第二章

矩 阵 代 数

本章主要内容:

① 矩阵的运算(加、减、乘、“除”);

② 矩阵运算的应用.

§2.1 矩 阵

一、矩阵的加法与数乘

二、矩阵的乘法

三、分块矩阵及其运算

§2.1 矩　　阵

一、矩阵的加法与数乘

1. 定义

定义 行数与列数均分别相等的两个矩阵称为**同型矩阵**.

定义2.1.1 若两个矩阵是同型的，且它们对应位置上的元素均分别相等，则称这两个矩阵**相等**. 也就是：

若$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$, 且

$$a_{ij}=b_{ij} \qquad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n),$$

则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$**相等**，记为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

§2.1 矩　阵

定义2.1.2　设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$, 称矩阵$[c_{ij}]_{m\times n}$为矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的**和**, 记为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[c_{ij}]_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n).$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & -5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 9 & -5 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

§1.1 矩阵的定义

例1.1.4 某公司有四个工厂，它们同时生产三种产品，产量如下表所示.

产品 / 工厂	P_1	P_2	P_3
甲	5	2	4
乙	3	8	2
丙	6	0	4
丁	0	1	6

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

§2.1 矩　阵

定义2.1.3 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, k为常数, 称矩阵$[c_{ij}]_{m\times n}$为数k与矩阵$\boldsymbol{A}$的**数乘**, 记为$k\boldsymbol{A}$, 即

$$k\boldsymbol{A}=[c_{ij}]_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=ka_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

$$A=\begin{bmatrix}-6 & 4 & 2\\ 0 & -10 & -2\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

$$3A=\begin{bmatrix}-18 & 12 & 6\\ 0 & -30 & -6\end{bmatrix} \qquad 0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

$$k\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$$

§ 2.1 矩　　阵

定义　设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$, 称矩阵$[c_{ij}]_{m\times n}$为矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的**差**, 记为$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=[c_{ij}]_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\qquad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n).$$

其实,

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

§2.1 矩 阵

2. 运算性质

定理2.1.1 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{O}$是同型矩阵, k和l是任意常数, 则以下运算规律成立:

1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (加法交换律);

2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ (加法结合律);

3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

4) $\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

6) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$ (数乘结合律);

7) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$ (分配律I);

8) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$ (分配律II).

二、矩阵的乘法

1. 定义

引入：大妈买菜算法.

定义2.1.4 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times n}$, 称矩阵$[c_{ij}]_{m\times n}$为矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的**积**, 记为$\boldsymbol{AB}$, 即

$$\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n)$$

注 只有当$\boldsymbol{A}$的列数和$\boldsymbol{B}$的行数相等时, $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$才能进行乘积.

§2.1 矩　　阵

2. 例子

例2.1.4 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 6\end{bmatrix},$$

试问：能否计算$\boldsymbol{AB}$? 能否计算$\boldsymbol{BA}$?

$$BA=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 15 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$$

§ 2.1 矩　阵

例2.1.5 设

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix},$$

试问：能否计算AB？能否计算BA？

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 20 & -22\end{bmatrix}\qquad BA=\begin{bmatrix}-14 & 1 & -3\\ 12 & 6 & 30\\ -14 & -2 & -15\end{bmatrix}$$

例2.1.6 设

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix},$$

试问：能否计算AB？能否计算BA？

$$AB=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -4 & -8\end{bmatrix}\qquad BA=\begin{bmatrix}6 & 5\\ -4 & -10\end{bmatrix}$$

§2.1 矩　阵

例2.1.2 考察n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta},$$

称为**线性方程组(2.1.2)的矩阵形式**.

例2.1.3 写出方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - x_4 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ \qquad 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

的矩阵形式.

§2.1 矩　　阵

例2.1.1 设矩阵A的行分别表示甲，乙，丙，丁四个工厂的生产情况，其列分别表示三种产品P_1，P_2，P_3的产量.

再设矩阵B的第一列分别表示三种产品P_1，P_2，P_3的单件利润，其第二列分别表示三种产品P_1，P_2，P_3的单件体积.

试计算甲，乙，丙，丁四个工厂的总利润和它们的产品需要的总存储空间.

$$A=\begin{bmatrix}5&2&4\\3&8&2\\6&0&4\\0&1&6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&4\\1&3\\3&2\end{bmatrix},\qquad AB=\begin{bmatrix}24&34\\20&40\\24&32\\19&15\end{bmatrix}$$

3. 运算性质

矩阵的乘法**不满足**交换律.

设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{6\times 8}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{3\times 5}$, 则$\boldsymbol{AB}$及$\boldsymbol{BA}$均无定义.

§2.1 矩　阵

例2.1.4 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 6\end{bmatrix},$$

试问：能否计算AB? 能否计算BA?

$$BA=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 15 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$$

§2.1 矩　阵

例2.1.5 设

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix},$$

试问：能否计算AB? 能否计算BA?

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 20 & -22\end{bmatrix}\qquad BA=\begin{bmatrix}-14 & 1 & -3\\ 12 & 6 & 30\\ -14 & -2 & -15\end{bmatrix}$$

§2.1 矩　　阵

例2.1.6 设

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix},$$

试问：能否计算$\boldsymbol{AB}$? 能否计算$\boldsymbol{BA}$?

$$AB=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -4 & -8\end{bmatrix}\qquad BA=\begin{bmatrix}6 & 5\\ -4 & -10\end{bmatrix}$$

§2.1 矩　阵

对于矩阵的乘法，通常会说**左乘**或**右乘**. 比如，对于AB, 称为A**左乘**B, 或B**右乘**A.

§2.1 矩　阵

矩阵的乘法不满足消去律.

两个非零矩阵之积不一定是非零矩阵.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\3&0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&3&1\\-2&0&5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&0&0\\-3&1&5\\-2&0&2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}=\boldsymbol{AC}$$

$$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$$

§2.1 矩　　阵

定理2.1.2 设A, B, C是任意矩阵，k为任意常数，如果下述运算都有意义，则

1) $(AB)C=A(BC)$　　(乘法结合律);

2) $A(B+C)=AB+AC$　　(乘法对加法的左分配律);

　$(B+C)A=BA+CA$　　(乘法对加法的右分配律);

3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$;

4) $IA=A=AI$.

§ 2.1 矩　　阵

第二章　矩阵代数

三、矩阵的转置

定义2.1.5 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，称矩阵 $[b_{ij}]_{n\times m}$ 为矩阵 A 的**转置矩阵**，记为 A^{T}，如果

$$b_{ij}=a_{ji}\quad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m).$$

注　直观上看，列变行，行变列.

定义2.1.6 如果 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 满足 $A=A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为**对称矩阵**.

注　A 为对称矩阵当且仅当 $a_{ij}=a_{ji}\,(i, j=1, 2, \cdots, n)$. 直观上看，关于主对角线对称.

例2.1.7

(1) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$，那么 $A^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(3) 设 $A=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$，那么 $A^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

§2.1 矩　　阵

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -5\\ 2 & -5 & 7\end{bmatrix}$，那么

$$A^T=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -5\\ 2 & -5 & 7\end{bmatrix},$$

A为对称矩阵.

§2.1 矩　　阵

定理2.1.2 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$是任意矩阵, k为任意常数, 如果下述运算都有意义, 则

4) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

5) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

6) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

7) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

四、矩阵的方幂

定义n阶方阵的正指数**方幂**:

$$A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k}, \qquad k\text{为正整数.}$$

矩阵的方幂满足运算性质:

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}, \quad \left(A^k\right)^l = A^{kl}, \quad k, l\text{为正整数.}$$

§2.1 矩　　阵

课堂练习　　P38：1(1)(3)，2(1)，3(2)(4)，6

作　　业　P38-39：2(2)，4，7，9

思 考 题　　P38：5，8

　　　　　　P40：25

回顾

1. 同型矩阵
2. 矩阵相等
3. 矩阵的和　　矩阵的差
4. 矩阵的数乘
5. 矩阵的积　　运算性质
6. 矩阵的转置

矩阵的乘法不满足交换律.

矩阵的乘法不满足消去律.

两个非零矩阵之积不一定是非零矩阵.

§2.1 矩　阵

五、分块矩阵及其运算

1. 定义

定义 对给定的矩阵A, 在行间作若干水平线, 在列间作若干垂直线, 把A划分成若干**规模较小**的"矩阵". 这些规模较小的"矩阵"均称为A的**子块**, 以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

§ 2.1 矩　　阵

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right],$$

子块：$A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_{12}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

$A_{21}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{22}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,

分块矩阵：$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$.

A 也可按如下分法进行分块:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ \hdashline -2 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}.$$

子块:

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & 4\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix},$$

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

A还可按如下分法进行分块

$$A=\left[\begin{array}{r:r:r:r:r} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{bmatrix}.$$

子块:

$$\beta_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \beta_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \beta_4=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_5=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

§2.1 矩　阵

2. 分块矩阵的运算

(1) 加法与数乘

假设对两个同型矩阵，用完全相同的分法进行分块，即

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{bmatrix},$$

则

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{bmatrix}.$$

若k为任一数，则

$$kA=\begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1s} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{r1} & kA_{r2} & \cdots & kA_{rs} \end{bmatrix}.$$

(2) 乘法

若A为$m\times s$矩阵，B为$s\times n$矩阵. 对A与B进行分块，且A的列的分法与B的行的分法是一致的，即

$$A=\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rk} \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 & \quad s_2 & \quad \cdots & \quad s_k \end{matrix} & \end{array} \qquad B=\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kt} \end{bmatrix} & \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 & \quad n_2 & \quad \cdots & \quad n_t \end{matrix} & \end{array}$$

令

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{ik}B_{kj},$$

$$(i=1, 2, \cdots, r;\ \ j=1, 2, \cdots, t)$$

则

$$AB=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix}.$$

例 2.1.8 设

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}-1&2&0\\3&2&0\\ \hdashline 0&0&2\\0&0&3\end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{ccc:cc}2&-2&1&0&0\\3&3&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&-3&-7\end{array}\right],$$

计算 $\boldsymbol{AB}$.

$$A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix}A_1B_1&0\\0&A_2B_2\end{bmatrix}.$$

§2.1 矩　阵

注 对于分块矩阵，若除主对角线上的子块外，其余子块均为零块(零矩阵)，则称此矩阵为**对角分块矩阵**，或称为**准对角矩阵**.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}$$

§2.1 矩 阵

$$A=\left[\begin{array}{ccc:c:cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix},$$

子块:

$$A_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2=[2], \quad A_3=[3, \ -5]$$

§2.1 矩　阵

若有两个对角分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}_i$与$\boldsymbol{B}_i(i=1, 2, \cdots, r)$可相乘, 则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$可相乘, 且

$$AB=\begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_rB_r \end{bmatrix}.$$

§2.1 矩　阵

课堂练习　P40：21(1)

作　　业　P40：21(2)

思 考 题　P40：22

§2.2 逆 矩 阵

一、逆矩阵的定义

二、逆矩阵的性质

三、矩阵的“除法”

四、逆矩阵的应用

五、例子

§2.2 逆矩阵

一、逆矩阵的定义

1. 问题的引入

2. 逆矩阵的定义

定义2.2.1 设A是一个n阶方阵. 若存在一个n阶方阵B, 使得

$$AB=BA=I,$$

则称B是A的一个**逆矩阵**. 此时A称为**可逆矩阵**, 或**非奇异矩阵**. 否则, 称为**不可逆矩阵**, 或**奇异矩阵**.

注 若B是A的逆矩阵, 则A也是B的逆矩阵, 也就是, 它们互为逆矩阵.

§2.2 逆矩阵

例2.2.1 证明矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

不可逆.

用反证法.

例2.2.2 验证下列两矩阵互为逆矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1\end{bmatrix}.$$

§2.2 逆矩阵

二、逆矩阵的性质

定理2.2.1 若方阵$\boldsymbol{A}$可逆, 则其逆矩阵唯一.

注 记可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的唯一逆矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}$. 显然,

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}.$$

性质2.2.1 若n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆, 则其转置矩阵也可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

§2.2 逆矩阵

性质2.2.3 若A与B均为n阶可逆矩阵, 则AB也可逆, 且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

注 性质2.2.3可推广到有限多个矩阵的情形:

若$A_1, A_2, \cdots, A_k$均为n阶可逆矩阵, 则$A_1A_2\cdots A_k$也可逆, 且

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

§2.2 逆矩阵

三、矩阵的“除法”

无法定义除法.

但若A可逆，我们可定义:

A左除C: $A^{-1}C$,

A右除C: CA^{-1} .

§2.2 逆矩阵

四、逆矩阵的应用

1. 弱消去律

性质2.2.2 设A, B, C为三个矩阵.

(1) 若$AB=O$(或$BA=O$), 且A可逆, 则$B=O$;

(2) 若$AB=AC$(或$BA=CA$), 且A可逆, 则$B=C$.

2. 解线性方程组(理论上)

设线性方程组的矩阵形式为: $AX=\beta$, 且A为可逆矩阵, 则

$$X=A^{-1}\beta.$$

五、例子

例2.2.3 设

$$A=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix},$$

其中$d_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n$. 试验证

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

§2.2 逆矩阵

例2.2.4 设n阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}$$

是对角分块矩阵，且每一个$\boldsymbol{A}_i(i=1, 2, \cdots, r)$均可逆，则$\boldsymbol{A}$可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{bmatrix}.$$

§2.2 逆矩阵

课堂练习 P39：11，13

作　　业 P39：10，12

思 考 题 P39：16

P40：23

回顾

1. 分块矩阵
2. 分块矩阵的运算　　　运算性质
3. 对角分块矩阵
4. 逆矩阵　　可逆矩阵　　奇异矩阵
5. 逆矩阵的性质及应用
6. 矩阵的“除法”：左除、右除

§2.3 初 等 矩 阵

一、初等矩阵的定义

二、初等变换的静态描述

三、初等矩阵的逆矩阵

§ 2.3 初等矩阵

一、初等矩阵的定义

对单位矩阵**只**施行**一次**初等变换所得到的矩阵，统称为**初等矩阵**. 共有三种初等矩阵:

1. 交换单位矩阵的第i行(列)与第j行(列)得到的矩阵称为**I型初等矩阵**, 记为$P(i,j)$, 即

$$
\begin{array}{cc}
P(i,j)=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & \cdots & 1 & & \\
& & \vdots & & \vdots & & \\
& & 1 & \cdots & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$r_i \leftrightarrow r_j$

$c_i \leftrightarrow c_j$

§2.3 初等矩阵

2. 单位矩阵的第i行(列)乘以**非零**常数k得到的矩阵称为**II型初等矩阵**, 记为$P(i(k))$, 即

$$P(i(k))=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ i\\ \\ \\ \end{matrix}$$

kr_i

kc_i

§ 2.3 初等矩阵

3. 单位矩阵的第i行(j列)乘以常数k加到第j行(i列)得到的矩阵称为**III型初等矩阵**, 记为$\boldsymbol{P}(i(k), j)$,

$$P(i(k),j)=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} i & \qquad & j \end{array} & \end{array}$$

kr_i+r_j

kc_j+c_i

§2.3 初等矩阵

$$kr_i+r_j$$

$$P(i(k),j)=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & k & & \\ & & \vdots & & & \\ & & \cdots & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} & & j & i & & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$kc_j+c_i$$

§ 2.3 初等矩阵

二、初等变换的静态描述

定理2.3.1 (1) 用$P(i, j)$左乘一矩阵，相当于对该矩阵施行一次初等行变换$r_i \leftrightarrow r_j$；用$P(i, j)$右乘一矩阵，相当于对该矩阵施行一次初等列变换$c_i \leftrightarrow c_j$.

(2) 用$P(i(k))$左乘一矩阵，相当于对该矩阵施行一次初等行变换kr_i；用$P(i(k))$右乘一矩阵，相当于对该矩阵施行一次初等列变换kc_i.

(3) 用$P(i(k), j)$左乘一矩阵，相当于对该矩阵施行一次初等行变换kr_i+r_j；用$P(i(k), j)$右乘一矩阵，相当于对该矩阵施行一次初等列变换kc_j+c_i.

§ 2.3 初等矩阵

例2.3.1 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad P(2,3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(3(5))=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad P(3(8),2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P}(2, 3)\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}(3(5))\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}(3(8), 2)\boldsymbol{A}$

§2.3 初等矩阵

三、初等矩阵的逆矩阵

性质2.3.1 若P是一个初等矩阵，则P是可逆矩阵，且其逆矩阵P^{-1}是同类型的初等矩阵：

(1) $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$;

(2) $P(i(k))^{-1}=P(i(k^{-1}))$;

(3) $P(i(k),j)^{-1}=P(i(-k),j)$.

§2.3 初等矩阵

作　　业　P39：14，15

§2.4 矩阵可逆的充分必要条件

一、矩阵可逆的充分必要条件

二、求逆矩阵的初等(行)变换法

三、应用

§ 2.4 矩阵可逆的充要条件

一、矩阵可逆的充分必要条件

定义2.4.1 设 A, B 均为 $m\times n$ 矩阵. 若存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_k$, 使得

$$B = P_k \cdots P_2 P_1 A, \qquad \text{(静态描述)}$$

则称 A **行等价于** B.

注1 上面等式对应的动态过程: 对 A 施行 k 次初等行变换得到 B.

注2 任一矩阵都行等价于一个阶梯型矩阵和一个最简型矩阵.

注3 若 A 行等价于 B, 则 B 也行等价于 A.

§2.4 矩阵可逆的充要条件

定理2.4.1 设A是一个n阶方阵，则下列条件等价：

(1) A是可逆矩阵；

(2) 齐次线性方程组$AX=O$仅有零解；

(3) A行等价于单位矩阵I；

(4) A等于若干初等矩阵的乘积.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots\ 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中，$c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在行的首元素，且 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n$.

当$r=n$时，只有零解(有惟一解).

§2.4 矩阵可逆的充要条件

情形2 若$d_{r+1}=0$, 且$r=n$, 则原方程组有惟一解.

$$\begin{cases} c_{11}x_1+\cdots & +c_{1n}x_n=0, \\ \quad c_{22}x_2+\cdots & +c_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots & \\ \qquad c_{n-1,n-1}x_{n-1} & +c_{n-1,n}x_n=0, \\ & c_{nn}x_n=0. \end{cases}$$

其中, $c_{11},\cdots,c_{nn}$ 分别是它们所在方程的首项系数.

§2.4 矩阵可逆的充要条件

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$c_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

最简型

阶梯型

§2.4 矩阵可逆的充要条件

注 判断矩阵A是否可逆的简单且可操作的方法：用初等行变换把矩阵A化成阶梯型矩阵，然后判断是否$r=n$？

例2.4.1 判断下述矩阵A是否可逆：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ -3 & -2 & 22 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不可逆

二、求逆矩阵的初等(行)变换法

设n阶方阵A可逆. 则由定理2.4.1可知，存在初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_k$，使得

$$I = P_k \cdots P_2 P_1 A,$$

而由上式可得

$$A^{-1} = P_k \cdots P_2 P_1 I,$$

比较上述两式对应的动态过程可知:

若对A和I施行完全相同的初等行变换，则当把A化为单位矩阵I时，I就化为A^{-1}.

求逆矩阵的初等(行)变换法

首先将n阶矩阵A与n阶单位矩阵I并排写成一个$n\times 2n$矩阵

$$B=[A \mid I],$$

然后对矩阵B施行初等行变换，当把A所在的位置化为单位矩阵I时，I所在的位置就被化成了A^{-1}.

注1 目标是把B化简为最简型矩阵.

注2 上述求逆矩阵的过程同时也可判断矩阵是否可逆.

§ 2.4 矩阵可逆的充要条件

例2.4.2 判断下述矩阵A是否可逆，若可逆，求其逆矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

三、应用

例子 求解线性方程组：$AX=\beta$.

若 A 为可逆矩阵，则

$$X=A^{-1}\beta.$$

例2.4.3 求解**矩阵方程**$AX-B=X$, 其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&4\\2&-1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\\2&0\end{bmatrix}.$$

$$(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-3/2&1&-1/2\end{bmatrix}$$

$$X=(A-I)^{-1}B=\begin{bmatrix}6&-5\\10&-10\\-4&9/2\end{bmatrix}$$

§2.4 矩阵可逆的充要条件

补充：计算$A^{-1}C$的初等(行)变换法：

将矩阵A与矩阵C并排写成一个矩阵

$$B=[\,A \mid C\,],$$

然后对矩阵B施行初等行变换，目标是把B化简为最简型矩阵. 在此最简型矩阵中，A所在的位置变成了单位矩阵I，而C所在的位置变成了$A^{-1}C$.

$$I=P_k P_{k-1}\cdots P_1 A,$$

$$A^{-1}=P_k P_{k-1}\cdots P_1 I,$$

$$A^{-1}C=P_k P_{k-1}\cdots P_1 C.$$

补充：计算$A^{-1}C$的初等(行)变换法：

将矩阵A与矩阵C并排写成一个矩阵

$$B=[\,A \mid C\,],$$

然后对矩阵B施行初等行变换，目标是把B化简为最简型矩阵. 在此最简型矩阵中，A所在的位置变成了单位矩阵I，而C所在的位置变成了$A^{-1}C$.

$$I=P_kP_{k-1}\cdots P_1A,$$

$$A^{-1}C=P_kP_{k-1}\cdots P_1C.$$

课堂练习　P39-40：18(1)，19(1)

作　　业　P39-40：18(2)(4)，20

思 考 题　　P40：19(2)

回顾

1. 初等矩阵及其逆矩阵

2. 初等变换的静态描述

3. 矩阵的行等价

定义2.4.1 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$m\times n$矩阵. 若存在初等矩阵$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_k$, 使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},$$

则称$\boldsymbol{A}$**行等价于**$\boldsymbol{B}$.

动态: 对$\boldsymbol{A}$可施行若干次初等行变换得到$\boldsymbol{B}$.

任一矩阵都行等价于阶梯型和最简型.

回顾

定理2.4.1 设A是一个n阶方阵，则下列条件等价:

(1) A是可逆的;

(2) 齐次线性方程组$AX=O$仅有零解;

(3) A行等价于单位矩阵I (最简型);

(4) A等于若干初等矩阵的乘积.

回顾

求逆矩阵的初等(行)变换法

将n阶矩阵A与n阶单位矩阵I并排写成一个$n\times 2n$矩阵

$$B=[A \,\vdots\, I],$$

然后对矩阵B施行**初等行变换**，目标是把B化简为**最简型矩阵**. 在此最简型矩阵中，A所在的位置变成了单位矩阵I，而I所在的位置变成了A^{-1}.

回顾

补充：计算$A^{-1}C$的初等(行)变换法：

将矩阵A与矩阵C并排写成一个矩阵

$$B=[\,A \mid C\,],$$

然后对矩阵B施行**初等行变换**，目标是把B化简为**最简型矩阵**. 在此最简型矩阵中，A所在的位置变成了单位矩阵I，而C所在的位置变成了$A^{-1}C$.