Les matrices I

Définition :

Une matrice de taille $(m \times n)$ est un tableau de nombres formés de m lignes et n colonnes qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}_{m,n} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Comme vous pouvez le voir, le **1^{er} indice est celui des lignes** et le **2^{nd} indice** est celui des colonnes.

Matrice ligne, colonne, carrée, diagonale et triangulaire :

- Une matrice de taille $(1 \times n)$ est appelée matrice **ligne** de **taille n**.
- Une matrice de taille $(m \times 1)$ est appelée matrice **colonne** de **taille m**.
- Une matrice de taille $(n \times n)$ est appelée **matrice carrée d'ordre n**.
- Une matrice carrée d'ordre n où les éléments $\mathbf{a_{ii}}$ (i ∈[1;n]) sont non nuls et les autres nuls est appelée **matrice diagonale**.
- Une matrice carrée d'ordre n où les **éléments de la diagonale et ceux au dessus (resp. en dessous) sont non nuls** est appelée **matrice triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**).

Il est usuel de parler d'une **matrice ligne ou colonne** comme étant un **vecteur ligne ou colonne**.

Égalité de 2 matrices :

2 matrices A et B sont égales si elles ont les mêmes dimensions et si chaque élément de A est égale à l'élément de B correspondant :

$$\forall (i,j) \in [|1;m|] \times [|1;n|], \quad a_{ij} = b_{ij}$$

Exemple :

Les matrices A et B suivantes sont égales : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Les matrices I

Multiplication par un scalaire :

De manière similaire aux vecteurs la multiplication d'une matrice par un scalaire λ revient à multiplier l'ensemble des éléments de la matrice par ce scalaire :

$$\lambda\mathcal{A} = \lambda\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Addition de 2 matrices :

L'addition de 2 matrices A et B est définie si A et B ont les mêmes dimensions et est définie la manière suivante :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Soustraction de 2 matrices :

La soustraction de 2 matrices A et B est définie si A et B ont les mêmes dimensions et est définie la manière similaire à l'addition:

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{bmatrix}$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire et de l'addition :

Soit 3 matrices de même taille (nombre de lignes et colonnes) A, B et C et 2 scalaires *c* et *s* :

- A+B = B+A (l'addition de matrice est commutative),
- (A+B)+C = A+(B+C) (l'addition de matrice est associative),
- *c*(A+B) = *c*A+*c*B (la multiplication par un scalaire est distributive),