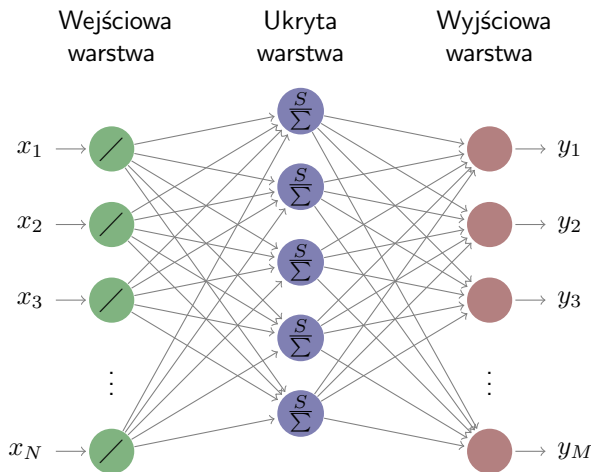


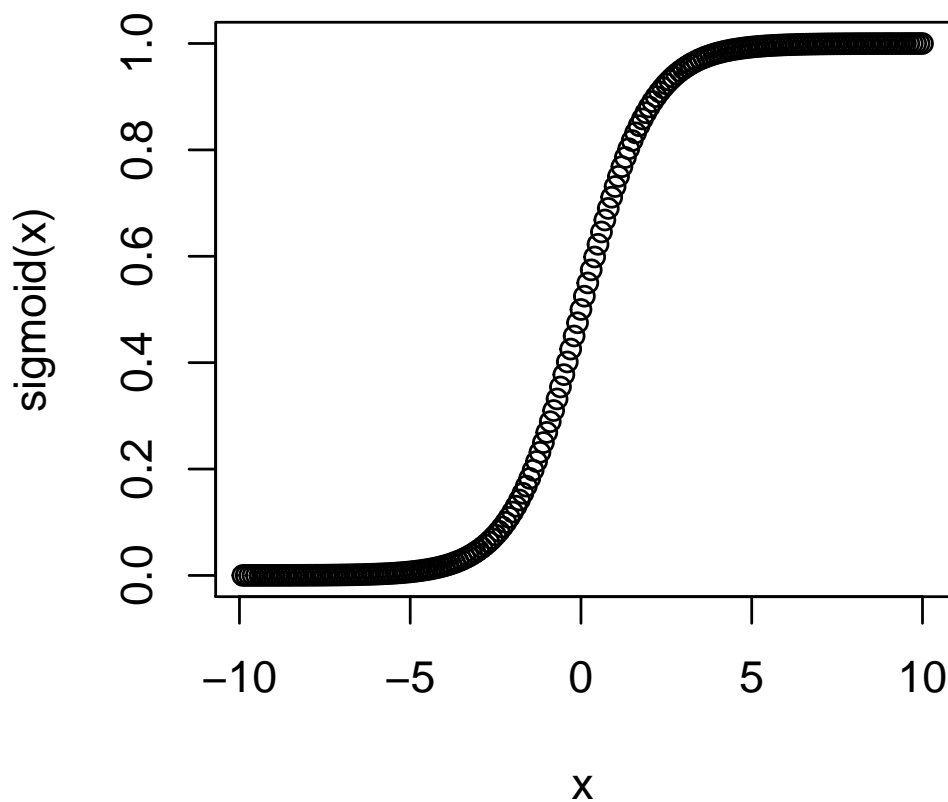
Wsteczna propagacja błędów

Informacje: Propagacja wsteczna – podstawowy algorytm uczenia nadzorowanego wielowarstwowych, jednokierunkowych sieci neuronowych. Podaje on przepis na zmianę wag dowolnych połączeń elementów przetwarzających rozmieszczonych w sąsiednich warstwach sieci. Oparty jest on na minimalizacji sumy kwadratów błędów (lub innej funkcji błędu) uczenia z wykorzystaniem optymalizacyjnej metody największego spadku. Dzięki zastosowaniu specyficznego sposobu propagowania błędów uczenia sieci powstałych na jej wyjściu, tj. przesyłania ich od warstwy wyjściowej do wejściowej, algorytm propagacji wstecznej stał się jednym z najskuteczniejszych algorytmów uczenia sieci https://pl.wikipedia.org/wiki/Propagacja_wsteczna.

Topologia sieci:



```
> #funkcja progowa sigmoidalna
> sigmoid <- function(x) {
+   1.0 / (1.0 + exp(-x))
+ }
> #generuje x od -100 do 100 i dzieli przez 10, aby mieć od -10 do 10 z gęstszym upakowaniem
> x <- (c(1:200)-100)/10
> plot(x,sigmoid(x))
```



Funkcja błędu aproksymacji:

$$F = \sum_{p \in P} {}^p E, \text{ gdzie } p \text{ jest elementem w zbiorze trenującym } P$$

$${}^p E = \frac{1}{2} \sum_{j \in M} (\hat{y}_m - y_m)^2, \text{ gdzie } \hat{y}_m \text{ trenuje } m \text{ wyjście } y_m$$

Funkcje wag - współczynników połączeń między neuronami:

$${}^p \Delta w_{hm} \sim -\nabla_w \cdot {}^p E, \text{ gdzie } w_{hm} \text{ jest wagą połączenia z neuronu } h \text{ do neuronu } m$$

$$\Delta w_{hm} = -\eta \frac{\partial E(w_{hm})}{\partial w_{hm}}, \text{ gdzie } \eta \text{ jest współczynnikiem uczenia się}$$

Dla wyjściowych neuronów z ostatniej warstwy:

$$net_m = \sum_{i=0}^H w_{im} \tilde{o}_i$$

$$o_m = y_m = f_m(net_m)$$

$$\frac{\partial E(w_{hm})}{\partial w_{hm}} = \frac{\partial E}{\partial net_m} \cdot \frac{\partial net_m}{\partial w_{hm}}$$

$$\frac{\partial net_m}{\partial w_{hm}} = \frac{\partial}{\partial w_{hm}} \cdot net_m = \frac{\partial}{\partial w_{hm}} \sum_{i=0}^H w_{im} \tilde{o}_i = \sum_{i=0}^H \frac{\partial}{\partial w_{hm}} w_{im} \tilde{o}_i = \frac{\partial}{\partial w_{hm}} \tilde{o}_h w_{hm} = \boxed{\tilde{o}_h}$$

$$\frac{\partial E}{\partial net_m} = \frac{\partial E}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial net_m} (= -\delta_m) = \frac{\partial E}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial}{\partial net_m} f_m(net_m) = \frac{\partial E}{\partial y_m} \cdot \underbrace{f'_m(net_m)}_{=:-\delta_m}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_m} = \frac{\partial}{\partial y_m} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M (\hat{y}_j - y_j)^2 = \boxed{-(\hat{y}_m - y_m)}$$

$$\Delta w_{hm} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{hm}} = -\eta \frac{\partial E}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial net_m} \frac{\partial net_m}{\partial w_{hm}} = \eta (\hat{y}_m - y_m) f'_m(net_m) \tilde{o}_h$$

$$\delta_m = (\hat{y}_m - y_m) \cdot f'_m(net_m)$$

$$\Delta w_{hm} = \eta \cdot \delta_m \cdot \tilde{o}_h \quad \text{Widrow-Hoff reguła / } \delta\text{-reguła}$$

DLa neuronów z ukrytych warstw między wejściem, a wyjściem:

$$net_h = \sum_{i=0}^H w_{ih} \tilde{o}_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{kh}} = \frac{\partial E}{\partial net_h} \cdot \frac{\partial net_h}{\partial w_{kh}}$$

$$\delta_h = -\frac{\partial E}{\partial net_h} = -\frac{\partial E}{\partial o_h} \cdot \frac{\partial o_h}{\partial net_h}$$

$$-\frac{\partial E}{\partial o_h} = -\frac{\partial E(\underline{net}_{l=1}, \underline{net}_{l=2}, \dots, \underline{net}_{l=L})}{\partial o_h} = \sum_{l=1}^L \left(-\frac{\partial E}{\partial \underline{net}_l} \right) \cdot \frac{\partial \underline{net}_l}{\partial o_h} = \sum_{l=1}^L \underline{\delta}_l \cdot \frac{\partial}{\partial o_h} \sum_{j=0}^H w_{jl} \cdot o_j = \sum_{l=1}^L \underline{\delta}_l \cdot \underline{w}_{hl}$$

$$\delta_h = \sum_{l=1}^L (\underline{\delta}_l \cdot \underline{w}_{hl}) \cdot f'(net_h)$$

$$\Delta w_{kh} = \eta \cdot \delta_h \cdot \tilde{o}_k$$

