第一章

矩阵与初等变换

深圳大学数学与计算科学学院
College of Mathematics and Computational Science

本章主要内容：

① 矩阵的定义；

② 借助于矩阵，解线性方程组.

第一章 矩阵与初等变换

§1.1 矩阵的定义

一、矩阵的定义

二、矩阵的例子

三、几种特殊矩阵

§1.1 矩阵的定义

体育比赛成绩表

球队 \ 球队	甲	乙	丙
甲	0	2	1
乙	0	0	1
丙	1	1	0

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

§1.1 矩阵的定义

例1.1.4 某公司有四个工厂，它们同时生产三种产品，产量如下表所示.

产品 工厂	P_1	P_2	P_3
甲	5	2	4
乙	3	8	2
丙	6	0	4
丁	0	1	6

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

§1.1 矩阵的定义

一、矩阵的定义

1. 定义

定义1.1.1 由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$构成的形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

的矩形**数表**，称为一个规模为m行n列(称为$m\times n$级，简称$m\times n$)的**矩阵**. 其中，数a_{ij}称为矩阵的**元素**，在下标中，i称为行下标，j称为列下标.

§1.1 矩阵的定义

若数a_{ij}均是复数，则称之为**复矩阵**；若数a_{ij}均是实数，则称之为**实矩阵**.

一般用大写的英文字母$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$等表示矩阵.

用记号$A=[a_{ij}]_{m\times n}$表示矩阵A是一个第i行第j列交叉位置(**记为**(i, j))上元素为a_{ij}的$m\times n$矩阵.

§ 1.1 矩阵的定义

二、矩阵的例子

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2\times 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad 2\times 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad 1\times 4 \qquad \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad 4\times 1$$

§1.1 矩阵的定义

1×1 矩阵: $[a]$,

其实际意义就只表示一个数 a, 因此我们**记**

$$[a]=a.$$

§1.1 矩阵的定义

体育比赛成绩表

球队＼球队	甲	乙	丙
甲	0	2	1
乙	0	0	1
丙	1	1	0

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

§1.1 矩阵的定义

例1.1.4 某公司有四个工厂，它们同时生产三种产品，产量如下表所示.

产品 / 工厂	P_1	P_2	P_3
甲	5	2	4
乙	3	8	2
丙	6	0	4
丁	0	1	6

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

§1.1 矩阵的定义

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

中, x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$称为线性方程组的**变元**, a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$称为线性方程组的**系数**, 而$b_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$称为线性方程组的**常数项**.

§1.1 矩阵的定义

称矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

为其**增广矩阵**.

注 线性方程组的增广矩阵包含了线性方程组的所有信息, 并且由线性方程组唯一确定.

§1.1 矩阵的定义

第一章 矩阵与初等变换

称矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

为其**系数矩阵**.

§1.1 矩阵的定义

课堂练习

写出以下线性方程组的增广矩阵和系数矩阵：

$$
\begin{cases}
\qquad\quad 2x_2 + 2x_3 = 1, \\
2x_1 - 2x_2 \qquad\quad = -1, \\
2x_1 \qquad\quad - 2x_3 = 2, \\
4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1.
\end{cases}
$$

§1.1 矩阵的定义

三、几种特殊矩阵

设 A 为 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

§1.1 矩阵的定义

1. 方阵

当$m=n$时，称A为n**阶矩阵**，或n**阶方阵**.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

此时，称元素$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$为矩阵$A$的**主对角元**. 这些元素所在的斜线位置称为矩阵A的**主对角线**.

§1.1 矩阵的定义

2. 上(下)三角矩阵

称n阶方阵A为**上三角矩阵**, 若其主对角线下方的元素均为零.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称n阶方阵A为**下三角矩阵**, 若其主对角线上方的元素均为零.

§ 1.1 矩阵的定义

$$U=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\qquad V=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

§1.1 矩阵的定义

3. 对角矩阵

称n阶方阵A为**对角矩阵**，若A既是上三角矩阵，又是下三角矩阵. 此时，主对角线以外的元素均为零.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

§1.1 矩阵的定义

注 主对角元都相等的对角矩阵称为**数量矩阵**;
主对角元都等于1的数量矩阵称为**单位矩阵**.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \qquad I=I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad I_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 1.1 矩阵的定义

4. 零矩阵

元素全为零的$m \times n$矩阵称为$m \times n$**零矩阵**, 记为$\boldsymbol{O}_{m \times n}$, 或简记为$\boldsymbol{O}$.

§1.1 矩阵的定义

5. 行(列)向量

当$m=1$时，称A为n**维行向量**；

当$n=1$时，称A为m**维列向量**.

常用$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示行向量和列向量.

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

§1.1 矩阵的定义

作　　业　试给出一个可用矩阵描述的例子

(本书以外的例子).

回顾

矩阵的定义

由$m \times n$个数 a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$

构成的:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.1.1)$$

回顾

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

增广矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

系数矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

§1.2 矩阵的初等变换

一、矩阵的初等变换
二、线性方程组的初等变换
三、阶梯型方程组与阶梯型矩阵
四、消元法的重新认识
五、矩阵的化简
六、总结--线性方程组的解法

§1.2 矩阵的初等变换

一、矩阵的初等变换

1. 矩阵的初等行变换

定义1.2.1 矩阵的以下三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

I. 交换两行的位置(用记号 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示矩阵的第i行与第j行互换); (改变姿势)

II. 用一个非零常数乘以某一行(用记号 kr_i 表示矩阵的第i行乘以非零常数k); (增减肥)

III. 某一行乘以一个常数后加到另一行上(用记号kr_i+r_j表示矩阵的第i行乘以常数k后加到第j行). (整容手术)

§1.2 矩阵的初等变换

2. 矩阵的初等列变换

定义1.2.1′ 矩阵的以下三种变换称为矩阵的**初等列变换**:

I. 交换两列的位置(用记号$c_i \leftrightarrow c_j$表示矩阵的第i列与第j列互换); (改变姿势)

II. 用一个非零常数乘以某一列(用记号kc_i表示矩阵的第i列乘以非零常数k); (增减肥)

III. 某一列乘以一个常数后加到另一列上(用记号kc_i+c_j表示矩阵的第i列乘以常数k后加到第j列). (整容手术)

§1.2 矩阵的初等变换

二、线性方程组的初等变换

以下三种变换(变形)称为线性方程组的初等变换:

I. 交换两个方程的位置; (改变姿势)

II. 用一个非零常数乘以某一个方程; (增减肥)

III. 某一个方程乘以一个常数后加到另一个方程. (整容手术)

总结: 线性方程组的初等变换对应增广矩阵的初等行变换.

定理1.2.1 对线性方程组施行初等变换得到的新方程组与原方程组同解.

§1.2 矩阵的初等变换

三、阶梯型方程组与阶梯型矩阵

1. 阶梯型方程组

满足如下条件的方程组称为**阶梯型方程组**:

(1) 若方程组中某方程的各项系数(含常数项)均为零, 则它下面所有方程(若存在)的各项系数(含常数项)均为零;

(2) 若方程组中某方程的各项系数(含常数项)不全为零, 且其第一个不为零的项(称为此方程的**首项**)是第j项, 则此方程下面所有方程(若存在)的前j项的系数均为零.

§1.2 矩阵的初等变换

$$\begin{cases} c_{1,j_1}x_{j_1} + \cdots \quad + c_{1n}x_n = d_1, \\ \quad c_{2,j_2}x_{j_2} + \cdots \quad + c_{2n}x_n = d_2, \\ \quad\quad \cdots \\ \quad\quad c_{r,j_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \quad\quad 0 = d_{r+1}, \\ \quad\quad 0 = 0, \\ \quad\quad \cdots \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

其中，$c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在方程的首项系数，且 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

§ 1.2 矩阵的初等变换

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 7, \\ \qquad\qquad 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + y \qquad = 2, \\ \qquad\qquad 3z = -7, \\ \qquad\qquad 5z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + \ x_4 = -1, \\ \qquad x_2 \qquad + 3x_4 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 - 5x_4 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \qquad\qquad 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ 5x_1 - 2x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 7, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\quad 3x_4 = 0. \end{cases}$$

2. 阶梯型矩阵

定义1.2.2　满足以下条件的矩阵称为**阶梯型矩阵**:

(1) 若某一行为零行(即此行元素均为零), 则此行下面所有行(若存在)均为零行;

(2) 若某一行为非零行, 且其第一个非零元素(称为此行的**首元素**)位于第j列, 则它下面所有行的前j个元素均为零.

§1.2 矩阵的初等变换

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_{r,j_r} \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中, $c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在行的首元素,

且 $1\le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

§ 1.2 矩阵的初等变换

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 阶梯型方程组与阶梯型矩阵的对应关系

阶梯型方程组对应的增广矩阵是阶梯型矩阵.

四、消元法的重新认识

1. 回顾消元法

$$\begin{cases} \quad\quad\quad 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 \quad\quad\quad = -1, \\ 2x_1 \quad\quad\quad - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

§1.2 矩阵的初等变换

2. 消元法的新认识

消元法=用**初等变换**把线性方程组化简为一个阶梯型方程组,然后求出其解.

3. 从矩阵角度认识消元法

消元法≈用**初等行变换**把原方程组的增广矩阵化简为一个阶梯型矩阵.

4. 解线性方程组的新思路

先写出原方程组的增广矩阵,然后用初等行变换把它化简为一个阶梯型矩阵,进而写出对应的阶梯型方程组,最后求出其解.

五、矩阵的化简

1. 化简为阶梯型矩阵

定理1.2.2 任一矩阵都可以经过若干次初等行变换化简为一个阶梯型矩阵.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1.2 矩阵的初等变换

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & c_{1,j_1} & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{2,j_2} & \cdots & & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

其中, $c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在行的**首元素**,

且 $1\le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

§1.2 矩阵的初等变换

2. 化简为最简型矩阵

定义1.2.3　若一个阶梯型矩阵，其非零行的首元素均为1，且这些首元素所在列的其它元素均为零，则称此矩阵为**最简型矩阵**.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

注　把方程组的解的表达式也看作一个方程组的话，其对应的增广矩阵恰好是最简型矩阵.

§1.2 矩阵的初等变换

定理 任一阶梯型矩阵都可以经过若干次初等行变换化简为一个最简型矩阵.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1.2 矩阵的初等变换

六、总结--线性方程组的解法

1. **消元法**：用初等变换把原方程组化为阶梯型方程组，然后求出其解.

2. **初等行变换法**：由增广矩阵经过**初等行变换**，首先化简为阶梯型矩阵，然后写出对应的阶梯型方程组，并求出其解；或进一步化简为最简型矩阵，并写出其解.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 1/2, \\ x_2 = 1, \\ x_1 = -1/2. \end{cases}$$

§1.2 矩阵的初等变换

课堂练习　P16-17：1(4)

作　　业　　P16：1(3)

作　　业　试用初等行变换把以下矩阵化简为阶梯型矩阵及最简型矩阵:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

思 考 题　　P16：1(1), 1(2)

回顾

1. 从线性方程组的初等变换来认识消元法
2. 从矩阵角度来认识消元法
3. 阶梯型方程组　　阶梯型矩阵　　最简型矩阵

回顾

$$
\begin{cases}
c_{1,j_1}x_{j_1} + \cdots & + c_{1n}x_n = d_1, \\
\qquad c_{2,j_2}x_{j_2} + \cdots & + c_{2n}x_n = d_2, \\
\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad c_{r,j_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\
\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\
\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\
\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad 0 = 0
\end{cases}
$$

其中，$c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在方程的首项系数，

且 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

回顾

$$\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_{r,j_r} \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

其中，$c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在行的首元素，

且 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

回顾

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$d_{r+1} = 0 \quad 或 \quad 1$$

§1.3 线性方程组解的初步讨论

一、线性方程组

二、齐次线性方程组

§1.3 线性方程组解的初步讨论

一、线性方程组

1. 线性方程组解的讨论

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.3.1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

§1.3 线性方程组解的初步讨论

使用**初等行变换**可化简为阶梯型矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, (1.3.2)$$

其中, $c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在行的**首元素**,

且 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

§ 1.3 线性方程组解的初步讨论

$$\begin{cases} c_{1,j_1}x_{j_1} + \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{2,j_2}x_{j_2} + \cdots \qquad\qquad + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad c_{r,j_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \qquad (1.3.3)$$

其中, $c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在方程的首项系数,

且 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

§1.3 线性方程组解的初步讨论

情形1 若$d_{r+1}\neq 0$, 则原方程组无解.

情形2 若$d_{r+1}=0$, 且$r=n$, 则原方程组有惟一解.

$$\begin{cases} c_{11}x_1+\cdots \qquad\qquad\qquad +c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots \qquad\quad +c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad c_{n-1,n-1}x_{n-1}+c_{n-1,n}x_n=d_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n=d_n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=0 \end{cases} \tag{1.3.4}$$

其中, $c_{11},\cdots,c_{nn}$ 分别是它们所在方程的首项系数.

情形3 若$d_{r+1}=0$, 且$r<n$, 则原方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} c_{1,j_1}x_{j_1}+\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad +c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad c_{r-1,j_{r-1}}x_{j_{r-1}}+\cdots \qquad +c_{r-1,n}x_n=d_{r-1}, \\ \qquad\qquad c_{r,j_r}x_{j_r}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{1,j_1}x_{j_1}+\cdots \qquad\qquad +c_{1,j_r}x_{j_r}=d_1-\cdots, \\ \qquad\qquad \cdots \\ c_{r-1,j_{r-1}}x_{j_{r-1}}+c_{r-1,j_r}x_{j_r}=d_{r-1}-\cdots, \\ \qquad\qquad c_{r,j_r}x_{j_r}=d_r-\cdots \end{cases} \tag{1.3.5}$$

§ 1.3 线性方程组解的初步讨论

$$
\begin{cases}
c_{1,j_1}x_{j_1}+\cdots \qquad\qquad +c_{1,j_r}x_{j_r}=d_1-\cdots, \\
\qquad\qquad\cdots \\
\qquad c_{r-1,j_{r-1}}x_{j_{r-1}}+c_{r-1,j_r}x_{j_r}=d_{r-1}-\cdots, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad c_{r,j_r}x_{j_r}=d_r-\cdots
\end{cases}
\qquad (1.3.5)
$$

称方程组(1.3.5)中的变元$x_{j_1},\cdots,x_{j_r}$为**首项变元**, 或**约束变元**; 而其余的变元称为**自由变元**.

§ 1.3 线性方程组解的初步讨论

2. 例子

例1.3.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 13/5 \end{bmatrix}$$

线性方程组无解.

例1.3.2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-2x_2=-1, \\ 2x_1-2x_3=2, \\ 4x_1-2x_2-2x_3=1, \\ 4x_1-3x_2-x_3=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

§1.3 线性方程组解的初步讨论

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

线性方程组有惟一解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1.3 线性方程组解的初步讨论

例1.3.3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \quad + x_4 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \quad + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

线性方程组有无穷多解.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 7/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1.3 线性方程组解的初步讨论

总结--解线性方程组的具体步骤

1. 使用初等行变换把增广矩阵化简为阶梯型矩阵.

2. 判断解的状况.

3. 若有解，写出对应的阶梯型方程组，并求出其解；或进一步化简为最简型矩阵，并写出其解(有无穷多解时需要移项).

二、齐次线性方程组

1. 齐次线性方程组解的讨论

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.3.6}$$

称为n元**齐次线性方程组**.

§1.3 线性方程组解的初步讨论

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

(1) 总是有解(零解);

(2) 当$r=n$时, 只有零解(有惟一解);

(3) 当$r<n$时, 有非零解(有无穷多解).

§1.3 线性方程组解的初步讨论

定理1.3.1 如果$m<n$, 则齐次线性方程组(1.3.6)有非零解.

注　齐次线性方程组解的状况有时候可以由方程组的外观(指方程个数与变元个数之间的大小关系)来判定.

§1.3 线性方程组解的初步讨论

注 线性方程组解的状况是无法由方程组的外观(指方程个数与变元个数之间的大小关系)来判定的.

例 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=3, \\ -2x_1-2x_2-2x_3=1. \end{cases}$$

2. 例子

例1.3.4 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

齐次线性方程组只有零解.

例1.3.5 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \qquad\quad + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

齐次线性方程组有非零解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/11 \\ 0 & 1 & 0 & -6/11 \\ 0 & 0 & 1 & -8/11 \end{bmatrix}$$

总结--解齐次线性方程组的具体步骤

1. 使用初等行变换把系数矩阵化简为阶梯型矩阵.

2. 判断解的状况. 若$r=n$, 则只有零解.

3. 若$r<n$, 写出对应的阶梯型方程组, 并求出其解; 或进一步化简为最简型矩阵, 并写出其解(需要移项).

§ 1.3 线性方程组解的初步讨论

课堂练习 P17-18：4，7

作　　业 P17-18：2，5(1)(3)，6(2)，8

思 考 题 P17-18：3，9

回顾

$$
\begin{bmatrix}
0 \cdots 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 \cdots & \cdots\ 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

其中，$c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在行的首元素，

且 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

回顾

$$\begin{cases} c_{1,j_1}x_{j_1} + \cdots & & & + c_{1n}x_n = d_1, \\ & c_{2,j_2}x_{j_2} + \cdots & & + c_{2n}x_n = d_2, \\ & & \cdots & \\ & & c_{r,j_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n & = d_r, \\ & & 0 & = d_{r+1}, \\ & & 0 & = 0, \\ & & \cdots & \\ & & 0 & = 0 \end{cases}$$

其中，$c_{1,j_1},\cdots,c_{r,j_r}$ 分别是它们所在方程的首项系数，

且 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n.$

回顾

情形1 若$d_{r+1}\neq 0$, 则原方程组无解.

情形2 若$d_{r+1}=0$, 且$r=n$, 则原方程组有惟一解.

$$\left\{\begin{array}{lr}
c_{11}x_1+\cdots & +c_{1n}x_n=d_1, \\
\qquad c_{22}x_2+\cdots & +c_{2n}x_n=d_2, \\
\qquad\qquad\cdots & \\
 c_{n-1,n-1}x_{n-1}+c_{n-1,n}x_n & =d_{n-1}, \\
 & c_{nn}x_n=d_n, \\
 & 0=0, \\
\qquad\qquad\cdots & \\
 & 0=0
\end{array}\right.$$

其中, $c_{11},\cdots,c_{nn}$ 分别是它们所在方程的首项系数.

回顾

情形3 若$d_{r+1}=0$, 且$r<n$, 则原方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} c_{1,j_1}x_{j_1}+\cdots \qquad\qquad\qquad +c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\cdots \\ \qquad c_{r-1,j_{r-1}}x_{j_{r-1}}+\cdots \quad +c_{r-1,n}x_n=d_{r-1}, \\ \qquad\qquad c_{r,j_r}x_{j_r}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{1,j_1}x_{j_1}+\cdots \qquad\qquad +c_{1,j_r}x_{j_r}=d_1-\cdots, \\ \qquad\cdots \\ \qquad c_{r-1,j_{r-1}}x_{j_{r-1}}+c_{r-1,j_r}x_{j_r}=d_{r-1}-\cdots, \\ \qquad\qquad c_{r,j_r}x_{j_r}=d_r-\cdots \end{cases}$$

回顾

$$\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1\cdots & & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & \cdots & & 0 & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

回顾

$$
\begin{cases}
x_{j_1} + \cdots \qquad\qquad\qquad + c_{1n}x_n = d_1, \\
\qquad x_{j_2} + \cdots \qquad\qquad + c_{2n}x_n = d_2, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0
\end{cases}
$$

其中，$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n$.

回顾

$$\begin{bmatrix}
0 \cdots 0 & c_{1,j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & 0 \\
0 \cdots & \cdots 0 & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots 0 & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & 0 \\
0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

(1) 总是有解(零解);

(2) 当$r=n$时, 只有零解(有惟一解);

(3) 当$r<n$时, 有非零解(有无穷多解).

回顾

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1\cdots & & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & c_{1n} \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & \cdots & & 0 & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & c_{rn} \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

回顾

$$
\begin{cases}
x_{j_1} + \cdots \qquad\qquad\qquad + c_{1n}x_n = 0, \\
\qquad x_{j_2} + \cdots \qquad\qquad + c_{2n}x_n = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0
\end{cases}
$$

其中，$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n$.

第一章讨论课

作　业

1. 试用初等行变换把以下矩阵化简为最简型矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. 试讨论: a, b取何值时, 以下增广矩阵对应的线性方程组有惟一解、有无穷多解、无解? 并在有无穷多解的情形下, 求出方程组的所有解.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$