第四章

向量间的线性关系与线性方程组

深圳大学数学与计算科学学院
College of Mathematics and Computational Science

第四章 向量与线性方程组

本章主要内容：

① 向量空间的定义；

② 向量空间中向量之间的线性关系；

③ 向量空间的基与维数；

④ 矩阵的秩；

⑤ 线性方程组解的结构.

§4.1 向量空间和子空间的定义

一、向量空间$\mathbf{R}^n$

二、$\mathbf{R}^n$的子空间

§4.1 向量空间与子空间

一、向量空间$\mathbf{R}^n$

记$\mathbf{R}$为所有实数组成的集合, n为正整数. 设所有n元有序实数组组成的集合为:

$$\mathbf{R}^n=\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\middle| a_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,\cdots,n\right\}.$$

在$\mathbf{R}^n$上定义加法和数乘:

设$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$与$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$为$\mathbf{R}^n$中两个元素, k为实数, 则

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)+(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$
$$=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n);$$
$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n).$$

§4.1 向量空间与子空间

显然，上述定义的加法和数乘也满足矩阵加法和数乘的8条运算规律(参见定理2.1.1).

定义4.1.2 集合$\mathbf{R}^n$搭配如上定义的加法和数乘，称为**n维(实)向量空间**.

$\mathbf{R}^n$的元素称为**n维向量**；设向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，称$a_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 为该向量的第i个**分量**，或第i个**坐标**.

当n元有序数组被写成一行$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$时，称为**n维行向量**；而被写成一列$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$时，称为**n维列向量**.

§2.1 矩　　阵

2. 运算性质

定理2.1.1 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{O}$是同型矩阵, k和l是任意常数, 则以下运算规律成立:

1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (加法交换律);

2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ (加法结合律);

3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

6) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

7) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

8) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

§4.1 向量空间与子空间

可定义减法:

零向量: $\boldsymbol{O}=(0, 0, \cdots, 0)$,

负向量: $-(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$,

减法: $(a_1, a_2, \cdots, a_n)-(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$=(a_1, a_2, \cdots, a_n)+[-(b_1, b_2, \cdots, b_n)]$

$=(a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_n-b_n)$.

还可定义向量的相等.

没有定义向量的乘法!

二、$\mathbf{R}^n$的子空间

定义4.1.3 设W是$\mathbf{R}^n$的一个非空子集. 如果

(1) 对任意$\alpha, \beta\in W$, 有$\alpha+\beta\in W$;

(2) 对任意$\alpha\in W$及任意$k\in\mathbf{R}$, 有$k\alpha\in W$,

则称W是$\mathbf{R}^n$的一个**子空间**.

注1 定义4.1.3中条件(1)(2)表明: W对$\mathbf{R}^n$上定义的加法和数乘运算, 是封闭的.

注2 容易验证: $\mathbf{R}^n$和$\{O\}$是$\mathbf{R}^n$的子空间, 称为$\mathbf{R}^n$的平凡子空间.

注3 $\mathbf{R}^n$ $(n=1, 2, \cdots)$及其子空间均称为**向量空间**.

例4.1.1 证明：如果W是$\mathbf{R}^n$的一个子空间，则$\boldsymbol{O}\in W$.

$$\exists \boldsymbol{\alpha}\in W,$$

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}\in W,$$

$$O=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})\in W.$$

另证：

$$O=0\boldsymbol{\alpha}\in W.$$

§4.1 向量空间与子空间

例4.1.2 设W是$\mathbf{R}^2$中所有形如

$$\begin{bmatrix} a \\ 3a \end{bmatrix} (a\text{为任意实数})$$

的向量组成的集合. 验证W是$\mathbf{R}^2$的一个子空间.

例4.1.3 对正整数$n\geq 2$, 令

$$S=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},0)\middle| a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\in\mathbf{R}\right\}.$$

验证S是$\mathbf{R}^n$的一个子空间.

例4.1.4 设

$$T=\{(a_1,a_2,1)|a_1,a_2\in\mathbf{R}\}.$$

验证T不是$\mathbf{R}^3$的子空间.

§4.1 向量空间与子空间

总结 验证W是否是$\mathbf{R}^n$的子空间的步骤:

1. 集合W非空(看看是否$\mathbf{O}\in W$);
2. W对$\mathbf{R}^n$上定义的加法封闭;
3. W对$\mathbf{R}^n$上定义的数乘封闭.

§4.1 向量空间与子空间

课堂练习　P93：1

作　　业　P93：2，3(1)

§4.2 线性组合与线性表出

一、线性组合与线性表出

二、生成子空间

§4.2 线性组合与线性表出

一、线性组合与线性表出

定义4.2.1 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$, $k_1, k_2, \cdots, k_m$为实数, 称向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的一个**线性组合**.

定义4.2.2 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta \in \mathbf{R}^n$. 若**存在**实数$l_1, l_2, \cdots, l_m$, 使得

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m,$$

则称向量β**可由**向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$**线性表出**.

定理 向量β**可由**向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出, 当且仅当: 向量$\beta$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的**一个**线性组合.

例4.2.2 判断向量$\beta=(1, 2, 0, -2)^T$是否可由向量组

$$\alpha_1=(1, 1, 1, 0)^T,\ \alpha_2=(1, 1, 0, 1)^T,$$
$$\alpha_3=(1, 0, 1, 1)^T,\ \alpha_4=(0, 1, 1, 1)^T$$

线性表出.

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$$

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-2\end{bmatrix}$$

§4.2 线性组合与线性表出

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 = 2 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

判断线性方程组是否有解?

不必求出具体的解!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

回顾

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$$

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 = 2 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\-2\end{bmatrix}$$

§4.2 线性组合与线性表出

例4.2.1 **线性方程组的向量形式**: 设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

设系数矩阵的列向量为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 常数项向量为$\beta$, 则(4.2.1)可改写成如下的**向量形式**:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta.$$

定理 线性方程组(4.2.1)有解的充分必要条件是: 常数项向量β可由系数矩阵的列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出.

二、生成子空间

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$，记$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的所有线性组合构成的集合为$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$，即

$$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$
$$= \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \mid k_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, m\}.$$

定理4.2.1 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是$\mathbf{R}^n$中的一组向量，则$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$是$\mathbf{R}^n$的一个子空间.

定义 称$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$是由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$**生成的子空间**，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是**生成元**.

定理 向量β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出，当且仅当：$\beta \in \mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

§4.2 线性组合与线性表出

课堂练习　　P94：5(1)

作　　业　　P94：5(2)

思 考 题　　P93：3(2)

回顾

1. n维(实)向量空间$\mathbf{R}^n$
2. $\mathbf{R}^n$的子空间
3. 线性组合
4. 线性表出
5. 生成子空间

回顾

例4.2.1 **线性方程组的向量形式**: 设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

设系数矩阵的列向量为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 常数项向量为$\beta$, 则(4.2.1)可改写成如下的**向量形式**:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

定理 线性方程组(4.2.1)有解的**充分必要**条件是: 常数项向量β可由系数矩阵的列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出, 或者 $\beta \in \mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

§4.3 线性相关与线性无关

一、定义

二、性质

§ 4.3 线性相关与线性无关

一、定义

定义4.3.1 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbf{R}^n$. 如果存在不全为零的一组实数$k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}, \qquad (4.3.1)$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$**线性相关**；否则，称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$**线性无关**.

注 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充要条件是：$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$ 仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时成立.

§4.3 线性相关与线性无关

特殊情形:

(1) 向量组α线性相关,当且仅当α为零向量.

(2) 向量组α_1, α_2线性相关,当且仅当α_1与α_2的对应坐标成比例.

几何意义: α_1与α_2(及原点)共线.

(3) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关,当且仅当其中有一个向量可由其余两个向量线性表出.

几何意义: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$(及原点)共面.

例4.3.1 判断下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $\alpha_1=(1, 2, 4)^T, \alpha_2=(2, 1, 3)^T, \alpha_3=(4, -1, 2)^T$;

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = O$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

判断齐次线性方程组是否有非零解?

只有零解.

§4.3 线性相关与线性无关

例4.3.1 判断下列向量组是线性相关还是线性无关:

(2) $\beta_1=(1,-1,0)^T$, $\beta_2=(2,0,1)^T$, $\beta_3=(-1,2,0)^T$; $\beta_4=(0,2,-1)^T$.

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=O$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\-1&0&2&2\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

判断齐次线性方程组是否有非零解?

有. 但不必求出具体的解!

例 **齐次线性方程组的向量形式**: 设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

令系数矩阵的列向量为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则上述齐次线性方程组可改写成如下的**向量形式**:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \boldsymbol{O}.$$

定理 齐次线性方程组有非零解(只有零解)的**充分必要**条件是: 系数矩阵的列向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关(线性无关).

例4.3.2 设向量组α,β,γ是线性无关的.

证明: 向量组$\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$线性无关.

例4.3.3 证明：n维向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

线性无关，并且$\mathbf{R}^n$中任意向量可由此向量组线性表出.

二、性质

定理(单调性) 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{m+r}$也线性相关. 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{m+r}$线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$也线性无关.

定理4.3.1 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是：此向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表出.

§ 4.3 线性相关与线性无关

定义4.3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$是两组向量. 如果每个$\beta_i(1\le i\le s)$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出, 则称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$**线性表出**.

如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出, 同时, 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots,\alpha_m$也可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表出, 则称此两个向量组**等价**.

§4.3 线性相关与线性无关

设向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出，则

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{m1}\alpha_m, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots + c_{m2}\alpha_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_s = c_{1s}\alpha_1 + c_{2s}\alpha_2 + \cdots + c_{ms}\alpha_m, \end{cases} \tag{4.3.3}$$

令$C=[c_{ij}]_{m\times s}$，则可用矩阵形式地记为

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)C. \tag{4.3.4}$$

若向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$等价，则

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)C,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)D.$$

§4.3 线性相关与线性无关

定理 (1) 向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出的充分必要条件是:

$$\mathrm{Span}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \subseteq \mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m).$$

(2) 两个向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$等价的充分必要条件是:

$$\mathrm{Span}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = \mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m).$$

§4.3 线性相关与线性无关

定理4.3.2 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表出. 若$m > s$, 则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关.

等价命题: 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表出. 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关, 则$m \le s$.

推论4.3.1 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$与向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$等价, 且它们均线性无关, 则$m = s$.

推论4.3.2 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$. 若$m > n$, 则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$必然线性相关.

回顾

例4.3.1 判断下列向量组是线性相关还是线性无关：

(2) $\beta_1=(1, -1, 0)^T, \beta_2=(2, 0, 1)^T,$

$\beta_3=(-1, 2, 0)^T; \beta_4=(0, 2, -1)^T.$

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=O$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

判断齐次线性方程组是否有非零解？有.

例4.3.4 证明：线性无关的向量组

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

任意添加k个分量得到的向量组

$$\gamma_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\a_1\\\vdots\\a_k\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\b_1\\\vdots\\b_k\end{bmatrix},\quad \gamma_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\c_1\\\vdots\\c_k\end{bmatrix}$$

也线性无关.

§4.3 线性相关与线性无关

定理4.3.3 一组线性无关的n维向量添加k个同序号分量得到的$n+k$维向量组仍然线性无关.

例4.3.5 判断向量组

$$\alpha_1=(1,\ 2,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_2=(0,\ -2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_3=(0,\ -3,\ 0,\ 2,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

是否线性无关.

§4.3 线性相关与线性无关

课堂练习 P93-94：4，10，12

作 业 P94：6，8，11

回顾

1. 线性相关
2. 线性无关
3. 向量组的线性表出
4. 向量组等价
5. 性质

回顾

线性表出

线性方程组有解的新充要条件

回顾

例4.2.1 **线性方程组的向量形式**: 设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

令其增广矩阵的列向量为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$, 则线性方程组(4.2.1)可改写成如下的**向量形式**:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

定理 线性方程组(4.2.1)有解的充分必要条件是: 常数项向量β可由系数矩阵的列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出.

回顾

线性相关

(线性无关)

齐次线性方程组有非零解(只有零解)的

新充要条件

回顾

例 **齐次线性方程组的向量形式**: 设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$$

令其系数矩阵的列向量为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则上述齐次线性方程组可改写成如下的**向量形式**:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=O.$$

定理 齐次线性方程组有非零解(只有零解)的充分必要条件是: 系数矩阵的列向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关(线性无关).

§4.4 向量空间的基和维数

§4.4 向量空间的基和维数

定义4.4.1 若向量空间V中有一组向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关;

(2) V中任一向量可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出,

则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$V$的一个**基**(亦称**基底**).

注 上面条件(2)等价于:

$$V = \mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

例4.3.3中的向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

是向量空间$\mathbf{R}^n$的一个基.

思路 需要证明两件事情:

(1) 该向量组线性无关;

(2) $\mathbf{R}^n$中任一向量可由该向量组线性表出.

§4.4 向量空间的基和维数

例4.4.1 证明向量组

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\ \beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\ \cdots,\ \beta_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

也是向量空间$\mathbf{R}^n$的一个基.

思路 需要证明两件事情:

(1) 该向量组线性无关;

(2) $\mathbf{R}^n$中任一向量可由该向量组线性表出.

例 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是生成子空间$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$的一个基.

思路 需要证明两件事情:

(1) 该向量组线性无关;

(2) $\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$中任一向量可由该向量组线性表出.

思考: 考察$\mathbf{R}^3$中的xoy平面，或$\mathbf{R}^3$中过原点的平面，分别找出它们的一个基?

注 关于基的问题:

(1) 是否一定有基?

(2) 有多少个基?

(3) 不同基之间的共性或联系?

§4.4 向量空间的基和维数

定理4.4.1 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$均是向量空间$V$的基, 则$s=t$.

定义4.4.2 设向量空间V有基, 则基所含向量的个数称为向量空间V的**维数**. 若$V=\{O\}$, 规定: V的**维数**为0.

$\mathbf{R}^n$的维数是n.

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关, 则生成子空间$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$的维数是$m$.

思考: $\mathbf{R}^3$中的xoy平面, 或$\mathbf{R}^3$中过原点的平面, 它们的维数是多少?

作　业　P94：13，14

思 考 题　P94-95：15，17

§4.5 极大无关组与向量组的秩

§4.5 极大无关组与向量组的秩

定义4.5.1 称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的**部分向量组** $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ $(1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_r\le m)$ 为**极大线性无关组**(简称**极大无关组**), 如果

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性无关;

(2) 每个$\alpha_j(1\le j\le m)$均可由$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性表出.

注 (i) **极大性**: 上面条件(2)等价于: 对每个$\alpha_j(1\le j\le m)$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$**必线性相关**.

(ii) 上面条件(2)等价于: 向量组与它的极大无关组**等价**, 从而

$$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \mathrm{Span}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}).$$

§4.5 极大无关组与向量组的秩

注 关于极大无关组的问题:

(1) 是否一定有极大无关组?

(2) 有多少个极大无关组?

(3) 不同极大无关组之间的共性或联系?

§4.5 极大无关组与向量组的秩

定理4.5.1 向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相等.

定义4.5.2 向量组的极大无关组所含向量的个数称为该**向量组的秩**.

注 向量组的秩体现向量组线性无关的程度. 当向量组的秩小于向量组所含的向量个数时, 向量组线性相关; 当向量组的秩等于向量组所含的向量个数时, 向量组线性无关.

§4.5 极大无关组与向量组的秩

定理4.5.2 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的极大无关组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$必定是生成子空间

$$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

的一个基. 从而向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩等于生成子空间$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$的维数.

定理4.5.3 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表出, 则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩不大于向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的秩.

推论 两个等价的向量组有相同的秩.

(见P95习题19)

§4.5 极大无关组与向量组的秩

课堂练习　　P95：18

作　　业　　P95：19，21

思 考 题　　P95：20

回顾

向量空间的基 向量空间的维数

向量组的极大无关组 向量组的秩

定理4.5.2 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的极大无关组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$必定是生成子空间

$$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

的一个基. 从而向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩等于生成子空间$\mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$的维数.

§4.6 矩阵的秩

一、矩阵的行秩与列秩

二、矩阵的秩

三、计算

§4.6 矩阵的秩

一、矩阵的行秩与列秩

给定一个矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$.

A的行向量

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad i=1, 2, \cdots, m,$$

构成的向量组称为A的**行向量组**(m个n维向量):

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\in\mathbf{R}^n.$$

A的列向量

$$\boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}}, \quad j=1, 2, \cdots, n,$$

构成的向量组称为A的**列向量组**(n个m维向量):

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\in\mathbf{R}^m.$$

§4.6 矩阵的秩

定义4.6.1 矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**，而其列向量组的秩称为矩阵A的**列秩**.

定理4.6.1 初等变换不会改变矩阵的行秩与列秩.

定理4.6.2 矩阵的行秩与列秩相等.

§ 4.6 矩阵的秩

定义4.6.1 矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**, 而其列向量组的秩称为矩阵A的**列秩**.

定理4.6.1 初等变换不会改变矩阵的行秩与列秩.

定理4.6.2 矩阵的行秩与列秩相等.

证明思路 任意矩阵可经过初等变换变为:

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

此矩阵的行秩与列秩都等于r. 利用定理4.6.1, 原矩阵的行秩与列秩也分别等于r, 从而它们相等.

§4.6 矩阵的秩

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & c_{1n} \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & c_{rn} \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

注 矩阵A的行秩和列秩均等于由A化简成的阶梯型矩阵和最简型矩阵中非零行的个数.

§ 4.6 矩阵的秩

二、矩阵的秩

定义 矩阵A的行秩和列秩统称为矩阵的**秩**，记为$r(A)$.

注 矩阵A的秩等于由A化简成的阶梯型矩阵和最简型矩阵中非零行的个数.

定理4.6.1' 初等变换不改变矩阵的秩.

推论4.6.1 n阶方阵A可逆的充要条件是:

$r(A)=n.$ (称为**满秩**)

证明思路 由定理2.4.1的3)可知: A行等价于单位矩阵I(最简型), 从而 $r(A)=n$.

推论4.6.1' n阶方阵A的行列式 $\det(A)\neq 0$ 的充要条件是: $r(A)=n$ (满秩).

§4.6 矩阵的秩

定义 取矩阵A的k个不同行与k个不同列交叉位置上的k^2个元素，按照它们在A中的相对位置关系构成一个k阶行列式，称为A的一个**k阶子式**.

定理4.6.3 矩阵A的秩等于r的充要条件是：存在A的一个r阶子式不等于0，且A的任意$r+1$阶子式(若存在)都等于0.

推论4.6.1' n阶方阵A的行列式$\det(A)\neq 0$的充要条件是：

$$r(A)=n. \qquad (满秩)$$

§4.6 矩阵的秩

三、计算

1. 求矩阵的秩

用初等行变换把A化为阶梯型矩阵，则阶梯型矩阵中非零行的个数就是矩阵A的秩$r(A)$.

2. 求向量组的秩

给定一个向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. 以它们作为列向量构成的矩阵记为$A$, 则矩阵 A的秩$r(A)$等于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩.

用初等行变换把A化为阶梯型矩阵，则阶梯型矩阵中非零行的个数就是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩.

§4.6 矩阵的秩

3. 求向量组的极大无关组及其线性表出

给定一个向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. 以它们作为列向量构成的矩阵记为$A$. 用初等行变换把$A$化为最简型矩阵$B$. 设$B$的所有首元素所在列的列向量为$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}$, 则$\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$必然是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的一个极大无关组.

如果B的其它列向量β_j满足

$$\beta_j = k_1\beta_{j_1} + k_2\beta_{j_2} + \cdots + k_r\beta_{j_r},$$

则

$$\alpha_j = k_1\alpha_{j_1} + k_2\alpha_{j_2} + \cdots + k_r\alpha_{j_r}.$$

$$\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & c_{1n} \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & c_{rn} \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}$$

§4.6 矩阵的秩

例4.6.1 求向量组

$\alpha_1=(0, 2, 6, 0, -8)^T$, $\alpha_2=(1, -3, 2, 0, 4)^T$,

$\alpha_3=(-1, 2, -5, 0, 0)^T$, $\alpha_4=(3, -8, 5, -2, 11)^T$

的秩和一个极大无关组, 并将其余的向量(如果有)用此极大无关组线性表出.

注 上述求向量组秩的方法也可用来判断向量组线性相关或线性无关.

§ 4.6 矩阵的秩

例4.6.2 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{jk}]_{n\times s}$. 证明:

$$r(\boldsymbol{AB})\leq\min(r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})).$$

例 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$. 证明:

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

例 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$. 证明: $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$.

§4.6 矩阵的秩

课堂练习 P95：22(2)，23(1)

作　　业 P95：22(1)，23(2)

思 考 题 P95：24

回顾

矩阵的秩　　行秩、列秩

矩阵秩的新认识　　子式

矩阵可逆的新充要条件

初等变换不改变矩阵的秩

§4.7 线性方程组解的结构

一、矩阵秩的应用：
判定线性方程组解的状况

二、齐次线性方程组
解的结构

三、非齐次线性方程组
解的结构

§ 4.7 线性方程组解的结构

约定:

从现在开始, 线性方程组的解, 均用列向量的形式表示, 称为线性方程组的**解向量**.

第一章

$$x_1 = a_1$$
$$x_2 = a_2$$
$$\vdots$$
$$x_n = a_n$$

第二章及现在

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$$

§4.7 线性方程组解的结构

一、矩阵秩的应用：判定方程组解的状况

给定一个齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}, \qquad (4.7.1)$$

其中$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{O}=(0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

定理4.7.1 齐次线性方程组(4.7.1)只有零解(惟一解)的充要条件是: $r(\boldsymbol{A})=n$.

齐次线性方程组(4.7.1)有非零解(有无穷多解)的充要条件是: $r(\boldsymbol{A})<n$.

§1.3 线性方程组解的初步讨论

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 总是有解(零解);

(2) 当$r=n$时, 只有零解(有惟一解);

(3) 当$r<n$时, 有非零解(有无穷多解).

§4.7 线性方程组解的结构

给定一个非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}, \tag{4.7.5}$$

其中

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$.

定理4.7.5 设非齐次线性方程组(4.7.5)的系数矩阵的秩为r, 增广矩阵的秩为r',

(1) 若$r\neq r'$, 则(4.7.5)无解, 此时$r'=r+1$;

(2) 若$r=r'=n$, 则(4.7.5)有唯一解;

(3) 若$r=r'<n$, 则(4.7.5)有无穷多解.

注 线性方程组(4.7.5)有解的充要条件是:

$$r=r'.$$

§1.3 线性方程组解的初步讨论

使用初等行变换可化为阶梯型矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \quad c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & \cdots \quad 0 & c_{2,j_2} & \cdots & & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, (1.3.2)$$

其中, $c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在行的首元素.

§ 4.7 线性方程组解的结构

二、齐次线性方程组解的结构

1. 齐次线性方程组解集的整体结构--向量空间

给定一个齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}, \tag{4.7.1}$$

其中$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{O}=(0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

定理4.7.2 若ξ_1, ξ_2是齐次线性方程组(4.7.1)的解向量, k是任意常数, 则$\xi_1+\xi_2$, $k\xi_1$ 均为齐次线性方程组(4.7.1)的解向量.

定理4.7.2' 齐次线性方程组(4.7.1)的所有解向量构成的集合是$\mathbf{R}^n$的一个子空间(当然它也是一个向量空间), 称为齐次线性方程组(4.7.1)的**解空间**.

2. 齐次线性方程组解集的内部结构--基础解系

定义4.7.1 设$r(\boldsymbol{A})<n$, 且$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$是齐次线性方程组(4.7.1)的一组解向量. 称$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$为齐次线性方程组(4.7.1)的一个**基础解系**, 如果

(1) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$线性无关;

(2) 齐次线性方程组(4.7.1)的任意解向量都可由$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$线性表出.

注 基础解系是解空间的一个基.

解空间的维数是l.

§4.7 线性方程组解的结构

定理4.7.3 若$r=r(\boldsymbol{A})<n$, 则齐次线性方程组(4.7.1)的基础解系含有$n-r$个解向量.

注 解空间的维数是$n-r$.

§1.3 线性方程组解的初步讨论

使用初等行变换可化为阶梯型矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中, $c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在行的首元素.

§1.3 线性方程组解的初步讨论

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & c_{1n} \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & c_{rn} \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
x_{j_1} + \cdots \qquad\qquad\qquad + c_{1n}x_n = 0, \\
\qquad x_{j_2} + \cdots \qquad\quad + c_{2n}x_n = 0, \\
\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad\quad x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = 0.
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x_{j_1} + \cdots \qquad\qquad\qquad + c_{1n}x_n = 0, \\ \qquad x_{j_2} + \cdots \qquad\qquad + c_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{j_1} \qquad\qquad = -\cdots, \\ \qquad x_{j_2} \qquad = -\cdots, \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad x_{j_r} = -\cdots. \end{cases}$$

变元$x_{j_1},\cdots,x_{j_r}$为**首项变元**，而其余的变元为**自由变元**.

定义4.7.2 若$r=r(\boldsymbol{A})<n$，而$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是齐次线性方程组(4.7.1)的一个基础解系，则称向量

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

为齐次线性方程组(4.7.1)的**通解**，其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为任意数.

§4.7 线性方程组解的结构

例4.7.1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ -5x_1 + 10x_2 - 17x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系，并写出其通解.

§4.7 线性方程组解的结构

三、非齐次线性方程组解的结构

给定一个非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}, \tag{4.7.5}$$

其中

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$.

定义4.7.3 称齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O} \tag{4.7.6}$$

为非齐次线性方程组(4.7.5)的**导出方程组**.

注 (1) (4.7.5)的任意两个解向量之差是(4.7.6)的解向量;

(2) (4.7.5)的解向量与(4.7.6)的解向量之和是(4.7.5)的解向量.

§ 4.7 线性方程组解的结构

定理4.7.4 设非齐次线性方程组(4.7.5)有解，且$r=r(\boldsymbol{A})<n$，η_0为其一个解向量(称为**特解**)，而$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是其导出方程组的一个基础解系，则非齐次线性方程组(4.7.5)的全部解(也称**通解**)为:

$$\boldsymbol{X}=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}, \tag{4.7.7}$$

其中，$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为任意数.

证明思路 (1) 证明(4.7.7)是非齐次线性方程组(4.7.5)的解向量;

(2) 非齐次线性方程组(4.7.5)的任一解向量都可表示成(4.7.7)的形式.

§4.7 线性方程组解的结构

求非齐次线性方程组通解的步骤

(1) 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯型矩阵，然后判断解的状况;

(2) 若有无穷多解，则再用初等行变换将阶梯型矩阵进一步地化为最简型矩阵;

(3) 求出原方程组的一个特解;

(4) 求出导出方程组的一个基础解系;

(5) 写出原方程组的通解.

例4.7.2 求下述非齐次线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 3, \\ -5x_1 + 10x_2 - 17x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

§4.7 线性方程组解的结构

课堂练习　P95：25(1)，26(1)

作　业　P95-96：25(2)，26(2)，27

思 考 题　P95：24

回顾

给定一个齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}, \tag{4.7.1}$$

其中$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{O}=(0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

定理4.7.1 齐次线性方程组(4.7.1)只有零解(惟一解)的充要条件是: $r(\boldsymbol{A})=n$.

齐次线性方程组(4.7.1)有非零解(有无穷多解)的充要条件是: $r(\boldsymbol{A})<n$.

回顾

给定一个非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}, \tag{4.7.5}$$

其中

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$.

定理4.7.5 设非齐次线性方程组(4.7.5)的系数矩阵的秩为r, 增广矩阵的秩为r',

(1) 若$r\neq r'$, 则(4.7.5)无解, 此时$r'=r+1$;

(2) 若$r=r'=n$, 则(4.7.5)有唯一解;

(3) 若$r=r'<n$, 则(4.7.5)有无穷多解.

注 线性方程组(4.7.5)有解的充要条件是:

$$r=r'.$$

回顾

齐次线性方程组解集的整体结构--向量空间

给定一个齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}, \qquad (4.7.1)$$

其中$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{O}=(0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

定理4.7.2' 齐次线性方程组(4.7.1)的所有解向量构成的集合是$\mathbf{R}^n$的一个子空间(当然它也是一个向量空间), 称为齐次线性方程组(4.7.1)的**解空间**.

解空间的维数是$n-r(A)$.

回顾

齐次线性方程组解集的内部结构--基础解系

定义4.7.1 设$r(A)<n$，且$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$是齐次线性方程组(4.7.1)的一组解向量．称$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$为齐次线性方程组(4.7.1)的一个**基础解系**，如果

(1) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$线性无关；

(2) 齐次线性方程组(4.7.1)的任意解向量都可由$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$线性表出．

定义4.7.2 若$r=r(A)<n$，而$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是齐次线性方程组(4.7.1)的一个基础解系，则称向量

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

为齐次线性方程组(4.7.1)的**通解**，其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为任意数．

回顾

给定一个非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}, \tag{4.7.5}$$

其中

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$.

定义4.7.3 称齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O} \tag{4.7.6}$$

为非齐次线性方程组(4.7.5)的**导出方程组**.

定理4.7.4 设非齐次线性方程组(4.7.5)有解,且 $r=r(\boldsymbol{A})<n$, η_0为其一个解向量(称为**特解**), 而ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}是其**导出方程组**的一个基础解系, 则非齐次线性方程组(4.7.5)的**通解**为:

$$\boldsymbol{X}=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}, \tag{4.7.7}$$

其中, k_1, k_2, $\cdots$, k_{n-r}为任意数.