Les vecteurs

Multiplication par un scalaire :

La notion d’espace vectoriel peut être difficile à comprendre et à sentir avec sa simple définition.

Retenez simplement que des espaces vectoriels sont des espaces où il est possible :

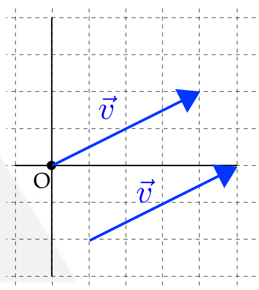
- d’**additionner des vecteurs** (explication après) **entre eux** et que la résultante appartient à l’espace vectoriel,
- de **multiplier un vecteur par un nombre** (appelé dans le jargon mathématiques scalaire) et que la résultante de la multiplication appartient également à l’espace vectoriel.

L’espace peut être construit à partir de distance suivant différente direction par exemple (notre monde en 3D) ou n’importe quoi d’autre dans la mesure que les 2 propriétés restent valables (ex : l’espace 2D constitué d’une dimension qui correspond à la surface en m² et le prix du logement).

Vecteur :

Un vecteur (noté $\vec{v}$ ou v) est caractérisé par 2 éléments :

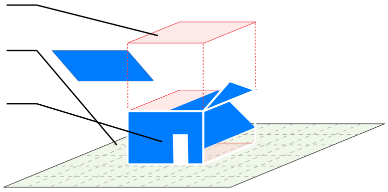
- Sa **magnitude** (ou norme ou encore longueur).
- Sa **direction** (la droite sur laquelle il repose et dans quel sens le vecteur pointe).



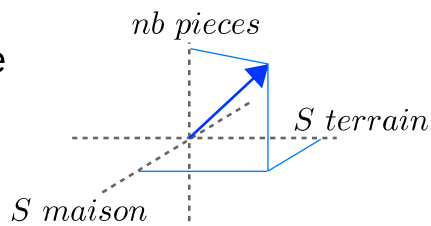
Il est alors naturel de le **représenter par une flèche** et **sa position dans l’espace n’a pas d’importance** (voir figure à droite où les 2 vecteurs sont identiques).

Il est également possible de considérer un vecteur comme une **liste de nombres ordonnés** où chaque **nombre correspond à une information** qui est quantifié.

$$\begin{bmatrix} S\ maison \\ S\ terrain \\ nb\ pieces \\ \dots \end{bmatrix}$$



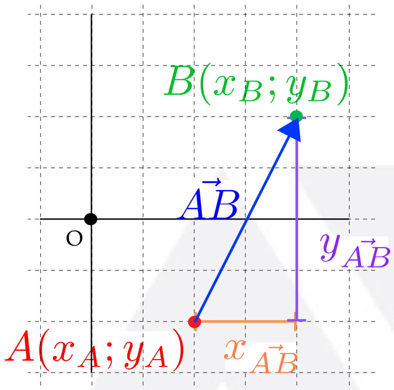
Remarquons que la deuxième vision est compatible avec la première si l’on considère être dans **l’espace de données dont les dimensions sont : la surface de la maison, la surface du terrain et le nombre de pièces.**



Les vecteurs

Coordonnées d'un vecteur :

Tout comme les points, les vecteurs possèdent des coordonnées. Les coordonnées d'un vecteur s'obtiennent en faisant la différence des coordonnées entre le "point d'arrivé" et le "point de départ" du vecteur.



$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\vec{AB}} \\ y_{\vec{AB}} \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 2-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

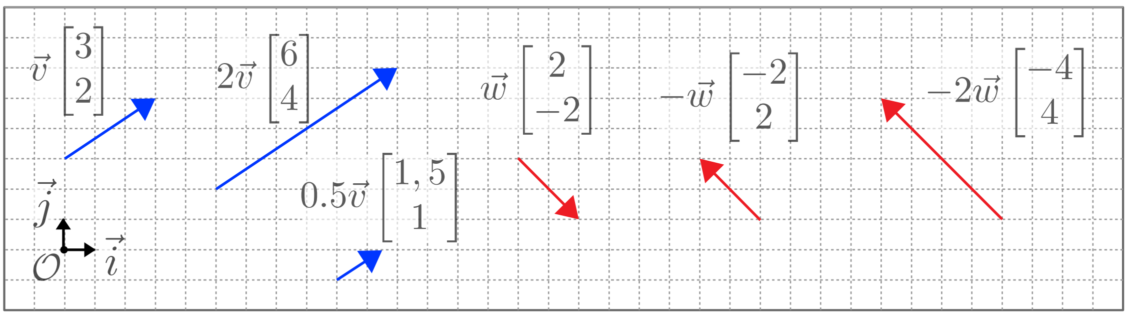
Multiplication par un scalaire :

Multiplier un vecteur **v** par un scalaire (un nombre) revient à multiplier ses coordonnées par ce scalaire.

Soit **v** $\in \mathbb{E}$ (un espace vectoriel) et k $\in \mathbb{R}$:

$$k \times \vec{v} = k \times \begin{bmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \times x_{\vec{v}} \\ k \times y_{\vec{v}} \end{bmatrix}$$

- Si k > 0, l'amplitude du vecteur change et sa direction reste inchangée,
- Si k = 0, la résultante de la multiplication est le vecteur nul,
- Si k < 0, l'amplitude du vecteur change et sa direction est opposée.



$\left(\mathcal{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est la base du plan, le repère de l'espace 2D représenté.

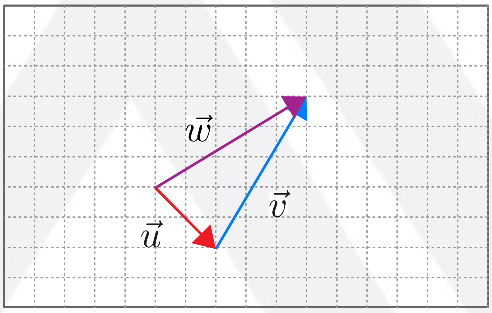
Les vecteurs

Addition entre vecteurs :

Additionner 2 vecteurs **u** et **v** entre eux revient à additionner leurs coordonnées entre eux de la manière suivante :

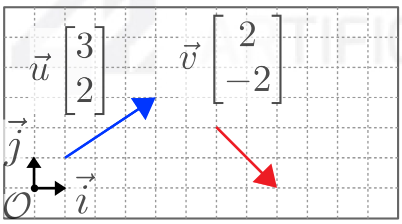
$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_{\vec{v}}\\y_{\vec{v}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}}\\y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}}\end{bmatrix}$$

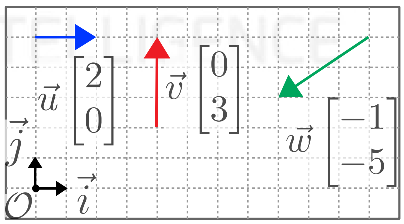
D'un point de vue géométrique, additionner 2 vecteurs revient à mettre bout à bout les 2 vecteurs avec la queue du 2nd vecteur à la suite de la flèche du 1er vecteur:



Ici, la somme entre **u** et **v** est égale au vecteur **w**. Pour avoir le vecteur **w**, le vecteur **v** a été placé à la suite du vecteur **u** de sorte que la queue de **v** coïncide avec la flèche de **u**.

Exemples :





$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{z}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$