第一章 绪论

许智武
xuzhiwu@szu.edu.cn
13713808048

1.1 集合的基础知识

- ## 1.1.1 集合及其表示
  - 集合：一定范围内的、确定的、并且彼此可以区分的对象汇集在一起形成的整体叫做**集合(set)**
  - 元素：集合的成员为该集合的**元素(element)**
  - 例如：（1）班上所有学生构成一个集合

    （2）所有自然数构成集合N
  - 如果a是集合A的元素，则记$a \in A$，**否则记**$a \notin A$
  - 例如：$6 \in N$，$1.5 \notin N$

1.1.1 集合及其表示

- 集合描述形式：
  - 列举法：例如 $\{a, b, c, \cdots, z\}$
  - 命题法：例如 $\{n \mid n\%2 = 0\}$
- 基数（势）：元素的个数，记为 $|A|$
  - 例如，$|\{a, b, c, \cdots, z\}| = 26$
- 集合的分类：有穷集与无穷集、可数集与不可数集
  - 例如，整数集Z是可数集，实数集R是不可数集

1.1.2 集合之间的关系

- 子集
  - 如果集合A中的每个元素都是集合B的元素，则称集合A是集合B的子集(subset)，集合B是集合A的包集(container)。记作$A\subseteq B$。也可记作$B\supseteq A$。
  - 例如：整数集Z是有理数集Q的子集，$Z\subseteq Q$
  - 如果$A\subseteq B$，且$\exists x\in B$，但$x\notin A$，则称A是B的真子集(proper subset)，记作$A\subset B$
  - 例如：整数集Z是有理数集Q的真子集，$Z\subset Q$
- 集合相等
  - 如果集合A，B含有的元素完全相同，则称集合A与集合B相等(equivalence)，记作$A=B$

1.1.2 集合之间的关系

对任意集合A、B、C：

(1) A=B 当且仅当 $A\subseteq B$且$B\subseteq A$。

(2) 如果$A\subseteq B$，则$|A|\leq|B|$。

(3) 如果$A\subset B$，则$|A|\leq|B|$。

(4) 如果A是有穷集，且$A\subset B$，则$|B|>|A|$。

(5) 如果$A\subseteq B$，则对$\forall x\in A$，有$x\in B$

(6) 如果$A\subset B$，则对$\forall x\in A$，有$x\in B$并且$\exists x\in B$，但$x\notin A$

(7) 如果$A\subseteq B$且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$

(8) 如果$A\subset B$且$B\subset C$，则$A\subset C$

(9) 如果A=B，则$|A|=|B|$

(10)如果$A\subseteq B$且$B\subset C$，或者$A\subset B$且$B\subseteq C$，则$A\subset C$

1.1.3 集合的运算

- **并(union)**
  - **A与B的并(union)是一个集合，该集合中的元素要么是A的元素，要么是B的元素，记作A∪B：**

    $A\cup B=\{a|a\in A$或者$a\in B\}$
  - **“∪”为并运算符，A∪B读作A并B。**
  - **例子：** 设A＝｛1，2，3，4｝，B＝｛1，3，5，7｝，求A∪B
  - 有穷序列：$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\{a|\exists i$，$1\le i\le n$，使得$a\in A_i\}$
  - 无穷序列：$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\cup\ldots=\{a|\exists i$，$i\in N$,使得$a\in A_i\}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad \bigcup_{A\in S} A=\{a\mid \exists A\in S, a\in A\}$$

1.1.3 集合的运算—并

对任意集合A、B、C：

(1) $A \cup B = B \cup A$ （交换律）

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ （结合律）

(3) $A \cup A = A$ （幂等律）

(4) $A \cup B = A$ iff $B \subseteq A$

(5) $\Phi \cup A = A$ （Φ是幺元）

(6) $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

1.1.3 集合的运算—交

- **A与B的交是一个集合，该集合中的元素是由既属于A又属于B的所有元素组成，记作A∩B：**

  $A \cap B = \{a | a \in A 且 a \in B\}$

- **“∩”为交运算符，A∩B读作A交B。**
- **如果A∩B=Φ，则称A与B不相交。**

- 例子： 设A＝｛1，2，3，4｝，B＝｛1，3，5，7｝，求A∩B

1.1.3 集合的运算—交

对任意集合A、B、C：

(1) $A\cap B=B\cap A$ （交换律）

(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ （结合律）

(3) $A\cap A=A$ （幂等律）

(4) $A\cap B=A$ 当且仅当 $A\subseteq B$

(5) $\Phi\cap A=\Phi$ （Φ是零元）

(6) $|A\cap B|\leq\min\{|A|，|B|\}$

(7) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （分配律）

(8) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （分配律）

(9) $A\cap(A\cup B)=A$

(10) $A\cup(A\cap B)=A$。

1.1.3 集合的运算—差

- 属于A，但不属于B的所有元素组成的集合叫做A与B的差，记作A-B

  $A-B=\{a|a\in A$ 且 $a\notin B\}$
- 例如：A＝｛1，2，3，4｝，B＝｛1，3，5，7｝，A－B＝？
- 对任意集合A、B、C：

(1) $A-A=\Phi$。

(2) $A-\Phi=A$。

(3) $A-B\neq B-A$。

(4) $A-B=A$ 当且仅当 $A\cap B=\Phi$。

(5) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$。

(6) $|A-B|\leq|A|$。

1.1.3 集合的运算—对称差

- 属于A但不属于B，属于B但不属于A的所有元素组成的集合叫A与B的**对称差，记作**$A \oplus B$

$$A \oplus B = \{a \mid a \in A \text{且} a \notin B \text{或者} a \notin A \text{且} a \in B\}$$

- **“⊕”为对称差运算符，**$A \oplus B$**读作A对称减B**

- 例如：A＝｛1，2，3，4｝，B＝｛1，3，5，7｝，$A \oplus B = ?$

- $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

1.1.3 集合的运算—笛卡儿积

- **A与B的笛卡儿积(Cartesian product)是一个集合，该集合是由所有这样的有序对(a，b)组成的，其中a∈A，b∈B，记作A×B**

  A×B={(a，b)|a∈A& b∈B }

- **“×”为笛卡儿乘运算符，A×B读作A叉乘B**

- **例如：**A＝｛1，2，3，4｝，B＝｛1，3，5，7｝，A×B＝？

1.1.3 集合的运算—笛卡儿积

对任意集合A、B、C：

(1) $A\times B\neq B\times A$

(2) $(A\times B)\times C\neq A\times (B\times C)$

(3) $A\times A\neq A$

(4) $A\times \Phi=\Phi$

(5) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(6) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

(7) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(8) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

(9) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

(10) $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

(11) 当A、B为有穷集时，$|A\times B|=|A|*|B|$

1.1.3 集合的运算—幂集

- A幂集(power set)是一个集合，该集合是由A的所有子集组成的，记作2^A

$$2^A=\{B|B\subseteq A\}$$

- 2^A读作A的幂集。
- 例如： A＝｛1，2，3，4｝，2^A=?

1.1.3 集合的运算—幂集

对任意集合A、B、C：

(1) $\Phi \in 2^A$。

(2) $\Phi \subseteq 2^A$。

(3) $\Phi \subset 2^A$。

(4) $2^\Phi = \{\Phi\}$。

(5) $A \in 2^A$。

(6) 如果A是有穷集，则$|2^A| = 2^{|A|}$。

(7) $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$。

(8) 如果$A \subseteq B$，则$2^A \subseteq 2^B$。

1.1.3 集合的运算—补集

论域U：讨论问题的范围

A是论域U上的一个集合，A的补集是由U中、但不在A中的所有元素组成的集合，记作$\overline{A}$

$$\overline{A} = U - A$$

例如，U={1,2,3,4,5}，A={2,4}，求 $\overline{A}$

1.1.3 集合的运算—补集

U 是论域，A、B 是 U 上集合：

（1）$\overline{\emptyset}=U$

（2）$\overline{U}=\emptyset$

（3）如果$A\subseteq B$，则$\overline{B}\subseteq\overline{A}$

（4）$A\cup\overline{A}=U$

（5）$A\cap\overline{A}=\emptyset$

（6）$B=\overline{A}\Leftrightarrow A\cup B=U$ 且 $A\cap B=\emptyset$

（7）$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

（De Morgan公式）

（8）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

练习

- P30第7题

设A={1,2,3,4,5,6}, B={1,3,5}, C={2,4,6}是论域U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}上的集合，计算下列表达式

(1) $A \cap B$

(2) $(A \cap B) \cup C$

(3) $(A \cap B) \cup (U - C)$

(4) $A - B - C$

(5) $A \times B \times C \times \emptyset$

(6)$(\mathrm{A} \cap B) \cup \overline{A \cup C} \cup \bar{A}$

(7) $A \times \overline{B \times \overline{A \cap C}}$

(8) $\overline{\overline{A \cup B}} \cap (A \cup B) \cup C$

1.2 关系

- 二元关系
- 递归定义与归纳证明
- 关系的闭包

1.2.1 二元关系(binary relation)

- **例子**
  - 同学间的高矮胖瘦关系
  - 整数间的大小关系
  - 同学们取得的成绩（人与整数的关系）
- **二元关系**
  - 任意的$R \subseteq A \times B$，R是A到B的二元关系。
  - (a，b) $\in$R，也可表示为：aRb。
  - A称为**定义域**(domain)，B称为**值域**(range)。
  - 当A=B时，则称R是A上的二元关系。

1.2.1 二元关系(binary relation)

- **二元关系的性质**
  - 自反性: $(a,a) \in R$
  - 反自反性: $(a,a) \notin R$
  - 对称性: $(a,b) \in R$，则$(b,a) \in R$
  - 反对称性: $(a,b) \in R$且$(b,a) \in R$，则$a = b$
  - 传递性：$(a,b) \in R$且$(b,c) \in R$，则$(a,c) \in R$
- **三歧性**
  - 自反性、对称性、传递性
- 例子：$=$?，$<$?，$>$?，$\subseteq$?

1.2.2 等价类 (equivalence class)

- **等价关系**(equivalence relation)
  - 具有三歧性的二元关系称为**等价关系**
  - 例如，自然数的＝关系，模2同余关系
- **等价类** (equivalence class)

R是S上的等价关系，满足下列要求的S的划分：S_1、S_2、S_3、…、S_n…称为S关于R的等价划分，S_i称为等价类。

(1) $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_n \cup \ldots$；

(2) 如果$i \neq j$，则$S_i \cap S_j = \Phi$；

(3) 对任意的i，S_i中的任意两个元素a、b，aRb恒成立；

(4) 对任意的i，j，$i \neq j$，S_i中的任意元素a和S_j中的任意元素b，aRb恒不成立

1.2.2 指数(index)

- **指数**(index)
  - 把R将S分成的等价类的个数称为是R在S上的指数。如果R将S分成有穷多个等价类，则称R具有有穷指数；如果R将S分成无穷多个等价类，则称R具有无穷指数。
  - 给定集合S上的一个等价关系R，R就确定了S的一个等价分类，当给定另一个不同的等价关系时，它会确定S的一个新的等价分类。
- 例子
  - ＝关系将自然数N分成无穷多个等价类：{1},{2},…
  - 模2同余关系将N分成2个等价类：奇数集，偶数集

1.2.3 关系的合成(composition)

- **例子**：R＝{**同学们**}×{成绩}， S={**成绩**}×{等级}，**能否得到**{**同学们**}×{等级}的关系？
- **关系的合成** (composition)

  设$R_1 \subseteq A \times B$是A到B的关系、$R_2 \subseteq B \times C$是B到C的关系，R_1与R_2的**合成**$R_1 \circ R_2$是A到C的关系：

  $$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid \exists (a, b) \in R_1 \text{且} (b, c) \in R_2\}$$

- **为了方便**，$R_1 \circ R_2$**简写为**R_1R_2
- **例子**：R＝{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)}，S={(1, 3), (2, 4), (3, 5)}， RS?

1.2.3 关系的合成(composition)

R_1, R_2, R_3分别是S上二元关系：

(1) $R_1R_2 \neq R_2R_1$

(2) $(R_1R_2)R_3=R_1(R_2R_3)$ (结合率)

(3) $(R_1 \cup R_2)R_3=R_1R_3 \cup R_2R_3$ (右分配率)

(4) $R_3(R_1 \cup R_2)=R_3R_1 \cup R_3R_2$ (左分配率)

(5) $(R_1 \cap R_2)R_3 \subseteq R_1R_3 \cap R_2R_3$

(6) $R_3(R_1 \cap R_2) \subseteq R_3R_1 \cap R_3R_2$

1.2.4 递归定义与归纳证明

- 递归定义(recursive definition)
  - 又称为归纳定义(inductive definition)，可以用来定义一个集合。
  - 集合的递归定义由三部分组成：
    - 基础(basis)：用来定义该集合的最基本的元素。
    - 归纳(induction)：指出用集合中的元素来构造集合的新元素的规则。
    - 极小性限定：指出一个对象是所定义集合中的元素的充要条件是它可以通过**有限次**的使用基础和归纳条款中所给的规定构造出来。

1.2.4 递归定义与归纳证明

例子：著名的斐波那契(Fibonacci)数的定义

⑴基础：0是第一个斐波那契数，1第二个斐波那契数;

⑵归纳：如果n是第i个斐波那契数，m是第i+1个斐波那契数，则n+m是第i+2个斐波那契数，这里i为大于等于1的正整数。

⑶只有满足(1)和(2)的数才是斐波那契数

0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…

1.2.4 递归定义与归纳证明

例子： 算术表达式

(1)基础：常数是算术表达式，变量是算术表达式；

(2)归纳：如果E_1、E_2是表达式，则$+E_1$、$-E_1$、E_1+E_2、E_1-E_2、E_1*E_2、E_1/E_2、E_1^E_2、$Fun(E_1)$是算术表达式，其中Fun为函数名。

(3)只有满足(1)和(2)的才是算术表达式

1+2，　id＋id＊id

1.2.4 递归定义与归纳证明

- 利用递归来定义关系的n次幂：

  设R是S上的二元关系，R的n次幂R^n递归地定义为：

  (1) $R^0=\{(a, a) \mid a \in S\}$

  (2) $R^i=R^{i-1}R$，$i=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

- 例子：S＝｛1，2，3，4，5｝，R＝｛（1，2），（2，3），（3，4），（4，5），（5，1）｝，R^2＝？ R^3＝？

1.2.4 递归定义与归纳证明

- 归纳证明
  - 与递归定义相对应。
  - 归纳证明方法包括三大步：
    - 基础(basis)：证明最基本元素具有相应性质。
    - 归纳(induction)：证明如果某些元素具有相应性质，则根据这些元素用所规定的方法得到的新元素也具有相应的性质。
    - 根据归纳法原理，所有的元素具有相应的性质。
  - 典型例子：自然归纳法

1.2.4 递归定义与归纳证明

例子：对有穷集合A，证明$|2^A|=2^{|A|}$。

证明：

设A为一个有穷集合,施归纳于$|A|$：

(1) 基础：当$|A|=0$时,$|2^A|=|\{\Phi\}|=1=2^0$。

(2) 归纳：假设$|A|=n$时结论成立，这里$n\geq 0$，往证当$|A|=n+1$时结论成立。

不妨假设$A=B\cup\{a\}$，$a\notin B$，则

$$2^A=2^B\cup\{C\cup\{a\}\,|\,C\in 2^B\}$$

且$2^B\cap\{C\cup\{a\}\,|\,C\in 2^B\}=\Phi$

1.2.4 递归定义与归纳证明

$$
\begin{aligned}
|2^A| &= |2^B \cup \{C \cup \{a\} | C \in 2^B\}| \\
&= |2^B| + |\{C \cup \{a\} | C \in 2^B\}| \\
&= |2^B| + |2^B| \\
&= 2 * |2^B| \\
&= 2 * 2^{|B|} \\
&= 2^{|B|+1} \\
&= 2^{|A|}
\end{aligned}
$$

(3) 由归纳法原理，结论对任意有穷集合成立。

1.2.4 递归定义与归纳证明

- 递归定义给出的概念有利于归纳证明。在计算机科学与技术学科中，有许多问题可以用递归定义描述或者用归纳方法进行证明，而且在许多时候，这样做会带来许多方便。

- 主要是掌握**递归定义与归纳证明的叙述格式**。

1.2.5 关系的闭包

- **闭包(closure)**
  - 设P是关于关系的性质的集合，关系R的P闭包(closure)是包含R并且具有P中所有性质的最小关系
  - 若P是自反的，则称R是自反闭包
  - 若P是对称的，则称R是对称闭包
  - 若P是传递的，则称R是传递闭包
  - 构造关系R的闭包方法就是向R中加入必要的有序对，使其具有所希望的性质

1.2.5 关系的闭包

- **正闭包R^+(positive closure)**

  (1)$R \subseteq R^+$

  (2)如果(a，b)，(b，c)$\in R^+$ 则(a，c)$\in R^+$

  (3)除(1)、(2)外，R^+不再含有其他任何元素

- **R^+具有传递性**
- **可以证明，对任意二元关系R,**

  $$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \ldots$$

- **而且当S为有穷集时：**

  $$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^{|S|}$$

1.2.5 关系的闭包

- 克林闭包R^* (Kleene closure)
  - (1) $R^0 \subseteq R^*$, $R \subseteq R^*$。
  - (2) 如果(a，b)，(b，c)$\in R^*$ 则(a，c)$\in R^*$。
  - (3) 除(1)、(2)外，R^*不再含有其他任何元素。

- R^*具有自反性、传递性。

1.2.5 关系的闭包

- 可以证明，对任意二元关系R，

  $R^{*}= R^{0}\cup R^{+}$

  $R^{*} = R^{0}\cup R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup R^{4}\cup \ldots$

- 而且当S为有穷集时：

  $R^{*}= R^{0}\cup R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup \ldots\cup R^{|S|}$

1.2.5 关系的闭包

R_1、R_2是S上的两个二元关系

(1) $\Phi^+=\Phi$

(2) $\Phi^*=?$

(3) $(R_1^+)^+=R_1^+$

(4) $(R_1^*)^*=R_1^*$

(5) $R_1^+ \cup R_2^+ \subseteq (R_1 \cup R_2)^+$

(6) $R_1^* \cup R_2^* \subseteq (R_1 \cup R_2)^*$

1.2 练习

- （P31第10题）设R_1和R_2是集合{a, b, c, d, e}上的二元关系，其中

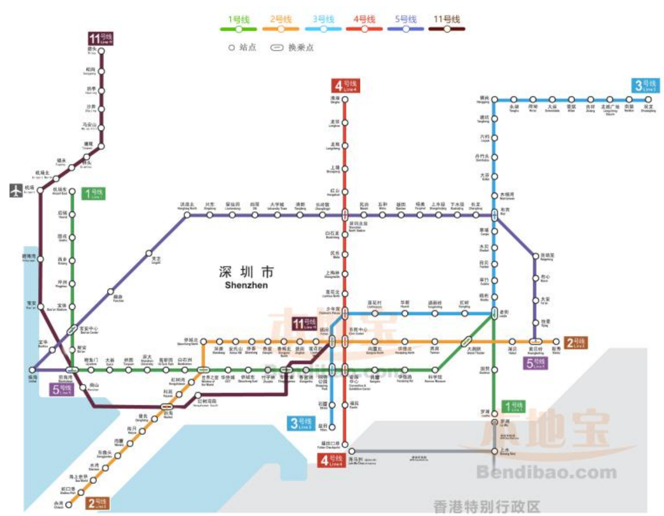
$R_1=\{(a,b), (c,d), (b,d), (b,b), (d,e)\}$,

$R_2=\{(a,a), (b,c), (d,c), (e,d), (c,a)\}$.

求R_1R_2，R_2R_1，R_1^+，R_2^+，R_1^*，R_2^*

1.3 图

- 直观地讲，图是由一些点和一些连接两点的边组成。 例如，地铁线路图



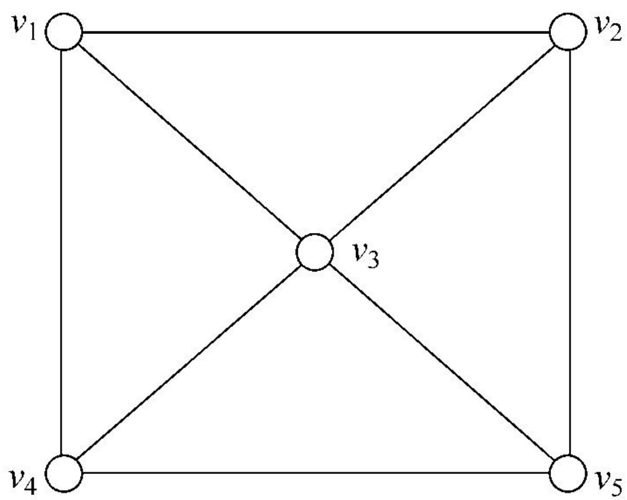
- 含无方向的边的图为无向图，含带有方向的边的图为有向图

1.3.1 无向图

- **无向图(undirected graph)**
  - 设V是一个非空的有穷集合，$E \subseteq V \times V$，$G=(V，E)$称为无向图(undirected graph)。其中V中的元素称为顶点(vertex或node)，V称为顶点集，E中的元素称为无向边(undirected edge)，E为无向边集。
  - 例子：设$G_1 = (V，E)$是一个无向图，$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$E=\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$

1.3.1 无向图

- **图表示**
  - V中称为顶点v的元素用标记为v的小圈表示，E中的元素(v_1，v_2)用标记为v_1，v_2的顶点之间的连线表示
  - 例子，上例图G_1可用下图表示：



1.3.1 无向图

- **路(path)**
  - 如果对于$0 \le i \le k-1$，$k \ge 1$，均有$(v_i, v_{i+1}) \in E$，则称v_0，v_1，…，v_k是$G=(V, E)$的一条长为k的路
- **回路或圈(cycle)**
  - 当路v_0，v_1，…，v_k中$v_0=v_k$时，v_0，v_1，…，v_k叫做一个**回路或圈(cycle)**
- 例子：上例图G_1中
  - （1）v_1, v_2, v_3, v_4, v_5:路？ 回路？
  - （2）v_1, v_2, v_3, v_4, v_1： 路？ 回路？
  - （3）$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$： 路？ 回路？

1.3.1 无向图

- **顶点的度数**
  - 对于v∈V，|{w|(v，w)∈E}|称为无向图G=(V，E)的顶点v的度数，记作deg(v)
- 例子，上例图G_1中各点的度数各是？
- 对于任何一个图，图中所有顶点的度数之和为图中边的2倍：

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = 2*|E|$$

1.3.1 无向图

- **连通图**
  - 如果对于$\forall$v，w$\in$V，v$\neq$w，v与w之间至少有一条路存在，则称G=(V，E)是**连通图**。
  - 图G是连通的充要条件是G中存在一条包含图的所有顶点的路。

- 上例G_1是否连通图？

1.3.2 有向图

- **有向图(directed graph)**
  - **G=(V，E)，其中V为顶点(vertex或node)集，**
  - **$(v_1, v_2) \in E$：顶点v_1到顶点v_2的有向边(directed edge)，或弧(arc)，v_1称为前导(predecessor)，v_2称为后继(successor)。**
- **图表示**
  - V中称为顶点v的元素用标记为v的小圈表示，E中的元素(v_1, v_2)用从标记为v_1的顶点到标记为v_2的顶点的弧表示。

1.3.2 有向图

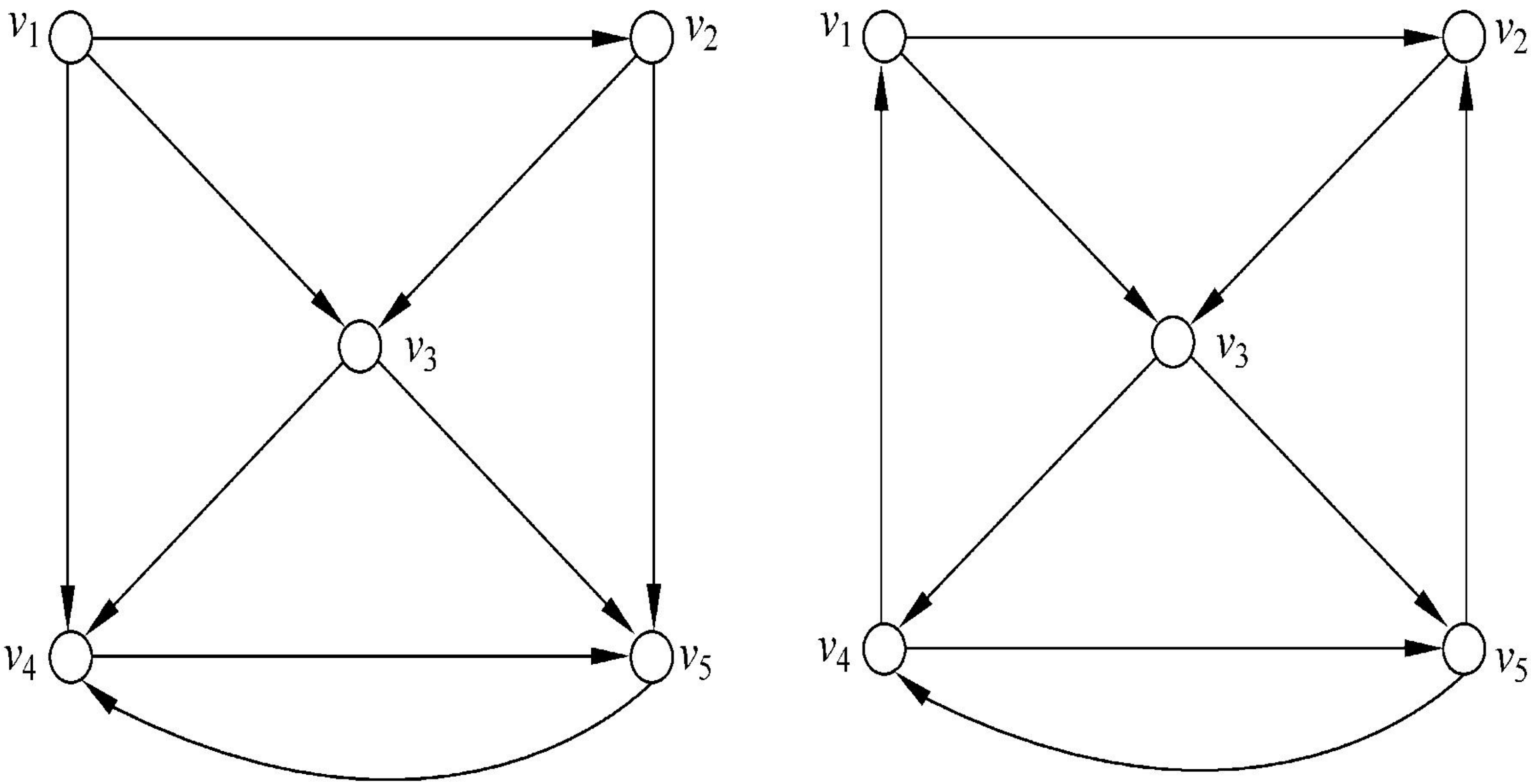
- **有向路(directed path)**
  - 如果对于$0 \leqslant i \leqslant k-1$，$k \geqslant 1$，均有$(v_i, v_{i+1}) \in E$，则称$v_0$，$v_1$，…，$v_k$是G的一条长为k的**有向路**。
- **有向回路或有向圈(directed cycle)**
  - 对于$0 \leqslant i \leqslant k-1$，$k \geqslant 1$，均有$(v_i, v_{i+1}) \in E$，且$v_0 = v_k$，则称$v_0$，$v_1$，…，$v_k$是G的一条长为k的有向路为一个有向回路。
  - 有向回路又叫有向圈。

1.3.2 有向图

- 顶点的度数
  - 入度(数)：ideg(v)=|{w|(w，v)∈E}|
  - 出度(数)：odeg(v)= |{w|(v，w)∈E}|
- **对于任何一个有向图，图中所有顶点的入度之和与图中所有顶点的出度之和正好是图中边的个数**

$$\sum_{v\in V} i\deg(v) = \sum_{v\in V} o\deg(v) = |E|$$

1.3.2 有向图



两个不同的有向图

1.3.3 树

- 满足如下条件的有向图G=(V，E)称为一棵(有序、有向)**树(tree)：**
  - **根(root) v：**没有前导，且v到树中其他顶点均有一条有向路。
  - 每个非根顶点有且仅有一个前导。
  - 每个顶点的后继按其拓扑关系从左到右排序。

1.3.3 树

■树的基本概念

(1)　顶点也可以成为结点。

(2)　结点的前导为该结点的父亲(父结点father)。

(3)　结点的后继为它的儿子(son)。

(4)　如果树中有一条从结点v_1到结点v_2的路，则称v_1是v_2的祖先(ancestor), v2是v1的后代(descendant)。

(5)　无儿子的顶点叫做叶子(leaf)。

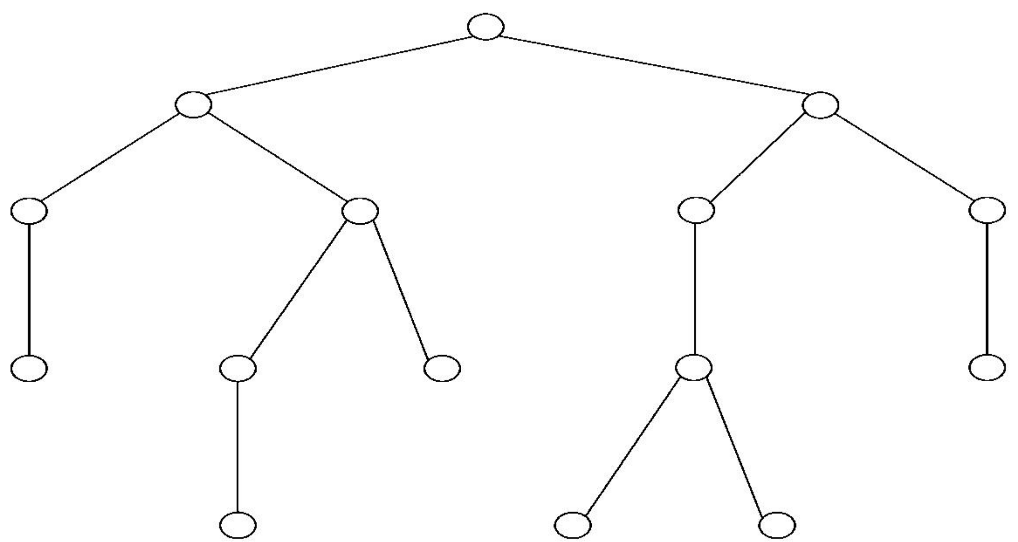
(6)　非叶结点叫做中间结点(interior)。

1.3.3 树

- **树的层**
  - 根处在树的第1层(level)。
  - 如果结点v处在第i层(i≥1)，则v的儿子处在第i+1层。
  - 树的最大层号叫做该树的高度(height)。

1.3.3 树

- **二元树**
  - 如果对于$\forall v \in V$，v最多只有2个儿子，则称G=(V，E)为二元树(binary tree)。
  - 对一棵二元树，它的第n层最多有2^{n-1}个结点。一棵n层二元树最多有个2^{n-1}叶子。



1.3 练习

- （P32第20题（5））证明任意无向图G满足：

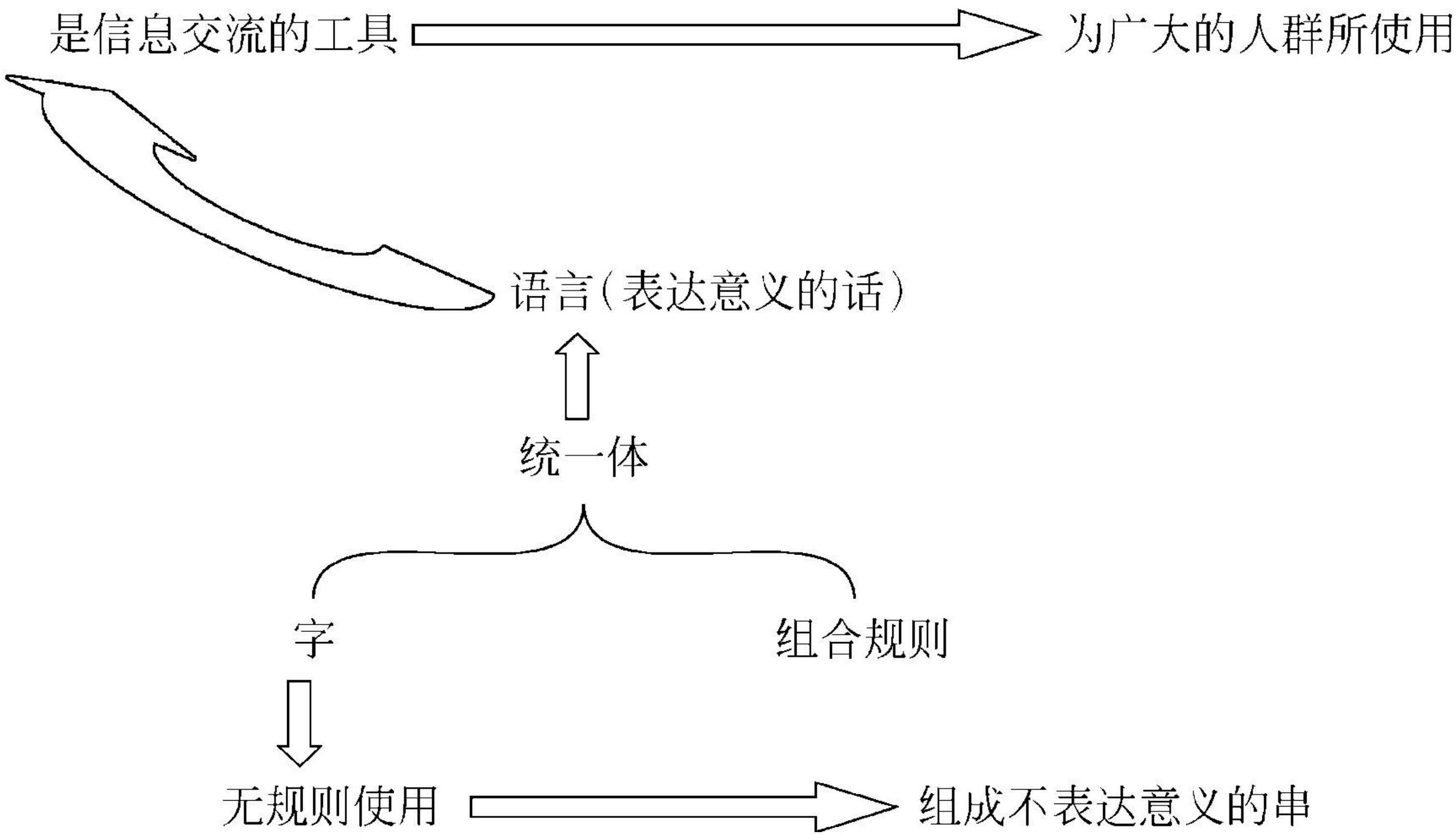
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 * |E|$$

1.4 语言

1.4.1 什么是语言

- 语言是一定的群体用来进行交流的工具。
- 例如：
  - "我是一个大学生"
  - "学大一生是个我"
- 必须有着一系列的生成规则、理解(语义)规则。

1.4.1 什么是语言



语言是字及其组合规则的统一体

1.4.2 形式语言与自动机理论的产生与作用

- 形式语言与自动机理论在计算机科学与技术学科人才的计算思维的培养中占有极其重要的地位

- 计算学科的主题：“什么能被有效地自动化”

被有效地自动化

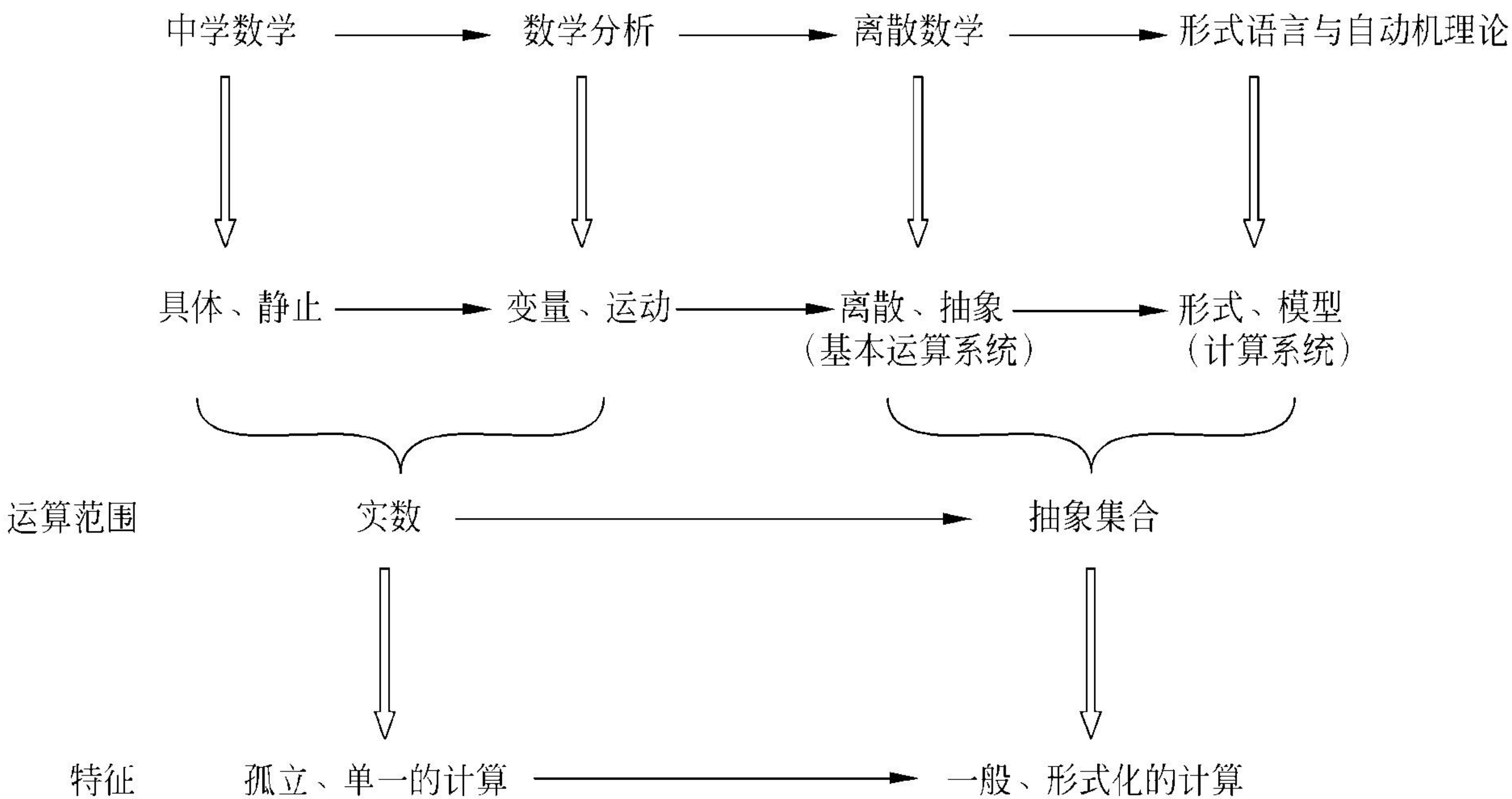
⇓

形式化

⇓

“计算思维”

1.4.2 形式语言与自动机理论的产生与作用



计算思维梯级训练系统

1.4.3 基本概念

- 对语言研究的三个方面
  - 表示(**representation**)—— 无穷语言的表示。
  - 有穷描述(**finite description**) ——研究的语言要么是有穷的，要么是可数无穷的，这里主要研究可数无穷语言的有穷描述。
  - 结构(**structure**)——语言的结构特征。

1.4.3 基本概念

- **字母表(alphabet)**
  - **字母表**是一个非空有穷集合，字母表中的元素称为该字母表的一个**字母(letter)**，又叫做**符号(symbol)**、或者**字符(character)**
  - 非空性
  - 有穷性
- **例如：**

  {a，b，c，d}

  { a，b，c，…，z}

  {0,1}

1.4.3 基本概念

- 字符的两个特性
  - 整体性(monolith)，也叫不可分性
  - 可辨认性(distinguishable)，也叫可区分性

- 例（续）

  {a，a′，b，b′}

  {aa，ab，bb}

  {∞，∧，∨，≥，≤}

1.4.3 基本概念

- 字母表的乘积(product)

  $\sum_1\sum_2=\{ab|a\in\sum_1，b\in\sum_2\}$

- 例如：

  {0,1}{0,1}={00，01，10，11}

  {0,1}{a，b，c，d}={0a，0b，0c，0d，1a，1b，1c，1d}

  {a，b，c，d}{0,1}={a0，a1，b0，b1，c0，c1，d0，d1}

  {aa，ab，bb}{0,1}={ aa0，aa1，ab0，ab1，bb0，bb1}

1.4.3 基本概念

- 字母表∑的n次幂

  $\sum^0=\{\varepsilon\}$，其中ε是由∑中的0个字符组成的

  $\sum^n=\sum^{n-1}\sum$

- ∑的正闭包

  $\sum^+=\sum\cup\sum^2\cup\sum^3\cup\sum^4\cup\ldots$

- ∑的克林闭包

  $\sum^*=\sum^0\cup\sum^+=\sum^0\cup\sum\cup\sum^2\cup\sum^3\cup\ldots$

1.4.3 基本概念

- 例如：

  $\{0,1\}^+ = \{0,\ 1,\ 00,\ 01,\ 10,\ 11,\ 000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ \ldots\}$

  $\{0,1\}^* = \{\varepsilon,\ 0,\ 1,\ 00,\ 01,\ 10,\ 11,\ 000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ \ldots\}$

  $\{a,\ b,\ c,\ d\}^+ = ?$

  $\{a,\ b,\ c,\ d\}^* = ?$

1.4.3 基本概念

- **句子(sentence)**

  $\sum$是一个字母表，$\forall x \in \sum^*$，x叫做$\sum$上的一个句子

- **句子相等**

  两个句子被称为相等，如果它们对应位置上的字符都对应相等

- **别称**

  字(word)、(字符、符号)行(line)、(字符、符号)串(string)

1.4.3 基本概念

- **出现(appearance)**
  - x，y∈$\sum^*$，a∈$\sum$，句子xay中的a叫做a在该句子中的一个**出现**。
  - 当x=ε时，a的这个出现为字符串xay的首字符
  - 如果a的这个出现是字符串xay的第n个字符，则y的首字符的这个出现是字符串xay的第n+1个字符。
  - 当y=ε时，a的这个出现是字符串xay的尾字符
  - 例：abaabb，多少出现？首字符？末字符？

1.4.3 基本概念

- **句子的长度(length)**
  - $\forall x \in \Sigma^*$，句子x中字符出现的总个数叫做该**句子的长度**，记作$|x|$。
  - **长度为0的字符串叫空句子，记作ε。**
- 例如：

  $|abaabb|=?$

  $|bbaa|=?$

  $|\varepsilon|=?$

  $|bbabaabbbaa|=?$

1.4.3 基本概念

- 注意事项
  - ε是一个句子。
  - {ε}≠*Φ*。这是因为{ε}不是一个空集，它是含有一个空句子ε的集合。|{ε}|=1，而|*Φ*|=0。

1.4.3 基本概念

- **并置(concatenation)**
  - x，y∈$\sum^*$，x，y的**并置**是由串x直接相接串y所组成的。记作xy。并置又叫做**连结**

- **串x的n次幂**

  $x^0=\varepsilon$

  $x^n=x^{n-1}x$

1.4.3 基本概念

- **例如：**
  - **对$x=001$，$y=1101$**

    $x^0=y^0=\varepsilon$

    $x^4=001001001001$

    $y^4=1101110111011101$
  - **对$x=0101$，$y=110110$**

    $x^2=?$

    $y^2=?$

    $x^4=?$

    $y^4=?$

1.4.3 基本概念

- Σ^*上的并置运算性质

  (1) 结合律：$(xy)z=x(yz)$。

  (2) 左消去律：如果$xy=xz$，则$y=z$。

  (3) 右消去律：如果$yx=zx$，则$y=z$。

  (4) 唯一分解性：存在唯一确定的a_1，a_2，…，$a_n \in \Sigma$，使得$x= a_1a_2\ldots a_n$。

  (5) 单位元素：$\varepsilon x=x\varepsilon=x$。

1.4.3 基本概念

- **前缀与后缀**

设x，y，z，w，v∈∑*，且x=yz

(1) y是x的前缀(prefix)。

(2)如果z≠ε，则y是x的真前缀(proper prefix)。

(3) z是x的后缀(suffix)；

(4) 如果y≠ε，则z是x的真后缀(proper suffix)。

1.4.3 基本概念

- **公共前缀与后缀**

(5) 如果x=yz，w=yv，则y是x和w的公共前缀(common Prefix)

(6) y是x和w的公共前缀，如果x和w的任何公共前缀都是y的前缀，则y是x和w的最大公共前缀。

(7) 如果x=zy，w=vy，则y是x和w的公共后缀(common suffix)

(8) y是x和w的公共后缀，如果x和w的任何公共后缀都是y的后缀，则y是x和w的最大公共后缀

1.4.3 基本概念

- **例子，** 字母表Σ={a，b}上的句子abaabb的前缀、后缀、真前缀和真后缀：

  前缀：ε，a，ab，aba，abaa，abaab，abaabb

  真前缀：ε，a，ab，aba，abaa，abaab

  后缀：ε，b，bb，abb，aabb，baabb，abaabb

  真后缀：ε，b，bb，abb，aabb，baabb

- **例子，**abaabb**与**ababb**的公共前缀、最大公共前缀，公共后缀，最大公共后缀**

  公共前缀：ε，a，ab，aba

  公共后缀：ε，b，bb，abb

1.4.3 基本概念

- 对任意句子x，有以下结论：

(1) x的任意前缀y有惟一的一个后缀z与之对应，使得x=yz；反之亦然。

(2) x的任意真前缀y有惟一的一个真后缀z与之对应，使得x=yz；反之亦然。

(3) |{w|w是x的后缀}|=|{w|w是x的前缀}|。

(4) |{w|w是x的真后缀}|=|{w|w是x的真前缀}|。

(5) {w|w是x的前缀}={w|w是x的真前缀}∪{x}，|{w|w是x的前缀}|=|{w|w是x的真前缀}|+1。

1.4.3 基本概念

- 对任意句子x，有以下结论：

(6) {w|w是x的后缀}={w|w是x的真后缀}∪{x}，

|{w|w是x的后缀}|=|{w|w是x的真后缀}|+1。

(7) 对于任意字符串w，w是自身的前缀，但不是自身的真前缀；w是自身的后缀，但不是自身的真后缀。

(8) 对于任意字符串w，ε是w的前缀，且是w的真前缀；ε是w的后缀，且是w的真后缀

1.4.3 基本概念

- 约定

(1) 用小写字母表中较为靠前的字母a，b，c，…表示字母表中的字母。

(2) 用小写字母表中较为靠后的字母x，y，z，…表示字母表上的句子。

(3) 用x^T表示x的倒序。例如，如果x=abc，则x^T=cba。

1.4.3 基本概念

- 子串(substring)
  - w，x，y，z∈$\sum^*$，且w=xyz，则称y是w的子串
- 公共子串(common substring)
  - t，u，v，w，x，y，z∈$\sum^*$，且t=uyv，w=xyz，则称y是t和w的公共子串(common substring)。如果y_1，y_2，……，y_n是t和w的公共子串，且max{$|y_1|$，$|y_2|$，…，$|y_n|$}=$|y_j|$，则称y_j是t和w的最大公共子串。
  - 两个串的最大公共子串并不一定是惟一的

1.4.3 基本概念

- **语言(language)**

  $\forall L \subseteq \Sigma^*$，L称为字母表∑上的一个**语言(language)**，$\forall x \in L$，x叫做L的一个句子。

- **例：{0，1}上的不同语言**

  {00，11}

  {0，1}

  {0，1，00，11}

  {0，1，00，11，01，10}

1.4.3 基本概念

- 语言的**乘积(product)**

$L_1 \subseteq \Sigma_1^*$，$L_2 \subseteq \Sigma_2^*$，语言L_1与L_2的乘积是字母表$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$上的一个语言，该语言定义为：

$$L_1L_2=\{xy \mid x \in L_1,\ y \in L_2\}$$

- 例子：$L_1=\{0,\ 1\}$，$L_2=\{a,b,c,d\}$，$L_1L_2=?$

1.4.3 基本概念

- **幂**

  $\forall L \in \Sigma^*$，L的n次**幂**是一个语言，该语言定义为

  (1) 当n=0是，$L^n=\{\varepsilon\}$。

  (2) 当n≥1时，$L^n= L^{n-1}L$ 。

- **正闭包**

  $L^+=L \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots$

- **克林闭包**

  $L^*= L^0 \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots$

  - **语言是句子的集合，本质上是集合的幂与闭包操作**

1.4.3 基本概念

- **例：{0，1}上的不同语言**

$\{0, 1\}$

$\{0, 1, 00, 11\}$

$\{0, 1, 00, 11, 01, 10\}$

$\{00, 11\}^*$

$\{01, 10\}^*$

$\{00, 01, 10, 11\}^*$

$\{0\}\{0, 1\}^*\{1\}$

$\{0, 1\}^*\{111\}\{0, 1\}^*$

1.4 练习

- P32第20题（5）（6）选一题
- (P33第23题) 设 $\Sigma=\{aa, ab, bb, ba\}$，求字符串aaaaabbbba的所有前缀的集合，后缀的集合，真前缀的集合，真后缀的集合
- （P34第32题）设 $\Sigma=\{0, 1\}$
  - （1）所有以0开头的串
  - （4）所有最多有一对连续的0或者最多有一对连续的1的串
  - （7）所有长度为奇数的串
  - （10）所有不包含3个连续0的串

1.5 小结

(1) 集合：集合的表示、集合之间的关系、集合的基本运算

(2) 关系：主要介绍了二元关系相关的内容，包括等价关系、等价分类、关系合成、关系闭包

(3) 递归定义与归纳证明

(4) 图：无向图、有向图、树的基本概念

(5) 语言与形式语言：自然语言的描述，形式语言和自动机理论的出现与作用

(6) 基本概念：字母表、字母、句子、字母表上的语言、语言的基本运算