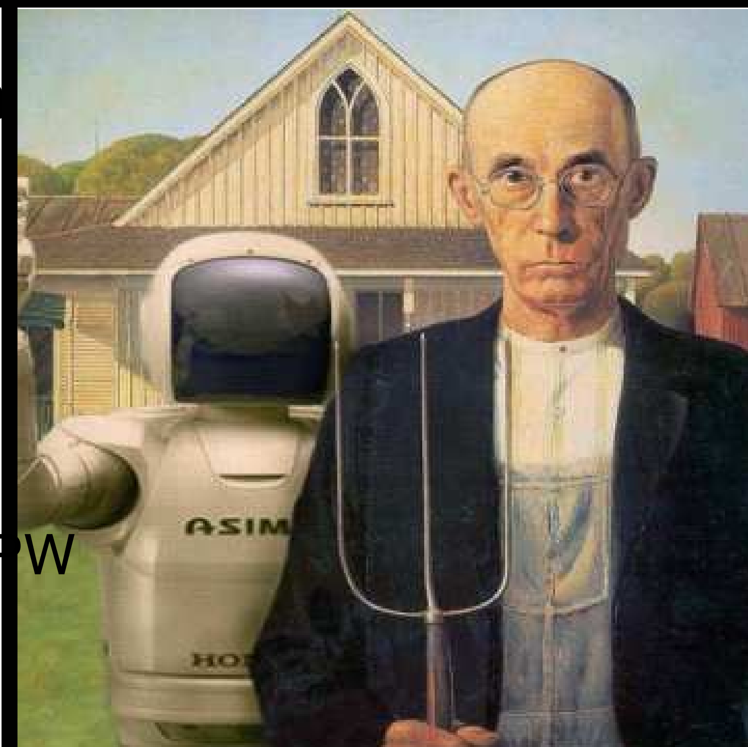
Sztuczna Inteligencja

Wykład 2

Piotr Wąsiewicz

Zakład Sztucznej Inteligencji - ISE PW

pwasiewi@elka.pw.edu.pl



Techniki zapisu wiedzy niepewnej

Prawdopodobieństwo

$P(A) = K/N$

$P(A)$ - prawdopodobieństwo zdarzenia A

K - liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A

N - liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych

Prawdopodobieństwo warunkowe

$P(C|O) = \dfrac{P(C \cap O)}{P(O)}$ - prawdopodobieństwo warunkowe, że pacje

jest chory na chorobę C, jeśli ma objawy O

$P(O|C) = \dfrac{P(O \cap C)}{P(C)}$ - prawdopodobieństwo warunkowe, że pacje

ma objawy O, jeśli jest chory na chorobę C

$P(C \cap O)$ - prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory na chorobę C i ma objawy O

$P(C)$ - prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory na chorobę C

$P(O)$ - prawdopodobieństwo występowania objawów

Wzór Bayesa

$$P(C|O) = \frac{P(C \cap O)}{P(O)}$$

$$P(O|C) = \frac{P(O \cap C)}{P(C)}$$

$$P(C|O) = \frac{P(O|C) * P(C)}{P(O)}$$

Tabela prawdopodobieństw warunkowych

Tabela opisująca prawdopodobieństwa warunkowe występowania chorób, gdy zaobserwowano odpowiedni objaw

	grypa C_1	**przeziębienie** C_2	**zapalenie płuc** C_3	**alergia** C_4
ból głowy O_1	$P(C_1\|O_1)$	$P(C_2\|O_1)$	$P(C_3\|O_1)$	$P(C_4\|O_1)$
kaszel O_2	$P(C_1\|O_2)$	$P(C_2\|O_2)$	$P(C_3\|O_2)$	$P(C_4\|O_2)$
katar O_3	$P(C_1\|O_3)$	$P(C_2\|O_3)$	$P(C_3\|O_3)$	$P(C_4\|O_3)$
podwyższona temperatura O_4	$P(C_1\|O_4)$	$P(C_2\|O_4)$	$P(C_3\|O_4)$	$P(C_4\|O_4)$

$$\sum_{i=1}^{n} P(O_i) = 1 \qquad \sum_{j=1}^{m} P(C_j|O_i) = 1 \qquad P(C_j) = \sum_{i=1}^{n} P(O_i) * P(C_j|O_i)$$

Uogólniony wzór Bayesa

Formuła Bayesa ma również postać ogólną dla wielu chorób i wielu objawów danej choroby.

$$P(C_j|O_{i1}\cap\ldots\cap O_{ik}) = \frac{P(C_j) * P(O_{i1}|C_j) * \ldots * P(O_{ik}|C_j)}{\sum_{l=1}^{n} P(C_l) * P(O_{i1}|C_l) * \ldots * P(O_{ik}|C_l)}$$

Porównanie

Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych (niepodzielnych i rozłącznych wyników obserwacji); $A \in 2^{\Omega} \Rightarrow A' \in 2^{\Omega}$ - komplementatywność; $A, B \in 2^{\Omega} \Rightarrow A \cup B \in 2^{\Omega}$ - addytywność	F - zbiór formuł elementarnych, takich, że $a \in F \Leftrightarrow b \notin F - \{\mathbf{0}, a\}$ czyli $b \wedge \neg a = \mathbf{0}$
$(2^{\Omega}, \cup, \cap, ', \Omega, \phi)$	$(F, \vee, \wedge, \neg, \mathbf{1}, \mathbf{0})$
$P(\phi) = 0 \qquad P(\Omega) = 1$	$P(\mathbf{0}) = 0 \qquad P(\mathbf{1}) = 1$
$A \cap A' = \phi \quad A \cup A' = \Omega$	$a \wedge \neg a = \mathbf{0} \quad a \vee \neg a = \mathbf{1}$
$\forall A, B \in 2^{\Omega} \quad A \cap B = \phi$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$\forall a, b \in F \quad a \wedge b = \mathbf{0}$ $P(a \vee b) = P(a) + P(b)$
$\forall A \in 2^{\Omega} \quad P(A) + P(A') = 1$	$\forall a \in F \quad P(a) + P(\neg a) = 1$
$A \subseteq B \qquad P(A) \leq P(B)$	$(a \Rightarrow b) = \mathbf{1} \qquad P(a) \leq P(b)$

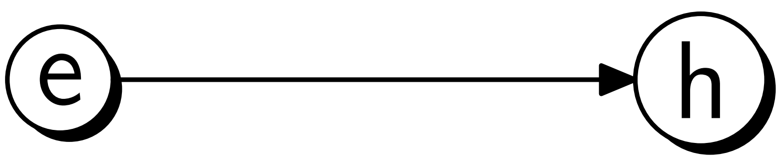
Model Bayesa

Reguła w modelu Bayesa

$$P(h|e) = \frac{P(e|h)P(h)}{P(e)}$$

jest odpowiednikiem zwykłej

$$e \Rightarrow h$$



Twierdzenie Bayesa

$$\exists\ H = \{h_1, \dots, h_n\}, \text{ gdzie}$$

$$\forall i \neq j \quad h_i \wedge h_j = \mathbf{0} \quad \bigcup_{i=1}^{n} h_i = \mathbf{1}, \quad P(h_i) > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\exists\ \{e_1, \dots, e_m\}, \text{ gdzie}$$

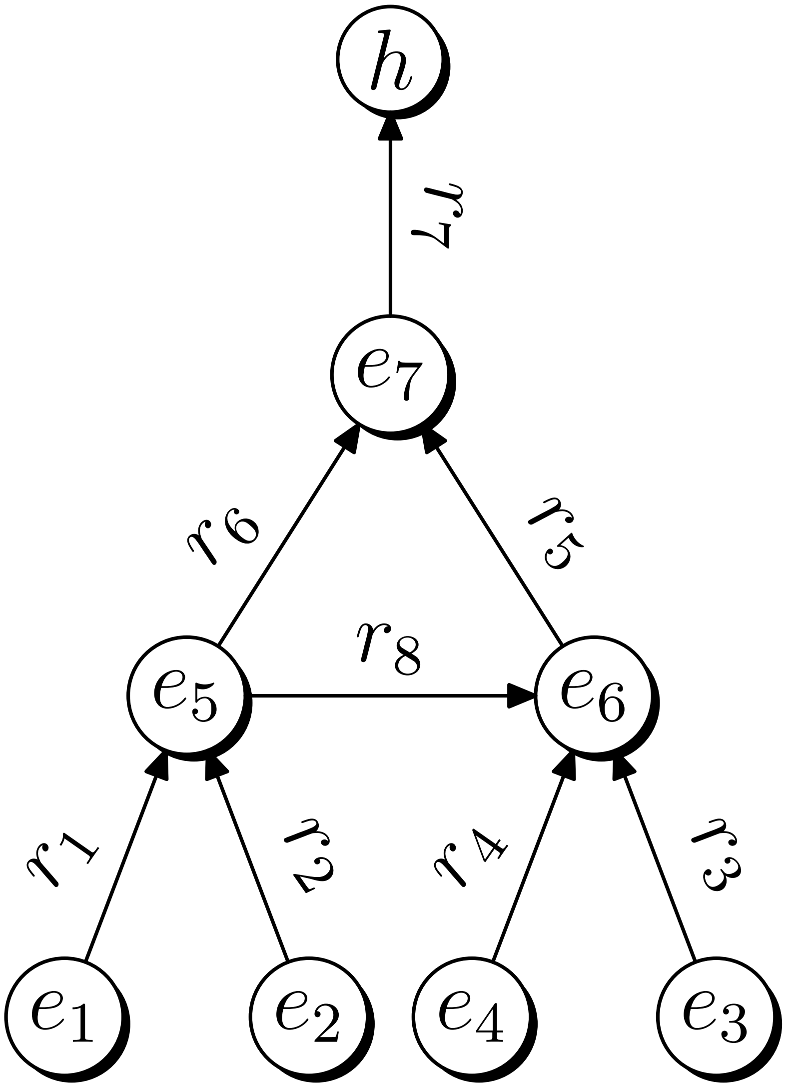
$$P(e_1, \dots, e_m | h_i) = \prod_{j=1}^{m} P(e_j | h_i),\ i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall e_j, h_i \quad e_j \text{ niezależny warunkowo od } h_i$$

$$P(h_i | e_1, \dots, e_m) = \frac{P(e_1, \dots, e_m | h_i) P(h_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(e_1, \dots, e_m | h_k) P(h_k)}$$

$$P(h_i | e_1, \dots, e_m) = \frac{\prod_{j=1}^{m} P(e_j | h_i)}{\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} P(e_j | h_k) P(h_k)} P(h_i)$$

Sieci (grafy) wnioskowania



Modyfikacje w PROSPECTORZE (1976)

Dodatkowe założenie:

$$P(e_1,\ldots,e_m|\neg h_i) = \prod_{j=1}^{m} P(e_j|\neg h_i),\ i = 1,\ldots,n$$

Reguła Bayesa ma postać $P(\neg h|e) = \dfrac{P(e|\neg h)P(\neg h)}{P(e)}$

lub

$$\frac{P(h|e)}{P(\neg h|e)} = \frac{P(e|h)}{P(e|\neg h)}\frac{P(h)}{P(\neg h)}$$

$O(h) = \dfrac{P(h)}{P(\neg h)}$ - szansa <u>a priori</u>

$O(h|e) = \dfrac{P(h|e)}{P(\neg h|e)}$ - szansa <u>a posteriori</u>

Współczynnik wiarygodności

$$\lambda = \frac{P(e|h)}{P(e|\neg h)} \Rightarrow O(h|e) = \lambda O(h)$$

W ogólnym przypadku:

$$O(h_i|e_1, \ldots, e_m) = O(h_i) \prod_{k=1}^{m} \lambda_{k_i},$$

$$\text{gdzie } \lambda_{k_i} = \frac{P(e_k|h_i)}{P(e_k|\neg h_i)}$$

$$\overline{\lambda} = \frac{P(\neg e|h)}{P(\neg e|\neg h)} \Rightarrow O(h|\neg e) = \overline{\lambda} O(h)$$

Współczynnki λ i $\overline{\lambda}$ są określane a priori. λ określa dostateczność obserwacji e (szczególnie dla $\lambda \gg 1$), a $\overline{\lambda}$ określa konieczność e (szczególnie dla $0 \leq \overline{\lambda} \leq 1$).

Wady podejścia bayesowskiego

- Założenia z reguły nie spełnione.
- Niewiedza ukryta jest zwykle w prawdopodobieństwach a priori.
- Przydzielanie prawdopodobieństw jedynie zdarzeniom elementarnym, a nie dowolnym ich alternatywom.
- Informacja konfliktowa nie jest wykrywana, ale przechodzi przez sieć wnioskowania.

Współczynniki niepewności w systemie MYCIN (19

$$CF(h,e) = MB(h,e) - MD(h,e),$$

gdzie CF jest współczynnikiem niepewności, $MB(h,e)$ jest miarą *wiarygodności* i reprezentuje stopień wzmocnienia hipotezy h przez obserwację e, $MD(h,e)$ jest miarą *niewiarygodności* i reprezentuje stopień osłabienia hipotezy h przez e.

Interpretacja probabilistyczna (1988)

$$CF(h,e) = \begin{cases} 1, & P(h) = 1, \\ MB(h,e), & P(h|e) > P(h), \\ 0, & P(h|e) = P(h), \\ -MD(h,e), & P(h|e) < P(h), \\ -1, & P(h) = 0, \end{cases}$$

$$MB(h,e) = \begin{cases} \frac{P(h|e)-P(h)}{1-P(h)}, & P(h|e) > P(h), \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$MD(h,e) = \begin{cases} \frac{P(h)-P(h|e)}{P(h)}, & P(h|e) < P(h), \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

gdzie $P(h)$ jest prawdopodobieństwem a priori hipotezy h, $P(h|e)$ - a posteriori

Interpretacja przyrostowa prawdopodobieństwa

$$P(h|e) = \begin{cases} P(h) + CF(h,e)[1 - P(h)], & CF(h,e) > 0, \\ P(h) - |CF(h,e)|P(h), & CF(h,e) < 0, \end{cases}$$

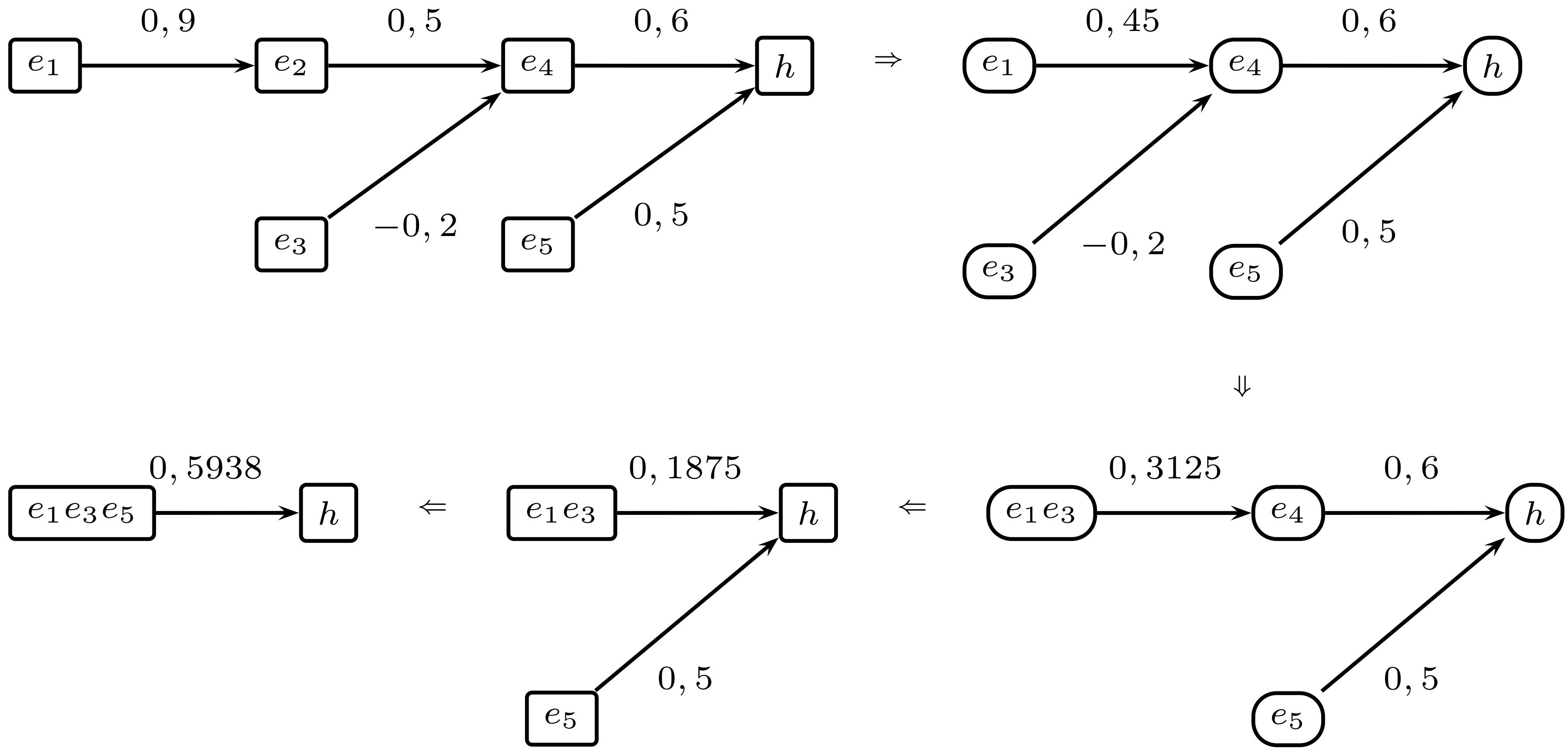
Funkcje połączenia informacji

$$CF(h, e_1, e_2) =$$

$$= \begin{cases} CF(h,e_1) + CF(h,e_2) - CF(h,e_1)CF(h,e_2), & \begin{array}{l} CF(h,e_1) \geq 0, \\ CF(h,e_2) \geq 0, \end{array} \\ \dfrac{CF(h,e_1) + CF(h,e_2)}{1 - min(|CF(h,e_1)|, |CF(h,e_2)|)}, & CF(h,e_1)CF(h,e_2) < 0, \\ CF(h,e_1) + CF(h,e_2) + CF(h,e_1)CF(h,e_2), & \begin{array}{l} CF(h,e_1) < 0, \\ CF(h,e_2) < 0, \end{array} \end{cases}$$

$$CF(h, e_1) = \begin{cases} CF(e_2, e_1)CF(h, e_2), & CF(e_2, e_1) \geq 0, \\ -CF(e_2, e_1)CF(h, \neg e_2), & CF(e_2, e_1) < 0, \end{cases}$$

Redukowanie drzewa reguł z CF



Modyfikacje współczynnika CF

$$CF(h,e) = \frac{MB(h,e) - MD(h,e)}{1 - min[MB(h,e), MD(h,e)]} \text{ (1984)}$$

Aksjomaty Heckermana (1988) są spełnione np. przez funkcję: $CF(h,e) = F(\lambda)$, gdzie F jest monotonicznie rosnącą funkcją, spełniającą: $F(\frac{1}{x}) = -F(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Sam Heckerman zaproponował funkcję:

$$F(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$CF(h,e) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} =$$
$$\frac{P(h|e) - P(h)}{P(h)(1 - P(h|e)) + P(h|e)(1 - P(h))}$$

Funkcje Heckermana łączące informację

$$CF(h, e_1, e_2) = \frac{CF(h, e_1) + CF(h, e_2)}{1 + CF(h, e_1)CF(h, e_2)},$$

$$CF(h, e_1) =$$

$$= \frac{-2CF(h, e_2)CF(h, \neg e_2)CF(e_2, e_1)}{[CF(h, e_2) - CF(h, \neg e_2)] - CF(e_2, e_1)[CF(h, e_2) + CF(h, \neg e_2)]}$$

Aksjomaty Prade (1988)

Przy braku pełnej specyfikacji modelu probabilistycznego niektóre metody wykraczają poza ten model opierając się na tzw. miarach *monotonicznych* , tzn. funkcjach przekształcających F w odcinek $[0, 1]$ i spełniających *aksjomaty Prade* , które określają dużą rodzinę funkcji, w tym miarę prawdopodobieństwa:

$$g((0)) = 0,$$
$$g((1)) = 1,$$
$$(a \Rightarrow b) = (1) \Rightarrow g(a) \leq g(b),$$

Bezpośrednio z nich wynika, że

$$g(a \vee b) \geq max(g(a), g(b)),$$
$$g(a \wedge b) \leq min(g(a), g(b)).$$

Teoria Dempstera-Shafera

Istnieje zbiór *elementów ogniskowych* (ang. focal elements) $T \subseteq F$ reprezentujących formuły, o których posiadamy jakieś informacje. Elementy z T nie muszą być zdaniami elementarnymi oraz wzajemnie się wykluczającymi. Dostępne informacje o T są zapisywane w postaci rozkładu bazowego prawdopodobieństwa (ang. *basic probability assignment*), który prezentuje częściowe przekonania:

$$m(\mathbf{0}) = 0,$$
$$\sum_{a \in T} m(a) = 1,$$

dla wszystkich pozostałych $a \in F \quad m(a) = 0$, a ignorancja to $m(\mathbf{1})$ np. $m(\mathbf{1}) = 1$ oznacza *wiem, że nic nie wiem*. Przy braku dodatkowej informacji o formule nie wymaga się rozkładu stopni pewności na jej elementarne formuły.

Funkcja przekonania:

$$Bel(a) = \sum_{(b \Rightarrow a) = \mathbf{1}} m(b)$$

Funkcja dualna:

$$Pl(a) = \sum_{(b \Rightarrow \neg a) = \mathbf{0}} m(b)$$

Miary Bel i Pl są nazywane przekonaniem i wyobrażalnością (ang. *belief, plausibility*).

Przykład z formułami

$F = \{a, b, c, a \vee b, a \vee c, b \vee c, a \vee b \vee c\}$

$T = F - \{a \vee c\}$

$\sum m = 1$

$a \Rightarrow a \vee b = 1$

$a \in \{a \vee b\}$

$a \Rightarrow \neg a = 0$

$m(a) = 0,2$

$m(b) = 0,1$

$m(c) = 0,1$

$m(a \vee b) = 0,2$

$m(b \vee c) = 0,3$

$m(a \vee b \vee c) = 0,1$

$\mathrm{Bel}(a) = 0,2$

$\mathrm{Bel}(b) = 0,1$

$\mathrm{Bel}(c) = 0,1$

$\mathrm{Bel}(a \vee b) = 0,5$

$\mathrm{Bel}(b \vee c) = 0,5$

$\mathrm{Bel}(a \vee b \vee c) = 1$

$\mathrm{Bel}(a \vee b) = m(a) + m(b) + m(a \vee b) = 0,2 + 0,1 + 0,2 = 0,5$

$\mathrm{Bel}(b \vee c) = m(b) + m(c) + m(b \vee c) = 0,1 + 0,1 + 0,3 = 0,5$

$\mathrm{Bel}(a \vee c) = m(a) + m(c) = 0,2 + 0,1 = 0,3$ - nie ma informacji, ale jest Bel

$\mathrm{Pl}(a) = 1 - \mathrm{Bel}(b, c, b \vee c) = m(b) + m(a \vee b) + m(a \vee b \vee c) = 0,2 + 0,2 + 0,1 = 0,5$

$\mathrm{Pl}(b) = m(b) + m(a \vee b) + m(b \vee c) + m(a \vee b \vee c) = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,7$

$\mathrm{Pl}(c) = m(c) + m(b \vee c) + m(a \vee b \vee c) = 0,5$

$\mathrm{Pl}(a \vee b) = m(a) + m(b) + m(a \vee b) + m(b \vee c) + m(a \vee b \vee c) = 0,9$

$\mathrm{Pl}(a \vee c) = m(a) + m(c) + m(a \vee b) + m(b \vee c) + m(a \vee b \vee c) = 0,9$

Teoria Dempstera-Shafera

$$
\begin{aligned}
&\forall a, b \in F: \\
&Pl(a) = 1 - Bel(\neg a), \\
&Bel(a) + Bel(\neg a) \leq 1, \\
&Pl(a) + Pl(\neg a) \geq 1, \\
&Bel(a) \leq Pl(a), \\
&Bel(a \vee b) \geq Bel(a) + Bel(b) - Bel(a \wedge b), \\
&Pl(a \wedge b) \leq Pl(a) + Pl(b) - Pl(a \vee b).
\end{aligned}
$$

Pewność danej formuły $a \in F$ może być zatem reprezentowana przez odcinek:

$$[Bel(a), Pl(a)]$$

Podejście teoriomnogościowe

$$m(\phi) = 0,$$

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1,$$

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B),$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \phi} m(B),$$

$$\forall C \neq 0 \quad m(C) = \frac{\sum\limits_{A \cap B = C} m_1(A) m_2(B)}{\sum\limits_{A \cap B \neq \phi} m_1(A) m_2(B)}.$$

$$Con(m_1, m_2) = log \frac{1}{\sum\limits_{A \cap B \neq \phi} m_1(A) m_2(B)}.$$

Przykład z teorii zbiorów 1/2

$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$m(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0,5$

$m(\{x_1, x_2\}) = 0,25$

$m(\{x_2, x_4\}) = 0,25$

dla pozostałych $A \in \Omega \quad m(A) = 0$

Bel$(\{x_1, x_2\}) = 0,25$

Bel$(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0,75$

Bel$(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = 1$

Bel$(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 1$

Bel$(\{x_1, x_2, x_3, x_5\}) = 0,75$

Bel$(\{x_1, x_2, x_4\}) = 0,5$

Bel$(\{x_1, x_2, x_4, x_5\}) = 0,5$

Bel$(\{x_1, x_2, x_5\}) = 0,25$

Bel$(\{x_2, x_3, x_4\}) = 0,25$

Bel$(\{x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 0,25$

Bel$(\{x_2, x_4\}) = 0,25$

Bel$(\{x_1, x_4, x_5\}) = 0,25$

Bel$(\{x_1, x_2\}) = m(\{x_1, x_2\}) = 0,25$

Bel$(\{x_1, x_2, x_3\}) = m(\{x_1, x_2\}) + m(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0,25 + 0,5 = 0,75$

Bel$(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = m(\{x_1, x_2\}) + m(\{x_1, x_2, x_3\}) + m(\{x_2, x_4\}) = 1$

Bel$(\{x_1, x_2, x_4\}) = m(\{x_1, x_2\}) + m(\{x_2, x_4\}) = 0,25 + 0,25 = 0,5$

Przykład z teorii zbiorów 2/2

$\mathsf{Pl}(\{x_1\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 1 - 0,25 = 0,75$

$\mathsf{Pl}(\{x_1, x_3\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_2, x_4, x_5\}) = 1 - 0,25 = 0,75$

$\mathsf{Pl}(\{x_1, x_3, x_5\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_2, x_4\}) = 1 - 0,25 = 0,75$

$\mathsf{Pl}(\{x_1, x_5\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_2, x_3, x_4\}) = 1 - 0,25 = 0,75$

$\mathsf{Pl}(\{x_3\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_1, x_2, x_4, x_5\}) = 1 - 0,5 = 0,5$

$\mathsf{Pl}(\{x_3, x_4\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_1, x_2, x_5\}) = 1 - 0,25 = 0,75$

$\mathsf{Pl}(\{x_3, x_4, x_5\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_1, x_2\}) = 1 - 0,25 = 0,75$

$\mathsf{Pl}(\{x_3, x_5\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_1, x_2, x_4\}) = 1 - 0,5 = 0,5$

$\mathsf{Pl}(\{x_4\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_1, x_2, x_3, x_5\}) = 1 - 0,75 = 0,25$

$\mathsf{Pl}(\{x_4, x_5\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_1, x_2, x_3\}) = 1 - 0,75 = 0,25$

$\mathsf{Pl}(\{x_5\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = 1 - 1 = 0$

$\mathsf{Pl}(\{x_1, x_2\}) = 1 - \mathsf{Bel}(\{x_3, x_4, x_5\}) = 1 - 0 = 1$

$\mathsf{Pl}(A) = 1$ dla pozostałych

Rdzeń (ang. core) to $\Omega - \{x_5\}$

Połączenie dwóch rozkładów

$$\forall a \in F, a \neq \mathbf{0} \quad m(a) = \frac{\sum\limits_{b \wedge c = a} m_1(b) m_2(c)}{\sum\limits_{b \wedge c \neq \mathbf{0}} m_1(b) m_2(c)}$$

Przykład nr 1A

$$F = \{a, b, c\}$$

$$m_1(a) = 0 \quad m_2(a) = 0,9 \quad m(a) = 0$$

$$m_1(b) = 0,1 \quad m_2(b) = 0,1 \quad m(b) = 1$$

$$m_1(c) = 0,9 \quad m_2(c) = 0 \quad m(c) = 0$$

$$Con(m_1, m_2) = log(100)$$

Przykład bardziej zrównoważonego rozkładu

$$m_1(a) = m_2(a) = 0,3 \quad m(a) \approx 0.26$$

$$m_1(b) = m_2(b) = 0,3 \quad m(b) \approx 0.26$$

$$m_1(c) = m_2(c) = 0,4 \quad m(c) \approx 0.47$$

$$Con(m_1, m_2) = log(3)$$

Przykład nr 1B

$$F = \{a, b, c, e\}$$

$$m_1(a, e) = 0 \quad m_2(a, e) = 0,9 \quad m(a) = 0,01$$

$$m_1(b, e) = 0,1 \quad m_2(b, e) = 0,1 \quad m(b) = 0$$

$$m_1(c, e) = 0,9 \quad m_2(c, e) = 0 \quad m(c) = 0$$

$$m(e) = 0.99$$

Teoria Dempstera-Shafera

Łączenie opisów niepewności o niezależnych od siebie obserwacjach

$$\forall C \neq \phi \quad m(C) = \frac{\sum\limits_{A \cap B = C} m_1(A) m_2(B)}{\sum\limits_{A \cap B \neq \phi} m_1(A) m_2(B)} =$$

$$\frac{\sum\limits_{A \cap B = C} m_1(A) m_2(B)}{1 - \sum\limits_{A \cap B = \phi} m_1(A) m_2(B)}$$

$\{x_2\}$ $\frac{3}{8}$	$\{x_2\}$ $\frac{3}{32}$	$\{x_2\}$ $\frac{3}{16}$	$\{x_2\}$ $\frac{3}{32}$
$\{x_1, x_2, x_4\}$ $\frac{3}{8}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{3}{32}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{3}{16}$	$\{x_2, x_4\}$ $\frac{3}{32}$
$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{16}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{1}{8}$	$\{x_2\}$ $\frac{1}{16}$
0	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{1}{2}$	$\{x_2, x_4\}$ $\frac{1}{4}$

$$m(\{x_1, x_2\}) = (m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_2\}) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{32}$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_2, x_3\}) = \frac{1}{8}$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_2\}) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_2, x_4\}) = \frac{3}{32}$$

Sumowanie ortogonalne z zerowymi wynikami

$\{x_4, x_5\}$ $\frac{3}{8}$	ϕ $\frac{3}{32}$	ϕ $\frac{3}{16}$	$\{x_4\}$ $\frac{3}{32}$
$\{x_1, x_3\}$ $\frac{3}{8}$	$\{x_1\}$ $\frac{3}{32}$	$\{x_1, x_3\}$ $\frac{3}{16}$	ϕ $\frac{3}{32}$
$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{16}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{8}$	$\{x_2\}$ $\frac{1}{16}$
0	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{1}{2}$	$\{x_2, x_4\}$ $\frac{1}{4}$

$$\sum_{A \cap B = \phi} m_1(A) m_2(B) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} = \frac{3}{8};$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_2\}) = \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{10}{16}} = 0.3;$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_1\}) = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{5}{8}} = 0.15; \; (m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_3\}) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{8}} = 0.3;$$

$$m(\{x_2\}) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{8}} = 0.1; \; m(\{x_4\}) = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{5}{8}} = 0.15;$$