第五章

特征值与特征向量

本章主要内容：

① 矩阵的特征值与特征向量；

② 矩阵的对角化.

§5.1 矩阵的特征值与特征向量

一、定义

二、求特征值与特征向量的方法

三、特征多项式及特征值的性质

§5.1 矩阵的特征值与特征向量

一、定义

定义5.1.1 设A是n阶方阵. 如果存在数λ_0和非零向量β(n维列向量), 使得

$$A\beta=\lambda_0\beta, \tag{5.1.1}$$

则称λ_0是A的一个**特征值**, β是A的属于特征值λ_0的一个**特征向量**.

注 矩阵的特征向量与其特征值相互依存.

§5.1 矩阵的特征值与特征向量

定义5.1.2 设A是n阶方阵. 称λ的n次多项式$\det(A-\lambda I)$为A的**特征多项式**, 而方程$\det(A-\lambda I)=0$称为A的**特征方程**.

定理5.1.1 设A是n阶方阵. 数λ_0是矩阵A的特征值的充分必要条件是: $\det(A-\lambda_0 I)=0$, 即λ_0是A的特征方程$\det(A-\lambda I)=0$的解, 或者说λ_0是A的特征多项式$\det(A-\lambda I)$的根.

定理5.1.2 设A是n阶方阵, 数λ_0是矩阵A的特征值, 则向量β_0是A的属于特征值λ_0的特征向量, 当且仅当: β_0是齐次线性方程组

$$(A-\lambda_0 I)X=O$$

的非零解.

二、求特征值与特征向量的方法

设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵.

1. 计算特征多项式$\det(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})$;

2. 解特征方程$\det(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})=0$, 求出$\boldsymbol{A}$的特征值;

3. 对于$\boldsymbol{A}$的每一个特征值λ_i, 求出对应的齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$$

的一个基础解系. 则$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ_i的任一特征向量都是此基础解系的非零线性组合(即线性组合中的系数不全为零).

例5.1.2 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

的特征值与特征向量.

例5.1.3 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$$

的特征值与特征向量.

§5.1 矩阵的特征值与特征向量

例5.1.4 如果λ是矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，而$\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量. 证明：对任意正整数m, λ^m是$\boldsymbol{A}^m$的一个特征值，而$\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{A}^m$的属于特征值λ^m的一个特征向量.

三、特征多项式及特征值的性质

定义5.1.3 设矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$, 称

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

为矩阵$\boldsymbol{A}$的迹, 记为$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$, 即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

定理5.1.3 设矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$的特征多项式$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$为:

$$f(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

则

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), \\ a_0 &= \det(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

定理5.1.4 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$的$n$个特征值(重根按重数计), 则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det(\boldsymbol{A})$.

§ 5.1 矩阵的特征值与特征向量

课堂练习 P106-107：1(1)，2，14

作 业 P106：1(2)(3)，7

思 考 题 P107：10，12(1)，13

回顾

设A是n阶方阵. 如果存在数λ_0和非零向量β, 使得

$$A\beta=\lambda_0\beta, \qquad (5.1.1)$$

则称λ_0是A的一个**特征值**, β是A的属于特征值λ_0的一个**特征向量**.

数λ_0是矩阵A的特征值的充分必要条件是:

$$\det(A-\lambda_0 I)=0.$$

向量β_0是A的属于特征值λ_0的特征向量, 当且仅当: β_0是齐次线性方程组

$$(A-\lambda_0 I)X=O$$

的非零解.

回顾

求特征值与特征向量的方法

设A是n阶方阵.

1. 计算特征多项式$\det(A-\lambda I)$;

2. 解特征方程$\det(A-\lambda I)=0$, 求出A的特征值;

3. 对于A的每一个特征值λ_i, 求出对应的齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i I)X=O$$

的一个基础解系. 则A的属于特征值λ_i的任一特征向量都是此基础解系的**非零**线性组合(即线性组合中的系数**不全为零**).

回顾

矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式$\det(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})$

$$f(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

的系数为:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), \\ a_0 &= \det(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

矩阵$\boldsymbol{A}$的n个特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(重根按重数计)必满足:

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det(\boldsymbol{A})$.

§5.2 矩阵对角化问题

一、矩阵的相似

二、矩阵的对角化

§5.2 矩阵的对角化

一、矩阵的相似

定义5.2.1 设A, B为两个n阶方阵. 如果存在可逆矩阵T, 使得

$$T^{-1}AT = B,$$

则称A与B**相似**, 记为$A \sim B$.

注 矩阵的相似具有反身性, 对称性和传递性.

§5.2 矩阵的对角化

定理5.2.1 相似的矩阵有相同的特征多项式，从而有相同(重根按重数计)的特征值.

注 定理5.2.1的逆命题不成立，即具有相同特征多项式(从而有相同的特征值)的两个矩阵未必相似.

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

§5.2 矩阵的对角化

二、矩阵的对角化

定义5.2.2 设A为n阶方阵. 如果A与某个对角矩阵相似, 则称A**可对角化**.

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

注 A的全部特征值为: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

定理5.2.2 n阶方阵A可对角化的充要条件是A有n个线性无关的特征向量.

注 这n个线性无关的特征向量$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$是$T$的列向量, 而它们对应的特征值依次是对角矩阵的对角线上的元素.

§5.2 矩阵的对角化

定理5.2.3 属于A的不同特征值的特征向量线性无关.

定理5.2.4 n阶方阵A可对角化的充要条件是A有n个特征值(重根按重数计), 且对A的n_i重特征值λ_i, A有n_i个属于特征值λ_i的线性无关的特征向量.

推论5.2.1 若n阶方阵A有n个不同的特征值, 则A可对角化.

§5.2 矩阵的对角化

矩阵对角化的步骤：设A是n阶方阵.

1. 计算特征多项式$\det(A-\lambda I)$.

2. 解特征方程$\det(A-\lambda I)=0$, 求出A的全部特征值. 判断是否有可能对角化.

3. 对于A的每一个特征值λ_i, 求出对应的齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i I)X=O$$

的一个基础解系, 它们是属于特征值λ_i的线性无关的特征向量. 判断是否有可能对角化.

§5.2 矩阵的对角化

4. 用求出的n个线性无关的特征向量$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$作为列向量构造可逆矩阵$T$,

$$T=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix},$$

且用它们对应的特征值依次作为对角线上的元素构造对角矩阵, 则必有

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

§ 5.2 矩阵的对角化

例5.2.1 判断例5.1.2, 例5.1.3中的矩阵是否可对角化. 若可对角化, 求可逆矩阵T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

§ 5.2 矩阵的对角化

对于例5.1.2中的矩阵:

$$\lambda_1 = 5,\quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1,\quad \beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

§ 5.2 矩阵的对角化

第五章 特征值与特征向量

对于例5.1.3中的矩阵:

$$\lambda_1=-2,\ \beta_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\qquad \lambda_2=\lambda_3=1,\ \beta_2=\begin{bmatrix}3\\-6\\20\end{bmatrix}.$$

例5.1.3中的矩阵不可对角化.

§5.2 矩阵的对角化

例5.2.2 证明：若矩阵A为上(或下)三角矩阵，且对角线上的元素两两不同，则A可对角化.

例5.2.3 证明：若$A\sim B$, 则$A^m\sim B^m$, 且它们有相同的相似所需的可逆矩阵. 并由此计算例5.1.2中矩阵A的m次方幂A^m.

$$T^{-1}A^mT=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^m,\ A^m=T\begin{bmatrix}5^m&0&0\\0&(-1)^m&0\\0&0&(-1)^m\end{bmatrix}T^{-1}.$$

$$T=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad T^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

§5.2 矩阵的对角化

课堂练习 P107：3，15

作 业 P106-107：4(2)(3)，6，9

思 考 题 P106-107：5，8，11