Les vecteurs III

Produit scalaire :

Nous avons vu comment additionner (/soustraire) les vecteurs entre eux et la multiplication d'un vecteur par un scalaire. Nous allons voir Une autre opération faisant intervenir 2 vecteurs appelée **produit scalaire**. C'est une opération permettant de multiplier 2 vecteurs entre eux.

Définition algébrique du produit scalaire:

Soit 2 vecteurs **u** et **v** : $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

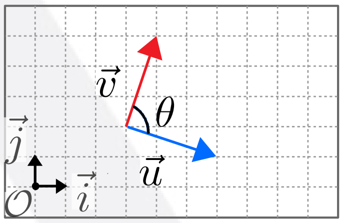
Le produit scalaire de **u** par **v**, noté **u**·**v**, est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2$$

Plus formellement : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{N} u_i \times v_i$

Définition géométrique du produit scalaire :

Soit 2 vecteurs **u** et **v** tels que représenté sur le schéma.



Le produit scalaire de **u** par **v** est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$

Propriétés du produit scalaire:

Soit 2 vecteurs **u** et **v**.

- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributif vis à vis de l'addition vectorielle : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- Associatif vis à vis de la multiplication scalaire : $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Exemples :

Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

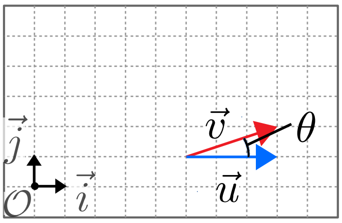
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 1 \times (-2) = 4$$

Soit $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\theta = 45$

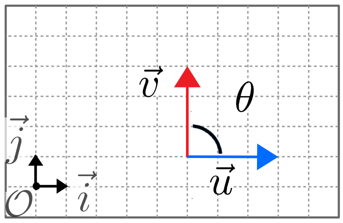
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 6 \times \cos(45^o) = 15\sqrt{2}$$

Les vecteurs II

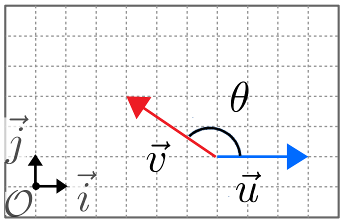
Propriété géométrique du produit scalaire:



$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

- Quand **θ appartient à [0 ;π/2[** (π/2 = 90°, et la valeur est exclut) alors **u·v** est **positif**.
- Quand **θ = π/2**, alors **u·v** est **nul**.
- Quand **θ supérieur à π/2**, alors **u·v** est **négatif**.

Remarquons que le signe du produit scalaire traduit si les vecteurs pointent dans la même direction ou des directions opposées.

Orthogonalité de vecteur:

Un résultat intéressant du produit scalaire de 2 vecteurs est que si celui-ci est nul alors que les 2 vecteurs ne sont pas nuls, les vecteurs sont orthogonaux l'un à l'autre (c'est-à-dire qu'ils ont un angle de 90° entre eux).

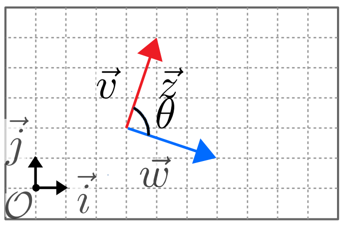
Plus simplement si **u ≠ 0** et **v ≠ 0**, alors si **u·v** = 0, **u** et **v** sont orthogonaux.

Exemples :

Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$$

Soit **w** et **z** tels que sur le schéma :



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(90^o) = 0$$