

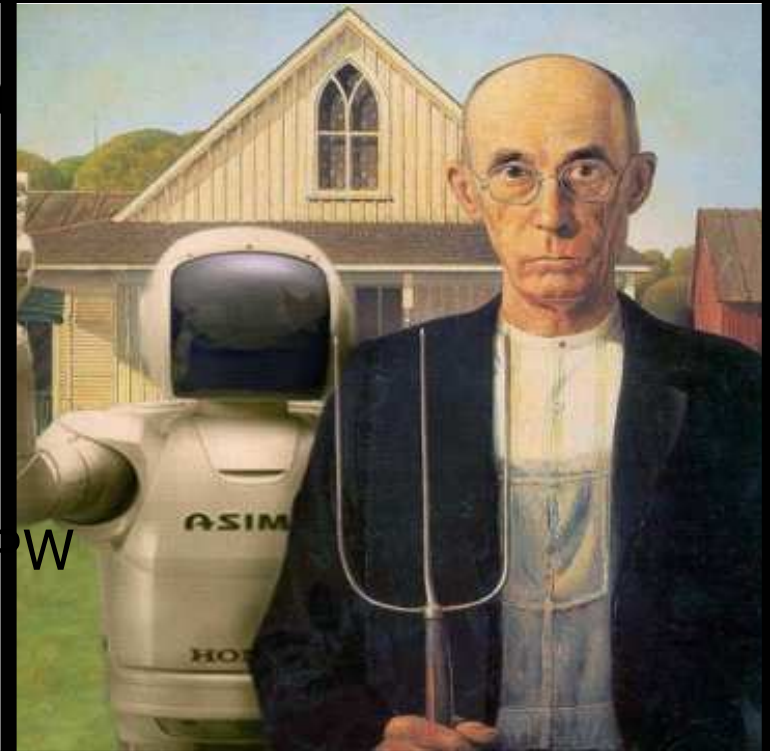
Sztuczna Inteligencja

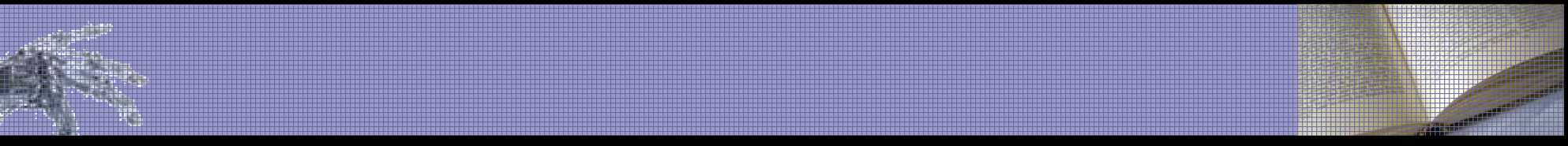
Wykład 2

Piotr Wąsiewicz

Zakład Sztucznej Inteligencji - ISE PW

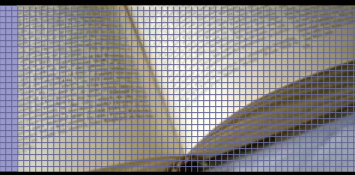
pwasiewi@elka.pw.edu.pl





Techniki zapisu wiedzy niepewnej





$$P(A) = K/N$$

$P(A)$ - prawdopodobieństwo zdarzenia A

K - liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających
zdarzeniu A

N - liczba wszystkich możliwych zdarzeń
elementarnych



$$P(C|O) = \frac{P(C \cap O)}{P(O)} \quad - \text{prawdopodobieństwo warunkowe, że pacje}$$

jest chory na chorobę C , jeśli ma objawy O

$$P(O|C) = \frac{P(O \cap C)}{P(C)} \quad - \text{prawdopodobieństwo warunkowe, że pacje}$$

ma objawy O , jeśli jest chory na chorobę C

$P(C \cap O)$ - prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory na chorobę C i ma objawy O

$P(C)$ - prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory na chorobę C

$P(O)$ - prawdopodobieństwo występowania objawów

$$P(C|O) = \frac{P(C \cap O)}{P(O)}$$

$$P(O|C) = \frac{P(O \cap C)}{P(C)}$$

$$P(C|O) = \frac{P(O|C) * P(C)}{P(O)}$$



Tabela prawdopodobieństw warunkowych

Tabela opisująca prawdopodobieństwa warunkowe
występowania chorób, gdy zaobserwowano odpowiedni
objaw

	grypa C_1	przeziębienie C_2	zapalenie płuc C_3	alergia C_4
ból głowy O_1	$P(C_1 O_1)$	$P(C_2 O_1)$	$P(C_3 O_1)$	$P(C_4 O_1)$
kaszel O_2	$P(C_1 O_2)$	$P(C_2 O_2)$	$P(C_3 O_2)$	$P(C_4 O_2)$
katar O_3	$P(C_1 O_3)$	$P(C_2 O_3)$	$P(C_3 O_3)$	$P(C_4 O_3)$
podwyższona temperatura O_4	$P(C_1 O_4)$	$P(C_2 O_4)$	$P(C_3 O_4)$	$P(C_4 O_4)$

$$\sum_{i=1}^n P(O_i) = 1$$

$$\sum_{j=1}^m P(C_j|O_i) = 1$$

$$P(C_j) = \sum_{i=1}^n P(O_i) * P(C_j|O_i)$$

Uogólniony wzór Bayesa

Formuła Bayesa ma również postać ogólną dla wielu chorób i wielu objawów danej choroby.

$$P(C_j|O_{i1}\cap...\cap O_{ik}) = \frac{P(C_j) * P(O_{i1}|C_j) * \dots * P(O_{ik}|C_j)}{\sum_{l=1}^n P(C_l) * P(O_{i1}|C_l) * \dots * P(O_{ik}|C_l)}$$



Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych (niepodzielnych i rozłącznych wyników obserwacji); $A \in 2^\Omega \Rightarrow A' \in 2^\Omega$ - komplementatywność; $A, B \in 2^\Omega \Rightarrow A \cup B \in 2^\Omega$ - addytywność

F - zbiór formuł elementarnych, takich, że $a \in F \Leftrightarrow b \notin F - \{0, a\}$ czyli $b \wedge \neg a = 0$

$$(2^\Omega, \cup, \cap, ', \Omega, \phi)$$

$$(F, \vee, \wedge, \neg, \mathbf{1}, \mathbf{0})$$

$$P(\phi) = 0 \quad P(\Omega) = 1$$

$$P(\mathbf{0}) = 0 \quad P(\mathbf{1}) = 1$$

$$A \cap A' = \phi \quad A \cup A' = \Omega$$

$$a \wedge \neg a = \mathbf{0} \quad a \vee \neg a = \mathbf{1}$$

$$\forall A, B \in 2^\Omega \quad A \cap B = \phi$$

$$\forall a, b \in F \quad a \wedge b = \mathbf{0}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b)$$

$$\forall A \in 2^\Omega \quad P(A) + P(A') = 1$$

$$\forall a \in F \quad P(a) + P(\neg a) = 1$$

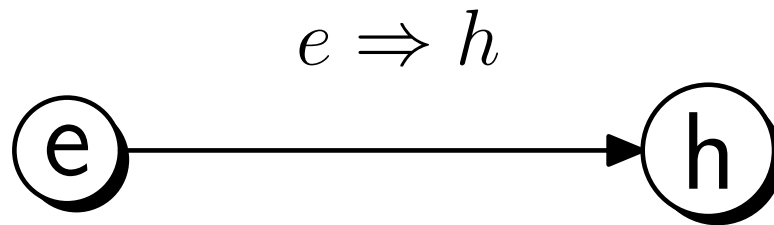
$$A \subseteq B \quad P(A) \leq P(B)$$

$$(a \Rightarrow b) = \mathbf{1} \quad P(a) \leq P(b)$$

Reguła w modelu Bayesa

$$P(h|e) = \frac{P(e|h)P(h)}{P(e)}$$

jest odpowiednikiem zwykłej



Twierdzenie Bayesa

$\exists H = \{h_1, \dots, h_n\}$, gdzie

$$\forall i \neq j \quad h_i \wedge h_j = \mathbf{0} \quad \bigcup_{i=1}^n h_i = \mathbf{1}, \quad P(h_i) > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$\exists \{e_1, \dots, e_m\}$, gdzie

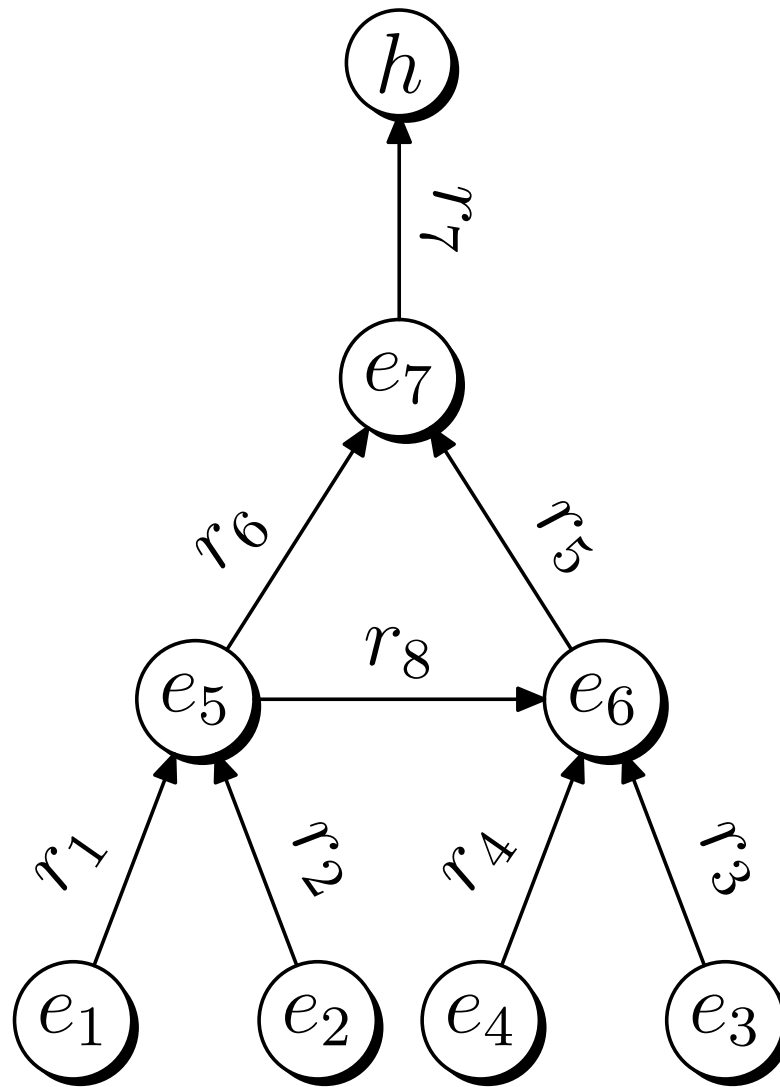
$$P(e_1, \dots, e_m | h_i) = \prod_{j=1}^m P(e_j | h_i), \quad i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \forall e_j, h_i \quad e_j$ niezależny warunkowo od h_i

$$P(h_i | e_1, \dots, e_m) = \frac{P(e_1, \dots, e_m | h_i) P(h_i)}{\sum_{k=1}^n P(e_1, \dots, e_m | h_k) P(h_k)}$$

$$P(h_i | e_1, \dots, e_m) = \frac{\prod_{j=1}^m P(e_j | h_i)}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^m P(e_j | h_k)} P(h_i)$$

Sieci (grafy) wnioskowania



Modyfikacje w PROSPECTORZE (1976)

Dodatkowe założenie:

$$P(e_1, \dots, e_m | \neg h_i) = \prod_{j=1}^m P(e_j | \neg h_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Reguła Bayesa ma postać $P(\neg h | e) = \frac{P(e | \neg h) P(\neg h)}{P(e)}$

lub

$$\frac{P(h | e)}{P(\neg h | e)} = \frac{P(e | h)}{P(e | \neg h)} \frac{P(h)}{P(\neg h)}$$

$$O(h) = \frac{P(h)}{P(\neg h)} - \text{szansa } \underline{\text{a priori}}$$

$$O(h | e) = \frac{P(h | e)}{P(\neg h | e)} - \text{szansa } \underline{\text{a posteriori}}$$

Współczynnik wiarygodności

$$\lambda = \frac{P(e | h)}{P(e | \neg h)} \Rightarrow O(h | e) = \lambda O(h)$$

W ogólnym przypadku:

$$O(h_i|e_1, \dots, e_m) = O(h_i) \prod_{k=1}^m \lambda_{k_i},$$

$$\text{gdzie } \lambda_{k_i} = \frac{P(e_k|h_i)}{P(e_k|\neg h_i)}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{P(\neg e|h)}{P(\neg e|\neg h)} \Rightarrow O(h|\neg e) = \bar{\lambda}O(h)$$

Współczynniki λ i $\bar{\lambda}$ są określane a priori. λ określa dostateczność obserwacji e (szczególnie dla $\lambda \gg 1$), a $\bar{\lambda}$ określa konieczność e (szczególnie dla $0 \leq \bar{\lambda} \leq 1$).

Wady podejścia bayesowskiego

- Założenia z reguły nie spełnione.
- Niewiedza ukryta jest zwykle w prawdopodobieństwach a priori.
- Przydzielanie prawdopodobieństw jedynie zdarzeniom elementarnym, a nie dowolnym ich alternatywom.
- Informacja konfliktowa nie jest wykrywana, ale przechodzi przez sieć wnioskowania.



$$CF(h, e) = MB(h, e) - MD(h, e),$$

gdzie CF jest współczynnikiem niepewności, $MB(h, e)$ jest miarą *wiarygodności* i reprezentuje stopień wzmocnienia hipotezy h przez obserwację e , $MD(h, e)$ jest miarą *niewiarygodności* i reprezentuje stopień osłabienia hipotezy h przez e .



$$CF(h, e) = \begin{cases} 1, & P(h) = 1, \\ MB(h, e), & P(h|e) > P(h), \\ 0, & P(h|e) = P(h), \\ -MD(h, e), & P(h|e) < P(h), \\ -1, & P(h) = 0, \end{cases}$$

$$MB(h, e) = \begin{cases} \frac{P(h|e) - P(h)}{1 - P(h)}, & P(h|e) > P(h), \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$MD(h, e) = \begin{cases} \frac{P(h) - P(h|e)}{P(h)}, & P(h|e) < P(h), \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $P(h)$ jest prawdopodobieństwem a priori hipotezy h , $P(h|e)$ - a posteriori

$$P(h|e) = \begin{cases} P(h) + CF(h, e)[1 - P(h)], & CF(h, e) > 0, \\ P(h) - |CF(h, e)|P(h), & CF(h, e) < 0, \end{cases}$$



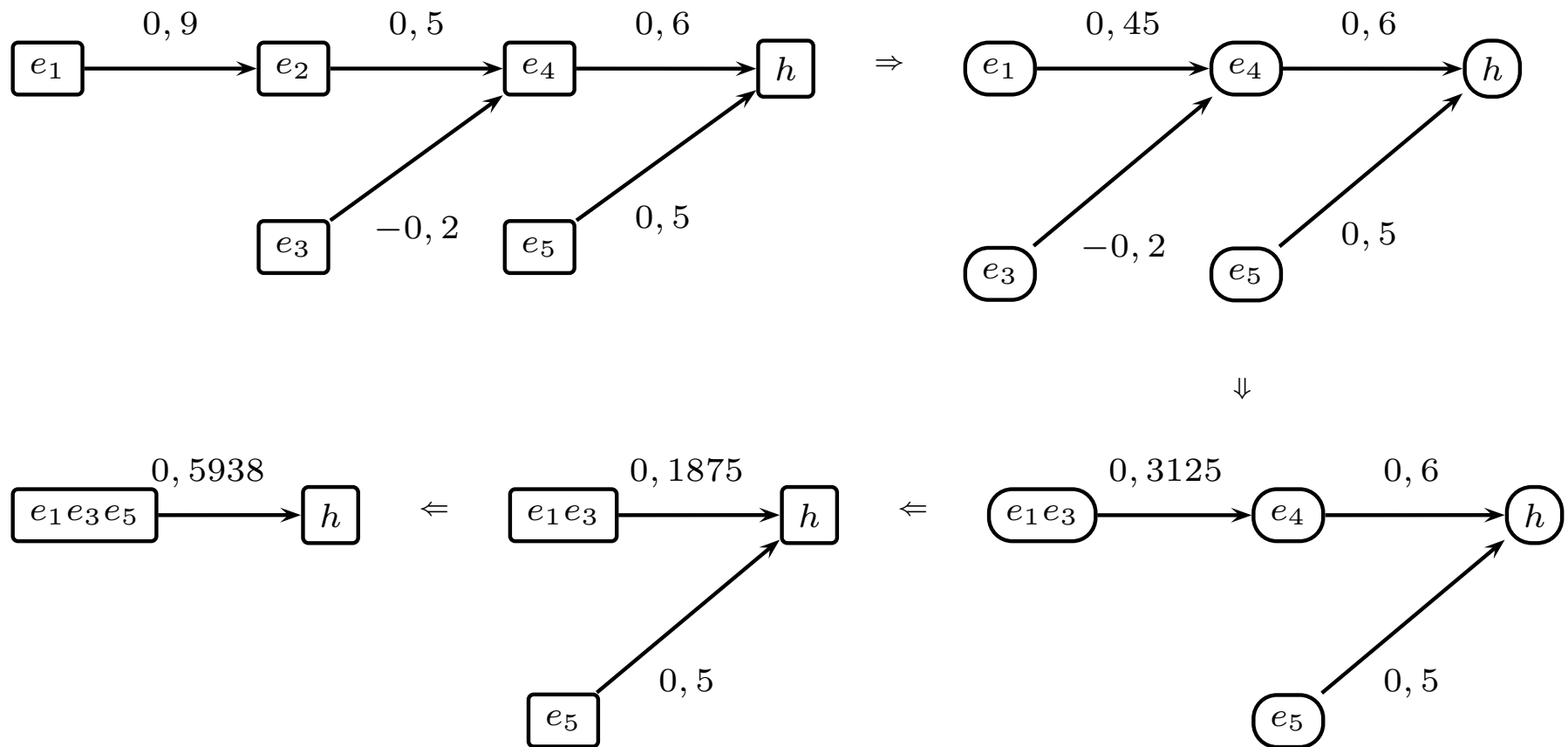
$$CF(h, e_1, e_2) =$$

$$= \begin{cases} CF(h, e_1) + CF(h, e_2) - CF(h, e_1)CF(h, e_2), & CF(h, e_1) \geq 0, \\ & CF(h, e_2) \geq 0, \\ \frac{CF(h, e_1) + CF(h, e_2)}{1 - \min(|CF(h, e_1)|, |CF(h, e_2)|)}, & CF(h, e_1)CF(h, e_2) < 0, \\ CF(h, e_1) + CF(h, e_2) + CF(h, e_1)CF(h, e_2), & CF(h, e_1) < 0, \\ & CF(h, e_2) < 0, \end{cases}$$

$$CF(h, e_1) = \begin{cases} CF(e_2, e_1)CF(h, e_2), & CF(e_2, e_1) \geq 0, \\ -CF(e_2, e_1)CF(h, \neg e_2), & CF(e_2, e_1) < 0, \end{cases}$$



Redukowanie drzewa reguł z CF



$$CF(h, e) = \frac{MB(h, e) - MD(h, e)}{1 - \min[MB(h, e), MD(h, e)]} \quad (1984)$$

Aksjomaty Heckermana (1988) są spełnione np. przez funkcję: $CF(h, e) = F(\lambda)$, gdzie F jest monotonicznie rosnącą funkcją, spełniającą: $F(\frac{1}{x}) = -F(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Sam Heckerman zaproponował funkcję:

$$F(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$CF(h, e) = \frac{\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \frac{P(h|e) - P(h)}{P(h)(1 - P(h|e)) + P(h|e)(1 - P(h))}$$

$$CF(h, e_1, e_2) = \frac{CF(h, e_1) + CF(h, e_2)}{1 + CF(h, e_1)CF(h, e_2)},$$

$$CF(h, e_1) =$$

=

$$\frac{-2CF(h, e_2)CF(h, \neg e_2)CF(e_2, e_1)}{[CF(h, e_2) - CF(h, \neg e_2)] - CF(e_2, e_1)[CF(h, e_2) + CF(h, \neg e_2)]}$$



Aksjomaty Prade (1988)

Przy braku pełnej specyfikacji modelu probabilistycznego niektóre metody wykraczają poza ten model opierając się na tzw. miarach *monotonicznych*, tzn. funkcjach przekształcających F w odcinek $[0, 1]$ i spełniających *aksjomaty Prade*, które określają dużą rodzinę funkcji, w tym miarę prawdopodobieństwa:

$$g((0)) = 0,$$

$$g((1)) = 1,$$

$$(a \Rightarrow b) = (1) \Rightarrow g(a) \leq g(b),$$

Bezpośrednio z nich wynika, że

$$g(a \vee b) \geq \max(g(a), g(b)),$$

$$g(a \wedge b) \leq \min(g(a), g(b)).$$

Istnieje zbiór *elementów ogniskowych* (ang. focal elements) $T \subseteq F$ reprezentujących formuły, o których posiadamy jakieś informacje. Elementy z T nie muszą być zdaniami elementarnymi oraz wzajemnie się wykluczającymi. Dostępne informacje o T są zapisywane w postaci rozkładu bazowego prawdopodobieństwa (ang. *basic probability assignment*), który prezentuje częściowe przekonania:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{0}) &= 0, \\ \sum_{a \in T} m(a) &= 1, \end{aligned}$$

dla wszystkich pozostałych $a \in F$ $m(a) = 0$, a ignorancja to $m(\mathbf{1})$ np. $m(\mathbf{1}) = 1$ oznacza *wiem, że nic nie wiem*. Przy braku dodatkowej informacji o formule nie wymaga się rozkładu stopni pewności na jej elementarne formuły.

Funkcja przekonania:

$$Bel(a) = \sum_{(b \Rightarrow a)=1} m(b)$$

Funkcja dualna:

$$Pl(a) = \sum_{(b \Rightarrow \neg a)=0} m(b)$$

Miary Bel i Pl są nazywane przekonaniem i wyobrażalnością (ang. *belief*, *plausibility*).



Przykład z formułami

$$F = \{a, b, c, a \vee b, a \vee c, b \vee c, a \vee b \vee c\}$$

$$T = F - \{a \vee c\}$$

$$\sum m = 1$$

$$a \Rightarrow a \vee b = 1$$

$$a \in \{a \vee b\}$$

$$a \Rightarrow \neg a = 0$$

$$m(a) = 0,2$$

$$m(b) = 0,1$$

$$m(c) = 0,1$$

$$m(a \vee b) = 0,2$$

$$m(b \vee c) = 0,3$$

$$m(a \vee b \vee c) = 0,1$$

$$\text{Bel}(a) = 0,2$$

$$\text{Bel}(b) = 0,1$$

$$\text{Bel}(c) = 0,1$$

$$\text{Bel}(a \vee b) = 0,5$$

$$\text{Bel}(b \vee c) = 0,5$$

$$\text{Bel}(a \vee b \vee c) = 1$$

$$\text{Bel}(a \vee b) = m(a) + m(b) + m(a \vee b) = 0,2 + 0,1 + 0,2 = 0,5$$

$$\text{Bel}(b \vee c) = m(b) + m(c) + m(b \vee c) = 0,1 + 0,1 + 0,3 = 0,5$$

$$\text{Bel}(a \vee c) = m(a) + m(c) = 0,2 + 0,1 = 0,3 - \text{nie ma informacji, ale jest Bel}$$

$$\text{Pl}(a) = 1 - \text{Bel}(b, c, b \vee c) = m(b) + m(a \vee b) + m(a \vee b \vee c) = 0,2 + 0,2 + 0,1 = 0,5$$

$$\text{Pl}(b) = m(b) + m(a \vee b) + m(b \vee c) + m(a \vee b \vee c) = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,7$$

$$\text{Pl}(c) = m(c) + m(b \vee c) + m(a \vee b \vee c) = 0,5$$

$$\text{Pl}(a \vee b) = m(a) + m(b) + m(a \vee b) + m(b \vee c) + m(a \vee b \vee c) = 0,9$$

$$\text{Pl}(a \vee c) = m(a) + m(c) + m(a \vee b) + m(b \vee c) + m(a \vee b \vee c) = 0,9$$

$$\forall a, b \in F :$$

$$Pl(a) = 1 - Bel(\neg a),$$

$$Bel(a) + Bel(\neg a) \leq 1,$$

$$Pl(a) + Pl(\neg a) \geq 1,$$

$$Bel(a) \leq Pl(a),$$

$$Bel(a \vee b) \geq Bel(a) + Bel(b) - Bel(a \wedge b),$$

$$Pl(a \wedge b) \leq Pl(a) + Pl(b) - Pl(a \vee b).$$

Pewność danej formuły $a \in F$ może być zatem reprezentowana przez od-cinek:

$$[Bel(a), Pl(a)]$$



$$m(\phi) = 0,$$

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1,$$

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B),$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \phi} m(B),$$

$$\forall C \neq \emptyset \quad m(C) = \frac{\sum_{A \cap B = C} m_1(A)m_2(B)}{\sum_{A \cap B \neq \emptyset} m_1(A)m_2(B)}.$$

$$Con(m_1, m_2) = \log \frac{1}{\sum_{A \cap B \neq \emptyset} m_1(A)m_2(B)}.$$

Przykład z teorii zbiorów 1/2

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$m(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0,5$$

$$m(\{x_1, x_2\}) = 0,25$$

$$m(\{x_2, x_4\}) = 0,25$$

$$\text{dla pozostałych } A \in \Omega \quad m(A) = 0$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2\}) = 0,25$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0,75$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = 1$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 1$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_3, x_5\}) = 0,75$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_4\}) = 0,5$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_4, x_5\}) = 0,5$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_5\}) = 0,25$$

$$\text{Bel}(\{x_2, x_3, x_4\}) = 0,25$$

$$\text{Bel}(\{x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 0,25$$

$$\text{Bel}(\{x_2, x_4\}) = 0,25$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_4, x_5\}) = 0,25$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2\}) = m(\{x_1, x_2\}) = 0,25$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_3\}) = m(\{x_1, x_2\}) + m(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0,25 + 0,5 = 0,75$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = m(\{x_1, x_2\}) + m(\{x_1, x_2, x_3\}) + m(\{x_2, x_4\}) = 1$$

$$\text{Bel}(\{x_1, x_2, x_4\}) = m(\{x_1, x_2\}) + m(\{x_2, x_4\}) = 0,25 + 0,25 = 0,5$$

Przykład z teorii zbiorów 2/2

$$Pl(\{x_1\}) = 1 - Bel(\{x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$Pl(\{x_1, x_3\}) = 1 - Bel(\{x_2, x_4, x_5\}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$Pl(\{x_1, x_3, x_5\}) = 1 - Bel(\{x_2, x_4\}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$Pl(\{x_1, x_5\}) = 1 - Bel(\{x_2, x_3, x_4\}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$Pl(\{x_3\}) = 1 - Bel(\{x_1, x_2, x_4, x_5\}) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$Pl(\{x_3, x_4\}) = 1 - Bel(\{x_1, x_2, x_5\}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$Pl(\{x_3, x_4, x_5\}) = 1 - Bel(\{x_1, x_2\}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$Pl(\{x_3, x_5\}) = 1 - Bel(\{x_1, x_2, x_4\}) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$Pl(\{x_4\}) = 1 - Bel(\{x_1, x_2, x_3, x_5\}) = 1 - 0,75 = 0,25$$

$$Pl(\{x_4, x_5\}) = 1 - Bel(\{x_1, x_2, x_3\}) = 1 - 0,75 = 0,25$$

$$Pl(\{x_5\}) = 1 - Bel(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = 1 - 1 = 0$$

$$Pl(\{x_1, x_2\}) = 1 - Bel(\{x_3, x_4, x_5\}) = 1 - 0 = 1$$

$Pl(A) = 1$ dla pozostałych

Rdzeń (ang. core) to $\Omega - \{x_5\}$

Połączenie dwóch rozkładów

$$\forall a \in F, a \neq \mathbf{0} \quad m(a) = \frac{\sum_{b \wedge c = a} m_1(b)m_2(c)}{\sum_{b \wedge c \neq \mathbf{0}} m_1(b)m_2(c)}$$



Przykład nr 1A

$$F = \{a, b, c\}$$

$$m_1(a) = 0 \quad m_2(a) = 0,9 \quad m(a) = 0$$

$$m_1(b) = 0,1 \quad m_2(b) = 0,1 \quad m(b) = 1$$

$$m_1(c) = 0,9 \quad m_2(c) = 0 \quad m(c) = 0$$

$$Con(m_1, m_2) = \log(100)$$

Przykład bardziej zrównoważonego rozkładu

$$m_1(a) = m_2(a) = 0,3 \quad m(a) \approx 0.26$$

$$m_1(b) = m_2(b) = 0,3 \quad m(b) \approx 0.26$$

$$m_1(c) = m_2(c) = 0,4 \quad m(c) \approx 0.47$$

$$Con(m_1, m_2) = \log(3)$$

Przykład nr 1B

$$F = \{a, b, c, e\}$$

$$m_1(a, e) = 0 \quad m_2(a, e) = 0,9 \quad m(a) = 0,01$$

$$m_1(b, e) = 0,1 \quad m_2(b, e) = 0,1 \quad m(b) = 0$$

$$m_1(c, e) = 0,9 \quad m_2(c, e) = 0 \quad m(c) = 0$$

$$m(e) = 0.99$$



Łączenie opisów niepewności o niezależnych od siebie obserwacjach

$$\forall C \neq \phi \quad m(C) = \frac{\sum_{A \cap B = C} m_1(A)m_2(B)}{\sum_{A \cap B \neq \phi} m_1(A)m_2(B)} =$$
$$\frac{\sum_{A \cap B = C} m_1(A)m_2(B)}{1 - \sum_{A \cap B = \phi} m_1(A)m_2(B)}$$



Teoria Dempstera-Shafera: sumowanie ortogonalne

$\{x_2\}$ $\frac{3}{8}$	$\{x_2\}$ $\frac{3}{32}$	$\{x_2\}$ $\frac{3}{16}$	$\{x_2\}$ $\frac{3}{32}$
$\{x_1, x_2, x_4\}$ $\frac{3}{8}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{3}{32}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{3}{16}$	$\{x_2, x_4\}$ $\frac{3}{32}$
$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{16}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{1}{8}$	$\{x_2\}$ $\frac{1}{16}$
0	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{1}{2}$	$\{x_2, x_4\}$ $\frac{1}{4}$

$$m(\{x_1, x_2\}) = (m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_2\}) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{32}$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_2, x_3\}) = \frac{1}{8}$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_2\}) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_2, x_4\}) = \frac{3}{32}$$

Sumowanie ortogonalne z zerowymi wynikami

$\{x_4, x_5\}$ $\frac{3}{8}$	ϕ $\frac{3}{32}$	ϕ $\frac{3}{16}$	$\{x_4\}$ $\frac{3}{32}$
$\{x_1, x_3\}$ $\frac{3}{8}$	$\{x_1\}$ $\frac{3}{32}$	$\{x_1, x_3\}$ $\frac{3}{16}$	ϕ $\frac{3}{32}$
$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{16}$	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{8}$	$\{x_2\}$ $\frac{1}{16}$
0	$\{x_1, x_2\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{1}{2}$	$\{x_2, x_4\}$ $\frac{1}{4}$

$$\sum_{A \cap B = \phi} m_1(A)m_2(B) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} = \frac{3}{8};$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_2\}) = \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{8}} = 0.3;$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_1\}) = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{5}{8}} = 0.15; \quad (m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_3\}) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{8}} = 0.3;$$

$$m(\{x_2\}) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{8}} = 0.1; \quad m(\{x_4\}) = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{5}{8}} = 0.15;$$