PDE 第二章第一次作业

杨嘉昱

2024 年 11 月 18 日

【题目 1】 用特征线法求解下列问题

1. $$\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u|_{t=0} = 2 - x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_t + (1+x^2)u_x - u = xt & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u|_{t=0} = \arctan x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>**Solution.**</u>

1. $$u(x,t) = x(t-1) - 2t - 2e^{-t} + 4.$$

2. $$u(x,t) = (\arctan x - t)\, e^t.$$

$\square$

【题目 2】 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u|_{t=ax} = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t|_{t=ax} = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $a \neq \pm 1$。若初值只给定在 $x \in [c,b]$ 上，试问它在什么区域上能确定解。

<u>**Solution.**</u> 由行波法知 $u_{tt} - u_{xx} = 0$ 的通解为

$$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t).$$

那么由边值条件有

$$u_0(x) = F(x - ax) + G(x + ax) \tag{1}$$

$$u_1(x) = -F'(x-ax) + G'(x+ax) \tag{2}$$

对 (2) 积分:

$$\begin{aligned}\int_0^x u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \left(-\frac{1}{1-a}F((1-a)\xi) + \frac{1}{1+a}G((1+a)\xi)\right)\Bigg|_0^x \\ &= \left(-\frac{1}{1-a}F((1-a)x) + \frac{1}{1+a}G((1+a)x)\right) - \left(-\frac{1}{1-a}F(0) + \frac{1}{1+a}G(0)\right)\end{aligned} \tag{3}$$

在 (1) 中代入 $x=0$ 有

$$u_0(0) = F(0) + G(0) \tag{4}$$

由 (2), (3) 以及 (4) 知

$$\begin{cases} F((1-a)x) = \dfrac{1-a}{2}u_0(x) - \dfrac{1+a}{2}\left((1-a)\displaystyle\int_0^x u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \dfrac{2}{1+a}F(0) - \dfrac{1-a}{1+a}u_0(0)\right), \\ G((1+a)x) = \dfrac{1+a}{2}\left(u_0(x) + (1-a)\displaystyle\int_0^x u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \dfrac{2}{1+a}F(0) - \dfrac{1-a}{1+a}u_0(0)\right) \end{cases} \tag{5}$$

代入 $u(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$ 有

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left((1-a)u_0\left(\frac{x-t}{1-a}\right) + (1+a)u_0\left(\frac{x+t}{1+a}\right)\right) + \frac{1-a^2}{2}\int_{\frac{x-t}{1-a}}^{\frac{x+t}{1+a}} u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

可以在在下面的区域确定解

$$\left\{(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty) : c \le \frac{x-t}{1-a} \le b\right\} \cap \left\{(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty) : c \le \frac{x+t}{1+a} \le b\right\}$$

□

【题目 3】 若 $u = u(x,y,z,t)$ 是波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \\ u|_{t=0} = f(x) + g(y) \\ u_t|_{t=0} = \varphi(y) + \psi(z) \end{cases}$$

的解，求解的表达式。

Solution. 令

$$u(x,y,z,t) = v(x,t) + w(y,t) + h(z,t)$$

由解的唯一性，若 v, w, z 满足

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = f(x) \\ v_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{yy} = 0 \\ w|_{t=0} = g(y) \\ w_t|_{t=0} = \varphi(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} h_{tt} - a^2 h_{zz} = 0 \\ h|_{t=0} = 0 \\ h_t|_{t=0} = \psi(z) \end{cases}$$

则 u 为原方程的解。由 d' Alembert 公式有

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+at)+f(x-at)\right),$$

$$w(y,t)=\frac{1}{2}(g(y+at)+g(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$h(z,t)=\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

从而

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+at)+f(x-at)\right)+\frac{1}{2}(g(y+at)+g(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

□

【题目 4】 利用唯一性结果直接证明：当初值 $\varphi(x),\psi(x)$ 为偶函数，非齐次项 $f(x,t)$ 是 x 的偶函数时，非齐次波动方程初值问题的解 $u(x,t)$ 关于 x 也是偶函数。

根据以上事实，用延拓法求解半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) & (x,t)\in(0,+\infty)^2 \\ u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0 & x\in[0,+\infty) \\ u_x|_{x=0}=0 & t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

并说明当 $f(x,t)$ 满足什么条件时，导出的公式确实是解。

Solution. 记 $v(x,t)=u(-x,t)$，直接验证有

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2-a^2\partial_x^2\right)v=f & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ v|_{t=0}=\phi(x) & x\in\mathbb{R} \\ v_t|_{t=0}=\psi(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

从而由解的唯一性知 $v=u$，即 u 关于 x 而言是偶函数。

对 f 进行偶延拓:$g(x,t)=f(|x|,t)$。求解方程

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2-a^2\partial_x^2\right)v=g & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ v|_{t=0}=0 & x\in\mathbb{R} \\ v_t|_{t=0}=0 & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

解为

$$w(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left(\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}g(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

将其限制到 $[0,+\infty)^2$ 上即为半无解问题的解

□

【题目 5】 证明半无解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) & (x,t)\in(0,+\infty)^2 \\ u|_{t=0}=\phi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x) & x\in[0,+\infty) \\ u|_{x=0}=\mu(t) & t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

解的唯一性。

证明. 只需证明 $\psi=\phi=\mu=f=0$ 时半无解问题只有零解。

任意给定 $(x_0,t_0)\in(0,+\infty)^2$，定义能量

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^{x_0+a(t_0-t)} u_t^2+a^2u_x^2\,\mathrm{d}x,\qquad 0<t<t_0.$$

则

$$E(t)\geq 0.$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}&=-\frac{a}{2}\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)\big|_{x_0+a(t_0-t)}+\int_0^{x_0+a(t_0-t)}\left(u_tu_{tt}+a^2u_xu_{xt}\right)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{a}{2}\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)\big|_{x_0+a(t_0-t)}+\int_0^{x_0+a(t_0-t)}\left(u_tu_{tt}-a^2u_tu_{xx}\right)\,\mathrm{d}x+a^2u_xu_t|_{x_0+a(t_0-t)}\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式有

$$a^2u_xu_t=\sqrt{a}u_x\cdot\sqrt{a^3}u_t\leq\frac{1}{2}\left(au_t^2+a^3u_x^3\right)$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\leq\int_0^{x_0+a(t_0-t)}u_t\left(u_{tt}-a^2u_{xx}\right)\,\mathrm{d}x=0$$

从而

$$0\geq\int_0^t\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}(\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau=E(t)-E(0)$$

即

$$0=E(0)\geq E(t)\geq 0.$$

从而

$$E(t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad u_t=u_x=0$$

由 (x_0,t_0) 选取的任意性以及 $u(0,0)=0$ 知 $u=0$. □

【题目 6】 证明

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}+b(x,t)u_x+cu_t=f(x,t) & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ u|_{t=0}=\phi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

解的唯一性，其中 $b(x,t),c(x,t)$ 都是有界连续函数。

证明. 设

$$|b| \le B, \qquad |c| \le C.$$

只需证明上述方程当 $\psi = \phi = f = 0$ 时只有零解。设 u 为方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + b(x,t) u_x + c u_t = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解。任意给定 (x_0, t_0)，定义能量

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right) \,\mathrm{d}x, \qquad 0 < t < t_0.$$

那么 $E(t) \ge 0$ 且 $E(0) = 0$。对 t 求导得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt} \,\mathrm{d}x - \frac{a}{2} \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)\Big|_{x_0 + a(t_0 - t)} - \frac{a}{2} \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)\Big|_{x_0 - a(t_0 - t)} \\ &= \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} u_t (u_{tt} - a^2 u_{xx}) \,\mathrm{d}x - \frac{a}{2} \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)\Big|_{x_0 + a(t_0 - t)} - \frac{a}{2} \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)\Big|_{x_0 - a(t_0 - t)} \\ &\quad + a^2 u_x u_t\Big|_{x_0 + a(t_0 - t)} - a^2 u_x u_t\Big|_{x_0 - a(t_0 - t)} \\ &= - \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(b u_t u_x + c u_t^2\right) \,\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{a}{2} \left(u_t^2 + a^2 u_x^2 - 2a u_x u_t\right)\Big|_{x_0 + a(t_0 - t)} - \frac{a}{2} \left(u_t^2 + a^2 u_x^2 + 2 u_x u_t\right)\Big|_{x_0 - a(t_0 - t)} \end{aligned}$$

由

$$|2a u_x u_t| \le u_t^2 + a^2 u_x^2$$

知

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \le \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(\frac{B}{2} u_t^2 + \frac{B}{2} u_x^2 + C u_t^2\right) \,\mathrm{d}x \le \frac{M}{2} \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right) \,\mathrm{d}x = M \cdot E(t).$$

其中 $M = \max\left(B + 2c, B/a^2\right)$。从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(E(t) e^{-Mt}\right) \le 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E(t) \le E(0) e^{Mt} = 0$$

结合 E 非负知 $E = 0$。那么易知 $u = 0$ □

【题目 7】 试问下述半无解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + u_t + u_x = 0 & (x,t) \in (0,+\infty)^2 \\ u|_{t=0} = \phi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & x \in [0,+\infty) \\ u|_{x=0} = 0 & t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

能否用对称开拓法求解？试用特征线法求解。

证明. 不能，因为直接验证得若 ψ, ϕ 为奇/偶函数时，u 不为奇/偶函数。

注意到

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2 + \partial_t + \partial_x\right) = \left(\partial_t - \partial_x + 1\right)\left(\partial_t + \partial_x\right)$$

因此原方程可以化为下面两个方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x = v \\ u|_{t=0} = \phi \end{cases} \qquad \begin{cases} v_t - v_x + v = 0 \\ v|_{t=0} = \psi + \phi' \end{cases}$$

用特征线法可求出解。 $\square$

【题目 8】 求解古尔沙问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > |x| \\ u|_{t=-x} = \phi(x) & x \in (-\infty, 0] \\ u|_{t=x} = \psi(x) & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

其中 $\psi(0) = \phi(0)$。若 $\phi(x)$ 给定在 $(-a, 0]$，$\psi(x)$ 给定在 $[0, b]$，指出此定解条件的决定区域。

Solution.

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u = 0$$

的通解为

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t).$$

则

$$\phi(x) = F(0) + G(2x), \qquad \psi(x) = F(2x) + G(0).$$

带入 $x = 0$ 有 $\psi(0) = \phi(0) = F(0) + G(0)$ 故

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t) = \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \phi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \psi(0)$$

决定区域为

$$\left\{(x,t) : -a < \frac{x-t}{2} \le 0\right\} \cap \left\{(x,t) : 0 \le \frac{x+t}{2} \le b\right\}.$$

$\square$