座位号________ 专业________ 学院________ 学号________ 姓名________

（密封线内不答题）

密 封 线

华南理工大学 2010 数学竞赛试卷

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚； 2. 所有答案请直接答在试卷上；

3. 考试形式：闭卷；

4. 本试卷共 8 大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

一、计算下列各题 （每小题 6 分，本大题共 36 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$

解 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e\left[e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1\right]}{\frac{1}{n}}=e\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=e\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{e}{2}$$

2．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^ne^x}{e^x+1}dx$

解 由于 $0\le\frac{x^ne^x}{e^x+1}\le x^n, x\in[0,1]$

故 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^ne^x}{e^x+1}dx\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1x^ndx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，从而由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^ne^x}{e^x+1}dx=0$

3．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])dt$，其中 $[t]$ 为不超过 t 的最大整数.

解 由于 $\frac{\frac{1}{2}[x]}{[x]+1}=\frac{\int_0^{[x]}(t-[t])dt}{[x]+1}\le\frac{\int_0^{x}(t-[t])dt}{x}\le\frac{\int_0^{[x]+1}(t-[t])dt}{[x]}=\frac{\frac{1}{2}[x]+\frac{1}{2}}{[x]}$

故由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])dt=\frac{1}{2}$

4．在原点附近,试用一个二次多项式近似代替函数 $f(x)=3+\int_0^x\frac{1+\sin t}{2+t^2}dt$

解 由于

$$f(0)=3,\ f'(x)=\frac{1+\sin x}{2+x^2},\ f'(0)=\frac{1}{2},\ f''(x)=\frac{(2+x^2)\cos x-2x(1+\sin x)}{(2+x^2)^2},\ f''(0)=\frac{1}{2}$$

从而可用泰勒多项式近似为 $f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2$

5．计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{1+e^{-x}} dx$

解　由$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} \left[f(x) + f(-x) \right] dx$

可得$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{1+e^{-x}} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$

6．计算$\int_{c} \left(z + y^2 \right) ds$,其中$c$为球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$与平面$x + y + z = 0$的交线

解　$\int_{c} \left(z + y^2 \right) ds = \int_{c} z ds + \int_{c} y^2 ds$,由曲线的轮换对称性可得

$$\int_{c} \left(z + y^2 \right) ds = \frac{1}{3} \int_{c} \left(z + x + y \right) ds + \frac{1}{3} \int_{c} (y^2 + z^2 + x^2) ds = 0 + \frac{1}{3} \int_{c} R^2 ds = \frac{2}{3} \pi R^3$$

二、(本题 8 分) 设$f(x)$在$x=1$点附近有定义，且在$x=1$点可导，$f(1)=0,\ f'(1)=2$，求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f\left(\sin^2 x + \cos x \right)}{x^2 + x \tan x}$。

解：原式

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f\left(\sin^2 x + \cos x \right) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2 + x \tan x} = f'(1) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\cos x - 1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} \tan x} = \frac{1}{2}$$

三、(本题 10 分) 证明$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1 \right)^n$，$n = 0, 1, 2$ 满足关系式

$$\left(x^2 - 1 \right) P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x)$$

证　设$z = \frac{1}{2^n n!} \left(x^2 - 1 \right)^n, n = 0,1,2,\cdots$,则$z' = \frac{1}{2^n n!} \left(x^2 - 1 \right)^{n-1} \cdot 2nx, 2nxz = \left(x^2 - 1 \right) z'$

两边再求$(n+1)$阶导数,得

$$2nxz^{(n+1)} + 2n(n+1) z^{(n)} = \left(x^2 - 1 \right) z^{(n+2)} + 2x(n+1) z^{(n+1)} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2!} z^{(n)}$$

从而$\left(x^2 - 1 \right) z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} - n(n+1) z^{(n)} = 0$

因为$z^{(n+2)} = P_n''(x), z^{(n+1)} = P_n'(x), z^{(n)} = P_n(x)$

故$\left(x^2 - 1 \right) P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1) P_n(x) = 0$

四、（本题 10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。证明：(1)存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；(2)存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$

证　(1)设 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

且 $F(1)=0-1<0, F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}>0$,从而有零点定理,存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；

(2)设 $G(x)=\left[f(x)-x\right]e^{-x}$,则 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微,

且 $G'(x)=\left[f'(x)-1-f(x)+x\right]e^{-x}, G(0)=G(\xi)=0$

由罗尔定理,存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=0$,即 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$

五、（本题 10 分） 已知 $u=(f)$, $t=\mathrm{l}t\sqrt{\mathrm{n}^2 \qquad +x^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$,求 $f(t)$

解　$u_x=f'(t)\cdot\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, u_{xx}=f''(t)\cdot\frac{x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+f'(t)\cdot\frac{y^2+z^2-x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$,

从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{f''+f'}{x^2+y^2+z^2}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

$f''(t)+f'(t)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-t}$，从而 $r^2+r=0, r_1=0, r_2=-1, y^*=ate^{-t}$ 代入,

解之得 $a=-1, f(t)=c_1+c_2e^{-t}-te^{-t}$

六、(本题 10 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上有连续偏导数,且满足关系式 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，

证明：（1）等式 $\oint_c f\frac{\partial f}{\partial n}ds=\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$ 成立，其中曲线 c 为区域 D 的边界，$\vec{n}$ 为 c 的外法线方向；（2）若 $f(x,y)$ 在 c 上恒等于零，则 $f(x,y)$ 在区域 D 内也恒等于零

证　（1）设单位切向量为 $\vec{t}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$，则外法线单位法向量为 $\vec{n}=\{\cos\beta,-\sin\alpha\}$，

从而 $\dfrac{\partial f}{\partial n}=f_x\cos\beta-f_y\cos\alpha$

等式左边 $=\oint\limits_c f\dfrac{\partial f}{\partial n}ds=\oint\limits_c f\left(f_x\cos\beta-f_y\cos\alpha\right)ds=\oint\limits_c\left(-ff_ydx+ff_xdy\right)$

由格林公式，等式左边 $=\iint\limits_D\left[\left(ff_x\right)'_x+\left(ff_y\right)'_y\right]dxdy=\iint\limits_D\left(f_x^2+ff_{xx}+f_y^2+ff_{yy}\right)dxdy$

再由已知可得，左边=右边

（2）由已知 $\iint\limits_D\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\oint\limits_c f\dfrac{\partial f}{\partial n}ds=0$

从而 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=0,\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0,f\left(x,y\right)$ 为常数，再由于边界上 $f\left(x,y\right)=0$，

因此 $f\left(x,y\right)=0$

七、（本题 8 分）计算 $\iint\limits_\Sigma\left(x^2-y^2\right)dydz+\left(y^2-z^2\right)dzdx+\left(z^2-x^2\right)dxdy$。其中 Σ 是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \left(z\ge0\right)$ 的上侧

解　取 $\Sigma_1: z=0,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le1$ 下侧

则　原式 $=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_\Omega\left(2x+2y+2z\right)dv+\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1}\left(-x^2\right)dxdy$

$$=\iiint\limits_\Omega 2zdv-\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1}x^2dxdy=2\int_0^C z\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 a^2r^2\cos^2\theta\cdot abrdr$$

$$=\frac{1}{2}\pi abc^2-\frac{1}{4}\pi a^3b$$

七、（本题 8 分）假定一个半径为 r 的雪球，其融化时体积的变化率正比于雪球的表面积，比例常数为 $k>0$。已知两小时内融化其体积的四分之一，问剩余部分需要多少小时才能全部融化。

解　由已知 $\frac{dV}{dt}=-k\cdot 4\pi r^2, V=\frac{4}{3}\pi r^3, \frac{dr}{dt}=-k, r=-kt+c$，

令 $t=0$ 时 $r=r_0$，则 $r=r_0-kt$

由已知 $t=2$ 时 $r=r_0-2k, \frac{4}{3}\pi\left(r_0-2k\right)^3=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi r_0{}^3$，得 $r_0-2k=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}r_0$，

$k=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)r_0$，$r=r_0-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)r_0 t$

从而，从开始到全部融化所需时间为 $t=\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}\approx 21.87$

两小时起剩余部分需要 $\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}-2\approx 19.87$ 小时能全部融化