Les matrices II

Produit d'une matrice avec un vecteur:

Il est temps de nous intéresser au produit d'une matrice avec un vecteur. La multiplication d'une matrice avec un vecteur ressemble au produit scalaire de 2 vecteurs : Pour chaque ligne de la matrice on effectue la somme des produits terme à terme des éléments de la matrice (de la ligne considérée évidemment) avec les composantes du vecteur:

$$\mathbf{c} = \mathcal{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \end{bmatrix}$$

Dans le détail cela donne :

1ère composante de **c** :

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{v_1} \\ \boxed{v_2} \\ \boxed{v_3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

où $c_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3$

2nd composante de **c** :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{v_1} \\ \boxed{v_2} \\ \boxed{v_3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

où $c_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3$

Exemple :

Soit les matrices **A** et **B** ainsi que les vecteurs $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$ suivant :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B}\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2-5 \\ -2+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Les matrices II

Produit d'une matrice avec une autre matrice:

La multiplication matricielle se déroule de manière identique à la multiplication d'une matrice par un vecteur. Considérons le produit matricielle :

$$\mathcal{AB} = \mathcal{C}$$

l'élément c_{ij} est égale à la somme des produits des éléments de la i^e ligne de **A** avec les éléments de la j^e colonne de **B** :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ik}b_{kj} \qquad \text{(avec convention d'Einstein)}$$

De manière détaillé cela donne :

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix}\boxed{b_{11}} & b_{12}\\ \boxed{b_{21}} & b_{22}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\end{matrix}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix}b_{11} & \boxed{b_{12}}\\ b_{21} & \boxed{b_{22}}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\end{matrix}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix}\boxed{b_{11}} & b_{12}\\ \boxed{b_{21}} & b_{22}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}}\end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\end{matrix}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix}b_{11} & \boxed{b_{12}}\\ b_{21} & \boxed{b_{22}}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}}\end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\end{matrix}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

Exemple :

Soit les matrices **A** et **B** :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} & \begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix} \\ \mathcal{AB} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} & \boxed{\begin{bmatrix}7 & 9\\ 9 & 15\end{bmatrix}}\end{matrix}$$

42 ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Les matrices II

Remarque sur le produit matrice-vecteur :

Plusieurs remarques méritent d’être faites et garder les en mémoire si possible:

- Le produit d’une matrice avec un vecteur donne un vecteur (sauf cas d’un vecteur colonne avec un vecteur ligne).
- Le produit d’une matrice avec un vecteur n’est pas toujours possible.
- Pour être possible, le nombre de colonne de la matrice et le nombre de composantes du vecteur doivent être égaux :

$$(3\times\boxed{2})(\boxed{3}\times 1) \qquad (2\times\boxed{3})(\boxed{2}\times 1) \qquad (3\times\boxed{2})(\boxed{2}\times 1)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

impossible **impossible** **possible**

- Le produit d’une matrice de taille (**n**x**m**) par un vecteur de taille (**m**x**1**) donne un vecteur de taille (**n**x**1**).

Remarque sur le produit matrice-matrice :

Des remarques semblables peuvent être faites pour le produit entre 2 matrices

- Le produit d’une matrice avec une 2nd matrice donne une matrice.
- Le produit matricielle n’est pas toujours possible.
- Pour être possible, le nombre de colonnes de la 1^{ere} matrice et le nombre de lignes de la 2nd matrice doivent être égaux :

$$(3\times\boxed{2})(\boxed{3}\times 2) \qquad (2\times\boxed{3})(\boxed{2}\times 2) \qquad (3\times\boxed{2})(\boxed{2}\times 3)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

impossible **impossible** **possible**

- Le produit d’une matrice de taille (**n**x**m**) par une 2nd matrice de taille (**m**x**p**) donne un vecteur de taille (**n**x**p**).