Les vecteurs II

Distributivité entre réels et vecteurs :

Soit 2 vecteurs (**u**, **v**) ∈ $\mathbb{E}$ et 2 réels k et k'. Les propriétés suivantes sont alors vrai:

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k'(k\vec{u}) = k'k\vec{u}$

Exemples :

$2(\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$; $5\vec{u} - 3\vec{u} = (5-3)\vec{u}$; $\frac{1}{7} \times 42\vec{u} = \frac{42}{7}\vec{u} = 6\vec{u}$

La norme d'un vecteur :

La norme d'un vecteur est sa longueur / magnitude. On la note || **u** ||. La norme d'un vecteur se calcul à partir de ses coordonnées via la formule suivante :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$$

Exemples :

$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\|\vec{i}\right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$; $-\vec{i} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\|\vec{i}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Notion de colinéarité entre 2 vecteurs :

On qualifie 2 vecteurs de colinéaires lorsqu'ils sont proportionnels entre eux.
Autrement dit, soit k∈$\mathbb{R}$, et (**u, v**)∈$\mathbb{E}$. **u** et **v** sont colinéaires si :

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Ce qui équivaut à : $x_{\vec{u}} = kx_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}} = ky_{\vec{v}}$

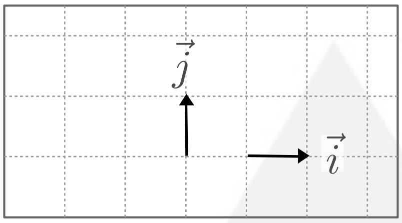
Exemples :

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ car $\vec{u} = 2\vec{i}$ $\quad$ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 42 \\ 21 \end{bmatrix}$ car $\vec{v} = 21\vec{u}$

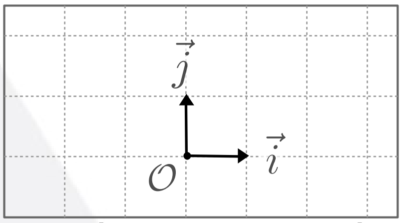
Les vecteurs II

Base orthonormée de vecteurs et repère orthonormé:

Soit 2 vecteurs (**i**, **j**) non colinéaires dont leurs directions sont perpendiculaires et tels que || **i** || et || **j** || sont égaux à 1.
Le couple de vecteurs (**i**,**j**) forme une base orthonormée du plan contenant **i** et **j**.
Le triplet constitué d'un point et du couple (i,j) forme quant à lui un repère orthonormé.



Base orthonormée ($\mathcal{B}$)



repère orthonormé

- À l'aide d'une base, il est possible d'exprimer les coordonnées des vecteurs dans l'espace associé à cette base.
- La base d'un espace vectoriel n'est pas unique, il est possible d'en définir une infinité pour l'espace associé.

Décomposition vectoriel:

Maintenant que nous avons définit ce qu'est une base d'un espace il est possible de décomposer n'importe quel vecteur v de l'espace en une combinaison linéaire des vecteurs constituant la base de l'espace. Cette décomposition est unique (pour une base donnée) :

$$\vec{v} = \sum_{\vec{u_i}\in\mathcal{B}} c_i\vec{u_i} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

Où B est la base orthonormée (**i**,**j**), (c_1, c_2) 2 réels étant les coordonnées de **v** dans la base.

Exemples :