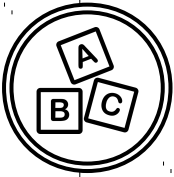




## Les matrices II



### Produit d'une matrice avec un vecteur:

Il est temps de nous intéresser au produit d'une matrice avec un vecteur. La multiplication d'une matrice avec un vecteur ressemble au produit scalaire de 2 vecteurs : Pour chaque ligne de la matrice on effectue la somme des produits terme à terme des éléments de la matrice (de la ligne considérée évidemment) avec les composantes du vecteur :

$$\mathbf{c} = \mathcal{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \end{bmatrix}$$



Dans le détail cela donne :

1<sup>ère</sup> composante de  $\mathbf{c}$  :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ où } c_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3$$

2<sup>nd</sup> composante de  $\mathbf{c}$  :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ où } c_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3$$



### Exemple :

Soit les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ainsi que les vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  suivant :

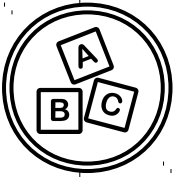
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2-5 \\ -2+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$





## Les matrices II



### Produit d'une matrice avec une autre matrice:

La multiplication matricielle se déroule de manière identique à la multiplication d'une matrice par un vecteur. Considérons le produit matricielle :

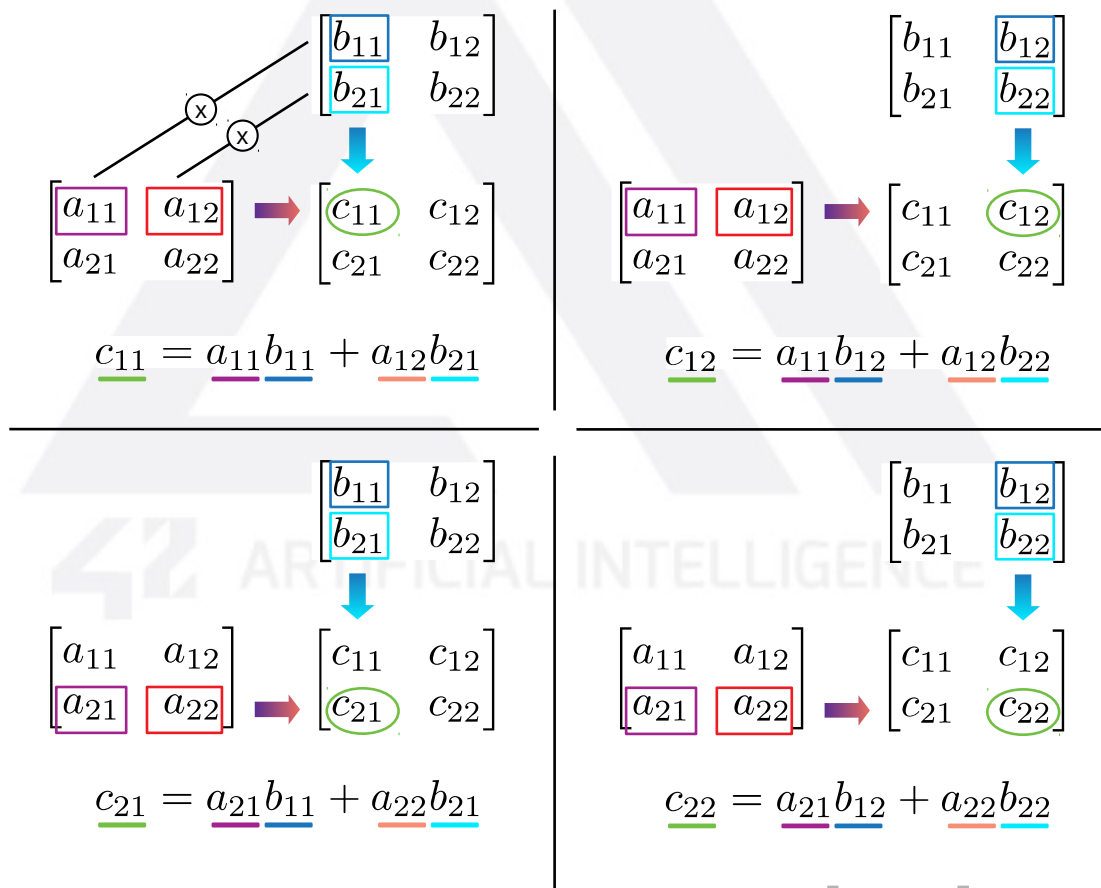
$$AB = C$$

l'élément  $c_{ij}$  est égale à la somme des produits des éléments de la  $i^{\text{e}}$  ligne de **A** avec les éléments de la  $j^{\text{e}}$  colonne de **B** :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj} \quad (\text{avec convention d'Einstein})$$



De manière détaillé cela donne :

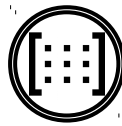


### Exemple :

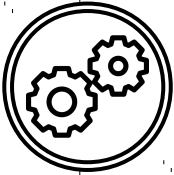
Soit les matrices **A** et **B** :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$





## Les matrices II



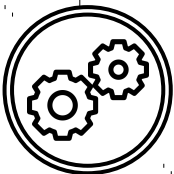
### Remarque sur le produit matrice-vecteur :

Plusieurs remarques méritent d'être faites et garder les en mémoire si possible:

- Le produit d'une matrice avec un vecteur donne un vecteur (sauf cas d'un vecteur colonne avec un vecteur ligne).
- Le produit d'une matrice avec un vecteur n'est pas toujours possible.
- Pour être possible, le nombre de colonne de la matrice et le nombre de composantes du vecteur doivent être égaux :

$$\begin{array}{ccc}
 (3 \times \boxed{2})(\boxed{3} \times 1) & (2 \times \boxed{3})(\boxed{2} \times 1) & (3 \times \boxed{2})(\boxed{2} \times 1) \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 \text{impossible} & \text{impossible} & \text{possible}
 \end{array}$$

- Le produit d'une matrice de taille  $(n \times m)$  par un vecteur de taille  $(m \times 1)$  donne un vecteur de taille  $(n \times 1)$ .



### Remarque sur le produit matrice-matrice :

Des remarques semblables peuvent être faites pour le produit entre 2 matrices

- Le produit d'une matrice avec une 2<sup>nd</sup> matrice donne une matrice.
- Le produit matricielle n'est pas toujours possible.
- Pour être possible, le nombre de colonnes de la 1<sup>ère</sup> matrice et le nombre de lignes de la 2<sup>nd</sup> matrice doivent être égaux :

$$\begin{array}{ccc}
 (3 \times \boxed{2})(\boxed{3} \times 2) & (2 \times \boxed{3})(\boxed{2} \times 2) & (3 \times \boxed{2})(\boxed{2} \times 3) \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
 \text{impossible} & \text{impossible} & \text{possible}
 \end{array}$$

- Le produit d'une matrice de taille  $(n \times m)$  par une 2<sup>nd</sup> matrice de taille  $(m \times p)$  donne un vecteur de taille  $(n \times p)$ .

