华南理工大学2009年数学竞赛试卷

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚； 2. 所有答案请直接答在试卷上；

3．考试形式：闭卷；

4. 本试卷共 12 大题，满分100分， 考试时间150分钟。

一、填空题 （每小题4分，本大题共24分）

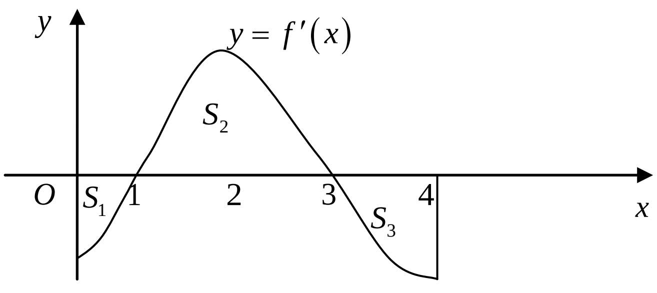
1．若 $f\left(2+x^4\right)=\ln\dfrac{5+2x^4}{x^4-1}$，且 $f\left[\varphi(x)\right]=\ln(1+x)$ 则 $\int\varphi(x)dx=$ _$\underline{3x+7\ln|x-1|+c}$

2．当 $x\to e$ 时，$f(x)=e^x-x^e$ 与 $g(x)=a(x-e)^k$ 是等价无穷小，则 $a=\underline{\dfrac{1}{2}e^{e-1}}$，$k=\underline{2}$

3．若曲线 $C:\begin{cases}x=a\left(\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t\right)\\ y=a\sin t\end{cases}$ $(a>0,0<t<\pi)$ 在任意点 P 处的切线交 x 轴于点 Q，则线段 PQ 的长是 $\underline{a}$

4．设连续函数 $f(x)$ 满足方成 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，且 $f(1)=1$，则 $\int_1^2 f(x)dx=\underline{\dfrac{3}{4}}$

5．已知 $f(0)=2$，且导函数 $y=f'(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的图形如图所示，其中三块面积 $S_1=3$，$S_2=4,S_3=2$ 则函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的最小值和最大值分别为____



6. 将直线 $x=a+bt,y=b-at,z=t$ $\left(a^2+b^2\neq0\right)$ 绕 z 轴旋转一周，则所生成的旋转曲面的方程为 $\underline{x^2+y^2=\left(a^2+b^2\right)\left(1+z^2\right)}$

二、（本题 14 分）已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，对一切正实数 x,y 有 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$f'(1)=1$.

1、证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内任一点处可导；2、求出 $f(x)$ 的解析式。

解：令 $x=y=1$ 得，$f(1)=0,\ f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)}{\Delta x}=1$

取 $y=1+\dfrac{\Delta x}{x}$，由函数方程有

$$f(x+\Delta x)=f\left(x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right)=\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

故在 $x\in(0,+\infty)$ 均有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x)}{x}+1$$

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内任一点处可导。

求解初值问题 $\begin{cases} f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

$$f(x)=e^{-\int\frac{-1}{x}dx}\left[\int 1\cdot e^{\int\frac{-1}{x}dx}dx+c\right]=x(\ln x+c),\quad 0=f(1)=c,\ f(x)=x\ln x$$

三、（本题 10 分）设 $f(x)=\int_{-2}^{x}t|t|\,dt\ \ (x\geq -2)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积

解：$f(-2)=f(2)=0,\ f'(x)=x|x|$，$f(x)=\int_{-2}^{x}t|t|dt$ 为偶函数（可证）且由单调减少到单调增加变化的，$x=0$ 为极小值点。

$$x<0,\ f(x)=-\int_{-2}^{x}t^2dt=-\frac{1}{3}\left(x^3+8\right)$$

$$A=\left|\int_{-2}^{2}f(x)dx\right|=2\left|\int_{-2}^{0}f(x)dx\right|=2\left|\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x^3+8\right)dx\right|=8$$

四、（本题 14 分） 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f'(0)=f'(1)=0$。证明：存在 $\xi\in(0,1)$

使得 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]+\frac{1}{6}f''(\xi)$

解：将 $f(x)$ 分别在 $x_1=0,x_2=1$ 展开成一阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2=f(0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2,\quad (0<\xi_1<x)$$

和 $f(x)=f(1)+f'(1)x+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2=f(1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2,\quad (x<\xi_2<1)$

于是可得两式

$\int_0^1 f(x)dx=f(0)+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi_1)x^2dx$ 和 $\int_0^1 f(x)dx=f(1)+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi_2)(x-1)^2dx$

将两式相加，有 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]+\frac{1}{4}\int_0^1\left[f''(\xi_1)x^2+f''(\xi_2)(x-1)^2\right]dx$

由 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，存在最小值 m 和最大值 M，可得

$$\frac{3}{2}m\le\int_0^1\left[f''(\xi_1)x^2+f''(\xi_2)(x-1)^2\right]dx\le\frac{3}{2}M$$

即 $m\le\frac{2}{3}\int_0^1\left[f''(\xi_1)x^2+f''(\xi_2)(x-1)^2\right]dx\le M$

在根据介值定理，可知

存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset[0,1]$ 使 $f''(\xi)=\frac{2}{3}\int_0^1\left[f''(\xi_1)x^2+f''(\xi_2)(x-1)^2\right]dx$

故有 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]+\frac{1}{6}f''(\xi)$

五、（本题 12 分） 质点在变力 $\vec{F}=\{yz,zx,xy\}$ 的作用下，由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限上的点 $M(\alpha,\beta,\gamma)$

1、求变力 $\vec{F}$ 所做的功 W；

2、试问当 α,β,γ 取何值时所做的功最大？并求出此最大值。

解：直线 $OM:\begin{cases}x=\alpha t\\ y=\beta t,0\le t\le 1\\ z=\gamma t\end{cases}$，$W=\int_{\overrightarrow{OM}}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_0^1 3\alpha\beta\gamma t^2dt=\alpha\beta\gamma$

求 $W=\alpha\beta\gamma$ 在条件 $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1$ 下的最值：

令 $L=\alpha\beta\gamma-\lambda\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)$

解可能的条件极值点，由方程组 $\begin{cases}L_\alpha=\beta\gamma-\lambda\frac{2\alpha}{a^2}=0\\ L_\beta=\alpha\gamma-\lambda\frac{2\beta}{b^2}=0\\ L_\gamma=\alpha\beta-\lambda\frac{2\gamma}{c^2}=0\\ L_\lambda=-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)=0\end{cases}$

得 $\alpha=\frac{a}{\sqrt{3}},\beta=\frac{b}{\sqrt{3}},\gamma=\frac{c}{\sqrt{3}}$，由问题的实际意义可知

当 $\alpha=\frac{a}{\sqrt{3}},\beta=\frac{b}{\sqrt{3}},\gamma=\frac{c}{\sqrt{3}}$ 时 W 有最大值 $W=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$

六、（本题 14 分）计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)^{3/2}}$ $(a>b>0)$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(R>a)$ 的上侧

解：$P=\frac{x}{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)^{3/2}},Q=\frac{y}{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)^{3/2}},R=\frac{z}{\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)^{3/2}}$

$\frac{\partial P}{\partial x}=\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)^{-5/2}\left(-2\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)$（先代曲面方程会改变对称性，麻烦）

$\frac{\partial Q}{\partial y}=\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)^{-5/2}\left(\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)$

$\frac{\partial R}{\partial z}=\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)^{-5/2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-2\frac{z^2}{b^2}\right)$，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$ 除原点外成立

取$\Sigma_1: z=\dfrac{b}{a}\sqrt{R^2-x^2-y^2}$上侧，由高斯公式可得

原式$I=\iint\limits_{\Sigma_1}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\right)^{3/2}}=\dfrac{a^3}{R^3}\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$（代绝佳曲面方程）

再取$\Sigma_2: z=0, x^2+y^2\le R^2$下侧，围起$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le z\le\dfrac{b}{a}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$

$$I=\frac{a^3}{R^3}\left[\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_2}xdydz+ydzdx+zdxdy\right]=\frac{a^3}{R^3}\left[\iiint\limits_{\Omega}3dv-0\right]$$

$$=\frac{3a^3}{R^3}\int_0^{bR/a}\pi\left(R^2-\frac{a^2}{b^2}z^2\right)dz==\frac{3a^3}{R^3}\pi\left(R^2z-\frac{a^2}{3b^2}z^3\right)\Bigg|_0^{bR/a}=2\pi a^2b$$

七、（本题 12 分）利用幂级数求数项级数$1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots$的和

解：令$f(x)=x-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{7}x^7-\dfrac{1}{10}x^{10}+\cdots, x\in(-1,1]$

则$f(0)=0, f'(x)=1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\dfrac{1}{1+x^3}, |x|<1$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x\frac{1}{1+t^3}dt=\frac{1}{3}\int_0^x\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{3}\int_0^x\frac{2-t}{1-t+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}\right)$$

故$1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots=f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\dfrac{1}{3}\ln2+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$