Вопросы к экзамену по курсу «Математический анализ»
(для студентов ФСУ группы: 422-1, 422-2, 422-3)

1. *Понятие функции. Примеры.*

Функцией $f: X \to Y$ называется закон или правило, по которому каждому x из X ставится в соответствие единственное y из Y.
Примеры: 1) $f: \mathbb{R} \to [-1; 1], f(x) = \sin(x)$;
2) x+2y+1=0, y=-0.5*(x-1);

2. *Композиция.*

3. *Определение предела числовой последовательности.*

Функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется числовой последовательностью.
Число $a \epsilon \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности a_n, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N \epsilon \mathbb{N}, \text{т. ч.} \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

4. *Доказать по определению, что $\boldsymbol{lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1}$.*

Пусть $\varepsilon > 0, N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1. \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon$
$n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}, n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$

5. *Дайте определение того, что $\boldsymbol{lim_{n\to\infty} a_n \neq a}$.*

Если $\varepsilon > 0\ \forall N \epsilon \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ \text{т. ч.} |a_n - a| \geq \varepsilon$

6. *Теорема о единственности предела числовой последовательности.*

Теорема:
Если предел числовой последовательности существует, то он единственный.
Доказательство:
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} a_n = b, a \neq b$
$\varepsilon = |a - b| > 0, \exists\ N_a, N_b \epsilon \mathbb{N}, \text{т. ч.} \forall n \geq N_a, \forall n \geq N_b \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Тогда $\varepsilon = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$

7. *Теорема об арифметических свойствах предела числовой последовательности.*

Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a\ , \lim_{n\to\infty} b_n = b$, тогда:
1) $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
Доказательство:
Пусть

$$\varepsilon > 0\ |a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \left\{\begin{matrix} \text{т. к.} \lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{то}\ \exists N_a \epsilon \mathbb{N}\ \text{т. ч.} \forall n \geq N_a \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}; \\ \lim_{n\to\infty} b_n = b, \text{то}\ \exists N_b \epsilon \mathbb{N}\ \text{т. ч.} \forall n \geq N_b \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}; N := \max(N_a, N_b) \end{matrix}\right\} <$$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall n \geq N.$ ■
2) $\lim_{n\to\infty} a_n \times b_n = a \times b$
Доказательство:
$\text{Т. к.} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \text{то}\ \exists N_a \epsilon \mathbb{N}\ \text{т. ч.} \forall n \geq N_a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon;$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \text{то}\ \exists N_b \epsilon \mathbb{N}\ \text{т. ч.} \forall n \geq N_b \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon; N := \max(N_a, N_b)\ , \text{то}$
$|a_n \times b_n - a \times b| = |a_n \times b_n - a \times b_n + a \times b_n - a \times b| \leq |b_n| \times |a_n - a| + |a| \times |b_n - b|.$
Т. к. последовательность b_n имеет конечный предел, то она ограниченна и поэтому существует такое положительное число A, т. ч. $\forall\ n > N\ \Rightarrow |b_n| < A$.
Поэтому абсолютная величина разности
$|a_n \times b_n - a \times b| \leq |b_n| \times |a_n - a| + |a| \times |b_n - b| < A \times \varepsilon + |a| \times \varepsilon = \varepsilon \times (A + |a|) = \varepsilon_1$
может быть сделана как угодно малой, начиная с некоторого номера N.
Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \times b_n = a \times b$ ■
3) Если $b_n \neq 0, b \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
Доказательство:
$\text{Т. к.} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \text{то}\ \exists N_a \epsilon \mathbb{N}\ \text{т. ч.} \forall n \geq N_a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon;$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \text{то}\ \exists N_b \epsilon \mathbb{N}\ \text{т. ч.} \forall n \geq N_b \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon.$
Т. к. $b_n \to b \neq 0$ (предположим, что $b > 0$) выберем ε таким, что $\frac{b}{2} < b - \varepsilon$,

тогда $\left(\frac{b}{2} < b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon\right), \forall n > N_b$.

Из неравенства $0 < \frac{b}{2} < b_n \Rightarrow \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$.

Абсолютная величина разности

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b \times a_n - a \times b_n}{b \times b_n}\right| = \left|\frac{b \times a_n - a \times b + a \times b - a \times b_n}{b \times b_n}\right| \le \frac{|b| \times |a_n - a| + |a| \times |b_n - b|}{|b \times b_n|} \le \frac{|b| \times \varepsilon + |a| \times \varepsilon}{\frac{b^2}{2}} =$$

$= 2 \times \varepsilon \times \frac{|b| + |a|}{b^2} = \varepsilon_1$, начиная с $N := \max(N_a, N_b)$, есть ε_1 — новая, как угодно малая величина.

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ ■

8. ***<u>Определение: $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.</u>***

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

<u>Определение:</u> $\forall M > 0\ \exists N \epsilon \mathbb{N}$ т. ч. $\forall n \ge N \Rightarrow a_n > M$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

<u>Определение:</u> $\forall M < 0\ \exists N \epsilon \mathbb{N}$ т. ч. $\forall n \ge N \Rightarrow a_n < M$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

<u>Определение:</u> $\forall M > 0\ \exists N \epsilon \mathbb{N}$ т. ч. $\forall n \ge N \Rightarrow |a_n| > M$

9. ***<u>Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства. Примеры.</u>***

Бесконечно малая последовательность — это последовательность, предел которой равен нулю.

Бесконечно большая последовательность — это последовательность, предел которой равен бесконечности.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

- Сумма двух бесконечно малых последовательностей сама также является бесконечно малой последовательностью.
- Разность двух бесконечно малых последовательностей сама также является бесконечно малой последовательностью.
- Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей сама также является бесконечно малой последовательностью.
- Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.
- Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
- Любая бесконечно малая последовательность ограничена.
- Если стационарная последовательность является бесконечно малой, то все её элементы, начиная с некоторого, равны нулю.
- Если вся бесконечно малая последовательность состоит из одинаковых элементов, то эти элементы — нули.
- Если (b_n)— бесконечно большая последовательность, не содержащая нулевых членов, то существует последовательность $\frac{1}{b_n}$, которая является бесконечно малой. Если же (b_n) всё же содержит нулевые элементы, то последовательность $\frac{1}{b_n}$ всё равно может быть определена, начиная с некоторого номера n, и всё равно будет бесконечно малой.

  <u>Доказательство:</u>

  Надо доказать, что $\frac{1}{b_n}$ — , бесконечно малая, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \epsilon \mathbb{N}$ т. ч. $\forall n \ge N \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - 0\right| < \varepsilon$.

  Пусть $\varepsilon > 0$ $\left(\text{т. к.} \lim_{n\to\infty} b_n = \infty, \text{то для } M = \frac{1}{\varepsilon}\ \exists N \epsilon \mathbb{N} \text{ т. ч. } \forall n \ge N \Rightarrow |b_n - 0| > M\right)$, $\exists N \epsilon \mathbb{N}$ т. ч. $\forall n \ge N \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon$.
- Если (α_n) — бесконечно малая последовательность, не содержащая нулевых членов, то существует последовательность $\frac{1}{\alpha_n}$, которая является бесконечно большой. Если же всё же (α_n) содержит нулевые элементы, то последовательность $\frac{1}{\alpha_n}$ всё равно может быть определена, начиная с некоторого номера n, и всё равно будет бесконечно большой.

  <u>Доказательство:</u>

  Надо доказать, что $\frac{1}{\alpha_n}$ — , бесконечно большая, т. е. $\forall M > 0\ \exists N \epsilon \mathbb{N}$ т. ч. $\forall n \ge N \Rightarrow \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > M$.

  Пусть $M > 0$ $\left(\text{т. к.} \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \text{то для } \varepsilon = \frac{1}{M}\ \exists N \epsilon \mathbb{N} \text{ т. ч. } \forall n \ge N \Rightarrow |\alpha_n - 0| < \varepsilon = \frac{1}{M}\right)$, $\exists N \epsilon \mathbb{N}$ т. ч. $\forall n \ge N \Rightarrow \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > M = \frac{1}{\varepsilon}$.

10. Неопределенности. Примеры.

1) $\frac{0}{0}$ *Пример:* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$

2) $\frac{\infty}{\infty}$ *Пример:* $\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4)^2}{(x+2)^2}$

3) $\infty+\infty$ *Пример:* $\lim_{x\to\infty}(x^2+x)$

4) $0\times\infty$ *Пример:* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times 2n$

5) $\infty-\infty$ *Пример:* $\lim_{x\to\infty} x-2x^3$

11. Монотонно возрастающие и монотонно убывающие последовательности.

Последовательность $x_n \epsilon X$ называется:

1) Неубывающей $\Leftrightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}: x_n \le x_{n+1}$

2) Невозрастающей $\Leftrightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}: x_n \ge x_{n+1}$

3) Возрастающей $\Leftrightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}: x_n < x_{n+1}$

4) Убывающей $\Leftrightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}: x_n > x_{n+1}$

12. Теорема о монотонно возрастающей ограниченной последовательности.

Определение:

Последовательность (a_n) называется монотонно возрастающей, если $a_1<a_2<a_3<\dots<a_n$.

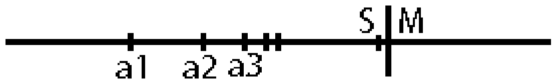
Определение:

Последовательность (a_n) называется ограниченной, если $\exists M>0$ т. ч. $(a_n)<M, \forall n\epsilon\mathbb{N}$

Теорема:

Монотонная ограниченная последовательность сходится.

Доказательство для монотонно возрастающей ограниченной последовательности:



Выберем число $S\le M$ т. ч.:

1) $a_n\le S, \forall n\epsilon\mathbb{N}$;

2) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\epsilon\mathbb{N}$ т. ч. $S-\varepsilon<a_n$

$S-$ супремум последовательности $(a_n)-\sup(a_n)$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=S,$ т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\epsilon\mathbb{N}$ т. ч. $\forall n\ge N\Rightarrow |a_n-S|<\varepsilon.$

Пусть $\varepsilon>0,$ в качестве N возьмем N из пункта 2, тогда $\forall n\ge N\Rightarrow S-\varepsilon<a_n\Rightarrow |S-a_n|<\varepsilon$ ■

13. Число e.

Замечание:

Бином Ньютона:

$$(a_n)=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right): 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \left(\frac{5}{4}\right)^4 \ \dots$$

Докажем, что последовательность (a_n) монотонна:

$$(a_n)=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1\times\frac{1}{n}+\mathrm{C}_n^2\times\frac{1}{n^2}\dots\mathrm{C}_n^n\times\frac{1}{n^n}=$$

$$=\frac{n!}{0!\times(n-0)!}+\frac{n!}{1!\times(n-1)!}\times\frac{1}{n}+\frac{n!}{2!\times(n-2)!}\times\frac{1}{n^2}\dots+\frac{n!}{n!\times(n-n)!}\times\frac{1}{n^n}.$$

$$0!=1\Rightarrow 1+1+\frac{1}{2!}\times\frac{n\times(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\times\frac{n\times(n-2)\times(n-1)}{n^3}+\frac{1}{4!}\times\frac{n\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)}{n^4}+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}\times\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\dots(n-(n-1))}{n^n}=2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\dots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\times\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}=$$

$=(a_n)$

$a_n+1,$ то

1) Добавится еще одно слагаемое больше 0

2) А каждое имеющееся слагаемое увеличится

Следовательно $a_n<a_n+1\Rightarrow(a_n)\nearrow$

$$a_n\le 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}\le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

Последовательность a_n сходится (по теореме о сходимости монотонной ограниченной последовательности),

Предел этой последовательности равен e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.718281828459045\dots$$

14. <u>*Предел функции (по Коши).*</u>

Число А называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ т.ч. $\forall x: |x-a| < \delta, x \neq a \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

15. <u>*Предел функции (по Гейне).*</u>

Число А называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и $\forall \ (x_n) \to a$, соответствующая последовательность $f(x_n) \to A$.

16. <u>*Доказать, что $\boldsymbol{lim_{x\to\infty} sin\frac{1}{x}}$ не существует.*</u>

17. <u>*Односторонние пределы.*</u>

1) Число А называется пределом $f(x)$ слева в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ такое, что $\forall \ x \epsilon \ dom \ f(x) \backslash \{x_0\}: 0 < x_0 - x < \delta \ \Rightarrow$ $|f(x) - A| < \varepsilon$.
2) Число А называется пределом $f(x)$ справа в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ такое, что$\forall \ x \epsilon \ dom \ f(x) \backslash \{x_0\}: 0 < x - x_0 < \delta \ \Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

18. <u>*Свойства предела функции.*</u>

а) Если $\lim_{x\to x_0} f(x) \ \exists$, то он единственный.

б) Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} g(x) = B$, то

$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

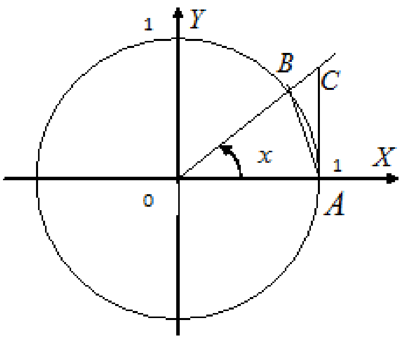
$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \times g(x)) = A \times B$

Если $g(x) \neq 0$ в окрестности x_0, а $B \neq 0$, то $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

в) Если $\phi(x)$ ограниченна в x_0, а $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то $\lim_{x\to x_0}(\phi(x) \times \alpha(x)) = 0$

г) Первый замечательный предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

<u>*Доказательство:*</u>



Рассмотрим площади трех фигур:

$S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2} \times R^2 \times \sin(x)$

$S_{OAB} = \dfrac{1}{2} \times R^2 \times x$

$S_{\Delta OAC} = \dfrac{1}{2} \times R^2 \times tg(x)$

$S_{\Delta OAB} < S_{OAB} < S_{\Delta OAC}$

$\dfrac{\sin(x)}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{tg(x)}{2}$

$\sin(x) < x < tg(x)$ Разделим все на $\sin(x)$.

$1 < \dfrac{x}{\sin(x)} < \dfrac{1}{\cos(x)}$ Возведем все в -1 степень.

Получаем: $\cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1.$

Из свойства (д) следует, что предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ ■

д) Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = A = \lim_{x\to x_0} g(x)$

$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x), \forall x \epsilon (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$

тогда $\lim_{x\to x_0} \phi(x) = A$

е) Второй замечательный предел $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e = 1^{\infty}$

ж) Если $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$ то $\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e, \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$

Если $\lim_{x\to x_0}\beta(x)=+\infty,$ то $\lim_{x\to x_0}(1+\frac{1}{\beta(x)})^{\beta(x)}=e$

19. Доказать, что $\lim_{x\to 2}x^2=4.$

20. Вывести формулу для суммы геометрической прогрессии.

21. Критерий Коши для числовых последовательностей. Пример.

Теорема:

Предел числовой последовательности $x_n\ \exists \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ такая, что $\forall n\geq N, \forall p\in\mathbb{N}\Rightarrow |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

Доказательство:

Необходимость (⇒)

Пусть $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. Надо доказать, что $\forall\ \varepsilon>0\ \exists N\epsilon\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ \forall p\epsilon\mathbb{N}\Rightarrow |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

Пусть $\varepsilon>0\ \exists N\epsilon\mathbb{N}$ т. ч. $\forall n\geq N\Rightarrow |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall p\epsilon\mathbb{N}\Rightarrow |x_{n+p}-x_n|=|x_{n+p}-a+a-x_n|\leq|x_{n+p}-a|+|a-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

22. Критерий Коши для функций.

Предел функции $f(x)$ при $x\to x_0\ \exists \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ т. ч. $\forall x_1,x_2\epsilon\ dom\ f(x)\backslash\{x_0\}$:

$0<|x_1-x_0|<\delta$ и $0<|x_2-x_0|<\delta\ \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

23. Определение бесконечно малой величины и понятие о – символики. Примеры.

Функция $y=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$ если $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые и $x\to x_0$

1) Если $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$ то $\alpha(x)$ – бесконечно малая высшего порядка относительно $\beta(x)$. $\alpha(x)=\circ\,(\beta(x))$.
2) Если $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\neq 0$ и конечен, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются сравнимыми.
3) Если $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\nexists,$ то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$. $\alpha(x)$ называется бесконечно малой k – того порядка относительно $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}\neq 0$ и конечен.

24. Теорема об эквивалентности бесконечно малых величин.

Определение:

Бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x\to x_0$, если $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ является бесконечно малой высшего порядка относительно $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Теорема:

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$. Пусть $\alpha(x)\sim\beta(x)\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Доказательство:

Необходимость (⇒):

Пусть $\alpha(x)\sim\beta(x)$, т.е. по определению: $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Тогда $\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\xrightarrow[x\to x_0]{}0,$

т.к. $\gamma(x)=\circ\,\beta(x),$ то $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{}1.$

Достаточность (⇐):

Пусть $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1=0\ ,\delta(x)=\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1, \delta(x)\times\beta(x)=\alpha(x)-\beta(x)=\gamma(x)$ (по определению).

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\gamma(x)}{\delta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)\times\delta(x)}{\delta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\delta(x)=0\Rightarrow\gamma(x)=\circ\,\beta(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)\times\delta(x)}{\alpha(x)}=|\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{}0|=0\times 1=0\Rightarrow\gamma(x)=\circ\,\alpha(x)$

$\Rightarrow\alpha(x)\sim\beta(x)$ ■

25. Определение непрерывной функции в точке и в области. Примеры.

1) Функция $f(x)$ непрерывна в $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$.
2) Функция $f(x)$ непрерывна в множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

26. Непрерывность слева и справа. Примеры.

$$f: X \to Y, x_0 \epsilon X$$

1) Функция $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0 если $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) = f(x_0 - 0)$.
2) Функция $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0 если $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

27. Типы точек разрыва.

1) Если $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ и конечны, то x_0 – точка разрыва первого рода (скачок).
2) Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ и конечны, то x_0 – точка разрыва первого рода (устранимый разрыв).
3) Если один из односторонних пределов не существует или равен ∞, то x_0 – точка разрыва второго рода.

28. Пример функции разрывной в каждой точке.

Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

29. Теорема о непрерывности композиции.

Теорема:
Пусть $f: X \to Y, \varphi: Y \to Z, x_0 \epsilon X, y_0 = f(x_0)$,
$f(x)$ непрерывна в точке $x_0, \varphi(y)$ непрерывна в y_0.
Тогда $\varphi\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.
Доказательство:
Надо доказать, что $\varphi\big(f(x)\big)$ непрерывна в x_0, то есть $\lim_{x\to x_0} \varphi\big(f(x)\big) = \varphi\big(f(x_0)\big)$, то есть
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ т. ч. $\forall x \epsilon X: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi\big(f(x)\big) - \varphi(f(x_0))|$
Пусть $\varepsilon > 0$, т. к. $\varphi(y)$непрерывна в y_0, то $\exists\ \delta_\varphi > 0$ т. ч. $\forall y \epsilon Y: |y - y_0| < \delta_\varphi \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$.
Т.к. $f(x)$ непрерывна в x_0, то для $\delta_\varphi = \varepsilon_f\ \exists\ \delta_f = \delta$ т. ч. $\forall x \epsilon X: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_\varphi$.
Т.е. $|y - y_0| < \delta_\varphi \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, т. е. $\left|\varphi\big(f(x)\big) - \varphi\big(f(x_0)\big)\right| < \varepsilon$■

30. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

Пусть $f: X \to Y$ непрерывна в точке $x_0, g: Y \to Z$ непрерывна в $y_0 = f(x_0)$. Тогда $\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$.

31. Теорема Больцано-Коши (первая).

Теорема:
Пусть $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a; b], f(a) \times f(b) < 0$ тогда $\exists c \epsilon [a; b]$ т. ч. $f(c) = 0$.
Доказательство:
Пусть $f(a) < 0$, а $f(b) > 0, \frac{a+b}{2} \epsilon [a; b]$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $c = \frac{a+b}{2}$.
Пусть $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, тогда на концах одного из отрезков $\left[a; \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ функция принимает значения в разных знаках.
Для определенности пусть это 2й отрезок, обозначим его $[a_1; b_1]$, затем возьмем середину нового отрезка $\frac{a_1+b_1}{2}$. Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то $c = \frac{a_1+b_1}{2}$.
Пусть $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$, тогда на концах одного из отрезков $\left[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}; b_1\right]$ функция принимает значения в разных знаках.
Пусть это 1й отрезок $[a_2; b_2]$ и т.д.
В результате мы получим последовательность вложений отрезков.
$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \dots$
$[a_n; b_n] = a_n - b_n = \frac{b-a}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = c \epsilon [a; b]$$
$$f(c) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$$
$$f(c) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(c) = 0\ ■$$

32. Теорема Больцано-Коши (вторая).

Теорема:

Пусть $f[a;b] \to [c;d]$ непрерывна на $[a;b], f(a) = c, f(b) = d,$ тогда $\forall y_0 \epsilon [c;d] \exists x_0 \epsilon [a;b]$ т. ч. $f(x_0) = y_0$.

Т.е. значения непрерывной функции сплошь заполняют отрезок $[c;d]$.

Доказательство:

Пусть $y \epsilon (a;b)$. Рассмотрим $\varphi(x) = f(x)$.

Тогда $\varphi(a) = f(a) - y_0 < 0$

$\varphi(b) = f(b) - y_0 > 0$ и $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$

(Если $\varphi(a) = 0$, то $f(a) = y_0$ и $x_0 = a$. $\varphi(b)$ − аналогично)

Значит неравенства выше можно считать строгими.

По 1й теореме Больцано-Коши $\exists c \epsilon [a;b]$ т. ч $f(c) = 0$, т. е. $f(c) = y_0, x_0 = c$ ■

33. Теорема об обратной функции.

Теорема:

Пусть $f: X \to Y$ непрерывна в X, $f(x)$ − монотонная функция на X,

тогда $\exists$ функция $f^{-1} = g: Y \to X$ монотонная и непрерывная на Y и $g\big(f(x)\big) = x \ \forall x \epsilon X$.

Доказательство:

Идея доказательства: $y = f(x) \nearrow$ монотонно возрастает.

Если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

По 2й теореме Больцано − Коши $\forall y_0 \epsilon Y \ \exists \ x_0 \epsilon X$ т. ч. $f(x_0) = y_0$.

$g = f^{-1}: Y \to X, g(y_0) = x_0$.

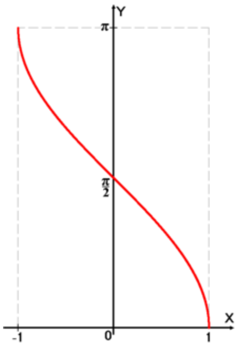
34. Теорема о непрерывности элементарных функций.

Теорема:

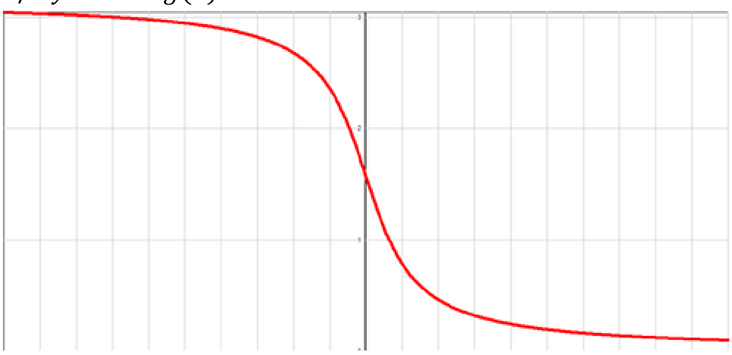
Элементарные функции непрерывны в своей области определения.

35. Тригонометрические функции и обратные к ним. Графики.

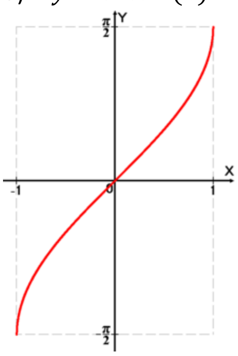
1) $y = \arccos(x)$



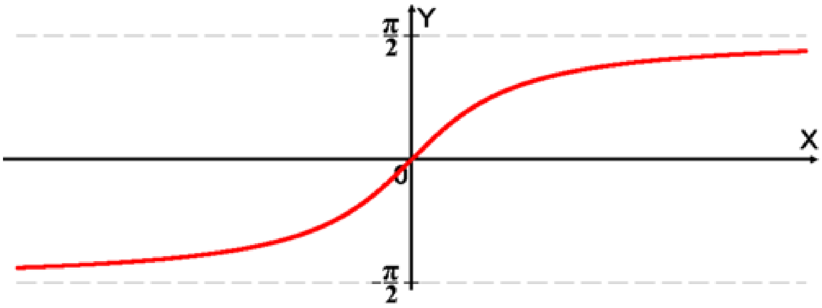
2) $y = arcctg(x)$



3) $y = \arcsin(x)$



4) $y = arctg(x)$



36. Теорема Вейерштрасса (без доказательства).

Теорема:

$f(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

Если $f: [a, b] \to Y, Y \epsilon \mathbb{R}$, то $\exists\, c, d \epsilon [a; b]$ т. ч. $f(c) = \min f(x)$, $f(b) = \max f(x)$. $(a \le x \le b)$

37. Определение равномерной непрерывности.

Функция $f: X \to Y$ называется равномерно непрерывной на X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ т. ч. $\forall x, x_0 \epsilon X: |x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

38. Теорема Кантора.

Теорема:

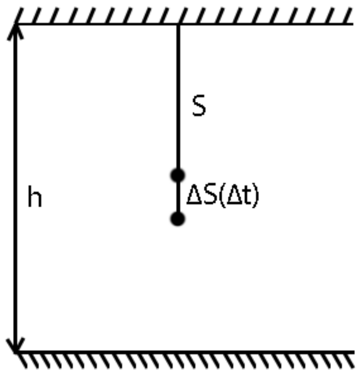
Если $f: [a; b] \to Y, Y \epsilon \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $y = f(x)$ равномерно непрерывна на $[a; b]$.

39. Примеры равномерно непрерывных функций.

1) $f(x) = \sin(x)$;
2) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ равномерна на любом отрезке, не включающем 0;
3) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$, $x \epsilon [-1; 1]$;
4) $f(x) = arctg(x)$, $x \epsilon \mathbb{R}$.

40. Задача о скорости движущейся точки.

Рассмотрим свободное падение материальной точки.



$$S(t) = \frac{gt^2}{2}$$

$$S(t) + \Delta t = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{gt^2}{2} + \frac{g(2t\Delta t + \Delta t^2)}{2}$$

$$\Delta S = \frac{g(2t\Delta t + \Delta t^2)}{2}$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(2t + \Delta t)}{2} = gt = v(t)$$

41. Определение производной.

Пусть $f: (a; b) \to \mathbb{R}, x_0 \epsilon (a; b)$. Если существует конечный $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

42. Вывод табличных производных.

43. *Теорема о производной обратной функции.*

Теорема:

Пусть $f: X \to Y, \exists f'(x_0), \exists g: Y \to X$ обратная к $f(x), \exists g'(f(x_0))$, тогда $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Доказательство:

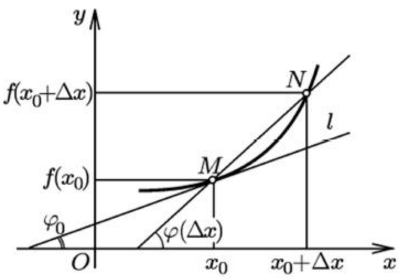
$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции).

44. *Геометрический смысл производной.*

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tan(\varphi_0), x = x_0 + \Delta x.$$

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Точки M и N имеют следующие координаты M$(x_0; f(x_0))$, N$(x; f(x))$. Угол между секущей MN и осью Ox обозначим $\varphi(\Delta x)$.



Если $\exists \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, то $\tan(\varphi_0)$ наклона касательной, проходящей через точку M$(x_0; f(x_0))$, к положительному направлению оси Ox является производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

45. *Доказать, что функция $y = |x|$ не имеет производной в нуле. Привести другой пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.*

В нуле функция имеет излом (угол). Производные слева и справа не равны друг другу.

46. *Определение дифференциала.*

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется функция от $(x - x_0)$:

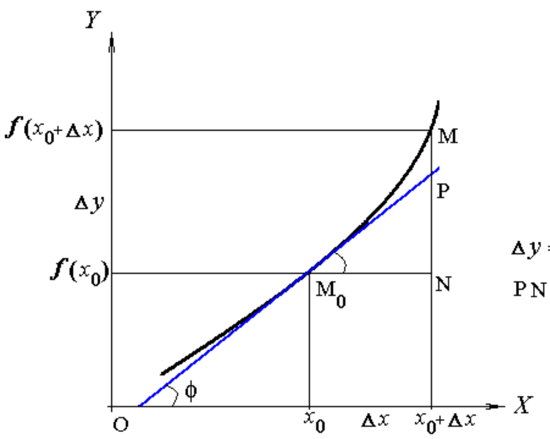
$df(x_0) = A \times (x - x_0) = Adx$

47. *Теорема о связи производной и дифференциала.*

Теорема:

Функция $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists\ y' = f'(x)$.

48. *Геометрический смысл дифференциала.*



$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$M_0N = \Delta x$
$MN = \Delta y$
$PN = dy$
$MP = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

$\Delta y = MN = PN + MP = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$
$PN = dy = \mathrm{tg}\,\phi \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \\ &\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \end{aligned}}$$

49. *Дифференциал как источник приближенных формул.*

Приближенная формула получается из равенства $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + \alpha \times (x - x_0)$.

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$.

Пример:

$f(x) = (1 + x)^\mu, x_0 = 0$

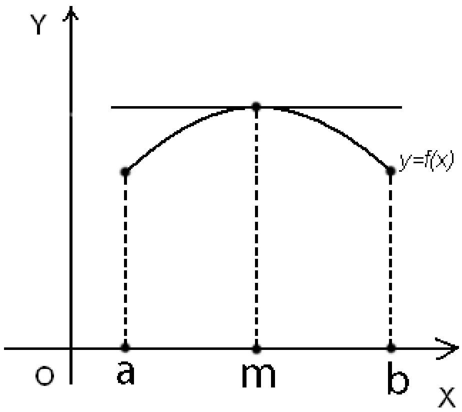
$f(x) = (1+x)^{\mu} \approx 1 + \mu \times (x - 0)$
$f'(x) = \mu \times (1 + x)$
$(1+x)^{\mu} \approx 1 + \mu \times x, \qquad x - \text{число, блихкое к } 0.$

50. *Производные высшего порядка.*

Пусть $f: X \to Y, x_0 \epsilon X, f'(x_0)$ – число. Если $\forall x \epsilon X \ \exists \ f'(x)$, то на производную можно смотреть как на функцию.
$f': X \to f'(x) = g(x).$
Пусть $\forall x \epsilon X \ \exists \ g'(x) = \left(f'(x)\right)' = f''(x).$
Пусть определена производная попрядка $(n-1)$ т. е. $f^{(n-1)}(x)$.
Тогда производной порядка (n) называется $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

51. *Теорема Ферма.*

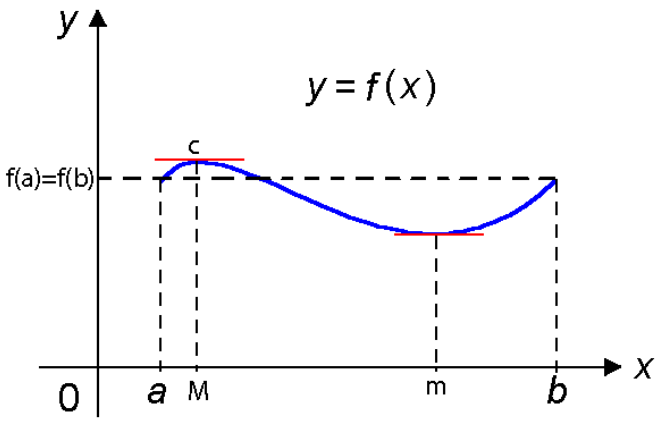
Теорема:
Пусть $f: [a; b] \to [c: d], \exists \ f'(x) \ \forall x \epsilon (a; b), \exists \ m \epsilon (a; b)$ т. ч. $f(m)$ – наибольшее значение функции на $[a; b]$. Тогда $f'(m) = 0$.



Доказательство:
По определению производной: $f'(m) = \lim_{x \to m} \frac{f(x) - f(m)}{x - m}$.
1) $x < m$
$$\frac{f(x) - f(m)}{x - m} > 0 \Rightarrow \lim_{x \to m-0} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \geq 0$$
2) $x > m$
$$\frac{f(x) - f(m)}{x - m} < 0 \Rightarrow \lim_{x \to m+0} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leq 0$$
$$\Rightarrow \exists f'(x) \Rightarrow f'(m) = \lim_{x \to m} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} = 0 \ \blacksquare$$

52. *Теорема Ролля.*

Теорема:
Пусть $f: [a; b] \to [c; d]$ непрерывна, $\exists \ f'(x) \ \forall x \epsilon (a; b), f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \epsilon (a; b)$ т. ч. $f'(c) = 0$.



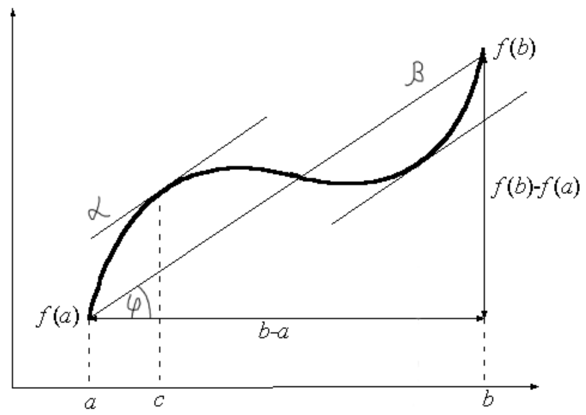
Доказательство:
$f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. По теореме Вейерштрасса $\exists c_1, c_2 \epsilon [a; b]$ т. ч. $f(c_1) = m$ – наименьшее значение функции, $f(c_2) = M$ – наибольшее значение функции.
1) $m = M$
$\forall x \epsilon [a; b] \ m \leq f(x) \leq M \ \Rightarrow f(x) - const.$

$c\epsilon(a;b), f'(c) = 0.$
2) $m < M$
Т. к. $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно из значений m или M достигается не на концах отрезка.
(Если $f(a) = m = f(b), f(c) = M, c\epsilon(a;b)$).
Пусть $\exists c\epsilon(a;b)$ т. ч. $f(c) = M$. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$ ∎

53. *Теорема Лагранжа.*

Теорема:

Пусть $f: [a;b] \to [c;d], \forall x\epsilon[a;b]\ \exists f'(x)$. Тогда $\exists c\epsilon[a;b]$ т. ч. $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) = tg(\varphi)$.



Доказательство:

Рассмотри вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a)$.
$F(x)$ – непрерывна на $[a;b]$.
$F'(x) = f'(x) - 0 - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Производна $\exists \forall x\epsilon(a;b)$.
$F(a) = 0 = F(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a))$
$F(a) = F(b)$
По теореме Ролля $\exists c\epsilon(a;b)$ т. ч. $F'(c) = 0$,
$0 = F'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ∎

54. *Теорема Коши.*

Теорема:

Пусть $f: [a;b] \to \mathbb{R}, g: [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a;b]$.

$\exists\ f'(x), g'(x)\ \forall x\epsilon(a;b)$, тогда $\exists$ c$\epsilon(a;b)$ т. ч. $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

55. *Формула Тейлора. Примеры.*

Пусть $f: X \to Y, \exists\ f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n+1)}(x_0)$.
Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times (x - x_0) + \circ\left((x - x_0)^n\right) = \left| \begin{matrix} 0! = 1 \\ f^{(0)}(x) = f(x) \end{matrix} \right| = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!} \times (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \times (x - x_0)^n + \circ\ (x - x_0)^n$.
Пример: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \circ\ (x - x_0)^n.\ x_0 = 0, f'(x) = e^x, f'(x_0) = f'(0) = e^0 = 1$.

56. *Исследование функции с помощью производной*.

1) $dom\ f(x)$
2) Исследование на четность. $f(-x) = f(x)$ – четная, $f(-x) = -f(x)$ – нечетная, иначе – функция общего вида.
3) Точки разрыва.
4) Асимптоты. Если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \to \infty$:
- $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0$
- $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0$

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)$

5) $y' = 0$

6) $y'' = 0, y'' > 0 -$ выпукла вверх, $y'' < 0 -$ выпукла вниз

7) $f(x) = 0$

57. Правило Лопиталя для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, другие случаи.

Пусть $f, g: (a; b] \to \mathbb{R}, \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (или $= \infty$).

Пусть $\forall x \epsilon (a; b] \ \exists \ f'(x)$ и $g'(x)$, и $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ (возможно $k = \infty$).

Тогда $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ (или $= \frac{\infty}{\infty}$) $= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$.