第七章 多元函数微分学

作业 1 多元函数

1．填空题

（1）已知函数 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则 $f\left(x,y\right)=\underline{\dfrac{x^2\left(1-y^2\right)}{\left(1+y\right)^2}}$；

（2）$z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{9}+\sqrt{x^2+y^2-4}$ 的定义域是 $\underline{\left\{\left(x,y\right)\middle|4\le x^2+y^2\le 9\right\}}$；

（3）$z=\ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域是

$\underline{\left\{\left(x,y\right)\middle|,x>0,y>x+1\right\}\cup\left\{\left(x,y\right)\middle|x<0,x<y\le x+1\right\}}$；

（4）函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\ne 0\\ y, & x=0\end{cases}$ 的连续范围是<u>　全平面　</u>；

（5）函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在 $\underline{y^2=2x}$ 处间断.

2．求下列极限

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}$；

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9+t}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-t}{3+\sqrt{9+t}}=-\dfrac{1}{6}$

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\ \mathrm{e}^{-(x+y)}$.

解：$y=x^3\ \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\ \mathrm{e}^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left[(x+y)^2\mathrm{e}^{-(x+y)}-2xe^{-x}ye^{-y}\right]$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}t\mathrm{e}^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{e^t}=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2}{e^t}=0$，

故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\ \mathrm{e}^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left[(x+y)^2\mathrm{e}^{-(x+y)}-2xe^{-x}ye^{-y}\right]=0$

3．讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 是否存在.

解：沿着曲线 $y=kx^3,(x,y)\to(0,0)$,有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 因

k 而异，从而极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在

4．证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 分别对于每个自变量 x 或 y

都连续，但作为二元函数在点 $(0,0)$ 却不连续.

解：由于 $f(x,0)\equiv 0, f(0,y)\equiv 0,$

从而可知在点 $(0,0)$ 分别对于每个自变量 x 或 y 都连续，但沿着曲线

$y=kx,(x,y)\to(0,0)$,有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$ 因 k 而异，

从而极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在，故作为二元函数在点 $(0,0)$ 却不连续.

作业 2　偏导数

1．填空题

（1）设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x(3,4)=\underline{\dfrac{2}{5}}$；

（2）（3）设 $f\left(x,y\right)=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=\underline{\dfrac{1}{2}}$；

（3）设 $u=xz^2+\sin\dfrac{x}{y}$，则 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\partial z}=\underline{\quad 0\quad}$；

（4）曲线 $\Gamma:\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $\left(2,4,5\right)$ 处的切线与 Ox 轴正向的倾角是 $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$.

2．设 $u=\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$，　证明　$2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

证:因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{\frac{x}{y^2}}\dfrac{1}{y^2},\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{\frac{x}{y^2}}\dfrac{-2x}{y^3}$

所以 $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xe^{\frac{x}{y^2}}\dfrac{1}{y^2}+ye^{\frac{x}{y^2}}\dfrac{-2x}{y^3}=e^{\frac{x}{y^2}}\dfrac{2x}{y^2}+e^{\frac{x}{y^2}}\dfrac{-2x}{y^2}=0$

3．设 $z=y^{\ln x}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$z=e^{\ln x\cdot\ln y}$，

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\ln x\cdot\ln y}\cdot\dfrac{\ln y}{x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{\ln x\cdot\ln y}\cdot\left(\dfrac{\ln y}{x}\right)^2+e^{\ln x\cdot\ln y}\cdot\dfrac{-\ln y}{x^2}=\dfrac{\ln^2 y-\ln y}{x^2}y^{\ln x}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{\ln x\cdot\ln y}\cdot\dfrac{\ln y}{x}\cdot\dfrac{\ln x}{y}+e^{\ln x\cdot\ln y}\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{\ln y\cdot\ln x+1}{xy}y^{\ln x}$

4．设$u = z\arctan\dfrac{x}{y}$， 证明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

解：因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{yz}{x^2+y^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{0-yz\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{-2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{-xz}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{0-xz\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\arctan\frac{x}{y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

所以$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{-2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}+0=0$

5．设函数 $f\left(x,y\right)=\begin{cases} x^2\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

（1）试求 $f\left(x,y\right)$的偏导函数；

解：当$x\neq 0,\ f_x\left(x,y\right)=\left(4x^3+2xy^2\right)\sin\dfrac{1}{x}+x^2\left(x^2+y^2\right)\cos\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}$

$f_y\left(x,y\right)=2x^2y\sin\dfrac{1}{x}$， $f_x\left(x,y\right)=\left(4x^3+2xy^2\right)\sin\dfrac{1}{x}-\left(x^2+y^2\right)\cos\dfrac{1}{x}$

当$x\neq 0,\ f_x\left(0,y\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x,y\right)-f\left(0,y\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$

$f_y\left(0,y\right)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f\left(0,y+\Delta y\right)-f\left(0,y\right)}{\Delta y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$ ，

$f_x\left(x,y\right)=\left(4x^3+2xy^2\right)\sin\dfrac{1}{x}-\left(x^2+y^2\right)\cos\dfrac{1}{x}$

（2）考察偏导函数在$\left(0,3\right)$点处是否连续.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} f_y\left(x,y\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}2x^2y\sin\dfrac{1}{x}=0=f_y\left(0,3\right)$，故 $f_y\left(x,y\right)$在$\left(0,3\right)$点处连续，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} f_x\left(x,y\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\left[\left(4x^3+2xy^2\right)\sin\dfrac{1}{x}-\left(x^2+y^2\right)\cos\dfrac{1}{x}\right]$不存在，从而 $f_x\left(x,y\right)$在

$\left(0,3\right)$点处不连续

作业 3 全微分及其应用

1．填空题

（1）$z=f(x,y)$ 在点 $(x_0\ ,\ y_0)$ 处偏导数存在是 $z=f(x,y)$ 在该点可微的 <u>必要</u> 条件；

（2）函数 $z=x^2y^3$ 在点 $(2,-1)$ 处，当 $\Delta x=0.02, \Delta y=-0.01$ 时有全增量

$\Delta z=$ <u>-0.2040402004</u>，全微分 $\mathrm{d}\,z=$ <u>-0.20</u>；

（3）设 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0\ ,\ y_0)$ 处的全增量为 Δz，全微分为 dz，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_0\ ,\ y_0)$ 处的全增量与全微分的关系式是 <u>$\Delta z=dz+o(dz)$</u>；

（4）$u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(0\ ,1)$ 处的 $\mathrm{d}u=$ <u>dx</u>；

（5）$u=(\ln y)^{\cos x}$，则 $\mathrm{d}u=$ <u>$(\ln y)^{\cos x}\left[-\ln\ln y\cdot\sin x dx+\dfrac{\cos x}{y\ln y}dy\right]$</u>；

（6）$u=(\dfrac{x}{y})^z$，则 $\mathrm{d}u=$ <u>$(\dfrac{x}{y})^z\left(\dfrac{z}{x}dx-\dfrac{z}{y}dy+\ln\dfrac{x}{y}dz\right)$</u>；

（7）$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则 $\mathrm{d}u=$ <u>$-\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}(\quad)$</u>.

2．证明：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，$f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 存在，但在 $(0,0)$ 处不可微.

证：由于 $f(0,y)=0, f(x,0)=0,$ 从而 $f_y(0,0)=0,\ f_x(0,0)=0.$ 但是

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\sqrt{\Delta x\cdot\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$ 不存在，从而在 $(0,0)$ 处不可微.

3．设函数 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

试证：（1）函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处是可微的；

证：因为 $f_x\left(0,0\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x,0\right)-f\left(0,0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}-0}{x-0}=0,\ f_y\left(0,0\right)=0$

又 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-dz}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\left(\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2\right)\sin\dfrac{1}{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}=0$

所以函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处是可微的

（2）函数 $f_x\left(x,y\right)$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处不连续.

证：当 $x^2+y^2\neq 0,\ f_x\left(x,y\right)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f_x\left(x,y\right)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ 不存在，

故 $f_x\left(x,y\right)$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处不连续

作业 4　多元复合函数的求导法则

1．填空题

（1）设 $z=u^2\ln v, u=\dfrac{y}{x}, v=3y-2x$，则

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{-\dfrac{2y^2}{x^3}\ln(3y-2x)-\dfrac{2y^2}{x^2(3y-2x)}}$；

（2）设 $z=x^2y-xy^2, x=u\cos v, y=u\sin v$，则

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\underline{u^3\left(\sin^3 v+\cos^3 v-\sin 2v\sin v-\sin 2v\cos v\right)}$；

（3）设 $u=(x-y)^z, z=x^2+y^2$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\underline{(x-y)^z\left[2x\ln(x-y)+\dfrac{x^2+y^2}{x-y}\right]}$；

（4）设 $z=x^2+\sqrt{y}, y=\sin x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\underline{2x+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}$.

2．求下列函数的偏导数

（1）设 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$,其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$；

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{f_1}{y}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=f_1\cdot\dfrac{-x}{y^2}+f_2\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{-x}{y^2}f_1+\dfrac{1}{z}f_2, \dfrac{\partial u}{\partial z}=f_2\cdot\dfrac{-y}{z^2}=\dfrac{-y}{z^2}f_2$

（2）设 $u=f(x,y,z),\ z=\varphi(y,t), t=\psi(y,x)$，其中 f,φ,ψ 均可微，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解：因为 $du=f_1dx+f_2dy+f_3dz, dz=\varphi_1dy+\varphi_2dt, dt=\psi_1dy+\psi_2dx$

从而 $du=f_1dx+f_2dy+f_3\left[\varphi_1dy+\varphi_2\left(\psi_1dy+\psi_2dx\right)\right]$

$=\left(f_1++f_3\varphi_2\psi_2\right)dx+\left(f_2+f_3\varphi_1+f_3\varphi_2\psi_1\right)$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1+f_3\varphi_2\psi_2, \dfrac{\partial u}{\partial y}=f_2+f_3\varphi_1+f_3\varphi_2\psi_1$

3．验证下列各式

（1）设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 可微，则 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$；

证：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-2xyf'}{f^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{f}+\dfrac{2y^2f'}{f^2}$

所以$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\dfrac{-2xyf'}{f^2}+\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{f}+\dfrac{2y^2f'}{f^2}\right)=\dfrac{1}{yf}=\dfrac{z}{y^2}$

（2）设$z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi\left(xy\right)$，其中$\varphi$可微，则$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

证：因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2}{3x^2}+y\varphi'\left(xy\right),\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{3x}+x\varphi'\left(xy\right)$

所以$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=x^2\left(-\dfrac{y^2}{3x^2}+y\varphi'\left(xy\right)\right)-xy\left(\dfrac{2y}{3x}+x\varphi'\left(xy\right)\right)+y^2$

$=-\dfrac{y^2}{3}+x^2y\varphi'\left(xy\right)-y\dfrac{2y}{3}-x^2y\varphi'\left(xy\right)+y^2=0$

4．设$z=xf\left(2x,\dfrac{y^2}{x}\right)$,其中函数$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f+x\left(2f_1+f_2\cdot\dfrac{-y^2}{x^2}\right)=f+2xf_1-\dfrac{y^2}{x}f_2$,

所以$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[f+2xf_1-\dfrac{y^2}{x}f_2\right]=\dfrac{2y}{x}f_2+2xf_{12}\cdot\dfrac{2y}{x}-\dfrac{2y}{x}f_2-\dfrac{y^2}{x}f_{22}\cdot\dfrac{2y}{x}$

$=4yf_{12}-\dfrac{2y^3}{x^2}f_{22}$

4． 设 $u=\varphi(\dfrac{y}{x})+x\psi(\dfrac{y}{x})$ 其中函数 φ,ψ 具有二阶连续偏导数，试证：

$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

证：因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2}\varphi'+\psi-\dfrac{y}{x}\psi',\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2y}{x^3}\varphi'+\dfrac{y^2}{x^4}\varphi''+\dfrac{y^2}{x^3}\psi''$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}\varphi'-\dfrac{y}{x^3}\varphi''-\dfrac{y}{x^2}\psi'',\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\varphi'+\psi',\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\varphi''}{x^2}+\dfrac{\psi''}{x}$

从而左边

$$=x^2\left(\dfrac{2y}{x^3}\varphi'+\dfrac{y^2}{x^4}\varphi''+\dfrac{y^2}{x^3}\psi''\right)+2xy\left(-\dfrac{1}{x^2}\varphi'-\dfrac{y}{x^3}\varphi''-\dfrac{y}{x^2}\psi''\right)+y^2\left(\dfrac{\varphi''}{x^2}+\dfrac{\psi''}{x}\right)=0$$

作业 5 隐函数求导法

1．填空题

（1）已知 $x^3+y^3-3xy=0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\dfrac{x^2-y}{x-y^2}}$；

（2）已知 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\underline{\dfrac{2\sqrt{xyz}-xz}{xy-\sqrt{xyz}}}$；

（3）已知 $z^x=y^z$，则 $\mathrm{d}z=\underline{\dfrac{z^2dy-yz\ln zdx}{xy-yz\ln y}}$；

（4）已知 $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1$，则 $\mathrm{d}z=\underline{-\dfrac{\sin 2xdx+\sin 2ydy}{\sin 2z}}$；

（5）已知 $z=f\left(xz,z-y\right)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，则

$\mathrm{d}z=\underline{\dfrac{zf_1dx-f_2dy}{1-xf_1-f_2}}$.

2．设 $F\left(y+z,xy+yz\right)=0,$ 其中 F 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：$F_1\dfrac{\partial z}{\partial x}+F_2\cdot\left(y+y\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-yF_2}{F_1+yF_2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\frac{F_2}{F_1+yF_2}\right)=-y\frac{\left[F_{21}\cdot z_x+F_{22}\left(y+yz_x\right)\right]\left(F_1+yF_2\right)-F_2\left[F_1+yF_2\right]'_x}{\left(F_1+yF_2\right)^2}$$

$$=\frac{y^2\left(F_{21}F_2-F_{22}F_1\right)}{\left(F_1+yF_2\right)^2}+\frac{y^2F_2\left[-F_2\left(F_{11}+yF_{21}\right)+F_1\left(F_{12}+yF_{22}\right)\right]}{\left(F_1+yF_2\right)^3}$$

3．求由方程组 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$ 所确定的 $y\left(x\right)$ 及 $z\left(x\right)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解：由已知 $\begin{cases}dz=2xdx+2ydy\\2xdx+4ydy+6zdz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dz-2xdx=2ydy\\2xdx+2\left(dz-2xdx\right)+6zdz=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2xdx+\left(2+6z\right)dz=0\\xdx+2ydy+3z\left(2xdx+2ydy\right)=0\end{cases}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{x}{1+3z},\frac{dy}{dx}=-\frac{x+6xy}{2y+6yz}$$

4. 设函数 $z=f\left(u\right)$，又方程 $u=\varphi\left(u\right)+\int_y^x P\left(t\right)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f\left(u\right)$ 与 $\varphi\left(u\right)$ 均可微；$P\left(t\right),\varphi'\left(u\right)$ 连续，且 $\varphi'\left(u\right)\neq 1$. 试证：$P\left(y\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P\left(x\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

证：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(u\right)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\left(u\right)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'\left(u\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+P\left(x\right),\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{P\left(x\right)}{1-\varphi'\left(u\right)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\left(u\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-P\left(y\right),\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-P\left(y\right)}{1-\varphi'\left(u\right)}$$

$$P\left(y\right)\frac{\partial z}{\partial x}+P\left(x\right)\frac{\partial z}{\partial y}=P\left(y\right)f'\left(u\right)\frac{P\left(x\right)}{1-\varphi'\left(u\right)}+P\left(x\right)f'\left(u\right)\frac{-P\left(y\right)}{1-\varphi'\left(u\right)}=0$$

5．设函数 $f\left(u\right)$ 具有二阶连续偏导数，而 $z=f\left(\mathrm{e}^x\sin y\right)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\mathrm{e}^{2x}$，求 $f\left(u\right)$.

解：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(u\right)e^x\sin y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(u\right)\left(e^x\sin y\right)^2+f'\left(u\right)e^x\sin y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(u\right)e^x\cos y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(u\right)\left(e^x\cos y\right)^2+f'\left(u\right)e^x(-\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(u\right)e^{2x}=f(u)\mathrm{e}^{2x},\Rightarrow f''\left(u\right)-f(u)=0$$

特征方程为 $r^2-1=0,r_1=1,r_2=-1,\ f\left(u\right)=c_1e^u+c_2e^{-u}$

作业 6　方向导数与梯度

1．填空题

（1）在梯度向量的方向上，函数的变化率___最大___；

（2）函数在给定点的方向导数的最大值就是梯度的___模___；

（3）函数 $z=4x^2+9y^2$ 在点 $(2,1)$ 的梯度为 $\operatorname{grad} z=\underline{\{16,18\}}$；

（4）函数 $u=xyz$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的方向导数是

$\underline{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}$，且函数 u 在该点的梯度是 $\underline{\{1,1,1\}}$；

（5）函数 $u=\mathrm{e}^x\cos(yz)$ 在点 $(0,0,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{2,1,-2\}$ 的方向导数是 $\underline{\dfrac{2}{3}}$；

（6）函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数是 $\underline{\dfrac{1}{2}}$.

2．求 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点 $A(a,0,0)$ 及点 $B(0,a,0)$ 处的梯度间的夹角.

解：$gradu\big|_A=\{2x,2y,-2z\}\big|_A=\{2a,0,0\}$

$gradu\big|_B=\{2x,2y,-2z\}\big|_B=\{0,2a,0\}$

夹角余弦为 $\cos\varphi=\dfrac{\left|gradu\big|_A\cdot gradu\big|_B\right|}{\left|gradu\big|_A\right|\cdot\left|gradu\big|_B\right|}=0\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

3．求二元函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(-1,1)$ 沿方向 $\vec{l}=\{2,1\}$ 的方向导数及梯度，并指出 z 在该点沿那个方向减少得最快？沿那个方向 z 的值不变？

解：$gradz\big|_{(-1,1)}=\{2x-y,2y-x\}\big|_{(-1,1)}=\{-3,3\}$

$\vec{l}^{\circ}=\left\{\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{1}{\sqrt5}\right\}$，$\dfrac{\partial z}{\partial l}=\{-3,3\}\cdot\left\{\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{1}{\sqrt5}\right\}=-\dfrac{3\sqrt5}{5}$

z 在该点沿梯度相反方向，即 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{-1}{\sqrt2}\right\}$ 方向减少得最快；

沿与梯度垂直的那个方向，即 $\pm\left\{\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2}\right\}$ 方向 z 的值不变

4．设 x 轴正向到 $\vec{l}$ 得转角为 α，求函数 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点 $\left(0,0\right)$ 处沿着方向 $\vec{l}$ 的方向导数.

解：$\vec{l}^{\circ}=\left\{\cos\alpha,\sin\alpha\right\},\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

由于该函数在点 $\left(0,0\right)$ 处不可微，从而不能用公式，只能由定义得出沿着方向 $\vec{l}$ 的方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f\left(x,y\right)-f\left(0,0\right)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

作业 7　偏导数的几何应用

1．填空题

（1）已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则点 P 的坐标是 $\underline{(1,1,2)}$；

（2）曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程是 $\underline{2x+y=4}$；

（3）由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转曲面在点 $M\left(0,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ 处的指向内侧的单位法向量为 $\underline{\left\{0,-\sqrt{\frac{12}{30}},-\sqrt{\frac{18}{30}}\right\}}$；

（4）曲面 $x^2+2y^2+3z^2=$ 在点 $\left(1\,-,\quad 2\right)$ 处的法线方程是 $\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{y-2}{6}}$；

（5）已知曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点 P 的切线平行于平面 $x+2y+z=4$，则点 P 的坐标是 $\underline{(-1,1,-1)}$ 或 $\underline{\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)}$.

2．求曲线 $x=\sin^2 t,y=\sin t\cos t,z=\cos^2 t$ 在对应于的点 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线和法平面方程.

解：切点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\vec{T}=\left\{2\sin t\cos t,\cos^2 t-\sin^2 t,-2\cos t\sin t\right\}\Big|_{\frac{\pi}{4}}=\{1,0,-1\}$，

从而切线为 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$，$\begin{cases}x+z-1=0\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$，

法平面为 $x-\frac{1}{2}-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0, x-z=0$

3．求两个圆柱面的交线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2+z^2=1\end{cases}$ 在点 $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 处的切线和法平面的方程.

解：$\vec{n}_1=\{2x,2y,0\}|_M \ //\{1,1,0\}$，$\vec{n}_2=\{2x,0,2z\}|_M \ //\{1,0,1\}$

$\vec{T}=\{1,1,0\}\times\{1,0,1\}=\{1,-1,-1\}$

切线为$\dfrac{x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\dfrac{y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{-1}=\dfrac{z-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{-1}$,，法平面为$x-y-z+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$

4．求曲面$ax^2+by^2+cz^2=1\left(abc\neq 0\right)$在点$\left(x_0,y_0,z_0\right)$处的切平面及法线的方程.

解：$\vec{n}=\{2ax_0,2by_0,2cz_0\}//\{ax_0,by_0,cz_0\}$

切平面为$ax_0x+by_0y+cz_0z=1$，法线为$\dfrac{x-x_0}{ax_0}=\dfrac{y-y_0}{by_0}=\dfrac{z-z_0}{cz_0}$

5．求函数$z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$在点$M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$处沿曲线$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在此点的外法线方向的方向导数.

解：$gradz\big|_M=\left\{-\dfrac{2x}{a^2},-\dfrac{2y}{b^2}\right\}\Bigg|_M=\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{a},-\dfrac{\sqrt{2}}{b}\right\}$

$\vec{n}=\left\{\dfrac{2x}{a^2},\dfrac{2y}{b^2}\right\}\Bigg|_M=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{a},\dfrac{\sqrt{2}}{b}\right\}$指向外侧为此点的外法线方向，方向导数为

$\dfrac{\partial z}{\partial n}=gradz\cdot\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}{ab}$

6．证明：曲面$z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$在任意点处的切平面都通过原点，其中$f$具有连续导数.

证：设切点为$\left(x_0,y_0,z_0\right)$，

则$\vec{n}=\left\{f\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)-\dfrac{y_0}{x_0}f'\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right),f'\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right),-1\right\},z_0=x_0f\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)$

切平面为$\left[f\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)-\dfrac{y_0}{x_0}f'\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)\right]\left(x-x_0\right)+f'\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0$

令$x=y=z=0$，得左边等于右边，从而原点在任意点处的切平面上，也即任意点处的切平面都通过原点。

作业 8　多元函数的极值

1．填空题

（1）函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值是 $\underline{\quad 0 \quad}$；

（2）函数 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值点是 $\underline{(1,1,),(-1,-1)}$；

（3）函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点是 $\underline{(1,0),(-3,2)}$；

（4）函数 $z=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2+2y^2$ 的极值是 $\underline{f(1,0)=f(-1,0)=-1}$；

（5）函数 $z=\mathrm{e}^{2x}\left(x+2y+y^2\right)$ 的极值是 $\underline{-\dfrac{e}{2}}$.

2．证明：函数 $z=\left(1+\mathrm{e}^y\right)\cos x-y\mathrm{e}^y$ 有无穷多个极大值点，但无极小值点.

证：因为 由 $z_x=-\left(1+e^y\right)\sin x=0, z_y=e^y\cos x-e^y-ye^y=0$

得驻点坐标为 $x=k\pi, k\in Z; y=(-1)^k-1$

又 $z_{xx}=-\left(1+e^y\right)\cos x, z_{yy}=e^y(\cos x-2-y), z_{xy}=-e^y\sin x$

故 $AC-B^2=(-1)^{k+1}\left(1+e^{(-1)^k-1}\right)e^{(-1)^k-1}(-1)-0^2=(-1)^{k+2}\left(1+e^{(-1)^k-1}\right)e^{(-1)^k-1}$

只有当 k 为偶数时才大于零，从而才有极值。而这时 $A=(-1)^{k+1}\left(1+e^{(-1)^k-1}\right)<0$

因此该函数有无穷多个极大值点，但无极小值点。

3．求函数 $z=\ln x+3\ln y$ 在条件 $x^2+y^2=25$ 下的极值.

解：令 $L=\ln x+3\ln y+\lambda\left(x^2+y^2-25\right)$

则 $L_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0, L_y=\dfrac{3}{y}+2\lambda y=0, x^2+y^2=25 \Rightarrow x^2=\dfrac{-1}{2\lambda}, y^2=\dfrac{-3}{2\lambda}$

从而 $\dfrac{-2}{\lambda}=25 \Rightarrow x^2=\dfrac{25}{4}, y^2=\dfrac{75}{4}, x=\dfrac{5}{2}, y=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}, z_{\min}=4\ln\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\ln 3$

4．求函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在圆域 $x^2+y^2\le 4$ 上的最大值与最小值.

解：先求圆内部的驻点 $f_x=2x=0, f_y=2y=0 \Rightarrow x=y=0$ 得驻点，

再求圆周上的有约束极值，令 $L=x^2-y^2+\lambda\left(x^2+y^2-4\right)$

则 $L_x = 2x + 2\lambda x = 0, L_y = -2y + 2\lambda y = 0,\ x^2 + y^2 - 4 = 0$

若 $\lambda = 0$ 则必有 $x = 0, y = 0,\ x^2 + y^2 - 4 = 0$ 矛盾，

若 $\lambda \neq 0$ 则必有 $x = 0, y = \pm 2,$ 或 $x = \pm 2, y = 0,$

由于 $f\left(0,0\right) = 0,\ f\left(\pm 2,0\right) = 4,\ f\left(0,\pm 2\right) = -4$

从而要求的最大值为 4，最小值为–4.

5．在半径为 R 的半球内求一个体积为最大的内接长方体.

解：设在第一卦限内的顶点坐标为 $\left(x, y, z\right)$，则 $V = 4xyz, x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

令 $L = 4xyz + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right)$，则由

$L_x = 4yz + 2\lambda x = 0, L_y = 4xz + 2\lambda y = 0, L_z = 4xy + 2\lambda z = 0$，$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

可得 $x = y = z = \dfrac{R}{\sqrt{3}}, V_{\max} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}R^3$，其长宽均为 $\dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$，高为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$

6．求椭圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 的长半轴和短半轴.

解：由对称性，得知椭圆的中心点为 $\left(0,0,1\right)$，从而问题转化为求在约束条件

$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 下 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z-1\right)^2}$ 或 $d^2 = R^2 + \left(z-1\right)^2$ 的最值

取 $L = R^2 + \left(z-1\right)^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - R^2\right) + \mu\left(x + y + z - 1\right)$

由 $L_x = 2\lambda x + \mu = 0, L_y = 2\lambda y + \mu = 0, L_z = 2\left(z-1\right) + \mu = 0,$

从而，当 $\lambda \neq 0$ 时 $x = y$，由约束条件 $x = y = \pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}, z = 1 \mp \sqrt{2}R, d_1 = \sqrt{3}R$

当 $\lambda = 0$ 时 $\mu = 0, z = 1$，由约束条件 $x = -y = \pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}, d_2 = R$

于是椭圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 的长半轴为 $\sqrt{3}R$ 和短半轴为 R.

第七章《多元函数微分学》测试试卷

1．单项选择题（每小题 3 分）

（1）　二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 值为　（　　D　　）

（A）0；　　　（B）1；　　　（C）$\dfrac{1}{2}$；　　　（D）不存在.

（2）二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 都存在，则 $f(x,y)$（　　D　　）

(A)在该点可微；　　　　　　　　(B) 在该点连续可微；

(C)在该点沿任意方向的方向导数存在；(D) 以上结论都不对.

（3）函数 $f(x,y)=x^2-ay^2(a>0)$ 在 $(0,0)$ 处（　A　　）

(A) 不取极值；　(B) 取极小值；　(C) 取极大值；　(D)是否取极值依赖于 a.

（4）在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（　　B　　）

（A）只有 1 条；（B）只有 2 条；（C）至少有 3 条；（D）不存在.

（5）设 $z=f(u,v)$，其中 $u=\mathrm{e}^{-x},v=x+y$，下面运算中（　　B　　）

$I:\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}$，$II:\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

(A) I、II 都不正确；　　　　(B) I 正确，II 不正确；

(C) I 不正确，II 正确；　　(D) I、II 都正确.

2．填空题（每小题 3 分）

（1）已知理想气体状态方程 $PV=RT$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial P}=\underline{-1}$；

（2）设 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，则 $\mathrm{d}z=\underline{\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}}$；

（3）函数 $u=\sqrt[x]{\dfrac{x}{y}}$ 在点 $(1,1,1)$ 的梯度为 $\underline{\{1,-1,0\}}$；

（4）已知 $\dfrac{x}{z}=\varphi\left(\dfrac{y}{z}\right)$，其中 φ 为可微函数，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{z}$；

（5）已知曲面 $z=xy$ 上的点 P 处的法线 l 平行于直线 $l_1:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{2z-1}{2}$，

则该法线的方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+2}{-1}}$

3．设 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+yg(x,\dfrac{x}{y})$，其中 f,g 均为二阶可微函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f+xf'\cdot\dfrac{-y}{x^2}+yg_1'\cdot 1+yg_2'\cdot\dfrac{1}{y}=f-\dfrac{y}{x}f'\cdot+yg_1'+g_2'$

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f-\dfrac{y}{x}f'\cdot+yg_1'+g_2'\right)$

$=f'\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}f'-\dfrac{y}{x}f''\cdot\dfrac{1}{x}+g_1'+yg_{12}''\cdot\dfrac{-x}{y^2}+g_{22}''\cdot\dfrac{-x}{y^2}=-\dfrac{y}{x^2}f''+g_1'-\dfrac{x}{y}g_{12}''-\dfrac{x}{y^2}g_{22}''$

4．设 $u=xy,v=\dfrac{x}{y}$，试以新变量 u,v 变换方程 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中 z 对各变量有二阶连续偏导数.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot y+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot y+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot y+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{1}{y}\right)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot x+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{-x}{y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot x+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{-x}{y^2}\right)+\dfrac{2x}{y^3}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{x}{y^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot x+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{-x}{y^2}\right)$

从而 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\cdots\cdots=0$

5．已知 $z=f(x,y),x=\varphi(y,z)$，其中 f,φ 均为可微函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解：对函数取全微分得，$dz=f_1dx+f_2dy,dx=\varphi_1dy+\varphi_2dz,$

从而 $dy=\dfrac{-\varphi_2dz+dx}{\varphi_1},dz=f_1dx+f_2\cdot\dfrac{-\varphi_2dz+dx}{\varphi_1},\varphi_1dz=\varphi_1f_1dx-f_2\varphi_2dz+f_2dx$

$(\varphi_1+f_2\varphi_2)dz=(\varphi_1f_1+f_2)dx,\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\varphi_1f_1+f_2}{\varphi_1+f_2\varphi_2}$

6．设 $\vec{n}$ 是曲面 $z=x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 在 $P(1,2,3)$ 处指向外侧的法向量，求函数

$u=\sqrt{\dfrac{3x^2+3y^2+z^2}{x}}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解：$\vec{n}=\left\{2x,y,-1\right\}\big|_P=\left\{2,2,-1\right\},\vec{n}^{\circ}=\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{-1}{3}\right\}$ 指向下侧在此即抛物面的外侧，

$$du=\frac{1}{2\sqrt{v}}dv=\frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{\left(6xdx+6ydy+2zdz\right)x-\left(3x^2+3y^2+z^2\right)dx}{x^2}$$

$$du\big|_P=\frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{\left(6xdx+6ydy+2zdz\right)x-\left(3x^2+3y^2+z^2\right)dx}{x^2}\Bigg|_P=\left\{\frac{-9}{2\sqrt{6}},\frac{3}{\sqrt{6}},\frac{3}{2\sqrt{6}}\right\}$$

从而 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=gradu\big|_P\cdot\vec{n}^{\circ}=\left\{\dfrac{-9}{2\sqrt{6}},\dfrac{3}{\sqrt{6}},\dfrac{3}{2\sqrt{6}}\right\}\cdot\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{-1}{3}\right\}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7．在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该切平面与三个坐标平面围成的四面体的体积最小，求切点的坐标.

解：设切点为 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$，则切平面为 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}+\dfrac{zz_0}{c^2}=1$

$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$ 在 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$ 的最值问题与 $f\left(x,y,x\right)=xyz$ 在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 下的最值问题等价，只是最大与最小问题焕位而已。

令 $L\left(x,y,x\right)=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$

则 $L_x=yz+\lambda\dfrac{2x}{a^2}=0,L_y=xz+\lambda\dfrac{2y}{a^2}=0,L_z=xy+\lambda\dfrac{2z}{a^2}=0,$

与约束条件结合推得 $x^2=\dfrac{a^2}{3},y^2=\dfrac{b^2}{3},z^2=\dfrac{c^2}{3}$

由于在第一卦限，从而切点为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$

8．设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

（1）求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$；

（2）$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 是否在原点连续？$f(x,y)$ 在原点是否可微？说明理由.

解：（1）当 $x^2+y^2\neq 0,\ f(x,y)=(x+y)^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x+y)^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{-2y(x+y)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

当 $x^2+y^2=0,\ f(x,y)$ 在此为分段点，用定义求偏导数

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}-0}{x}=0,\ f_y\left(0,0\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\dfrac{1}{y^2}-0}{y}=0$$

（2）$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在原点因为二重极限不存在从而不连续，但

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f\left(x,y\right)-f\left(0,0\right)-f_x\left(0,0\right)x-f_y\left(0,0\right)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\left(x+y\right)^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho}}{\rho}+\frac{2xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0,\because\left|2xy\right|\le x^2+y^2$$

9．已知 x,y,z 为常数，且 $\mathrm{e}^x+y^2+\left|z\right|=3$，求证：$\mathrm{e}^x y^2\left|z\right|\le 1$.

解：令 $\mathrm{e}^x=u,y^2=v,\left|z\right|=t$，则问题化为在约束条件 $u+v+t=3,u\ge 0,v\ge 0,t\ge 0$

下 $f\left(u,v,t\right)=uvt$ 的最大值为 1

令 $L=uvt+\lambda\left(u+v+t-3\right)$，则 $L_u=vt+\lambda=0,L_v=ut+\lambda=0,L_t=uv+\lambda=0,$

$\Rightarrow 3uvt+\lambda\left(u+v+t\right)=0$，

结合约束条件 $\Rightarrow uvt=-\lambda=uv=vt=tu\Rightarrow u=v=t=1$

由于该实际问题的最大值一定存在，又可能点唯一，因此最大值为 $f\left(1,1,1\right)=1$

从而 $\mathrm{e}^x y^2\left|z\right|\le 1$