Les matrices III

Matrice particulière : la matrice identité :

La matrice identité est obligatoirement une matrice diagonale (et donc carrée aussi, rappelez-vous) que l'on note $\mathbf{I_n}$ (n pour la taille). La particularité de cette matrice est que l'ensemble des ces éléments diagonaux sont égaux à 1 :

$$\mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La transposée d'une matrice:

La transposition d'une matrice est l'opération qui consiste à permuter les lignes d'une matrice avec ses colonnes. La transposée d'une matrice A est notée A^T :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

D'un point de vue pratique, la 1ère ligne devient la 1ère colonne, la 2nd ligne devient la 2nd colonne, etc.

Notons que la transposée d'une matrice $(m \times n)$ est une matrice $(n \times m)$.

Notons également que la transposée de la transposée d'une matrice est la matrice initiale :

$$\left(\mathcal{A}^T\right)^T = \mathcal{A}$$

L'inverse d'une matrice:

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle le produit matricielle de A par B soit égale à la matrice identité d'ordre n :

$$\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = \mathcal{I}_n$$

- L'inverse d'une matrice A se note A^{-1}.
- L'inverse d'une matrice carrée existe si le déterminant de la matrice n'est pas nul (la notion de déterminant est dans la prochaine fiche).
- Ne pas confondre l'inverse A^{-1} avec une matrice au dénominateur, bien que parfois il y a un abus de notation et l'inverse d'une matrice est spécifié par cette matrice au dénominateur d'une fraction.

Les matrices III

Méthode d'inversion de matrice de taille (2x2) :

Les matrices de tailles 2 par 2 sont facilement inversibles et cela se fait en 3 étapes :

- Intervertir les éléments de la diagonale,
- Prendre les opposés pour les autres éléments,
- Multiplier la matrice par le facteur : 1/(ad -bc)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1}$$

Si (ad – bc) = 0 alors la matrice n'est pas inversible.

Méthode générale d'inversion de matrice (à la dur):

Voici une méthode générale pour inverser une matrice carrée. Tout d'abord il faut poser la matrice à inverser à côté de la matrice identité :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{I}_2$$

L'objectif est alors d'effectuer des opérations sur les lignes ou colonnes des matrices afin d'obtenir la matrice identité à gauche. La matrice à droite sera alors la matrice inverse de A.

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a}L_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{da-bc}{a} \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{ba}{da-bc}L_2 : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 + \frac{bc}{da-bc} & -\frac{ba}{da-bc} \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} \frac{da}{da-bc} & -\frac{ba}{da-bc} \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & \frac{1}{a}L_1 \\ L_2 & \leftarrow & \frac{a}{da-bc}L_2 \end{array} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{da-bc} & -\frac{b}{da-bc} \\ -\frac{c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{da-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1}$$