PDE 第四章作业

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2023 年 10 月 29 日

【题目 1】 设 u 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega; \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

的一个解。

1. 若 $C(x) \geq C_0 > 0$ 则有估计
$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \frac{1}{C_0} \sup_{\Omega} |f|.$$
2. 若 $c(x)$ 非负有界，那么
$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq M \sup_{\Omega} |f|.$$
其中 M 与 $c(x)$ 的界和 Ω 的直径有关。
3. 若 $c(x) < 0$，举例说明上述的估计一般不成立。

证明.

1. 考虑辅助函数
$$w(x) = \frac{1}{C_0} \sup_{\Omega} |f| \pm u(x)$$
那么
$$-\Delta w + c(x)w = \frac{c(x)}{c_0} F \pm f \geq 0.$$
$$w|_{\partial\Omega} = \frac{1}{C_0} \sup_{\Omega} |f| > 0$$
w 的非正最小值在边界取到，这说明
$$w(x) > 0, \qquad \forall\, x \in \overline{\omega}$$
即
$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \frac{1}{C_0} |f|.$$

2. 记

$$d = \operatorname{diam}(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|, \qquad F = \sup_{\Omega} |f|.$$

考虑辅助函数

$$w(x) = z(x) \pm u(x),$$

其中

$$z(x) = \frac{F}{2n}\left(d^2 - |x|^2\right)$$

那么

$$-\Delta w + c(x)w = c(x)\left(d^2 - |x|^2\right)\cdot \frac{F}{2n} \geq 0$$

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{F}{2n}\left(d^2 - |x|^2\right)\Big|_{\partial\Omega} \geq 0.$$

结合 $c(x)$ 有界以及弱极值原理知，w 的非正最小值在边界取到，但 $w|_{\partial\Omega} \geq 0$，从而

$$w(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

即

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \frac{F}{2n}\left(d^2 - |x|^2\right) \leq \frac{d^2}{2n}\cdot \sup_{\Omega} |f|.$$

3. 取

$$\Omega = (0,\pi), \qquad u(x) = \sin x, \qquad c(x) = -1$$

那么

$$-u'' - u = 0, u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

但

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = 1, \qquad \sup_{\Omega} |f| = 0.$$

与上述的估计矛盾。

□

【题目 2】 用辅助函数

$$v(x) = \frac{1}{|x|^a} - \frac{1}{r^a}$$

证明边界点引理。其中 $a > 0$ 待定，r 为 S 的半径。

证明. 设

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}, \qquad S^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{r}{2} < |x| < r\right\}$$

在 S^* 上考虑辅助函数

$$w(x) = u(x) - u\left(x^0\right) + \varepsilon v(x), \qquad v(x) = \frac{1}{|x|^a} - \frac{1}{r^a}$$

其中 $\varepsilon, a > 0$ 待定。

计算得

$$\begin{aligned} Lv &= -a(a+2-n)\frac{1}{|x|^{a+2}} + c(x)\left(\frac{1}{|x|^a} - \frac{1}{r^a}\right) \\ &\leq -a(a+2-n)\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{|x|^a} + \frac{C}{|x|^a} \\ &\leq \left(C - \frac{a(a+2-n)}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{|x|^a} \end{aligned}$$

其中 $C = \sup|c(x)|$。由于当 $a\to\infty$ 时 $a(a+2-n)\to\infty$，故可以找到充分大的 a 是的

$$C - \frac{a(a+2-n)}{r^2} < 0 \quad\Longrightarrow\quad Lv < 0 \quad\Longrightarrow\quad Lw < 0.$$

从而由弱极值原理知 w 的非负极大值不可能在 S^* 内部取到。

一方面，在 $\partial S^*\cap S$ 上

$$u(x) < u\left(x^0\right) \quad\Longrightarrow\quad \min_{x\in\partial S^*\cap S}\left(u\left(x^0\right) - u(x)\right) = \beta > 0 \quad\Longrightarrow\quad \max_{\partial S^*\cap S} w \leq -\beta + \varepsilon\frac{2^a}{r^a}.$$

故可以选取充分小的 ε 使得

$$-\beta + \varepsilon\cdot\frac{2^a}{r^2} < 0 \quad\Longrightarrow\quad \max_{\partial S^*\cap S} w < 0.$$

另一方面，在 $\partial S^*\cap\partial S$ 上

$$\max_{\partial S^*\cap\partial S} w(x) \leq 0, \qquad w\left(x^0\right) = 0.$$

故 w 在 x^0 处取的极大值，故

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{x^0} + \varepsilon\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|_{x^0} = \left.\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|_{x^0} \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \left.\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|_{x^0} \geq -\varepsilon\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|_{x^0}.$$

计算得

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|_{x^0} = \left.\frac{\partial v}{\partial n}\cdot\cos(n,\nu)\right|_{x^0} = -\frac{a}{r^a}\cos(n,\nu)\Big|_{x^0}$$

由于 $\cos(n,\nu) > 0$ 故上式小于 0，从而

$$\left.\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|_{x^0} \geq -\varepsilon\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|_{x^0}. = \frac{\varepsilon a}{r^a}\cos(n,\nu) > 0$$

□

【题目 3】 考虑一般二阶椭圆方程

$$-\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = 0$$

其中矩阵 $(a_{ij}(x))$ 正定，即存在正常数 $a > 0$ 使得

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2, \qquad \forall\, x\in\Omega, \xi\in\mathbb{R}^n.$$

证明当 $c(x)\geq 0$ 时弱极值原理成立。

证明. 记

$$Lu = -\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

只需证明 $Lu = f \leq 0$ 时 u 的非负极大值必在 $\partial\Omega$ 上达到即可。

首先设 $f < 0$。反设 u 的非负极大值在 Ω 上达到，即存在 $x_0 \in \Omega$ 使得

$$\max_{\overline{\Omega}} u = u(x_0).$$

那么此时

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = 0, \qquad \forall\, 1 \leq j \leq n.$$

并且 Hess 矩阵 $\left.\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right|_{x_0}$ 半负定。现记

$$A = \left(a_{ij}(x_0)\right), \qquad B = \left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right|_{x_0}.$$

那么由题设条件知 A 正定。从而存在 $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$ 使得

$$A = P^{\mathrm{T}}P.$$

又注意到

$$-\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = -\mathrm{tr}(AB) = -\mathrm{tr}\left(P^{\mathrm{T}}PB\right) = -\mathrm{tr}\left(PBP^{\mathrm{T}}\right) = -\mathrm{tr}\left(B\right) \geq 0.$$

从而

$$Lu|_{x_0} = -\mathrm{tr}(AB) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x_0)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) + c(x_0)u = -\mathrm{tr}(AB) + c(x_0)u(x_0) \geq 0.$$

这与 $f < 0$ 矛盾。故 u 的非负极大值必在 $\partial\Omega$ 上取到。

现考虑一般情况，即 $f \leq 0$。考虑辅助函数

$$w(x) = u(x) + \varepsilon \cdot e^{ax_1},$$

其中 $a > 0$ 为待定参数。那么

$$Lw = Lu + \varepsilon e^{ax_1}\left(-a^2 + ab_1(x) + c(x)\right).$$

故可以找到充分大的 a 使得

$$-a^2 + ab_1(x) + c(x) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Lw < 0.$$

那么由上述的讨论知，w 的非负极大值必在 $\partial\Omega$ 取到。从而

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+ \leq \max_{\partial\Omega}\left(u(x) + \varepsilon \cdot e^{ax_1}\right)^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon \cdot \max_{\partial\Omega} e^{ax_1}.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 即可。 □

【题目 4】 设 u 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x) u = \phi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

属于 $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 的解，其中 $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$，则

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \frac{1}{\alpha_0} \max_{\partial\Omega} |\phi|.$$

证明. 显然，u 也是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta v + u^2 v = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} + \alpha(x) v = \phi & \text{on } \Omega \end{cases}$$

的解。考虑辅助函数

$$w(x) = \frac{\Phi}{\alpha_0} \pm u(x), \qquad \text{where } \Phi = \max_{\partial\Omega} |\phi|.$$

那么直接验证有

$$-\Delta w + u^2 w = 0 \ (\geq 0), \qquad \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha(x) w = \frac{\alpha(x)}{\alpha_0}\Phi \pm \phi \geq 0.$$

那么由弱极值原理知，w 的非正极小值在边界取到，设为 $x_0 \in \partial\Omega$。我们断言 $w(x_0) \geq 0$，若不然 $w(x_0) < 0$。由于 x_0 是极小值，因此

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{x_0} \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial n} + \alpha(x) w\right|_{x_0} \leq \alpha(x_0) w(x_0) < 0.$$

这与

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \alpha(x) w = \frac{\alpha(x)}{\alpha_0}\Phi \pm \phi \geq 0$$

矛盾。从而

$$w \geq 0, \qquad \text{in } \Omega.$$

故

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \frac{1}{\alpha_0} \max_{\partial\Omega} |\phi|.$$

□

【题目 5】 设 $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x) u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x) u = 0 & \text{on } \Omega \end{cases}$$

的解，其中 $c(x) \geq c_0 > 0$, $\alpha(x) \geq 0$。则有估计

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{c_0}{2} \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u^2 \, dS(x) \leq M \int_\Omega f^2 \, dx.$$

其中 M 仅与 c_0 有关。

证明. 在 $-\Delta u+c(x)u=f$ 两侧同时乘 u 并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x=\int_\Omega -u\Delta u+c(x)u^2\,\mathrm{d}x&=\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+c(x)u^2\right)\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}u\,\mathrm{d}S(x)\\&=\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+c(x)u^2\right)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2\,\mathrm{d}S(x)\end{aligned}$$

由平均值不等式知

$$\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{f}{\sqrt{c_0}}\cdot(\sqrt{c_0}u)\,\mathrm{d}x\le\frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2\,\mathrm{d}x.$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+c_0\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2\,\mathrm{d}S(x)\\&\le\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+c(x)u^2\right)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2\,\mathrm{d}S(x)=\int_\Omega uf\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{c_0}{2}\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2\,\mathrm{d}S(x)\le\frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2\,\mathrm{d}x.$$

□

【题目 6】 求边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & \text{in }\Omega\\ u=\phi & \text{on }\partial\Omega\end{cases}$$

的 Green 函数，其中

1. $\Omega=\mathbb{R}^2_+=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_2>0\}$.
2. Ω 是第一象限。

解. 记

$$\Phi(x)=-\frac{1}{2\pi}\log|x|$$

为调和方程的基本解。

1. $\forall\,x=(x_1,x_2)\in\Omega$，记

   $$\tilde{x}=(x_1,-x_2)$$

   那么 $\tilde{x}$ 是下半平面的点。记

   $$\phi^x(y)=\Phi(y-\tilde{x})$$

   那么 $\phi^x(y)$，满足

   $$\Delta\phi^x(y)=0\text{ in }\Omega,\qquad\phi^x(y)=\Phi(y-x)\text{ on }\partial\Omega$$

从而 Ω 上的 Green 函数为

$$
\begin{aligned}
G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}) \\
-\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{\frac{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}}
\end{aligned}
$$

2. 记

$$
x^{(2)} = (-x_1, x_2), \qquad x^{(3)} = (-x_1, -x_2), \qquad x^{(4)} = (x_1, -x_2)/
$$

那么

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= \Phi(y-x) - \Phi\left(y - x^{(2)}\right) + \Phi\left(y - x^{(3)}\right) - \Phi\left(y - x^{(4)}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{\frac{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}\cdot\frac{(y_1+x_1)^2+(y_2+x_2)^2}{(y_1+x_2)^2+(y_2-x_2)^2}}.
\end{aligned}
$$

□

【题目 7】 设 $B(R)$ 是以坐标原点为心、R 为半径的三维球，试求球上的 Dirichlet 问题

$$
\begin{cases}
-\Delta u = f & \text{in } B(R) \\
u = \phi & \text{on } \partial B(R)
\end{cases}
$$

的 Green 函数

解. 设

$$
\Phi(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}
$$

为调和方程的基本解。球上的 Green 函数为

$$
G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi\left(\frac{|x|}{R}(y-\tilde{x})\right)
$$

其中

$$
\tilde{x} = \frac{R^2}{|x|^2}\cdot x.
$$

□