Les fonctions multivariables

Fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

Ici, nous nous intéressons uniquement aux fonctions définies $\mathbb{R}^n$ (ou un sous ensemble non vide) dont le domaine image, noté Im(f), est égal ou inclut dans $\mathbb{R}$. Cela pour des raisons pratiques et de simplicité.

Nous nous intéressons donc aux fonctions à N variables indépendantes :

$$(x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$$

Que l'on peut écrire aussi :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$$

Exemples :

Distribution gaussienne à 3 variables :

$$g(x, y, z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{\sigma^2}\right)$$

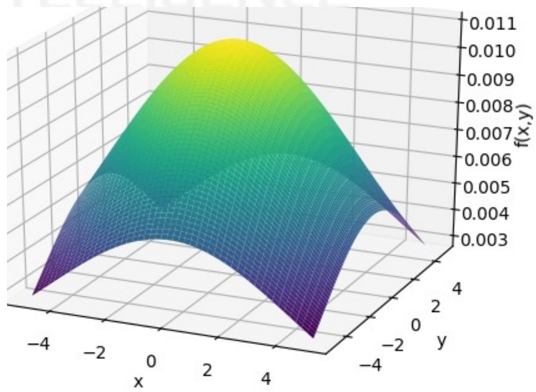
Masse d'une canette :

$$m(r, t, h, \rho) = 2\pi.r^2.t.\rho + 2\pi.r.h.t.\rho$$

où *r* est le rayon, *h* la hauteur, *t* l'épaisseur et *ρ* la masse volumique du matériau utilisé.

Surface représentative :

La représentation graphique des fonctions à plusieurs variables est aisée et "naturelle" pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$. Au delà de il est courant de transformer une ou plusieurs variables en paramètres et tracer plusieurs surface pour différentes valeurs du/des paramètres.
Mais au-delà de 4 ou 5 variables, la représentation graphique tend à être abandonnée.



$$f(x, y) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{36}\right)$$

Les fonctions multivariables

Dérivation de fonction multivariables :

De la même manière que pour les fonctions à une variable, les fonctions à plusieurs variables peuvent être dérivée et est notée df.

La dérivée d'une fonction à plusieurs variables est la somme des dérivées partielles :

$$f(x,y,z) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle de f par rapport à x (y et z sont considérées constantes)

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée partielle de f par rapport à y (x et z sont considérées constantes)

$\frac{\partial f}{\partial z}$ est la dérivée partielle de f par rapport à z (x et y sont considérées constantes)

Exemples :

$$f(x,y,z) = 3.x^3 + 2.\sqrt{y} - \frac{2}{z}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 9.x^2 + \frac{2}{2\sqrt{y}} - \frac{2}{z^2}$$

$$g(x,y,z) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}\right)$$

$$dg = -\frac{2}{\sigma^2}(x+y+z)\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}\right)$$