分段函数分段点可导性的判定

刘红丽

(浙江财经学院 数学与统计学院,浙江 杭州 310018)

摘　要　对求分段函数在分段点处求导的方法进行总结,解释分段区间上导函数在分段点处极限不存在从而导致先求导再求极限方法失效的原因,并对利用分段函数在分段点处的一阶可导性确定函数参数的问题进行分析.

关键词　分段函数;分段点;连续;导数

中图分类号　O172.1　　文献标识码　A　　文章编号　1008-1399(2012)05-0032-04

分段函数分段点处的导数问题既是现在大学生在学习高等数学过程中遇到的比较困惑的问题,也是高校教师在教学过程中的一个教学难点.结合本人教学过程中所用的教材[1]和参阅的文献[2-3],首先对分段函数分段点处导数的求法进行总结.

1　分段函数在分段点处的求导方法

方法 1　利用可导必连续的性质.

例 1　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求导数 $f'(0)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$f(0)=0\neq 1,$$

由连续定义知,$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,所以 $f'(0)$ 不存在.

由例 1 可以看出,方法 1 经常用来判定函数在分段点处的不可导性.当函数在分段点处连续时,有下面两种方法.

方法 2　利用导数定义.

只要函数在分段点处连续即可使用此法.

方法 3　利用分段区间上导函数的极限.

针对分段函数在整个区间上函数表达式的两种形式给出下面定理.

定理 1[2-3]　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}u(x), & x>a,\\ v(x), & x\leqslant a.\end{cases}$$

在 a 点连续且在 a 的去心邻域内可导,如果

$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^-}f'(x)=A,$$

也即

$$\lim_{x\to a^+}u'(x)=\lim_{x\to a^-}v'(x)=A,$$

则函数 $f(x)$ 在 a 点可导,且有

$$f'(a)=A.$$

如果 $\lim\limits_{x\to a^+}u'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^-}v'(x)$ 都存在但不相等,则 $f'(a)$ 不存在.

根据定理 1,$\lim\limits_{x\to a^+}u'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^-}v'(x)$ 中只要有一个不存在就不可以使用该方法求分段点处的导数.

定理 2[2-3]　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}u(x), & x\neq a,\\ B, & x=a.\end{cases}$$

在 a 点连续且在 a 的去心邻域内可导,如果

$$\lim_{x\to a}f'(x)=\lim_{x\to a}u'(x)=A,$$

则函数在 a 点可导,且有

$$f'(a)=A.$$

根据定理 2,当极限 $\lim\limits_{x\to a}u'(x)$ 不存在时不可以使用该方法求分段点处的导数.

下面分别举例说明定理 1 和定理 2 在解题过程中的实际应用.

例 2　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^+}(x^3)'=\lim_{x\to 0^+}3x^2=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2)'=\lim_{x\to 0^-}2x=0,$$

收稿日期:2012-01-01;修改日期:2012-08-06

作者简介:刘红丽(1978—),女,山西临汾人,硕士,讲师,主要从事密码学研究. Email:ooolhl@163.com

也即

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x),$$

故由定理 1 可知

$$f'(0) = 0.$$

例 3　设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3, & x \leqslant 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x)' = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$

也即

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x),$$

故由定理 1 可知 $f'(0)=0$ 不存在.

例 4　设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

所以,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又因为

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

由定理 2 可知

$$f'(0) = 0.$$

例 5　设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解　虽然有

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,但因为极限

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

并不存在,故不能使用定理 2. 但由导数定义可知

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$

即 $f'(0)$ 是存在的,且有 $f'(0)=0$.

例 6　设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解　虽然有

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,但因为极限

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)$$

并不存在,故不能使用定理 2. 另因极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

也不存在,故由导数的定义可知 $f'(0)$ 不存在.

值得注意,当分段区间上函数的导数在分段点处的极限不存在时,函数在分段点处的导数可能存在也可能不存在,因此必须采用导数定义进行判断.

2　导函数在分段点处极限为无穷大

定理 3　设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & x \neq a, \\ B, & x = \alpha. \end{cases}$$

在 a 点连续且在 a 的去心邻域内可导,如果

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty,$$

则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点不可导.

证明　不妨设有 $\delta>0$,函数 $f(x)$ 在 a 的去心领域 $U^\circ(a,\delta)$ 内可导,那么,任给 $x\in U^\circ(a,\delta)$,函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,x]$(或 $[x,a]$)上连续,在相应的开区间内可导,根据拉格朗日中值定理,至少存在一点 ξ 介于 a 和 x 之间,使得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(\xi) =$$

$$\lim_{\xi\to a} f'(\xi) = \lim_{x\to a} f'(x) = \infty,$$

即 $f'(a)$ 不存在.

类似可证以下结论.

定理 4　设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & x > a, \\ v(x), & x \leqslant a. \end{cases}$$

在 a 点连续且在 a 的去心邻域内可导,如果

$$\lim_{x\to a^+} u'(x) = \infty,$$

或者

$$\lim_{x\to a^-} v'(x)=\infty,$$

则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点不可导.

根据定理3和定理4,当分段区间上函数的导数在分段点处的左极限或者右极限为无穷时,函数在该分段点处一定不可导,此时不需用导数定义去重新进行判断.

分段函数在分段点处的导数或因导函数极限为无穷而不存在,或因导函数震荡而不能确定其是否存在,为什么一个直接可得结论不可导,而另外一个还须用导数定义进行判断呢?通过定理3的证明过程可以看到,其中的主要区别在于表达式

$$\lim_{\xi\to a} f'(\xi)=\lim_{x\to a} f'(x)(\xi \text{ 介于 } a \text{ 和 } x \text{ 之间})$$

是否成立.

实际上,如果

$$\lim_{x\to a} f'(x)=A,$$

或者

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\infty,$$

则可保证 x 沿着任何子列趋于 a 时,都相应的有

$$\lim_{\xi\to a} f'(\xi)=A(\xi \text{ 介于 } x \text{ 和 } a \text{ 之间}),$$

或者

$$\lim_{\xi\to a} f'(\xi)=\infty(\xi \text{ 介于 } x \text{ 和 } a \text{ 之间}).$$

这也正是洛比达法则中导数比值极限为 ∞ 时,仍可求未定式极限的原因. 而当 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 不存在且不为 ∞ 时,却不能保证 x 沿着任何子列趋于 a 时,都有 $\lim\limits_{\xi\to a} f'(\xi)$ 不存在. 如例5,虽然 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在,但存在

$$\xi_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0\ (k\to\infty),$$

可使

$$\lim_{\xi_k\to 0}\left(2\xi_k\sin\frac{1}{\xi_k}-\cos\frac{1}{\xi_k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(2\xi_k\sin\frac{1}{\xi_k}-\cos\frac{1}{\xi_k}\right)=0.$$

例7　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\infty,$$

由定理4知 $f'(0)$ 不存在. 另据导数定义也有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x^{-\frac{2}{3}}=\infty.$$

3　利用分段点的一阶可导性确定函数参数

例8　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases} ax+b\sqrt{x}, & x>1,\\ x^2, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

在 $x=1$ 处有连续导数,求参数 a 和 b.

例9　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases} 1+\sin 2x, & x\leqslant 0,\\ a+be^x, & x>0.\end{cases}$$

试确定 a 和 b 使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

例10　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+a, & x\neq 0,\\ b, & x=0.\end{cases}$$

试确定 a 和 b 使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

上面3个例子是利用分段函数分段点的可导性确定参数的两个题目类型,如果前提条件为导函数在分段点处是连续的(称其为第1类),此类题一定可以通过各段求导求极限的方法去做,如例8;如果前提只告诉函数在分段点处可导(称其为第2类),对于这类题目从例9和例10可以看出,例9可以分别求导再求极限去确定参数,而例10却不可以,原因是 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在. 因此,对于分段函数确定参数的第2类题目类型,总结做法如下.

设含有参数的分段函数

$$f(x)=\begin{cases} u(x), & x>a,\\ v(x), & x\leqslant a.\end{cases}$$

在 $x=a$ 处可导. 若 $\lim\limits_{x\to a^+} u'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-} v'(x)$ 都存在,则可以通过

$$\lim_{x\to a^+} u'(x)=\lim_{x\to a^-} v'(x)$$

确定参数. 若 $\lim\limits_{x\to a^+} u'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-} v'(x)$ 至少有一个不存在,则需要通过定义确定参数.

参考文献

[1] 龚德恩. 微积分:上[M]. 3版. 成都:四川人民出版社,1999:78.

[2] 彭娟,郭夕敬. 分段函数在分段点处的导数[J]. 高等数学研究,2009,12(5):19-21.

[3] 沙淑波. 分段函数分段点上导数问题的一点注记[J]. 昌潍师专学报,2000,19(5):86-88.

用于证明不等式的微分学方法

侯 玲，李 红，胡 钢

（西安理工大学 理学院，陕西 西安 710048）

摘 要 通过实例说明使用微分中值定理、函数的单调性、函数的最值、泰勒公式或者函数图形的凹凸性进行不等式证明的一些常用方法.

关键词 中值定理；函数的单调性；泰勒公式；凹凸性

中图分类号 O172.1 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2012)05-0035-03

不等式的证明是高等数学经常遇到又比较困难的问题之一. 不等式的证明方法在以往多采用几何和代数方法，现在我们可以借助于导数这一工具来证明.

1 利用中值定理

证题思路 将欲证的不等式改写成含改变量之商$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$（或$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$）的不等式，则可尝试利用中值公式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

或者

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)})=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

并做适当的放缩得到待证不等式.

收稿日期：2011-05-12；**修改日期**：2012-08-07

作者简介：侯玲（1962－），女，陕西蓝田人，副教授，从事数学分析和高等数学的教学与研究. Email：houling@xaut.edu.cn

李红（1967－），女，河南密县人，硕士，讲师，从事高等数学和线性代数的教学与研究. Email：lihong67@xaut.edu.cn

例 1[1] **证明不等式**

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}\ (0<a<b).$$

分析 把待证不等式改写为

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a},$$

可见中项是函数 $\ln x$ 在区间$[a,b]$上的改变量与自变量改变量之商，于是可考虑对函数 $\ln x$ 在$[a,b]$上使用拉格朗日中值定理.

证明 构造辅助函数

$$f(x)=\ln x\ (0<a\leqslant x\leqslant b),$$

则有

$$f'(x)=\frac{1}{x}.$$

根据拉格朗日中值公式，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi},$$

又因为

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a},$$

于是有

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

Differentiability of a Piecewise-defined Function

LIU Hongli

(School of Mathematics and Statistics, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, PRC)

Abstract: In this paper, we summarize various methods for calculating the derivative of a piecewise-defined function at an interphase point, and discuss the relation between the derivative and the limit of the derivative function at such point. Problems of determining parameters using the derivative at an interphase point are also analyzed.

Keywords: piecewise-defined function, interphase point, continuous, derivative