Les matrices IV

Déterminant d'une matrice :

Le déterminant est une grandeur scalaire définie uniquement pour les matrices carrées.

Le déterminant d'une matrice caractérise certaines propriétés de celle-ci *(qui est en réalité caractéristique dune transformation (dans le jargon, application linéaire), mais ce n'est pas le sujet ici)*.

Le déterminant correspond, d'un point de vue géométrique, au facteur de proportionnalité reliant le volume "unitaire" de l'espace et celui obtenue après transformation par la matrice des vecteurs de la base utilisée de l'espace (nous allons y revenir juste après).

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2:

Soit une matrice M :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Le déterminant, noté det(M) (on trouve aussi det M ou |M|), est égale à :

$$det(\mathcal{M}) = ad - cb$$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3:

Soit une matrice M :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

(matrices mineures de M)

Le déterminant est égale à :

$$det(\mathcal{M}) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cancel{a} & b & \cancel{c} \\ d & \cancel{e} & f \\ g & \cancel{h} & i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & c \\ d & e & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{bmatrix}$$

$$det(\mathcal{M}) = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

Cette méthode de calcul de déterminant généralise pour de matrice carrée d'ordre supérieure.

Les matrices IV

Interprétation géométrique du déterminant :

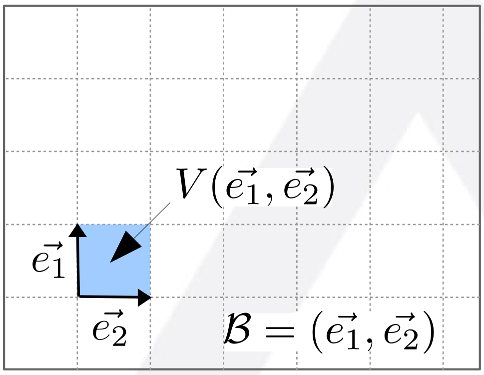
Le déterminant correspond facteur de proportionnalité reliant le volume "unitaire" de l'espace et celui obtenue après transformation par la matrice des vecteurs de la base utilisée de l'espace.

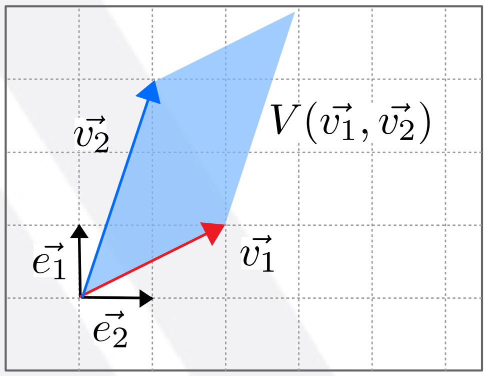
Voyons dans un premier temps dans le cas d'un espace à 2D puis 3D.

Espace 2D :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} \end{bmatrix}$$

On représente les vecteurs **v**$_1$ et **v**$_2$.
V est le volume (ici surface plutôt) délimité par **e**$_1$ et **e**$_2$ puis par **v**$_1$ et **v**$_2$.



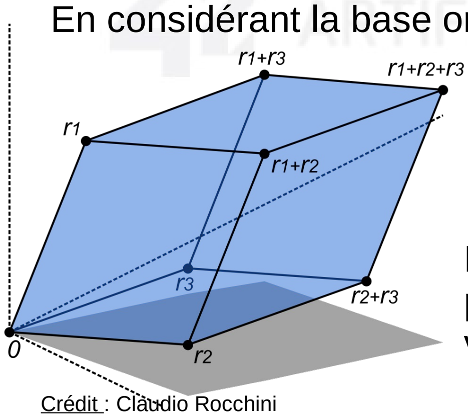


Le rapport entre les 2 volumes correspond au déterminant de M :

$$\frac{V(\vec{v_1}, \vec{v_2})}{V(\vec{e_1}, \vec{e_2})} = det(\mathcal{M}) = 5$$

Espace 3D :

En considérant la base orthonormée (**e**$_1$, **e**$_2$, **e**$_3$) et la matrice M (3x3) :



Crédit : Claudio Rocchini
http://www.wikiwand.com/en/Determinant#/

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r_1} & \vec{r_2} & \vec{r_3} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de M correspond au volume du parallélépipède en bleu, délimité par les vecteurs colonnes de la matrice M.

NB : Le déterminant a une utilité qui nous intéresse spécialement pour le ML, et concerne la matrice hessienne que nous aborderons plus tard.