PDE 第三章作业

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2023 年 11 月 28 日

课本习题

【题目 1】 求 Fourier 变换

1. $f(x)=\begin{cases}0 & |x|>a\\ 1-\dfrac{|x|}{a} & |x|\le a\end{cases}.$
2. $f(x)=\exp(-a|x|)$.

解.

1. $$\hat{f}(\lambda)=\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a\lambda^2}(1-\cos\lambda a).$$
2. $$\hat{f}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-a|x|-i\lambda x\right)\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\lambda^2}.$$

□

【题目 2】 利用 Fourier 变换的性质求下列函数的 Fourier 变换

1. $f(x)=\begin{cases}e^{\mu x} & |x|<a\\ 0 & |x|\ge a\end{cases}$
2. $f(x)=\sin\left(\lambda_0 x\right)e^{-a|x|}$.
3. $f(x)=\begin{cases}e^{i\lambda_0 x} & |x|<L\\ 0 & |x|\ge L\end{cases}$

解.

1. 由于
$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{(\mu-i\lambda)x}\,\mathrm{d}x.$$
故
$$\hat{f}(\lambda-i\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\lambda a}{\lambda}.$$
从而
$$\hat{f}(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin(\lambda+i\mu)a}{\lambda+i\mu}.$$

2. 由于

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \sin\lambda_0 x e^{-a|x|}e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\lambda_0 x}-e^{-i\lambda_0 x}}{2i}e^{-a|x|}e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|}\left(e^{-i(\lambda-\lambda_0)x}-e^{-i(\lambda+\lambda_0)x}\right)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

令 $g(x)=e^{-a|x|}$，那么

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2i}\left(\hat{g}(\lambda-\lambda_0)-\hat{g}(\lambda+\lambda_0)\right) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{a^2+(\lambda-\lambda_0)^2}-\frac{a}{a^2+(\lambda+\lambda_0)^2}\right).$$

3. 由于

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L} e^{i\lambda_0 x}e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(\lambda_0-\lambda)}e^{i(\lambda_0-\lambda)x}\Big|_{-L}^{L} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\left(L(\lambda-\lambda_0)\right)}{\lambda-\lambda_0}$$

□

【题目 3】 求 Fourier 逆变换

1. $f(\lambda)=e^{-a^2\lambda^2 t}$
2. $f(\lambda)=e^{(-a^2\lambda^2+ib\lambda+c)t}$
3. $f(\lambda)=e^{-|\lambda|y}$

解.

1. 记

$$g(x)=\exp(-x^2)$$

那么

$$\hat{g}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

并且

$$((g(Ax)))^{\wedge} = \frac{1}{A}\hat{g}\left(\frac{\lambda}{A}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}A}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4A^2}\right)$$

令

$$\frac{1}{4A^2}=a^2t$$

那么

$$A=\frac{1}{2a\sqrt{t}}$$

从而

$$\left(g\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)^{\wedge} = a\sqrt{2t}\exp\left(-a^2\lambda^2 t\right).$$

即

$$\left(\frac{1}{a\sqrt{2t}}g\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)^{\wedge} = f(\lambda)$$

故

$$f^{\vee}(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}g\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right).$$

2. 注意到

$$f(x)=\exp\left(-a^2\left(\lambda-\frac{ib}{2a^2}\right)^2 t\right)\cdot\exp\left(-\frac{tb^2}{4a^2}+ct\right)$$

从而

$$\begin{aligned}
f^\vee(x)&=\exp\left(-\frac{tb^2}{4a^2}+ct\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-a^2\left(\lambda-\frac{ib}{2a^2}\right)^2 t\right)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\exp\left(-\frac{tb^2}{4a^2}+ct\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-a^2\lambda^2 t\right)\cdot\exp\left(i\left(\lambda+\frac{ib}{2a^2}\right)x\right)\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\exp\left(-\frac{tb^2}{4a^2}+ct-\frac{b}{2a^2}x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-a^2\lambda^2 t\right)\cdot\exp\left(i\lambda x\right)\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\exp\left(-\frac{tb^2}{4a^2}+ct-\frac{b}{2a^2}x\right)\cdot\left(\exp\left(-a^2\lambda^2 t\right)\right)^\vee\\
&=\frac{1}{\sqrt{2ta}}\exp\left(ct-\frac{1}{t}\left(\frac{bt+x}{2a}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

3.

$$f^\vee(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-|\lambda|y}e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y}{y^2+x^2}.$$

□

【题目 4】 用 Fourier 变换求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\dfrac{\partial u}{\partial x}-cu=f(x,t) & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)\\ u|_{t=0}=\phi(x) & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

解. 方程两遍对 x 进行 Fourier 变换有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}+a^2\lambda^2\hat{u}-ib\lambda\hat{u}-c\hat{u}=\hat{f}\\ \hat{u}|_{t=0}=\hat{\phi}\end{cases}$$

记

$$g_t(\lambda)=\exp\left(-(a^2\lambda^2-ib\lambda+c)t\right)$$

那么原方程的解为

$$\hat{u}=\hat{\phi}\hat{g}_t+\int_0^t\hat{f}\hat{g}_{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\phi*g_t}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\widehat{f*g_{t-\tau}}\,\mathrm{d}\tau$$

从而

$$u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi*g_t+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t f*g_{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

□

【题目 5】 证明在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 的意义下

1. $\phi(x)\delta'(x)=-\phi'(0)\delta(x)+\phi(0)\delta'(x)$;
2. $x^m\delta^{(m)}(x)=(-1)^m m!\delta(x)$.

证明.

1. 这是因为 $\forall\, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 有

$$
\begin{aligned}
< \phi(x)\delta'(x), \psi(x) > &=< \delta'(x), \phi(x)\psi(x) >= -< \delta(x), (\phi(x)\psi(x))' > \\
&= -< \delta(x), \phi(x)\psi'(x) + \psi(x)\phi'(x) > \\
&= -\phi(0)\psi'(0) - \psi(0)\phi'(0) \\
&= -\phi(0) < \delta(x), \psi'(x) > -\phi'(0) < \delta(x), \psi(x) > \\
&=< \phi(0)\delta'(x) - \phi'(0)\delta(x), \psi(x) > .
\end{aligned}
$$

2. 这是因为 $\forall\, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
< x^m\delta^{(m)}(x), \psi(x) > =< \delta^{(m)}(x), x^m\psi(x) >= (-1)^m \left\langle \delta(x), \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m (x^m\psi(x)) \right\rangle \\
= (-1)^m m!\psi(0) =< (-1)^m m!\delta(x), \psi(x) > .
\end{aligned}
$$

□

【题目 6】 计算

1. $(|x|)^{(m)}$，其中 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$;
2. $(H(x)e^{ax})''$

解.

1. $\forall\, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$，由于

$$
\int_{\mathbb{R}} |x|\psi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} \psi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \psi(x)(H(x) - H(-x))\,\mathrm{d}x,
$$

故

$$
|x|' = H(x) - H(-x).
$$

又由于 $H'(x) = \delta(x)$ 故

$$
(|x|)^{(m)} = \begin{cases} H(x) - H(-x) & m = 1 \\ 2\delta^{(m-2)}(x) & m > 1 \end{cases}
$$

2.
$$
(H(x)e^{ax})'' = \delta'(x)e^{ax} + 2a\delta(x)e^{ax} + a^2H(x)e^{ax}.
$$

□

【题目 7】 求广义导数，其中

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$

解.

1. 由于 $f(x) = \sin x H(x)$，因此

$$
f'(x) = \cos x H(x) + \sin x\delta x = \cos x H(x) + \sin 0\delta x = \cos x H(x).
$$

2. 由于 $f(x)=x^2(H(x-1)-H(x+1))$，故

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(H(x-1)-H(x+1))+x^2(\delta(x-1)-\delta(x+1)) \\ &= 2x(H(x-1)-H(x+1))+\delta(x-1)-\delta(x+1). \end{aligned}$$

□

【题目 8】 用分离变量法求解

1.
$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<\pi, t>0 \\ u|_{t=0}=\sin x & 0\le x\le \pi \\ u_x|_{x=0}=u_x|_{x=\pi}=0 & t>0. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<\ell, t>0 \\ u|_{t=0}=0 & 0\le x\le \ell \\ u|_{x=0}=0,\ \ u|_{x=\ell}=At & t>0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 & 0<x<\ell, t>0 \\ u|_{t=0}=0 & 0\le x\le \ell \\ u_x|_{x=0}=0,\ \ u_x|_{x=\ell}=q & t>0 \end{cases}$$

证明.

1. 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，则特征问题为

$$X''+\lambda X=0, \qquad X'(0)=X'(\pi)=0$$

解得

$$X_n(x)=\cos n\pi, \qquad \lambda_n=n^2.$$

那么 T_n 满足

$$Tn'+n^2a^2T_n=0$$

解得

$$T_n(t)=C_n\exp\left(-n^2a^2t\right).$$

进而

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\exp\left(-n^2a^2t\right)\cos nx$$

带入边值条件有

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos n\pi\,\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1-n^2} & 2\mid n \\ 0 & 2\nmid n \end{cases}$$

从而

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4n^2}\exp\left(-4n^2a^2t\right)\cos(2nx)$$

2. 令

$$v(x,t)=u(x,t)-\frac{x}{\ell}At,$$

则 v 满足方程

$$\begin{cases} v_t-a^2v_{xx}=-\dfrac{x}{\ell}A & 0<x<\ell,t>0 \\ v|_{t=0}=0 & 0\le x\le\ell \\ v|_{x=0}=v|_{x=\ell}=0 & t>0 \end{cases}$$

令 $v(x,t)=X(x)T(t)$，从而特征方程

$$X''+\lambda X=0,\qquad X(0)=X(\ell)=0$$

解得

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),\qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

从而

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right).$$

又由于

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}-\frac{x}{\ell}At\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{2\ell}{n\pi},$$

因此得到 T_n 满足的微分方程为

$$T_n'+\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2T_n=(-1)\frac{2\ell}{n\pi},\qquad T_n(0)=0.$$

解得

$$T_n(t)=(-1)^n\frac{2A}{n\pi}(-1)^n\left(\frac{\ell}{an\pi}\right)^2\left(1-\exp\left(-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2t\right)\right)$$

即

$$u(x,t)=\frac{x}{\ell}At+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2A}{n\pi}(-1)^n\left(\frac{\ell}{an\pi}\right)^2\left(1-\exp\left(-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right).$$

3. 令

$$v(x,t)=u(x,t)-\frac{x^2}{2\ell}q$$

那么 v 满足

$$\begin{cases} v_t-a^2v_{xx}=\dfrac{qa^2}{\ell} & 0<x<\ell,t>0 \\ v|_{t=0}=-\dfrac{x^2}{2\ell}q & 0\le x\le\ell \\ v_x|_{x=0}=v_x|_{x=\ell}=0, & t>0 \end{cases}$$

特征方程为

$$X''+\lambda X=0\qquad X'(0)=X'(\ell)=0$$

从而

$$X_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(T_n'+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2T_n\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)=\frac{qa^2}{\ell}$$

当 $n\neq 0$ 时

$$T_n'+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2T_n=0$$

$$T_n(0) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell -\frac{x^2}{2\ell}q\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{2q\ell(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

解得

$$T_n(t) = -\frac{2q(-1)^n}{n^2\pi^2}\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t\right)$$

当 $n=0$ 时

$$T_n' = \frac{qa^2}{\ell}, \qquad T_0(t) = -\frac{q}{2\ell}\cdot\frac{2}{\ell}\int_0^\ell x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{q\ell}{3}$$

故

$$t_0(t) = \frac{qa^2}{\ell}t - \frac{q\ell}{3}.$$

从而

$$u(x,t) = \frac{qa^2}{\ell}t - \frac{q\ell}{3} + \frac{q}{2\ell}x - \frac{2q\ell}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

□

【题目 9】 设 $u \in C^{2,1}(\overline{Q}), u_t \in C^{2,1}(Q)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_x x = f(x,t) & (x,t)\in Q \\ u|_{t=0} = \phi(x) & 0 \le x \le \ell \\ u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0 & 0 \le t \le T \end{cases}$$

则有以下估计

$$\max_{\overline{Q}} |u_t| \le C\left(\|f\|_{C^!(\overline{Q})} + \|\phi''\|_{C[0,\ell]}\right).$$

证明. 令 $v = u_t$，那么 v 满足方程

$$\begin{cases} u_t - u_x x = f_t(x,t) & (x,t)\in Q \\ u|_{t=0} = f(x,0) + \phi''(x) & 0 \le x \le \ell \\ u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0 & 0 \le t \le T \end{cases}$$

从而

$$\max_{\overline{Q}} |u_t| = \max_{\overline{Q}} |v| \le T\cdot\|f_t\|_\infty + \|f(\cdot,0)+\phi''\|_\infty \le T\cdot\|f_t\|_\infty + \|f\|_\infty + \|\phi''\|_\infty$$

由于

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f_t\|_\infty + \|f_x\|_\infty$$

因此若令 $C = \max(T,1)$，那么

$$\max_{\overline{Q}} \|u_t| \le C\left(\|f\|_{C^1(Q)} + \|\phi''\|_{C[0,\ell]}\right)$$

□

【题目 10】 设 $u, u_x \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$，$u$ 满足第三边值问题

$$\begin{cases} Lu = u_t - u_{xx} = f(x,t), & (x,t)\in Q \\ u|_{t=0} = \phi & 0 \le x \le \ell \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\Big|_{x=0} = g_1 & 0 \le t \le T \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta u\Big|_{x=\ell} = g_2 & 0 \le t \le t. \end{cases}$$

其中 $\alpha, \beta \ge 0$ 给出 $\max\limits_{\overline{Q}} |u_x|$ 的估计。

证明. 令 $v=u_x$，那么 v 满足方程

$$\begin{cases} Lu = f_x & (x,t)\in Q \\ v|_{t=0} = \phi' & 0\le x\le \ell \\ v|_{x=0} = -g_1(t)+\alpha u(0,t) & 0\le t\le T \\ v|_{x=\ell} = g_2-\beta u(\ell,t) & 0\le t\le T \end{cases}$$

从而 $v=u_x$ 有估计

$$\max_{\overline{Q}}|u_x| = \max_{\overline{Q}}|v| \le T\cdot\|f_x\|_\infty + \max\left(\|\phi'\|_\infty, \|g_1\|_\infty+\alpha\|u\|_\infty, \|g_2\|_\infty+\beta\|u\|_\infty\right)$$

由于 u 满足的条件知

$$\|u\|_\infty = \max_{\overline{Q}}|u| \le C\left(\|f\|_\infty + \max\left(\|\phi\|_\infty, \|g_1\|\infty, \|g_2\|_\infty\right)\right)$$

其中 C 只与 T,ℓ 有关。综上

$$\max_{\overline{Q}}|u_x| \le C_1\left(\|g_1\|_\infty + \|g_2\|_\infty + \|\phi\|_{C^1} + \|f\|_{C^1}\right),$$

其中

$$C_1 = \max\left(T, \alpha C+\beta C+1\right).$$

□

【题目 11】 设 $u\in C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ 且满足

$$Lu = u_t - a^2u_{xx} + c(x,t)u \le 0, \qquad (x,t)\in Q,$$

其中 $c(x,t)$ 非负有界。证明：若 u 在 $\overline{Q}$ 上取得非负最大值，则 u 必然在抛物边界 Γ 上达到它在 $\overline{Q}$ 上的非负最大值。

证明. 首先设 $Lu<0$。反设 u 在 Q 上取得最大值。即存在 $(x_0,t_0)\in Q$ 使得

$$\max_{\overline{Q}} u = u(x_0,t_0) \ge 0.$$

那么有

$$u_t\ge 0, \qquad u_{xx}=0$$

这说明

$$Lu = u_t - a^2u_{xx} + c(x,t)u \ge 0$$

这与 $Lu<0$ 矛盾。

现考虑一般情况，即 $Lu\le 0$。考虑辅助函数

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$$

那么

$$Lv = Lu - \varepsilon(1+c(x,t)) < 0$$

由上述讨论知 v 的非负最大值必然在抛物边界取到，从而

$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\overline{Q}}(v+\varepsilon t) \le \max_{\overline{Q}} v + \varepsilon T \le \max_{\Gamma} v^+ + \varepsilon T \le \max_{\Gamma} u^+ + \varepsilon T.$$

由 ε 的任意性知

$$\max_{\overline{Q}} u \le \max_{\Gamma} u^+.$$

其中 $u^+ = \max(u,0)$。 □

【题目 12】 设 $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ 满足

$$Lu = u_t - a^2 u_{xx} + c(x,t) \leq 0, \qquad (x,t) \in Q.$$

其中 $c(x,t)$ 有界并且

$$c(x,t) \geq -c_0$$

证明：如果 $u|_\Gamma \leq 0$，那么必有

$$u \leq 0 \qquad \text{in } Q.$$

证明. 考虑辅助函数

$$v(x,t) = u(x,t)e^{-c_0 t}$$

那么

$$Lv + c_0 v = v_t - a^2 v_{xx} + c(x,t) + c_0 = e^{-c_0 t} Lu \leq 0$$

且

$$c_0 + c(x,t) \geq 0$$

那么由上题的结果知：v 只能在 Γ 上取得非负最大值。即有

$$v \leq \max_\Gamma v \leq 0$$

从而 $u \leq 0$。 □

【题目 13】 证明半无界问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi & 0 \leq x < \infty \\ u|_{x=0} = \mu & t \geq 0 \end{cases}$$

的有界解是唯一的。

证明. 只需证明当 $f = \phi = \mu = 0$ 时只有零解即可。记

$$K = \sup |u|.$$

$\forall\, L > 0$ 考虑区域

$$Q_L = \{(x,t) : 0 < x < L, 0 < t \leq t\}$$

以及辅助函数

$$v(x,t) = \pm u(x,t) + \frac{K}{L^2}\left(2a^2 t + x^2\right)$$

则

$$Lv = 0 \qquad v|_{t=0} = \frac{K}{L^2} x^2 \geq 0$$

$$v|_{x=0} = \frac{K}{L^2} \cdot 2a^2 t \geq 0 \qquad v|_{x=L} = \frac{K}{L^2}\left(2a^2 t + L^2\right) \pm u|_{x=L} \geq 0$$

由弱极值原理知

$$\min_{Q_L} v \geq \min_{\partial Q_L} v \geq 0$$

从而

$$|u| \leq \frac{K}{L}\left(2a^2 t + x^2\right), \qquad \forall\, (x,t) \in Q_L$$

从而对任意给定的 $(x_0, t_0) \in (0, +\infty) \times (0, T]$

$$|u| \leq \frac{K}{L}\left(2a^2 t_0 + x_0^2\right), \qquad \forall\, L > x_0.$$

令 $L \to \infty$ 则

$$|u(x_0,t_0)| = 0.$$

由 (x_0,t_0) 的任意性知 $u=0$。从而解唯一。 □

【题目 14】 设 $u \in C^{2,1}(\overline{Q})$ 是问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f & (x,t) \in Q \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & 0 \le t \le T. \end{cases}$$

的解，则 u 满足以下估计

$$\sup_{0\le t\le T} \int_0^\ell u_x^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le M\left(\int_0^\ell (\phi')^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).$$

证明. 在

$$u_t - u_{xx} = f$$

两边乘 u_t 并积分得

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int_0^\ell f u_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_0^\tau \int_0^\ell u_t^2 - u_{xx}u_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^\tau \left(u_x u_t|_0^\ell + \int_0^\ell u_x u_{xt}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\tau \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_0^\ell u_x u_{xt} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(u_x^2\Big|_0^\tau\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\tau \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\ell u_x^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\ell (\phi')^2 \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而由平均值不等式知

$$\int_0^\tau \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\ell u_x^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^\ell (\phi')^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

进而

$$\int_0^\tau \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\ell u_x^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x \le \int_0^\ell (\phi')^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

不等式两侧对 $\tau \in (0,T]$ 取上确界则有

$$\sup_{0\le t\le T} \int_0^\ell u_x^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^\ell u_t^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \int_0^\ell (\phi')^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

□

【题目 15】 设 $u \in C^{1,0}(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ 且满足以下定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (x,t) \in Q \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \le x \le \ell \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta u\Big|_{x=\ell} = 0 & 0 \le t \le T \end{cases}$$

其中 $\alpha, \beta \ge 0$，证明

$$\sup_{0\le t\le T} \int_0^\ell u^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^\ell u_x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le M\left(\int_0^\ell \phi^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).$$

其中 M 只依赖于 T, α。

证明. 在

$$u_t - a^2 u_{xx} = f$$

两边乘 u 并积分得

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int_0^\ell uf \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t &= \int_0^\tau \int_0^\ell u_t u - a^2 u_{xx} u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(u^2\Big|_0^\tau \right) \mathrm{d}x - a^2 \int_0^\tau \left(u_x u|_0^\ell - \int_0^\ell u_x^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\ell u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\ell \phi^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_0^\ell u_x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + a^2 \int_0^\tau \alpha u^2(0,t) + \beta u^2(\ell,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

进而由平均值不等式得

$$\int_0^\ell u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x + 2a^2 \int_0^\tau \int_0^\ell u_x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \int_0^\tau \int_0^\ell u^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\ell \phi^2 \,\mathrm{d}x.$$

记

$$\Omega(\tau) = \int_0^\tau \int_0^\ell u^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \qquad F(\tau) = \int_0^\ell \phi^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x$$

那么 $\Omega(0) = 0$。由上述不等式可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\tau} \le \Omega(\tau) + F(\tau).$$

故由 Gronwell 不等式知

$$\Omega(\tau) \le e^\tau F(\tau)$$

从而

$$\int_0^\ell u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x + 2a^2 \int_0^\tau \int_0^\ell u_x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le (1+e^\tau)\left(\int_0^\tau \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\ell \phi^2 \,\mathrm{d}x \right)$$

从而对 τ 取上确界有

$$\sup_{0\le\tau\le T} \int_0^\ell u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^\ell u_x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le M \left(\int_0^T \int_0^\ell f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\ell \phi^2 \,\mathrm{d}x \right)$$

其中

$$M = \frac{1+e^T}{\min(1, 2a^2)}$$

□

补充练习

【题目 16】 利用 Fourier 变换求解一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & \text{in } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u = \phi, \ \ u_t = \psi, & \text{on } \mathbb{R} \times \{t=0\}. \end{cases}$$

解. 在方程两遍对 x 进行 Fourier 变换有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\hat{u} + a^2\lambda^2 \hat{u} = \hat{f} \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\phi}, \ \ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}\Big|_{t=0} = \hat{\psi} \end{cases}$$

解得

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)\cos(a\lambda t) + \frac{1}{a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)\sin(a\lambda t) + \frac{1}{a\lambda}\int_0^t \hat{f}(\lambda,t)\sin(a\lambda(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

由于

$$(\cos(a\lambda t))^{\vee} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(x-at)+\delta(x+at)\right), \qquad \left(\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}\right)^{\vee} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a}\chi_{(-at,at]}(x)$$

故

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\phi*(\delta(\cdot-at)+\delta(\cdot+at))+\frac{1}{2}\psi*\chi_{(-at,at]}+\frac{1}{2}\int_0^t f*\chi_{(-a(t-\tau),a(t-\tau)])}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\left(\phi(x+at)+\phi(x-at)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\phi(y)\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

□

【题目 17】 利用 Fourier 变换求解上半平面 $y>0$ 的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \\ u(x,0)=f(x) & x\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,y)=0,\ \ \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x,y)=0 & \end{cases}$$

上述收敛关于 y 在 $(0,\infty)$ 上是一致的。并且当 $y\to\infty$ 时，u 关于 x 在 $\mathbb{R}$ 上一致有界。

证明. 关于 x 作 Fourier 变换有

$$-\lambda^2\hat{u}+\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}y^2}=0, \qquad \hat{u}(\lambda,0)=\hat{f}(\lambda).$$

通解为

$$\hat{u}(\lambda,y)=C_1e^{\lambda y}+C_2e^{-\lambda y}$$

对其进行 Fourier 逆变换有

$$u(x,y)=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\left(C_1e^{\lambda y}+C_2e^{-\lambda y}\right)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda.$$

由于当 $y>0$ 时

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}e^{\lambda y}e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$$

发散，故 $C_1=0$ 故

$$u(x,y)=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}C_2e^{-\lambda y}e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}0 & y>0\\ C_2\delta(x) & y=0\end{cases}$$

从而

$$u(x,y)=f(x)\delta(x).$$

□