Les vecteurs V

Retour sur la notion de base vectorielle:

Nous avons vu jusqu'à présent qu'une seule base : la base (**i**, **j**) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, avec **i** et **j** :

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec également : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

Le produit scalaire étant nul, et les normes de **i** et **j** étant égales à 1, nous avions qualifié la base d'orthonormale.

Mais une base n'est pas nécessairement orthogonale ou orthonormale.

Définition d'une base vectorielle:

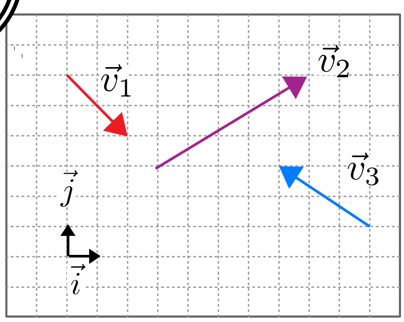
Une base ***B*** d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une liste de vecteurs qui :

- **Linéairement indépendant** les uns des autres.

Permet de **couvrir l'ensemble de l'espace vectoriel**, c'est-à-dire qu'il existe une **combinaison linéaire unique** des vecteurs de la base, pour n'importe quel vecteur de $\mathbb{E}$.

- Vous l'avez compris, une base vectorielle sert à exprimer les autres vecteurs de l'espace vectoriel.
- Une base n'est donc **pas obligatoirement orthogonale ou orthonormale** (mais dans ce cas ça se complique, mieux vaut être au moins orthogonal, même si c'est le pc qui bosse).
- **La base** d'un espace vectoriel **n'est pas unique**, il est possible d'en définir une infinité pour l'espace associé.
- Il est par contre nécessaire que **le nombre de vecteurs de la base soit identique au nombre de dimensions de l'espace vectoriel**, sinon nous ne sommes pas en mesure de couvrir l'ensemble de l'espace.

Exemples :



Les coordonnées de v_1,v_2 et v_3 dans la base B=(**i**,**j**) :

$$(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}} = 2\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad (\vec{v}_2)_{\mathcal{B}} = 5\vec{i} + 3\vec{j} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$(\vec{v}_3)_{\mathcal{B}} = -3\vec{i} + 2\vec{j} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Les vecteurs V

Changement de base:

Comme il existe une infinité de base dans un espace $\mathbb{E}$, il est possible de changer de base pour exprimer les vecteurs de l'espace:

Rappelons nous qu'un vecteur est un objet mathématiques d'un espace, une longueur muni d'une direction dans un espace qui n'est pas nécessairement notre espace réel, mais peut être un espace de données.

Et il peut être parfois plus simple, plus pertinent de changer la base que l'on utilise pour exprimer les vecteurs de l'espace.

De la même manière que pour la première base que nous avons vu, on peut déterminer les composantes d'un vecteur **v** sur la nouvelle base en déterminant la combinaison linéaire conduisant à **v**.
La manière la plus simple est d'utiliser la projection vectorielle :
Prenons un vecteur **v** de coordonnées $[v_1, v_2]$ dans la base B=(**i**, **j**), nous allons déterminer les coordonnées de **v** dans une nouvelle base B'($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$).
On note les coordonnées de v dans B' : $(v_1)_{B'}$ et $(v_2)_{B'}$.

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$ (coordonnées dans la base B)

$$\left.\begin{aligned}(v_1)_{\mathcal{B}'} &= \frac{\vec{v}_{\mathcal{B}}\cdot\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}\\ (v_2)_{\mathcal{B}'} &= \frac{\vec{v}_{\mathcal{B}}\cdot\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}\frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}\end{aligned}\right\}$$

(coordonnées dans la base B')
On peut alors exprimer le produit scalaire avec les coordonnées dans la base B pour $\mathbf{v_B}$, $\mathbf{e_1}$ et $\mathbf{e_2}$.

$$(v_1)_{\mathcal{B}'} = \frac{v_1\times e_{1,1} + v_2\times e_{1,2}}{e_{1,1}^2 + e_{1,2}^2}\vec{e}_1$$

$$(v_2)_{\mathcal{B}'} = \frac{v_1\times e_{2,1} + v_2\times e_{2,2}}{e_{2,1}^2 + e_{2,2}^2}\vec{e}_2$$

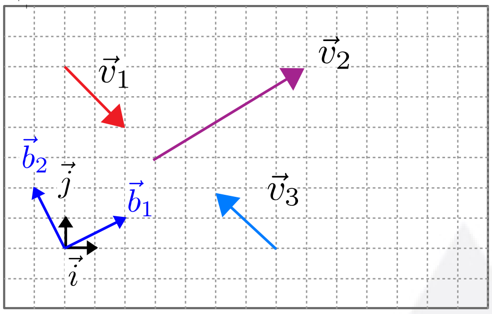
Une fois que l'on a les composantes de **v** suivant les vecteurs de B', on peut exprimer le vecteur **v** dans la base B' :

$$\vec{v}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}(v_1)_{\mathcal{B}'}\\(v_2)_{\mathcal{B}'}\end{bmatrix}$$

Les vecteurs V

Exemples :

3 exemples de changement de base : **B**=(**i**, **j**) → **B'**=(**b**$_1$, **b**$_2$) :



Dans la base **B**, les coordonnées des vecteurs sont :

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Il nous faut l'expression des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base **B'** dans la base initiale **B** :

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Nous pouvons ensuite déterminer les coordonnées des vecteurs dans la nouvelle base en effectuant des projections vectorielles :

$$\left.\begin{aligned} (v_{1,1})_{\mathcal{B}'} &= \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{b}_1}{\left\|\vec{b}_1\right\|^2}\vec{b}_1 = \frac{v_{1,1} \times b_{1,1} + v_{1,2} \times b_{1,2}}{b_{1,1}^2 + b_{1,2}^2} \\ (v_{1,2})_{\mathcal{B}'} &= \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{b}_2}{\left\|\vec{b}_2\right\|^2}\vec{b}_2 = \frac{v_{1,1} \times b_{2,1} + v_{1,2} \times b_{2,2}}{b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2} \end{aligned}\right\} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -6/5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

On fait la même chose pour les vecteurs **v**$_2$ et **v**$_3$ et nous obtenons :

$$\vec{v}_{2,\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 13/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} \qquad \vec{v}_{3,\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

(à vos feuilles et crayons pour faire les calculs!)

Remarque sur « l'indépendance linéaire » :

Nous pouvons définir une liste de vecteurs étant **linéairement dépendant** si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire que l'on peut **décomposer le vecteur en une somme unique** des autres vecteurs (décomposition linéaire que vous avez vu avant). Sinon, les vecteurs sont qualifiés de **linéairement indépendant**.