第 21 卷第 1 期　　甘肃联合大学学报(自然科学版)　　Vol. 21 No. 1
2007 年 1 月　　Journal of Gansu Lianhe University (Natural Sciences)　　Jan. 2007

文章编号: 1672-691X(2007)01-0102-03

对数求导法的注解

韩晓茹[1],汤　平[2]

(1. 佛山科学技术学院 数学系, 佛山 528000;2. 河南大学 数学与信息科学学院,河南 开封 475001)

摘　要:主要研究利用对数求导法求导时存在的两个问题. 问题 1:当我们利用对数求导法时,是否不需要考虑函数的正负而直接在函数两边取对数? 问题 2:如果函数 y 有等于 0 的点,如何利用对数求导法求导数? 另外,本文还证明了分段函数在分段点的左右导数和导数左右极限之间的关系,为求分段函数在分段点的导数提供了一种简单的方法.

关键词:绝对值;分段函数;导数; 对数

中图分类号:O172.1　　　**文献标识码**:A

在对函数 $y = f(x)$ 求导的过程中,对于一般类型的函数,只需要应用基本公式和基本法则就能将其导数求出来. 但是如果对形如 $y = [u(x)]^{v(x)}$ 的幂指函数和含有多个因式幂的连乘函数的求导问题,常利用对数求导法求其导数比较简单,具体步骤是:

(1) 对函数两边同时取对数(一般取自然对数,运算简单),将其转换成隐函数的形式.

(2) 利用隐函数的求导法求导数.

对数求导法的优点:

(1) 当 $f(x)$ 是幂指函数时,利用直接求导是不太可能的,但通过取对数转换成初等函数的形式,利用公式可求出导数.

(2) 当 $f(x)$ 是多个函数的积、商的形式时,通过取对数转换成和、差的形式,求导起来就更简单了.

为了清楚地说明这个问题,请看下面的例题.

例 1　设 $y = x^{\sin x}$,求 y'.

解法一　在等式两边取对数,得

$$\ln y = \sin x \ln x.$$

等式两边关于 x 求导,得

$$y'/y = \cos x \cdot \ln x + \sin x / x,$$

所以

$$y' = x^{\sin x}[\cos x \cdot \ln x + \sin x / x].$$

例 2　设 $y = x^2 \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$,求 y'.

解法一　两边取对数

$$\ln y = \ln\left(x^2 \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\right).$$

化简得

$$\ln y = 2\ln x + \ln(x-5)/5 - \ln(x^2+2)/25.$$

两边关于 x 求导得

$$y'/y = 2/x + 1/[5(x-5)] - 2x/[25(x^2+2)],$$

所以

$$y' = x^2 \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{5(x-5)} - \frac{2x}{25(x^2+2)}\right).$$

从这两个例子可以看出,利用对数求导法,求这两类函数的导数时,确实非常方便,但在解题过程中存在着两个问题. 问题 1:当我们利用对数求导法时,直接在等式两边取对数,而没有考虑函数的正负,这与对数的真数必须大于 0 是矛盾的,利用这种方法得到的结论是否正确呢? 问题 2:如果函数有等于 0 的点,还能利用对数求导法吗? 在[1]、[2]中都采用了上面的方法求导数,而没有考虑函数的正负,这种做法显然是不严谨的,在[3]中为了避免上述情况,采用分类讨论的方法. 本文采用先取绝对值再取对数的办法避免了上述问题,并且比[3]中的方法简便. 另外在[1]、[2]、[3]中均未讨论当函数有等于 0 的点时,如何利用对数求导法,本文提供了一种简单的方法,并且这种方法可用于求一般的分段函数在分段点的导数.

1　问题的提出与解决

问题 1　当我们利用对数求导法时,直接在等式两边取对数,而没有考虑函数 y 的正负,这

收稿日期:2006-08-14.

作者简介:韩晓茹(1980-),女(蒙古族),河南南阳人,佛山科学技术学院助教,主要从事偏微分方程的研究.

与对数的真数必须大于 0 是矛盾的,利用这种方法得到的结论是否正确呢?

事实上,为了解决含有负因式的解析式求导问题,我们可以采取先取绝对值再取对数的办法.因为:若 $y=\ln|x|\ (x\neq 0)$,则 $y'=1/x\ (x\neq 0)$;由复合函数的求导法则可得:若 $y=f(x)\neq 0$ 可导,则 $(\ln|y|)=y'/y$.我们再来解上面两个例题.

例 1　解法二　为了保证等式两边恒大于 0,先对等式两边取绝对值,

$$|y|=|x^{\sin x}|=|x|^{\sin x}\quad (x\neq 0).$$

两边取对数

$$\ln|y|=\sin x\cdot\ln|x|.$$

两边关于 x 求导

$$y'/y=\cos x\cdot\ln|x|+\sin x/x.$$

所以

$$y'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln|x|+\sin x/x)\quad (x\neq 0).$$

注:在解法一,显然当 $x<0$ 时,$\ln x$ 没有意义,但解法二就避免了这个问题,并且这种方法学生更容易接受.

例 2　解法二　为了保证等式两边恒大于 0,先对等式两边取绝对值,

$$|y|=\left|x^2\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\right|\quad (x\neq 5,x\neq 0),$$

两边取对数

$$\ln|y|=\ln\left|x^2\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\right|\quad (x\neq 5,x\neq 0),$$

化简得

$$\ln|y|=2\ln|x|+\ln|x-5|/5-\ln|x^2+2|/25,$$

两边关于 x 求导得

$$y'/y=2/x+1/[5(x-5)]-2x/[25(x^2+2)],$$

所以

$$y'=x^2\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right)\quad (x\neq 5,x\neq 0).\qquad (1)$$

注:比较例 2 的两种解法可见,虽然两种解法的结论是一样的,但解法二比解法一更严谨,学生更容易理解.

问题 2　由上面的例子可见,只要函数 $y\neq 0$,我们就可以利用对数求导法来求导数;如果函数 y 有等于 0 的点,还能利用对数求导法吗?

答案是肯定的,我们可以先用对数求导法求 $y\neq 0$ 时的导数,然后利用这个结论来讨论函数 $y=0$ 点处的可导性.我们来先看一个定理.

定理 1　设 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a,\\ A & x=a,\\ h(x) & x<a,\end{cases}$

若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续,在点 a 的某去心邻域内,$g(x)$,$h(x)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to a^+}g'(x)$,$\lim\limits_{x\to a^-}h'(x)$ 存在(或为无穷大),则

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}g'(x),\ f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}h'(x).$$

证明　由定义

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-A}{x-a}.$$

因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续,所以 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=A$,由洛比达法则

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-A}{x-a}=\lim_{x\to a^+}g'(x).$$

同理可证

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}h'(x).$$

注:定理 1 揭示了分段函数在分段点的左右导数和导数左右极限之间的关系,因此,在满足一定的条件下,求左右导数可以通过求导数的左右极限取得.

定理 2　若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续,在点 a 的某去心邻域内,$g(x)$,$h(x)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to a^+}g'(x)=\lim\limits_{x\to a^-}h'(x)\neq\infty$(也即当 $x\to a$ 时,导函数的极限存在),则 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导,且

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}g'(x)=\lim_{x\to a^-}h'(x).$$

证明　根据导数存在的充要条件及定理 1,易证定理 2 的结论.

注　1. 当 $\lim\limits_{x\to a^+}g'(x)=\lim\limits_{x\to a^-}h'(x)\neq\infty$ 时,函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 不可导.

2. 如果 $\lim\limits_{x\to a^+}g'(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-}h'(x)$ 不存在(不包含等于无穷大),则函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的可导性需要利用导数的定义证明.

下面我来讨论例 2 中函数 $y'=x^2\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 在点 $x=0$,$x=5$ 处的可导性.

由式(1)可知

$$y'=x^2\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\cdot$$

$$\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right)\ (x\neq 5, x\neq 0).$$

显然,函数 $y' = x^2\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 在点 $x=0, x=5$ 处连续,在 $x=0, x=5$ 的去心邻域内可导,并且

$$\lim_{x\to 0}x^2\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 5}x^2\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right)=\infty.$$

由定理 2 可知,函数 $y=x^2\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 在点 $x=0$ 可导,且 $y'|_{x=0}=0$;而在点 $x=5$ 处不可导.

注　利用定理 2 来讨论函数在 $y=0$ 点处的可导性显然比利用导数的定义讨论简便.

例 3　设 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$,求 y'.

解　先讨论 $x\neq 1, x\neq 2$ 时的导数,即,当 $x<1$ 或 $2<x<3$ 或 $x>4$ 时,两边取对数

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|.$$

即

$$\ln y=\{[\ln|x-1|+\ln|x-2|\}/2 - \ln|x-3|-\ln|x-4|].$$

所以

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right].$$

所以

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\cdot\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right].$$

下面讨论在点 $x-1$, $x=2$ 处的可导性.

显然函数在 $x=1, x=2$ 处连续,且

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}[1/(x-1)+1/(x-2)-1/(x-3)-1/(x-4)]=\infty,$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}[1/(x-1)+1/(x-2)-1/(x-3)-1/(x-4)]=\infty.$$

由定理 2 可知,函数在 $x=1, x=2$ 处不可导.

注　虽然在本例中,函数 $y\geq 0$,但为了方便把对数化成和差的形式,我们在根号内加上了绝对值,但这时我们仍在原来函数的定义域内讨论的自变量 x.这种做法显然比[3]中的方法更简便.

2　关于对数求导法探究的小结

我认为上面的解法更严谨,更科学合理,总的来说用对数求导法可以分为下面两个步骤:

(1) 先讨论使 $y\neq 0$ 的自变量 x.为了保证等式两边均大于零,在等式两边先取绝对值,再取对数,然后根据隐函数求导的方法求出导数.

(2) 对于使 $y=0$ 的自变量 x_0,根据定理 2,先看函数在 x_0 是否连续,若不连续,则一定不可导;若连续,则可通过导函数的左右极限来求该点的左右导数,从而判断该点的可导性.

参考文献:

[1] 张国楚,徐本顺,李祎.大学文科数学[M].北京:高等教育出版社,2005:56-57.

[2] 吴赣昌,陈怡.高等数学讲义[M].海南:海南出版社,2005:108-109.

[3] 同济大学数学教研室.高等数学[M].北京:高等教育出版社,2004:131-132.

The Illustration of Deriving by Taking Logarithm

HAN Xiao-ru, TANG Ping

(1. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China;

2. School of Mathematics and Information Science, Henan University, Kaifeng 475001, China)

Abstract: This paper mainly discusses the two existing problems when deriving by taking logarithm: 1. whether directly adopting logarithm on both sides without regarding the positive or negative of the function; 2. how to derive by taking logarithm when the functions have zero factors. Otherwise, this paper also proves the relationship between the left (right) derivative and the left (right) limit of the derivative function on the piecewise point, and provides one simple method to obtain derivation on the piecewise point of the piecewise function.

Key words: absolute value; piecewise function; derivation; logarithm