第一章作业

一、设 R 集合{a,b,c,d,e}上的二元关系，请给出满足下列条件的 R

（1）R 是一个包含(a,b),(b,c)的自反传递关系。

（2）R 是一个包含(a,b),(b,c)的等价关系。

解（答案不唯一）:

(1) R={(a,b), (b,c), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c)}

(2) R={(a,b), (b,c), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (b,a), (c,b), (c,a)}

注意:（1）(d,d)，(e,e)容易漏了

（2）答案不唯一，只要满足要求即可，而闭包是满足要求的最小集合

二、请使用递归证明方法，证明任意无向图 G=(V,E)满足:

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2 * |E|$$

方法一:

当|V|=0 时，|E|=0，因此$\sum_{v\in V} deg(v) = 0 = 2 * |E|$，结论成立。

下面证明当|V|=n>0 的情况，施归纳于|E|。

（1）若|E|=0，则所有 v 的度数 deg(v)都为 0，因此$\sum_{v\in V} deg(v) = 0 = 2 * |E|$，结论成立。

（2）假设|E|=m 时结论成立（m>=0）。若|E|=m+1，不妨设 E=E'U{(v_1,v_2)}，其中 v_1、v_2∈V，E'∩{(v_1,v_2)} =Ø，|E'| = m。显然（V,E'）也构成一个无向图 G'，且对于任意 v∈V，有

$$\deg(v) = \begin{cases} \deg_{G'}(v) + 2 & v = v_1 = v_2 \\ \deg_{G'}(v) + 1 & v = v_1 \text{ or } v = v_2 \\ \deg_{G'}(v) & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此（不管$v_1 = v_2$还是$v_1 \neq v_2$ 都有）

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = \left(\sum_{v\in V} \deg_{G'}(v)\right) + 2$$

根据归纳假设有$\sum_{v\in V} \deg_{G'}(v) = 2 * |E'|$，所以。

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2 * |E'| + 2 = 2 * m + 2 = 2 * (m + 1) = 2 * |E|$$

这就是说结论对|E|=m+1 成立。

（3）由归纳法原理，结论对任意无向图成立。

方法二：施归纳于|V|。

（1）当|V|=0 时，此时|E|=0，因此$\sum_{v\in V} deg(v) = 0 = 2 * |E|$，结论成立。

（2）假设|V|=n 时结论成立（n>=0）。若|V|=n+1，不妨设 V=V'U{v'}，其中 v'∉ V'，|V'|=n。设 $E_{v'}$为 E 中涉及 v'的边，E'为 E 中剩余的边，即 $E_{v'}$ ={(v_1,v_2)∈E | v_1=v' 或 v_2=v'}，E = E' U $E_{v'}$，E'∩$E_{v'}$=Ø。显然，（V',E'）也构成一个无向图 G'，且对于任意 v∈V'有

$$\deg(v) = \deg_{G'}(v) + \left|\{(v_1, v_2) \in E_{v'} \middle| v_1 = v \text{ 或} v_2 = v\}\right|$$

因此

$$\sum_{v\in V} deg(v) = \sum_{v\in V'} deg(v) + \mathrm{deg(v')}$$

$$= \begin{cases} \sum_{v\in V'} deg_{\mathrm{G'}}(v) + |\mathrm{E_{v'}}| + |\mathrm{E_{v'}}| & (\mathrm{v',v'}) \notin \mathrm{E_{v'}} \\ (\sum_{v\in V'} deg_{\mathrm{G'}}(v) + |\mathrm{E_{v'}}|\text{-}1) + (|\mathrm{E_{v'}}| + 1) & (\mathrm{v',v'}) \in \mathrm{E_{v'}} \end{cases}$$

$$= \sum_{v\in V'} deg_{\mathrm{G'}}(v) + 2^*|\mathrm{E_{v'}}|$$

根据归纳假设有$\sum_{v\in V'} deg_{\mathrm{G'}}(v) = 2 * |E'|$，所以

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2 * |E'| + 2^*|\mathrm{E_{v'}}| = 2 * |E|$$

这就是说结论对|v|=n+1 成立。

（3）由归纳法原理，结论对任意无向图成立。

注意：（1）第一步需要包括最简单的情况，第二步的假设能囊括第一步的基础情况。

（2）第二步需要指明子结构，然后对子结构归纳（自然归纳法的子结构就是自然数，所以无需构造）。

（3）原结构与子结构的属性函数需区分，并建立它们之间的联系。