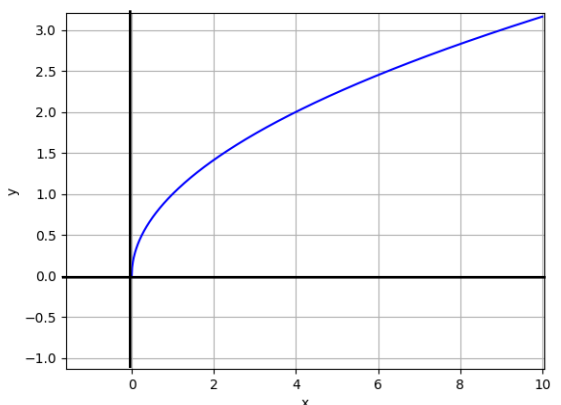
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^+$

Équation : $y = \sqrt{x}$

Tableau de valeur :

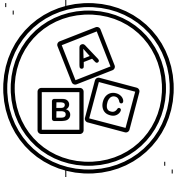
x	0	1	4	9	16	25	36
f(x)	0	1	2	3	4	5	6

Représentation graphique :





Somme, produit généralisés et sommation d'Einstein



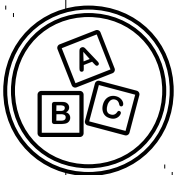
Somme généralisée :

La somme généralisée permet d'abrégé des expressions algébriques.

$$\sum_{i=0}^{100} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

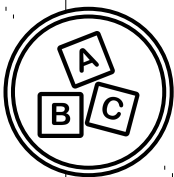
$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{ij} = a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{12} + \dots + a_{23} + a_{33}$$



Produit généralisée :

Le produit généralisé permet d'abrégé des expressions algébriques.

$$\prod_{i=0}^4 a_i = a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$$



Convention de sommation d'Einstein :

C'est également une notation permettant d'alléger les expressions algébriques. Un indice « i » répété 2 fois dans un terme indique qu'une somme généralisée d'indice « i » est effectuée. Cet indice est également appelé indice muet.

$$i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad : \quad b_{ii} = b_{00} + b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

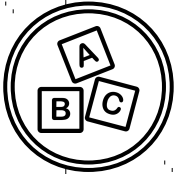
$$k \in \{0, 1, 2, 3\} \quad : \quad a_{kl}x_k = a_{1l}.x_1 + a_{2l}.x_2 + a_{3l}.x_3$$

La convention de notation d'Einstein est communément utilisé dans les expressions faisant intervenir des opérations entre vecteurs et matrices.





Polynôme du 2nd degré

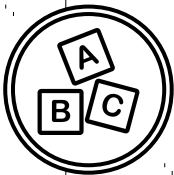
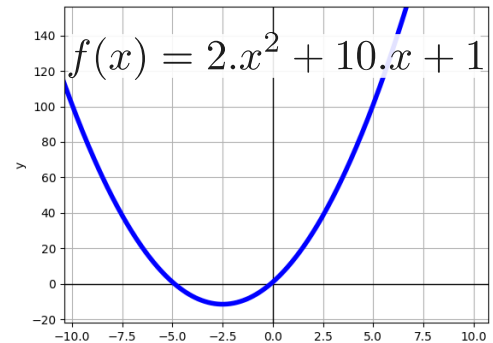


Fonction polynomiale :

Une fonction f définie sur \mathbb{R} est qualifiée de polynomiale d'ordre 2 s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ tels que :

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

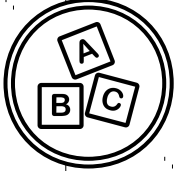
Représentation graphique :



Équation du 2nd degré :

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, une équation du 2nd degré est de la forme :

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$



Discriminant :

Le discriminant de $f(x)$ se note Δ et est donnée par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta < 0$, alors l'équation $a.x^2 + b.x + c = 0$ n'a pas de solutions dans \mathbb{R} .
- $\Delta = 0$, l'équation $a.x^2 + b.x + c = 0$ n'a 1 solution dans \mathbb{R} : $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- $\Delta > 0$, l'équation $a.x^2 + b.x + c = 0$ admet 2 solutions dans \mathbb{R} .

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



Exemples :

$$f_1(x) = x^2 + 4.x - 5$$

On calcul le discriminant :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$$

$\Delta > 0$, $f_1(x)$ admet 2 racines réelles :

$$x_1 = -5 \text{ et } x_2 = 1$$

$$f_2(x) = 6.x^2 + 4.x + 1$$

On calcul le discriminant :

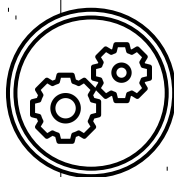
$$\Delta = 4^2 - 4 \times 6 \times 1 = -8$$

$\Delta < 0$, $f_2(x)$ n'admet aucunes racines réelles.





Polynôme du 2nd degré

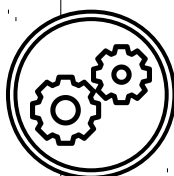


Variation de $f(x)$:

Les variations et le signe de celle-ci sur son domaine de définition peuvent être synthétisés dans un tableau (ici $a > 0$):

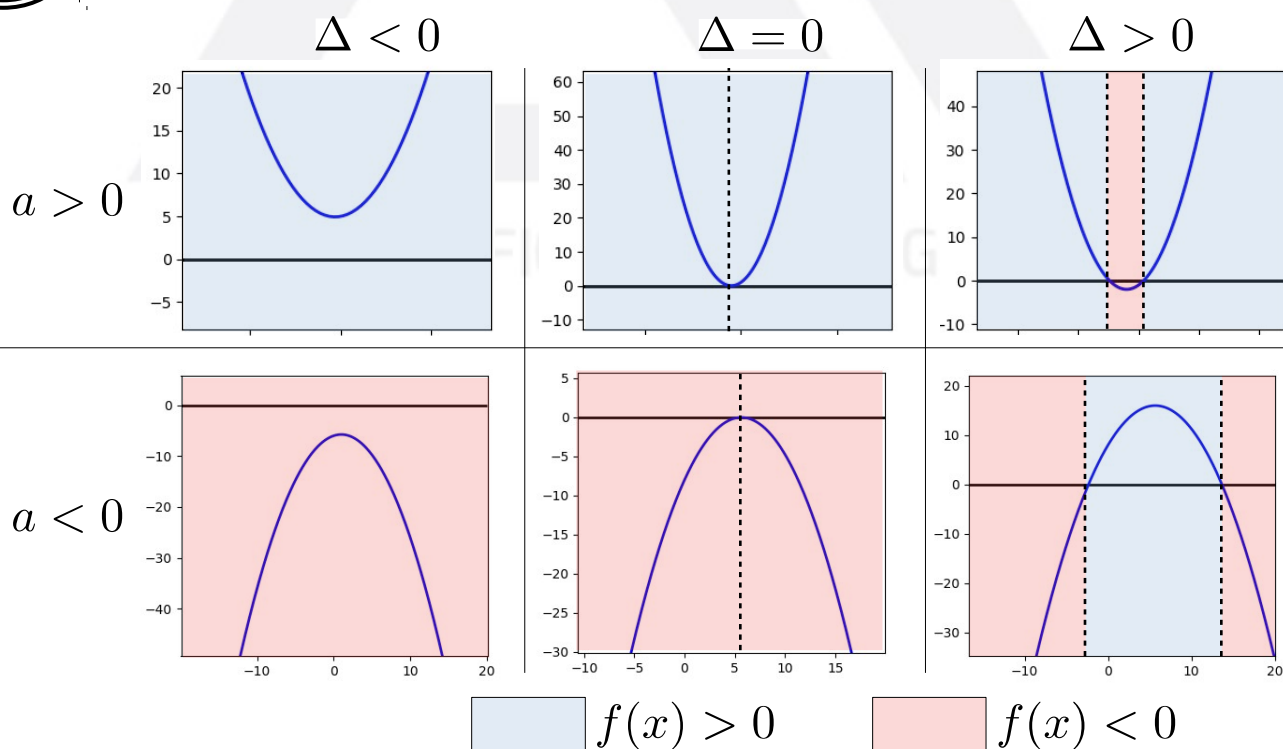
x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
signe	signe a	0	signe -a	0	signe a
f(x)	$+\infty$	0	β	0	$+\infty$

$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = f(\alpha)$



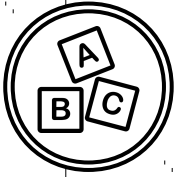
Différents scénarios de variation de $f(x)$:

En fonction du signe du coefficient "a" et du discriminant, on peut distinguer 6 cas :





Les polynômes

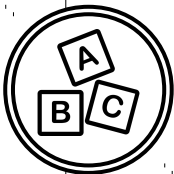


Formule générale :

Les polynômes du 2nd degré sont des cas particuliers de la famille des polynômes. Un polynôme de **degré n** est défini par la formule :

$$P = a_0 + a_1.x + \dots + a_n.x^n = \sum_{i=0}^n a_i.x^i$$

L'exposant n du terme x^n correspondant au terme à la puissance la plus élevée du polynôme est également ce que l'on appelle le **degré du polynôme P** et se note **deg(P)**.

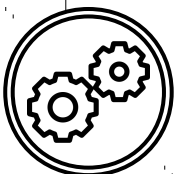


Forme factorisée :

Une seconde forme du polynôme est sa forme factorisée qui s'écrit :

$$P(x) = \lambda \prod_{i=0}^N (x - a_i)$$

Où λ est un scalaire (ici dans ce contexte un réel) et a_i est la i^{ie} racine du polynôme P. Ici, cette forme implique que P est autant de racine réelle que son degré, ce qui n'est pas forcément le cas dans \mathbb{R} .



Propriétés :

- La somme, le produit ou la composée de polynômes est un polynôme.
- Le produit d'un polynôme de degré p et d'un polynôme de degré q est un polynôme de degré $p+q$.
- Le produit de 2 polynômes P et Q est nul si au moins un des 2 polynômes est nul :

$$P \times Q = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$





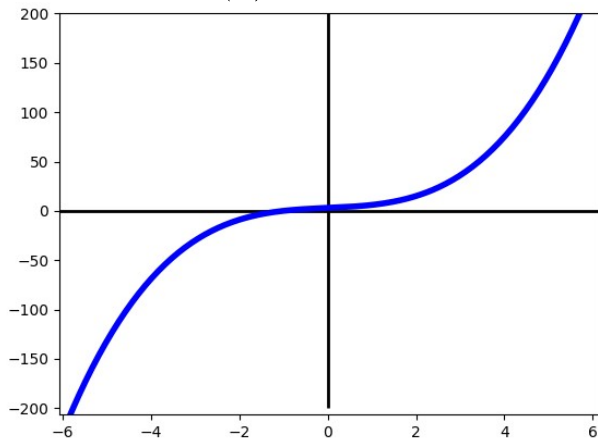
Les polynômes



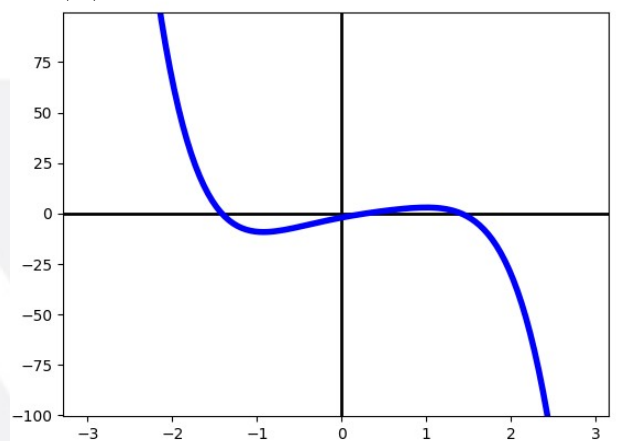
Exemple de fonctions polynomiales :

Voici quelques exemples de fonctions polynomiales $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ et $p_4(x)$ respectivement de degré 3, 5, 4 et 6 :

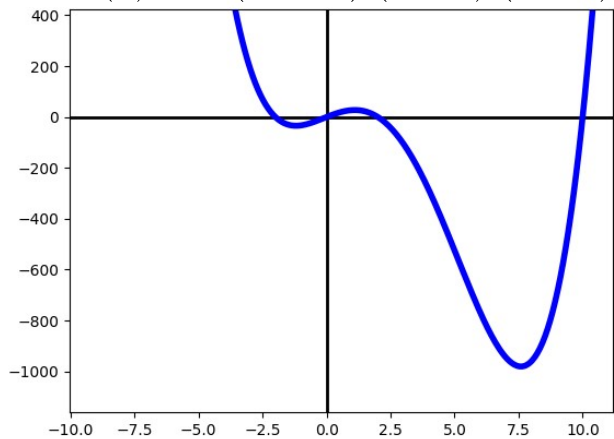
$$p_1(x) = x^3 + 2x + 3$$



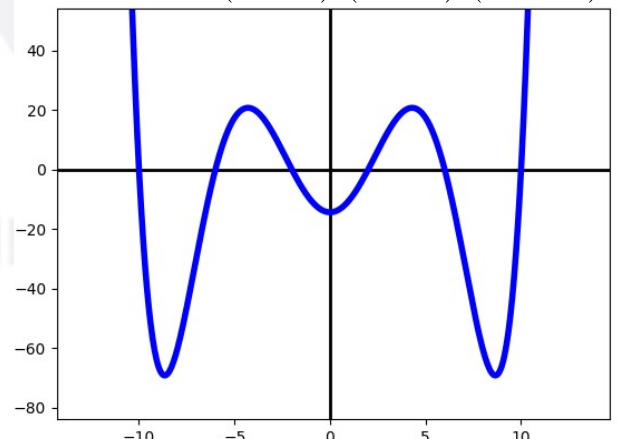
$$p_2(x) = -2x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 8x - 2$$



$$p_3(x) = x \cdot (x - 10) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

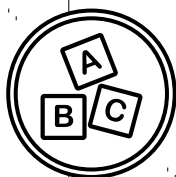


$$p_4(x) = (x - 10) \cdot (x - 6) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 6) \cdot (x + 10)$$





La dérivation

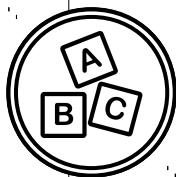
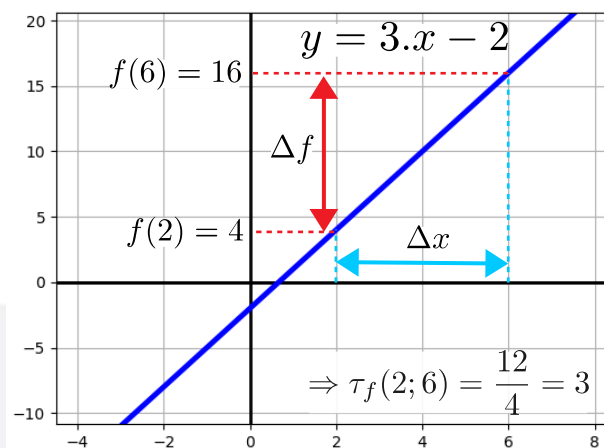


Taux de variation:

Le taux de variation d'une fonction f entre a et b est donné par :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le taux de variation est usuellement noté $\tau_f(a;b)$ ou $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a; b)$.

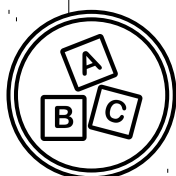


Dérivée en un point:

La fonction f est dite **dérivable au point d'abscisse a** si et seulement si le taux de variation de f entre a et $a+h$ tend vers **un nombre réel unique lorsque h tend vers 0**. Ce nombre est le nombre dérivée de f en a que l'on note **$f'(a)$** :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Par « tend vers un nombre » signifie « se rapproche de plus en plus de ce nombre ».



Dérivée en un point:

La fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si elle est **dérivable en tout réel x appartenant à cet intervalle**.

Soit la fonction f dérivable sur un intervalle I , on appelle fonction dérivée de la fonction f , la fonction notée **f'** , qui à tout réel x de I associe le réel $f'(x)$.

Autrement dit, **l'ensemble des valeurs dérivées de f en x** , où x appartient au domaine de dérivabilité de f , forme la fonction dérivée f' .

L'ensemble de dérivabilité d'une fonction est l'ensemble des points où f est dérivable.





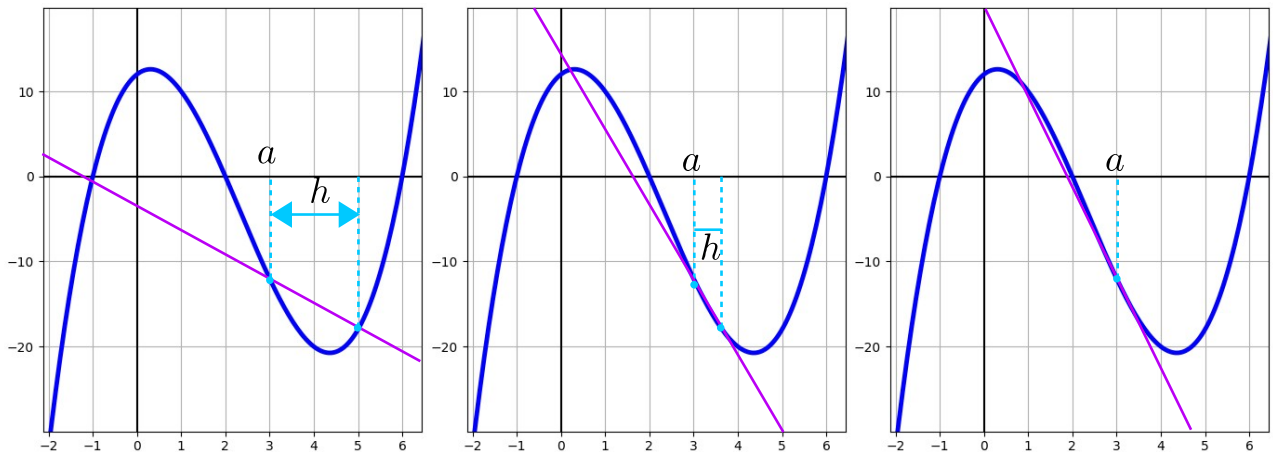
La dérivation



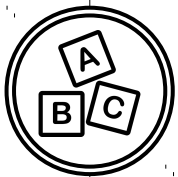
Illustration de la notion de dérivée:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La valeur de h tend vers 0



De manière grossière on peut assimiler la dérivée d'une fonction en un point comme le taux de variation pour une valeur de Δx infinitésimale, qui correspond aussi à la pente de la tangente à f au point d'abscisse a .



Formulaire sur les dérivées :

$$\forall k \in \mathbb{R}, f(x) = k \implies f'(x) = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, f(x) = x^n \implies f'(x) = n \times x^{n-1}$$

$$f(x) = \exp(u(x)) \implies f'(x) = u'(x) \cdot \exp(u(x))$$

$$f(x) = \ln(u(x)) \implies f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \implies f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \implies f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \implies f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2}$$





La dérivation



Exemples de fonctions dérivées:

$$f(x) = 5$$

$f(x)$ est une **fonction constante**, on en déduit que la dérivée $f'(x)$ est :

$$f'(x) = 0$$

$$g(x) = 3x^5$$

$g(x)$ est une fonction de la forme **$k \cdot x^n$** , $((k,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^*)$ on en déduit que la dérivée $f'(x)$ est :

$$g'(x) = 3 \times 5 \cdot x^{5-1} = 15 \cdot x^4$$

$$h(x) = \exp(2 \cdot x^3 - x)$$

$h(x)$ est une fonction de la forme **$\exp(u(x))$** on en déduit que la dérivée $h'(x)$ est :

$$h'(x) = (6 \cdot x^2 - 1) \exp(2 \cdot x^3 - x)$$

$$i(x) = \ln(x^2 - 5x + 3)$$

$i(x)$ est une fonction de la forme **$\ln(u(x))$** on en déduit que la dérivée $i'(x)$ est :

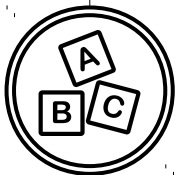
$$i'(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 3}$$

$$j(x) = (2x^2 - x) \cdot \exp(x^3)$$

$j(x)$ est une fonction de la forme **$u(x) \cdot v(x)$** on en déduit que la dérivée $j'(x)$ est :

$$j'(x) = (4x - 1) \cdot \exp(x^3) + (2x^2 - x) \cdot (3x^2) \cdot \exp(x^3)$$

$$\Leftrightarrow j'(x) = (6x^4 - 3x^3 + 4x - 1) \cdot \exp(x^3)$$



Notation df/dx :

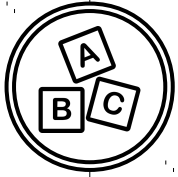
Le processus de dérivation peut s'écrire d'une autre manière que celle où « ' » est placée en exposant de la fonction que l'on dérive. La seconde notation s'exprime comme suit :

$$\frac{df}{dx} \equiv f'(x)$$





La dérivation



Composition de fonction:

Comme vous avez pu le voir, il arrive d'avoir des fonctions “imbriquées” dans d'autres fonctions. On appelle cela des fonctions composées. Par exemple la fonction f suivante :

$$f(u) = \exp(u(x)) + \exp(3.u(x))$$

$$u(x) = 3.x^2 + \sqrt{x}$$

On constate que f dépend de la fonction u qui dépend elle même de la variable x .

Il est possible d'écrire la fonction f directement en fonction de x pour dériver ensuite la fonction, mais cela peut devenir assez technique.

Il est alors préférable de dériver f en fonction de u puis u en fonction de x :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Il faut ensuite exprimer la dérivée de f en fonction de u , de même pour la dérivée de u en fonction de x :

$$\frac{df}{du} = \exp(u(x)) + 3. \exp(3.u(x)) \quad \frac{du}{dx} = 6.x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La dérivée de f en fonction de x est donc :

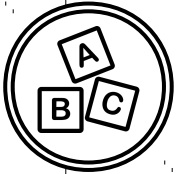
$$\frac{df}{dx} = (\exp(u(x)) + 3. \exp(3.u(x))) . \left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$\frac{df}{dx} = (\exp(3.x^2 + \sqrt{x}) + 3. \exp(9.x^2 + 3\sqrt{x})) . \left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$





La fonction exponentielle



Définition :

Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$

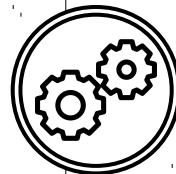
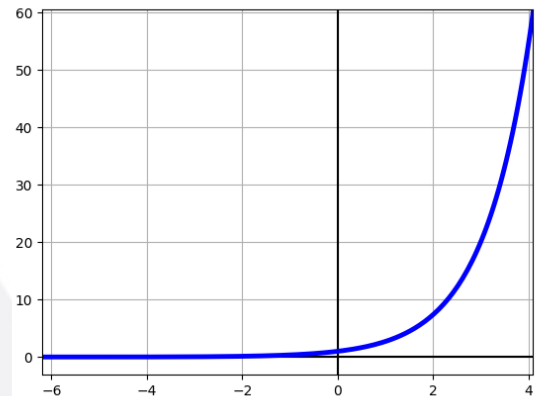
Équation : $y = \exp(x)$

Notations : $\exp(x)$, e^x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp		1	$+\infty$

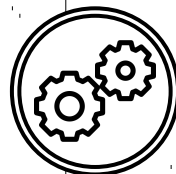
0 → 1 → $+\infty$

Représentation graphique



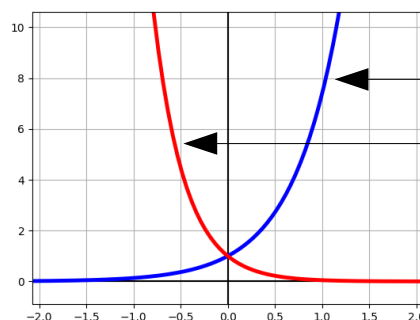
Propriétés :

- $\exp(0) = 1$
- $(\exp(x))' = \exp(x)$
- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $(\exp(a))^n = \exp(n.a)$
- $\exp(1) = e \approx 2,72$
- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$



Composition de l'exponentielle:

- Si $f(x)$ et $g(x)$ 2 fonctions définies sur \mathbb{R} telles que $f(x) = \exp(g(x))$ la dérivée de la fonction f est donnée par : $f'(x) = g'(x) \times \exp(g(x))$
- Soit $k > 0$, la fonction $f(x) = \exp(k.x)$ est strictement croissante.
- Soit $k < 0$, la fonction $f(x) = \exp(k.x)$ est strictement décroissante.



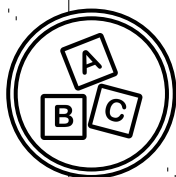
$$f(x) = e^{2.x}$$

$$f(x) = e^{-3.x}$$





La fonction logarithme



Définition :

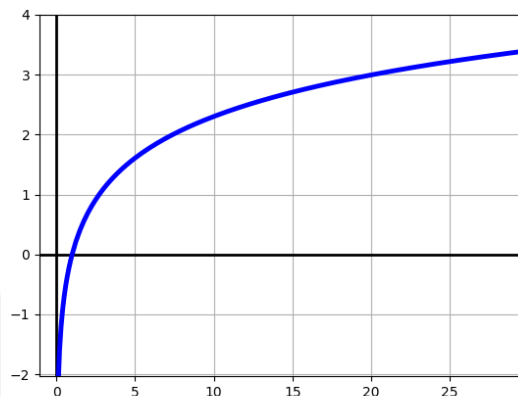
Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^{+*}$

Équation : $y = \ln(x)$

Notation : $\ln(x), \log(x)$

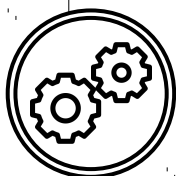
x	0	1	$+\infty$
ln	$-\infty$	0	$+\infty$

Représentation graphique



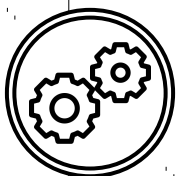
Remarque :

La notation log est abusive car elle est normalement réservée pour le logarithme décimal



Propriétés :

- $\ln(1) = 0$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(1) - \ln(a) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exp(\ln(x)) = x \end{cases}$



Composition du logarithme:

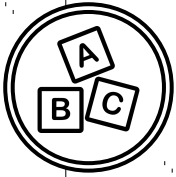
- Si $f(x)$ et $g(x)$ 2 fonctions définies sur \mathbb{R} telles que $f(x) = \ln(g(x))$ la dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\ln(g(x))}$$





Les fonctions multivariées



Fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

Ici, nous nous intéressons uniquement aux fonctions définies \mathbb{R}^n (ou un sous ensemble non vide) dont le domaine image, noté $\text{Im}(f)$, est égal ou inclut dans \mathbb{R} . Cela pour des raisons pratiques et de simplicité.

Nous nous intéressons donc aux fonctions à N variables indépendantes :

$$(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

Que l'on peut écrire aussi :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$$



Exemples :

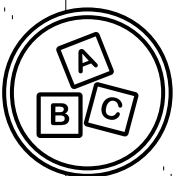
Distribution gaussienne à 3 variables :

$$g(x, y, z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{\sigma^2}\right)$$

Masse d'une canette :

$$m(r, t, h, \rho) = 2\pi \cdot r^2 \cdot t \cdot \rho + 2\pi \cdot r \cdot h \cdot t \cdot \rho$$

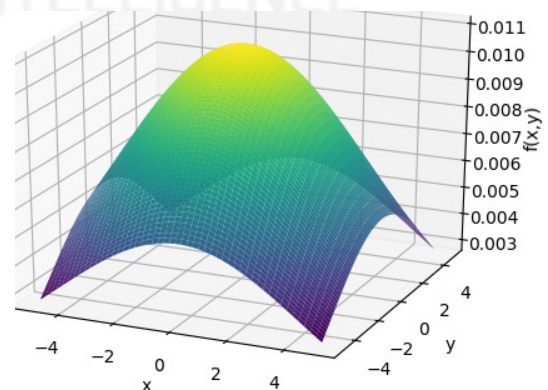
où r est le rayon, h la hauteur, t l'épaisseur et ρ la masse volumique du matériau utilisé.



Surface représentative :

La représentation graphique des fonctions à plusieurs variables est aisée et "naturelle" pour des fonctions définies sur \mathbb{R}^2 . Au delà de il est courant de transformer une ou plusieurs variables en paramètres et tracer plusieurs surface pour différentes valeurs du/des paramètres.

Mais au-delà de 4 ou 5 variables, la représentation graphique tend à être abandonnée.

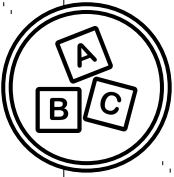


$$f(x, y) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{36}\right)$$





Les fonctions multivariables



Dérivation de fonction multivariables :

De la même manière que pour les fonctions à une variable, les fonctions à plusieurs variables peuvent être dérivées et sont notées df .

La dérivée d'une fonction à plusieurs variables est la somme des dérivées partielles :

$$f(x, y, z) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle de f par rapport à x (y et z sont considérées constantes)

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée partielle de f par rapport à y (x et z sont considérées constantes)

$\frac{\partial f}{\partial z}$ est la dérivée partielle de f par rapport à z (x et y sont considérées constantes)



Exemples :

$$f(x, y, z) = 3x^3 + 2\sqrt{y} - \frac{2}{z}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 9x^2 + \frac{2}{2\sqrt{y}} - \frac{2}{z^2}$$

$$g(x, y, z) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sigma^2}\right)$$

$$dg = -\frac{2}{\sigma^2}(x + y + z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sigma^2}\right)$$

