

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 应用高等工程数学 课程类别 ☒ 公共课 考核形式 ☐ 开卷
☐ 专业课 ☒ 闭卷

学 生 类 别 研究生 考 试 时 间 2014年12-16 学 生 所 在 院 系

学 号 _____ 姓 名 _____ 任 课 教 师

一、填空题（任选 10 小题，每小题 2 分，共计 20 分，多答不加分。）

1. 设 $A = \{A_{ij}\}_{3 \times 3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ 则与 A 相似的对角

阵 $B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

2. 设矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 满足等式: $A^2 + A = 2I$, 问 A 是否可对角化_____.

3. 矩阵的谱半径是指___矩阵 A 的特征值的模的最大值.

4. 矩阵特征值的根空间维数等于__该特征值的代数重度

5. 对任何非奇异矩阵 A , 都有 $\text{cond}(A)_p$ ___1, 当 A 为正交矩阵时
 $\text{cond}(A)_2 =$ __.

6. 已知 $\sqrt{5} = 2.2360679774\ 99 \dots$, 则其近似值 2.23607 有_____位有效数字,
通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为_____.

7. 已 知 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$, 则 $f[0,1,2,3] =$ _____ ,
 $f[0,1,2,3,4] =$ _____.

8. 当 n 为奇数时, 等距节点的插值型 $(N-C)$ 求积公式 $I_n = (b-a) \sum_{i=1}^n C_i f(x_i)$ 至少
有___次代数精度.

9. $\varphi(x) = x + \lambda(x^2 - 3)$, 要使迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^* = \sqrt{3}$, 则 λ 的取
值范围是_____.

10. 试写出方程 $f(x) = x^3 - a = 0$ 的牛顿迭代格式_____.

11. 设 (X_1, \dots, X_n) 为 $X \sim N(0,1)$ 的样本, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 为次序统计量, 则

$$X_{(1)}^2 + X_{(2)}^2 + \dots + X_{(n)}^2 \sim \underline{\hspace{2cm}}.$$

12. 给出点估计评价的三个标准_____.

13. 给出假设检验中显著性水平 α 与统计假设 H_0 的关系_____.

14. 设 (X_1, \dots, X_n) 为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ 未知, σ^2 已知, μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧区间估计为_____.

15. 使用方差分析时对数据的要求是_____.

二、计算证明题 (任选 4 题, 每小题 10 分, 满分 40 分, 多答不加分。)

16. 已知 R^3 中的两个基底 $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 求从 B_1 到

B_2 的基变换矩阵。

17. 设 R^4 中的向量 $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, 分别张成

$w_1 = \text{span}\{x_1, x_2\}$, $w_2 = \text{span}\{x_3, x_4\}$, 求 $w_1 + w_2$ 及 $w_1 \cap w_2$ 的基底及维数。

18. 设 T 是线性空间 V^3 的线性变换, 已知 T 在基 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

求 T 的特征值和对应的特征向量。

19. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J , 使 $AP = PJ$ 。

20. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$, 问 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ 成立吗? 若成立证明之。

21. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, 求 A 的满秩分解。

22. 设有微分方程组
$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + e^{2t} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + e^{2t} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) + 3x_3(t) \end{cases}$$

$x(0) = [-1, 1, 0]^T$, 求满足初始条件的特解。

23. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 的奇异值分解。

三、计算证明题 (任选 4 题, 每小题 10 分, 满分 40 份, 多答不加分。)

24. 对函数 $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 10$, 试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$, 并写出插值余项的表达式。

25. 试构造两点 Gauss-Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

并由此计算积分 $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3+2x^2}{1-x^2}} dx$ 。

26. 设有常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(0) = a \end{cases}$ 的隐式中点公式

$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+\frac{h}{2}}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$, 证明该方法是无条件稳定的。

27. 方程 $Ax=b$ 的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$, 问 a 取何值时, Jacobi 迭代收敛?

28. 设 (X_1, \dots, X_n) 为总体 X 的一个样本, $EX = \mu$, μ 未知。

(1) \bar{X} 是否为 μ 的无偏估计?

(2) 由 (X_1, \dots, X_n) 构造 μ 的 n 个无偏估计.

(3) 设 $\sum_{i=1}^n a_i = 1, a_i > 0, i = 1, \dots, n$.

问 $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ 是否为 μ 的无偏估计, 若是 μ 的无偏估计, 确定 $a_i, i = 1, \dots, n$,

使 $\hat{\mu}$ 的方差最小。

29. 某纺织厂生产的某种产品的纤度, 设服从正态分布, 标准差 $\sigma = 0.048$, 现抽取 5 根测得纤度为 1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44, 问在显著性水平 $\alpha = 0.10$ 下, 能否认为 σ^2 无显著变化。($\chi_{0.05}^2(4) = 0.711$, $\chi_{0.95}^2(4) = 9.488$)

30. 设有三个工厂生产同一种机械锻件，为比较这三个厂生产的锻件强度无显著差异，分别从每个厂随机抽 4 件，测得强度数据如下：

工厂	强度数据			
A_1	103	101	98	110
A_2	113	107	108	116
A_3	82	92	84	86

设第 i 个厂的强度服从 $N(\mu_i, \sigma^2)$, $i=1,2,3$ 。检验三个厂的平均强度有无显著差异？ $\alpha=0.05$ （ $F_{0.95}(2,9)=4.26, F_{0.95}(3,12)=3.49$ ）

31. 已知 y 与三个自变量的观察值如下表：

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
y	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

求 y 对 x_1, x_2, x_3 的回归方程。

32. 有经过 xmin 反应之后的数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	28.5	16.9	17.5	14.0	9.8	8.9

设 $y = \beta_0 \beta_1^x \varepsilon$ （ ε 满足回归分析条件），求 β_0, β_1 的点估计，并求 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1^x$ 。

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 应用高等工程数学 课程类别 ☒ 公共课 ☐ 专业课 考核形式 ☐ 开卷 ☒ 闭卷

学生类别 研究生 考试日期 2015-12-11 学生所在院系 _____

学号 _____ 姓名 _____ 任课教师 _____

一、填空题(每题 3 分共 24 分)

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_{\infty} =$ _____, $\rho(A) =$ _____。

2. 方阵 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的最小多项式为 _____。

3. 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 且 $\|\cdot\|$ 为 $R^{n \times n}$ 上矩阵的算子范数, 则 $\text{cond}(AB) \underline{\hspace{1cm}} \text{cond}(A)\text{cond}(B)$ 。

4. 为避免有效数字的损失, 应将 $\ln(1+x) - \ln x, x \gg 1$, 改写为 _____。

5. 已知数据 $(x_k, y_k) (k=1, 2, \dots, n)$, 用直线 $y = a + bx$ 拟合这 n 个点, 则参数 a, b 满足的法方程组是 _____。

6. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则计算 $\int_a^b f(x)dx$ 的复化梯形公式是 _____ 阶收敛的, 其代数精度为 _____。

7. 用显式 Euler 法解初值问题 $y' = -10y, y(0) = y_0$, 为保证绝对稳定性, 步长 h 应在范围 _____ 内选取。

8. $A = \begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 当 a 满足条件 _____ 时, A 可作 LU 分解, 当 a 满足条件 _____ 时,

必有分解式 $A = L \cdot L^T$, 这种分解唯一吗? _____。

二、(8 分) 已知 R^4 中的两个子空间是 $W_1 = \text{span}\{a_1 = [1 \ 2 \ 1 \ 0]^T, a_2 = [-1 \ 1 \ 1 \ 1]^T\}$,

$$W_2 = \text{span}\{a_3 = [2 \ -1 \ 0 \ 1]^T, a_4 = [-1 \ -1 \ 3 \ 7]^T\},$$

求 $W_1 + W_2$ 及 $W_1 \cap W_2$ 的基和维数。

三、(8分) $P_1(t)$ 的线性变换的定义为: $Tp(t) = 3p(t) - (t-4)\frac{d}{dt}p(t)$, 求 T 的特征值与特征向量。

四、(8分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $g(A) = A^5 - 4A^4 + 4A^3 + 6A^2 + I$.

五、(8分) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为 *Jordan* 矩阵, 其中: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

六、(10分) 构造一个次数 ≤ 4 的多项式 $p(x)$, 使满足下列条件 $p(1) = 4$, $p'(1) = 3$, $p''(1) = 2$, $p(2) = 7$, $p'(2) = 2$, 写出其余项. 并说明存在无穷多个次数 > 4 的多项式, 满足上述 5 个条件.

七、(8分) 已知三点 Gauss 公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f(\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(-\sqrt{0.6}), \text{ 用该公式估算 } \int_{0.5}^1 \sqrt{x} dx \text{ 的值.}$$

八、(8分) 给定方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & w & w \\ 3w & 1 & 0 \\ w & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

试确定 $w \in R$ 的取值范围, 使求解该方程组的 *Jacobi* 迭代法均收敛。

九、(8分) 用三角分解法 (*Doolittle* 分解) 求解线性代数方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix},$$

十、(10分) 设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的二重根, $f(x)$ 在 x^* 的某邻域内有二阶连续导数

(1) 证明对 $f(x) = 0$ 用 *Newton* 迭代法计算是局部线性收敛的.

(2) 将 *Newton* 公式变形, 使其具有局部二阶收敛性.

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 矩阵论、数值分析 课程类别 ☒ 公共课 ☐ 专业课 考核形式 ☐ 开卷 ☒ 闭卷

学生类别 考试日期 2016-12-15 学生所在院系

学号 姓名 任课教师

一、填空 (每小题 3 分)

1、计算 $y = 1000 + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000}$, 给出了两种运算顺序, (A) 从左到右相加, (B) 从右到左相加, 应选择运算顺序 () 可使计算结果接近于真值。

2、Newton-cotes 求积公式的精确程度是否一定能随着其代数精度的提高而提高?

3、设 $\varphi_2(x) = x^2 - x + b$ 是 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x) = 1$ 的正交多项式, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$, 当 $a \in \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 必有分解式 $A = LL^T$, 其中 L

为非奇异下三角矩阵, 当其对角线元素 $l_{ii} (i=1,2,3)$ 满足条件 时, 这种分解是唯一的。

5、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $\|A\|_1 = \underline{\hspace{2cm}}$; $\|AX\|_\infty = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6、设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ 。

7、设 T 是线性空间 V 的线性变换, 已知 V 的基 $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 和 T 在 B 下的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, 则 T 的特征值为 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$; 特征向量 $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8、设 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 是 V^3 的一个基, V^3 上的线性变换 T 将 a_1, a_2, a_3 分别映为

$-a_1 + 2a_2 + a_3, a_1 + a_2 - a_3, 2a_1 - a_2 + a_3$, 则 T 在这个基下的矩阵是 $B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ 。

二、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J , 使 $AP = PJ$ 。

三、(10 分) 设 V_1 和 V_2 分别是齐次方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 和 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间, 证明 $R^n = V_1 \oplus V_2$ 。

四、(12 分) 设函数 $f(x)$ 满足表中条件:

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	1	0	1
$f'(x_k)$		-2	0

求一个四次插值多项式 $H_4(x)$, 使其满足表中所有条件, 并给出其余项表达式。

五、(10 分) 试构造计算奇异积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$ 的两点求积公式, 使其代数精

度尽可能高; 若被积函数为 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, 问用所构造的求积公式计算, 所产生的误差为多少?

六、(10 分) 设有常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的单步法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})],$$

证明: 该方法是无条件稳定的。

七、(14 分) 给定方程组 $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(1) 确定 a 的取值范围使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛。

(2) 当 $a = 2$ 时, 用直接三角分解法求解方程。

八、(10 分) 已知 $x = \varphi(x)$ 的 $\varphi'(x)$ 满足 $|\varphi'(x) - a| < 1, (a > 2)$, 试问如何利用 $\varphi(x)$ 构造一个收敛的简单迭代函数 $\psi(x)$, 使 $x_{k+1} = \psi(x_k) \quad k = 0, 1, \dots$ 收敛?

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 应用高等工程数学 课程类别 ☒ 公共课 ☐ 专业课 考核形式 ☐ 开卷 ☒ 闭卷

学生类别 考试日期 2017-12 学生所在院系

学号 姓名 任课教师

二、填空 (每小题 3 分)

1、若某近似值与 π 之间的相对误差小于 0.01%，则此近似值至少有 位有效数字 ($\pi = 3.14159265\cdots$)。

2、设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ，求 $A^4 - 9A^3 + A^2 - 8A - 4I =$ 。

3、已知方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$ ，最小多项式为 $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ ，则 A 的 Jordan 标准型为 。

4、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ，则 $\|Ax\|_\infty =$ ， $\text{cond}(A)_1 =$ 。

5、多项式空间 $P_2(t)$ 上的线性变换 T 定义为 $Tp(t) = 3p(t) - (t+1)\frac{d}{dt}p(t)$ ，则 T 在基 $\{1, t, t^2\}$ 下的矩阵为 。

6、用隐式 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -5y + x, \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \text{取步长 } h = 0.2, \text{ 则 } y(0.4) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

7、若求解某线性方程组有迭代公式 $X^{(n+1)} = BX^{(n)} + F$,

其中 $B = \begin{bmatrix} a & -\sqrt{a} \\ 3\sqrt{a} & -3 \end{bmatrix}$ ，则该迭代公式收敛的充要条件是 。

8、若求解方程的简单迭代格式 $x_{k+1} = ax_k + \frac{b}{x_k}$ 在根 $x^* = \sqrt{3}$ 附近平方收敛，

则 $a =$ ， $b =$ 。

二、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J , 使 $P^{-1}AP = J$ 三、

(8 分) 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 R^3 的一个基, $V_1 = \text{span}\{2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$,

$V_2 = \text{span}\{\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3\}$, 证明: $R^3 = V_1 \oplus V_2$ 。

四、(10 分) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1, f(2)=-3, f(3)=4, f'(3)=13$, 试求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 并算出 $f(1)$ 的近似值 $H_3(1)$; 若还已知 $|f^{(4)}(x)| < 1 (0 \leq x \leq 3)$, 证明此近似值的绝对误差小于 0.2。

五、(10 分) 试求实数 a, b 使 $\int_0^1 (a+bx-x^2)^2 dx$ 最小, 并求出此最小值。

六、(10 分) 利用 3 次 Chebyshev 正交多项式 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ 构造三点 Gauss-Chebyshev 型求积公式:

$$\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{2x-x^2}} dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

并问:

(1) 所得求积公式的代数精度是多少?

(2) 用所得求积公式计算 $\int_0^2 \frac{(3x^5 + 4x^4 + 2x^2 - 1)}{\sqrt{2x-x^2}} dx$ 时截断误差是多少? 七、

(12 分) 给定线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 = -18.5 \\ 6x_2 + 10x_3 = -7 \end{cases}$$

(1) 试用 LU 分解法求解其方程组;

(2) 分别写出方程组的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代矩阵, 并说明这两种迭代格式的收敛性。

八、(8 分) 讨论求解初值问题 $\begin{cases} y'(x) = \lambda y \ (\lambda < 0) \\ y(0) = a \end{cases}$ 的二阶中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right) \text{ 的稳定性。}$$

九、(8 分) 试证用牛顿法求方程 $f(x) = (x^2 - a)^2 = 0 \ (a > 0)$ 的根 $x^* = \sqrt{a}$ 是线性收敛的, 并将 Newton 公式变形, 使其在 $x^* = \sqrt{a}$ 附近具有局部二阶收敛性。

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 应用高等工程数学 课程类别 ☒ 公共课 ☐ 专业课 考核形式 ☐ 开卷 ☒ 闭卷

学生类别 _____ 考试日期 2018-12 学生所在院系 _____

学号 _____ 姓名 _____ 任课教师 _____

三、填空 (每小题 3 分)

1、向量 $(1, 2, 3)^T$ 在给定的一组基 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)^T$ 下的坐标为 _____。

2、 \mathbb{R}^4 中的两个子空间 $W_1 = \text{span}\{a_1 = (1, 1, 0, 0)^T, a_2 = (0, 0, 1, 1)^T\}$, $W_2 = \text{span}\{a_3 = (1, 0, 0, 1)^T, a_4 = (0, 1, 1, 0)^T\}$ 的交空间 $W_1 \cap W_2$ 的维数是 _____, 基是 _____。

3、方阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的最小多项式为 _____。

4、将多项式 $2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ 的计算改写成只需要 3 次乘法和 3 次加法的形式为 _____。

二、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J , 使 $P^{-1}AP = J$ 。

三、(10 分) 多项式空间 $P_1(t)$ 的线性变换的定义为: $Tp(t) = 5p(t) + (t-1)\frac{d}{dt}p(t)$, 求 T 的特征值与特征向量。

四、(10 分) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 3, f'(0) = 1$, 试求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 并写出误差余项。