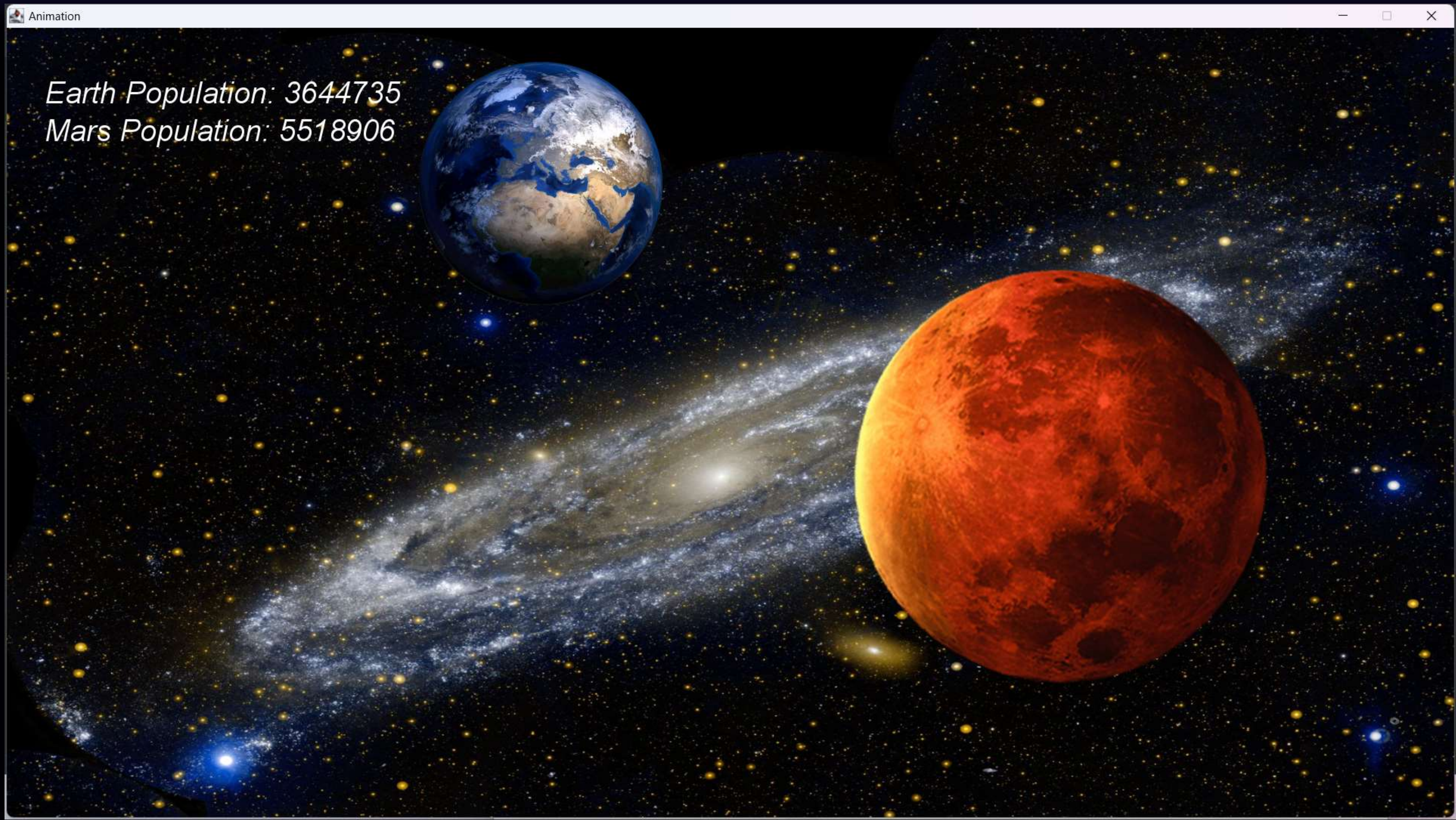
Zeitliche Entwicklung zweier sich bekämpfender Pupulationen

Modell von Lanchester

Von Pierre Fröhle und Pascal Geist

HFU, Fakultät Digitale Medien
Sommersemester 23, 2. Semester
Mathematik und Simulation
Prof. Dr. Thomas Schneider
Prof. Dr. Uwe Hahne


Animation
Earth Population: 3644735
Mars Population: 5518906

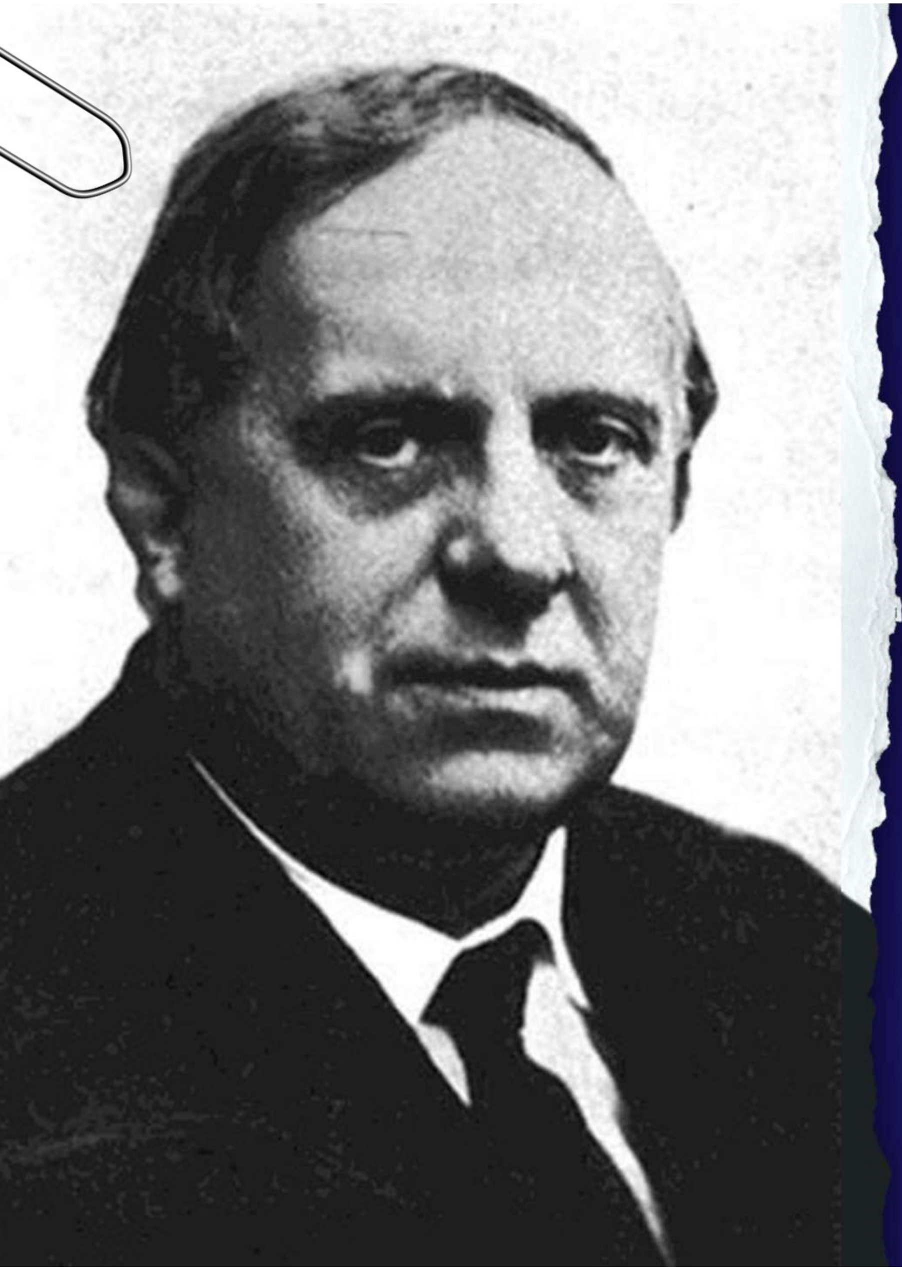
Gliederung

Frederick W. Lanchester

Modell von Lanchester

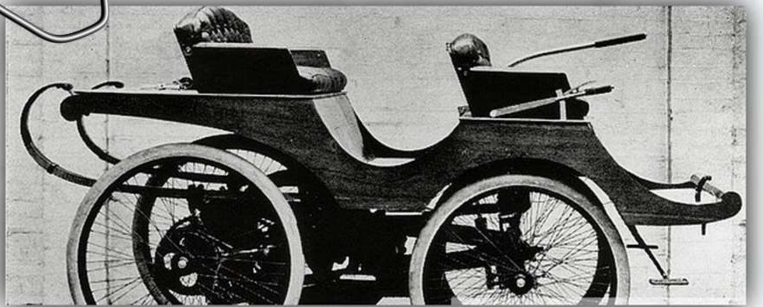
Programmcode

Frederick W. Lanchester



Frederick William Lanchester

- 23. Oktober 1868 bis 8. März 1946
- Studierte Ingenieurwesen (ohne Abschluss)
- 1893 widmete er sich der Autoentwicklung
- Baute 1895 das wohl erste Auto, das nur in Großbritannien entwickelt wurde
- 1899 Gründung Lanchester Engine Company mit seinem Bruder (1904 Lanchester Motor Company)



Frederick William Lanchester

- 1934 wurde die Firma aufgekauft und als Daimler Motor Company übernommen
- Versuchte im Ersten Weltkrieg Gefechts-verläufe mathematisch darzustellen
- Auf Basis eines Fahrzeuges von Lanchester wurde ein Panzerwagen für den Krieg produziert
- Entwickelte oder setzte als Erster Vierradantriebe, Scheibenbremsen, Turbolader uvm. ein

Modell von Lanchester

Modell von Lanchester

- Mathematisches Modell, beschreibt Kampfverlauf zweier konkurrierender Armeen
- Es wurde 1916 entwickelt
- Analyse Militärkonflikte, Prognose von Marktwettbewerben, Darstellung Epidemien
- In der Literatur wird das Gesetz durch eine Differentialgleichung dargestellt
- Zeigt Veränderung der Anzahl von Einheiten im Laufe der Zeit
- Effektivität hängt von Bewaffnung, Motivation, Ausbildung sowie Taktik ab

Modell von Lanchester

$G' = -r * H$

$H' = -s * G$

G: Anzahl Population 1
H: Anzahl Population 2
s: Effektivität 1 (von G)
r: Effektivität 2 (von H)

Das Ergebnis zeigt uns die Steigung in der G oder H sich in einer linearen Linie der x-Achse nähert.

Ableitung nach t

$$\frac{d}{dt} G' = -r \frac{d}{dt} H$$

$$\frac{d}{dt} H' = -s \frac{d}{dt} G$$

$\rightarrow$

$$G'' = -r \frac{d}{dt} H = -r(-sG) = rsG$$

$$H'' = -sG = -s(-rH) = rsH$$

G: Anzahl Population 1
H: Anzahl Population 2
s: Effektivität 1(von G)
r: Effektivität 2 (von H)

Mit der Ableitung von der Zeit kann man erkennen, dass die Zweite Ableitung (zb von G) die Ursprüngliche Gleichung mit r*s (z.B. mal G) ist.

Lösungen der Gleichungen

$\boldsymbol{k} \coloneqq \sqrt{rs} \rightarrow k^2 = r * s$

$G(t)'' = k^2 * G(t)$

$H(t)'' = k^2 * H(t)$

G: Anzahl Population 1
H: Anzahl Population 2
s: Effektivität 1(von G)
r: Effektivität 2 (von H)

Allgemeine Lösungen

$$G(t) = a * e^{kt} + b * e^{-kt}$$

$$H(t) = c * e^{kt} + d * e^{-kt}$$

$$G(0) = a * 1 + b * 1$$

$$H(0) = c * 1 + d * 1$$

Einfügen von t

$t = 0$

$$G'(0) = -rH(0)$$

$$H'(0) = -sG(0)$$

$$ka * e^{k0} - kb * e^{-k0} = -rH(0)$$

$$kc * e^{k0} - kd * e^{-k0} = -sG(0)$$

$$k(a - b) = -rH_0 \qquad a - b = -\frac{r}{k}H_0$$

$\rightarrow$

$$k(c - d) = -sG_0 \qquad c - d = -\frac{s}{k}G_0$$

Zwischenergebnisse

1. $a + b = G_0$
2. $c + d = H_0$
3. $a - b = -\frac{r}{k} H_0$
4. $c - d = -\frac{s}{k} G_0$

Wir addieren die Gleichungen 1 und 3:

$$2a = G_0 - \frac{r}{k} H_0 \rightarrow a = \frac{G_0 - \frac{r}{k} H_0}{2}$$

Wir addieren die Gleichungen 2 und 4:

$$2c = H_0 - \frac{s}{k} G_0 \rightarrow c = \frac{H_0 - \frac{s}{k} G_0}{2}$$

Subtraktion der Gleichungen

Wir subtrahieren die Gleichungen 1 und 3:

$$2b = G_0 + \frac{r}{k} H_0 \quad \rightarrow \quad b = \frac{G_0 + \frac{r}{k} H_0}{2}$$

Wir subtrahieren die Gleichungen 2 und 4:

$$2d = H_0 + \frac{s}{k} G_0 \quad \rightarrow \quad d = \frac{H_0 + \frac{s}{k} G_0}{2}$$

Lösung des Anfangswertproblems

Einsetzen von a, b, c und d:

$$G(t) = a * e^{kt} + b * e^{-kt}$$

$$H(t) = c * e^{kt} + d * e^{-kt}$$

$$G(t) = \frac{G_0 - \frac{r}{k}H_0}{2} * e^{kt} + \frac{G_0 + \frac{r}{k}H_0}{2} * e^{-kt}$$

$$H(t) = \frac{H_0 - \frac{s}{k}G_0}{2} * e^{kt} + \frac{H_0 + \frac{s}{k}G_0}{2} * e^{-kt}$$

$$G(t) = G_0 * \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} - \frac{r}{k} H_0 * \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$

$$H(t) = H_0 * \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} - \frac{s}{k} G_0 * \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$

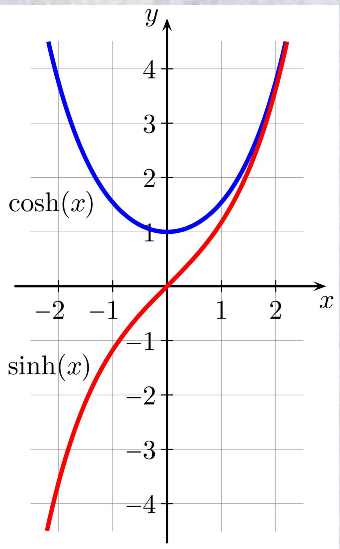
Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$G(t) = G_0 * \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} - \frac{r}{k} H_0 * \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$

$$H(t) = H_0 * \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} - \frac{s}{k} G_0 * \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$



$$G(t) = G_0 * cosh(kt) - \frac{r}{k} H_0 * sinh(kt)$$

$$H(t) = H_0 * cosh(kt) - \frac{s}{k} G_0 * sinh(kt)$$

Zusammenfassende Darstellung

$$G(t) = G_0 * \frac{e^{\sqrt{srt}} + e^{-\sqrt{srt}}}{2} - \sqrt{\frac{r}{s}} H_0 * \frac{e^{\sqrt{srt}} - e^{-\sqrt{srt}}}{2}$$

$$H(t) = H_0 * \frac{e^{\sqrt{srt}} + e^{-\sqrt{srt}}}{2} - \sqrt{\frac{s}{r}} G_0 * \frac{e^{\sqrt{srt}} - e^{-\sqrt{srt}}}{2}$$

<u>Alternative Darstellung:</u>

$$G(t) = G_0 * \cosh(\sqrt{srt}) - \sqrt{\frac{r}{s}} H_0 * \sinh(\sqrt{srt})$$

$$H(t) = H_0 * \cosh(\sqrt{srt}) - \sqrt{\frac{s}{r}} G_0 * \sinh(\sqrt{srt})$$

Konstante Systemgröße

$$L(t) = sG(t)^2 - rH(t)^2$$

$$= sG(0)^2 - rH(0)$$

$$= sG_0^2 - rH_0^2$$

Einfügen:

$$G' = -r * H$$

$$H' = -s * G$$

Begründung:

$$\frac{d}{dt}(sG(t)^2 - rH(t)^2) = s * 2 * G(t) * G'(t) - r * 2 * H(t) * H'(t)$$

$$= s * 2 * G(t) * (-rH(t)) - r * 2 * H(t) * (-sG(t))$$

$$= -2rs * G(t) * H(t) + 2rs * G(t) * H(t) = 0$$

Möglichkeiten

$L > 0 \rightarrow$ G gewinnt

$L < 0 \rightarrow$ H gewinnt

$L = 0 \rightarrow$ drei Fälle möglich

1. $G_0 > H_0 \rightarrow$ G gewinnt
2. $G_0 < H_0 \rightarrow$ H gewinnt
3. $G_0 = H_0$ und $r = s \rightarrow$ unentschieden

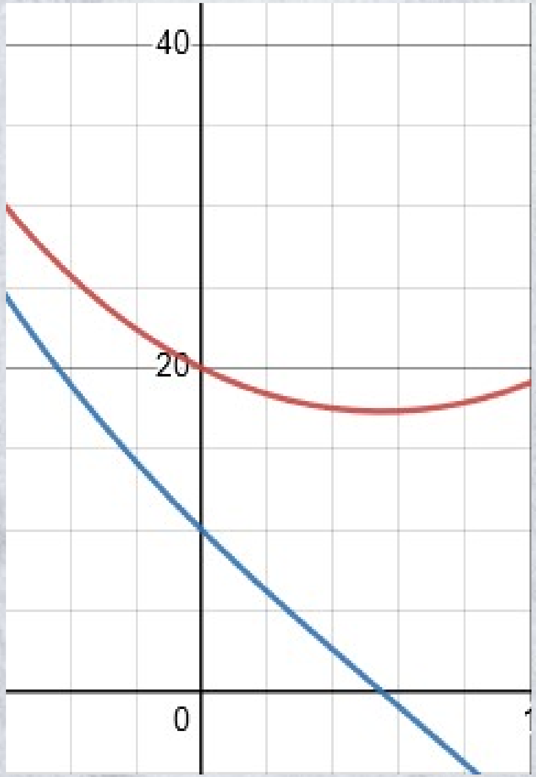
G gewinnt

$G_0 = 20$ $s = 1$

$H_0 = 10$ $r = 1$

$$L = s * G(t)^2 - r * H(t)^2$$
$$L = 1 * 20^2 - 1 * 10^2$$
$$L = 400 - 200$$
$$L = 200$$

$$G(t) = \sqrt{\frac{L}{r}} = 14,14$$



H gewinnt

$G_0 = 10$ $\quad s = 1$

$H_0 = 10$ $\quad r = 2$

$L = s * G(t)^2 - r * H(t)^2$

$L = 1 * 10^2 - 2 * 10^2$

$L = 200 - 400$

$L = -20$

$H(t) = \sqrt{\frac{-L}{r}} = 3,16$

Unentschieden Fall 1

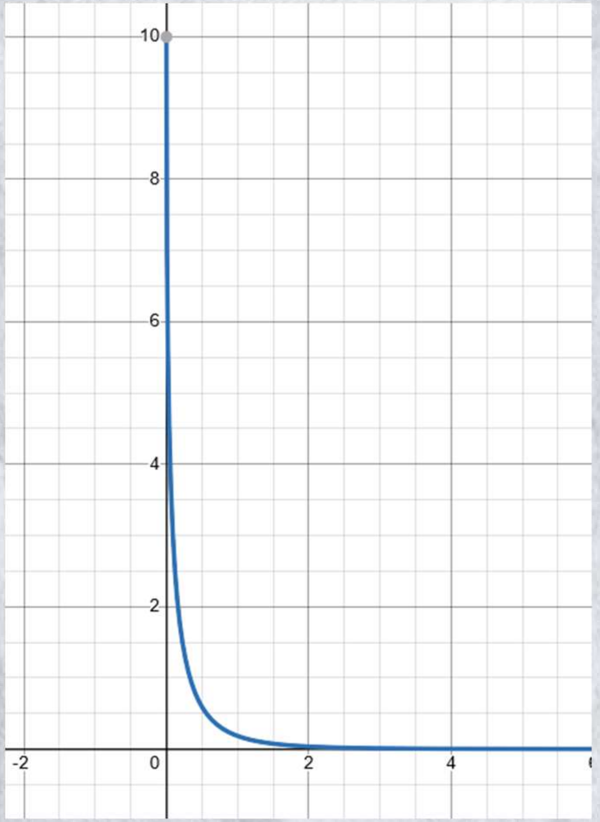
$G_0 = 10 \quad s = 4$

$H_0 = 10 \quad r = 4$

$L = s * G(t)^2 - r * H(t)^2$

$L = 4 * 10^2 - 4 * 10^2$

$L = 400 - 400 = 0$



Unentschieden Fall 2

$G_0 = 20$ $\quad s = 1$

$H_0 = 10$ $\quad r = 4$

$L = s * G(t)^2 - r * H(t)^2$

$L = 1 * 20^2 - 4 * 10^2$

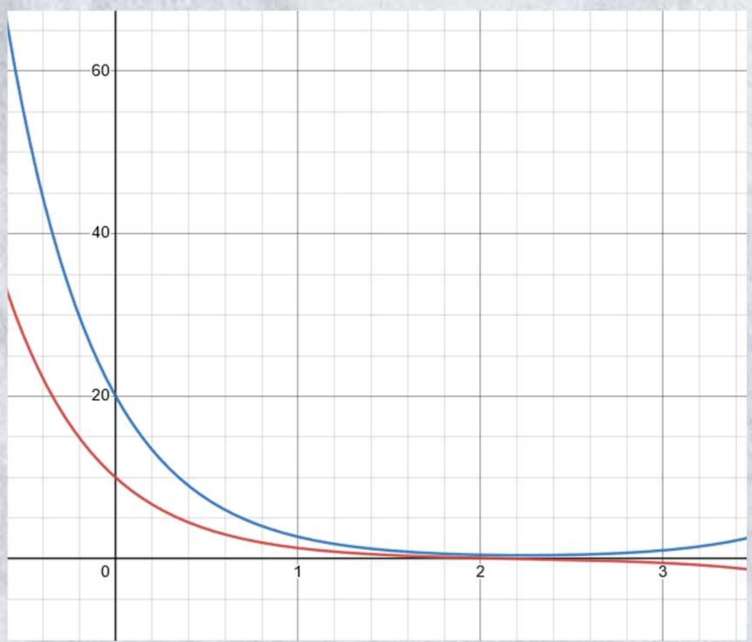
$L = 400 - 400 = 0$

Pyrrhussieg für G

Unentschieden Fall 3

$G_0 = 10$ $s = 4$

$H_0 = 20$ $r = 1$



$L = s * G(t)^2 - r * H(t)^2$

$L = 4 * 10^2 - 1 * 20^2$

$L = 400 - 400 = 0$

Pyrrhussieg für H

Programmcode

```java
public class Main {

    no usages
    public static void main(String[] args) {
        //die Werte im aufploppenden Fenster können selbst eingegeben werden
         int[] simulationValues = showInputWindow();
         if (true){
             int populationG = simulationValues[0];
             int populationH = simulationValues[1];
             int strengthG = simulationValues[2];
             int strengthH = simulationValues[3];
             double maxTime = 9999;

             JFrame frame = new JFrame( title: "Animation");
             CircleAnimation circleAnimation = new CircleAnimation(populationG,populationH,strengthG, strengthH, (int) maxTime);
             frame.getContentPane().add(circleAnimation);
             frame.setSize( width: 1920  , height: 1080); //Größe des Fensters wurde angepasst
             frame.setDefaultCloseOperation(WindowConstants.EXIT_ON_CLOSE); //wird beendet, wenn man das Fenster schließt
             frame.setLocationRelativeTo(null);
             frame.setVisible(true);
             frame.setResizable(false); //Größe des Fensters kann nicht mehr durch rumziehen angepasst werden (kam davor zu einem Bug)
```

Main.java LineGraphFrame.java CircleAnimation.java Window.java

```java
        //Berechnung, damit es übersichtlicher bleibt, um es dann in die L-Rechnung zu integrieren
        int exponent = 2;
        double rHt = strength1 * population2 * timeInSeconds;
        double sGt = strength2 * population1 * timeInSeconds;
        //Berechnung für L
        double l = Math.pow(sGt, exponent) - Math.pow(rHt, exponent);

        System.out.println();
        if (diameter1  >diameter2) { //Ausgaben der Gewinner (inklusive der drei Möglichkeiten von Unentschieden)
            System.out.println("Winner: Population Mars (G)");
        }
        else if (diameter1 < diameter2) {
            System.out.println("Winner: Population Earth (H)");
        }
        else if (l==0 && diameter1 > diameter2) {
            System.out.println("Tie (Pyrrhussieg Mars (G))");
        }
        else if (l==0 && diameter1 < diameter2) {
            System.out.println("Tie (Pyrrhussieg Earth (H))");
        } else {
            System.out.println("It's a tie");
        }
    }
```

```java
//Skalierung der Zeit, damit die Simulation nicht zu schnell zu Ende geht
double time = current_time * 0.00042;
//mathematische Formeln, nach der die Populationen geringer werden
population1 = population1 * Math.cosh(Math.sqrt(strength1 * strength2) * time) - Math.sqrt(strength2 / strength1) * population2 * Math.sinh(Math
population2 = population2 * Math.cosh(Math.sqrt(strength1 * strength2) * time) - Math.sqrt(strength1 / strength2) * population1 * Math.sinh(Math

//Die Kreise (Planeten) werden neu anhand der Populationen gezeichnet und skaliert
double marsPopulationForCircle = population1 * 0.0001;
diameter1 = (int) Math.round(marsPopulationForCircle);

double earthPopulationScaled = marsPopulationForCircle * (population2 / population1);
diameter2 = (int) Math.round(earthPopulationScaled);

//Bildergröße ändern, damit diese die Größe der Population annehmen
Image nebula_background_scaled = backgroundImg.getScaledInstance( width: 1920,  height: 1080, Image.SCALE_SMOOTH);

double centerXearth = 800 - diameter1 / 2;
double centerYearth = 300 - diameter1 / 2;
double centerXmars = 1300 - diameter2 / 2;
double centerYmars = 500 - diameter2 / 2;
```

Quellen

https://www.kfz-tech.de/Hersteller/Lanchester/Lanchester.htm
https://www.jaguarheritage.com/lanchester-people/frederick-lanchester/
https://de.wikipedia.org/wiki/Lanchester_Motor_Company
https://de.wikipedia.org/wiki/Frederick_W._Lanchester
https://military-history.fandom.com/wiki/Lanchester%27s_laws
https://en.wikipedia.org/wiki/Lanchester%27s_laws
https://www.youtube.com/watch?v=PQao2MY7ges
https://www.youtube.com/watch?v=V5WcpuSZyeI

GAME OVER!

Habt ihr noch Fragen?