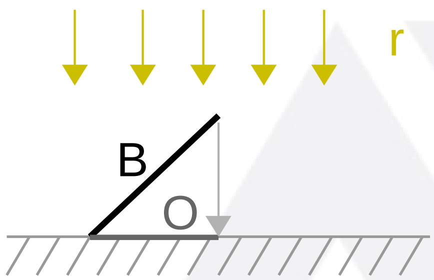
Les vecteurs IV

Projection d’un vecteur :

La projection de vecteur peut être un peu difficile à comprendre, de même que sont intérêt que nous ne verrons pas tout de suite (éventuellement abordé pendant les ateliers ML ou RDV maths). La projection d’un vecteur s’effectue sur un sous-espace vectoriel ou bien sur un vecteur particulier.

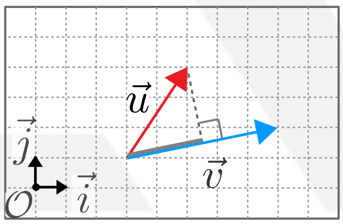
Illustrons d’abord ce qu’est la projection :



Des rayons r arrivant perpendiculairement en direction du sol, éclairent un bâton B incliné. L’ombre O est la **projection orthogonale de B sur le sol**.

Formulé autrement : **O** est le **projeté de B** sur le sol.

Dans un cadre plus formel et géométrique, la projection d’un vecteur u sur un vecteur v s’interprète de la même façon :



Le segment gris sur le vecteur **v** est la projection orthogonale (faite de manière perpendiculaire) de **u** sur **v**.

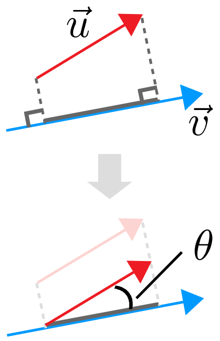
La question que l’on se pose est : doit-on ajouter une flèche à l’extrémité de la projection de **u** ?

Cela dépend. En effet il existe la **projection scalaire** et la **projection vectorielle**.

- La **projection scalaire** est une **grandeur scalaire** (un nombre), seule la longueur de la projection importe / est nécessaire.
- La **projection vectorielle** est **un vecteur**, il faut alors ajouter une flèche à la pointe de la projection. Il faut **une direction** pour le projeté **en plus de sa longueur**.

Les vecteurs IV

Projection orthogonale scalaire:



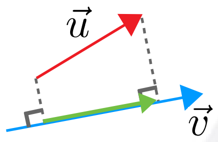
La projection scalaire de **u** sur **v** est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \|\vec{u}\|\cos(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i \times v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}}$$

Elle correspond à la longueur de la projection de **u** sur **v**.

On peut voir que cela est lié au produit scalaire.

Projection orthogonale vectorielle:



La projection vectorielle de **u** sur **v** est donnée par :

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \|\vec{u}\|\cos(\theta)\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u})\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Elle correspond au vecteur en vert qui est la longueur de la projection de **u** sur **v** muni de la même direction que v.

On peut voir que cela est lié au produit scalaire aussi.

Remarque sur la projection orthogonale et le produit scalaire:

Vous constatez que la projection scalaire et vectorielle sont liées au produit scalaire.

Pour l'instant, vous ne verrez pas tout le potentiel des projections orthogonales, mais nous y reviendrons plus tard…

Exemples :

Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

La projection scalaire de **u** sur **v** puis de **v** sur **u** sont :

$$\mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad \mathcal{P}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

La projection vectorielle de **u** sur **v**: $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \mathcal{P}_{\vec{v}}(\vec{u})\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{8}}\frac{\vec{v}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$