第十一章　无穷级数

作业 29　常数项级数的概念和性质

1．按定义判断下列级数的敛散性，若收敛，并求其和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ ；

解：因为$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

所以$S_n=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$

因此由定义可知该级数收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；

解：因为$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

所以$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt{n+1}-1$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-1\right)=\infty$，因此由定义可知该级数发散

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ；

解：因为$u_1=\frac{9}{10},u_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^n=\frac{-9}{10}u_{n-1}$

所以$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^n=\frac{9}{10}\cdot\frac{1-\left(-\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{-9}{10}}=\frac{9}{19}\left[1-\left(-\frac{9}{10}\right)^n\right]$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{19}\left[1-\left(-\frac{9}{10}\right)^n\right]=\frac{9}{19}$，因此由定义可知该级数收敛

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$；

解：因为$a_n=\sin\frac{n\pi}{6},a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{\sqrt{3}}{2},a_3=1,a_4=\frac{\sqrt{3}}{2},a_5=\frac{1}{2},a_6=0,$

$a_7=-\frac{1}{2},a_8=-\frac{\sqrt{3}}{2},a_9=-1,a_{10}=-\frac{\sqrt{3}}{2},a_{11}=-\frac{1}{2},a_{12}=0$，依次重复

所以$S_{6n}=0,S_{6n=1}=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}S_{6n}=0,\lim_{n\to\infty}S_{6n=1}=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}S_n$不存在

因此由定义可知该级数发散

2．利用基本性质判别下列级数的敛散性：

（1）$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$；

解：观察发现该级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$，是发散的调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$每项乘以$\frac{1}{3}$得到的，

由级数的基本性质，该级数发散

（2）$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

解：观察发现该级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$，是收敛的两个等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$逐项相加得到的，

由级数的基本性质，该级数收敛

（3）$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}+\cdots$；

解：观察发现该级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)$，是收敛的等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$与发散的$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}$逐项相加得到的，

由级数的基本性质，该级数发散

（4）$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$.

解：观察发现该级数一般项为$u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$，但$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=1>0$

由级数收敛的必要条件，该级数发散

作业 30 正项级数及其收敛性

1．用比较判别法（或定理 2 的推论）判定下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$；

解：由于 $0<u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 是收敛的等比级数

从而由比较判别法，该级数收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$．

解：由于 $0<u_n=2^n\sin\frac{\pi}{3^n},\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi}=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi$ 是收敛的等比级数

从而由比较判别法的极限形式，该级数收敛

2．用达朗贝尔判别法判定下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$；

解：由于 $0<u_n=\frac{2n+1}{2^n},\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，

从而由达朗贝尔判别法，该级数收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；

解：由于 $0<u_n=\frac{2^n n!}{n^n},\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\frac{2}{e}<1$，

从而由达朗贝尔判别法，该级数收敛

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$；

解：由于 $0<u_n=n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}},\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{(n+1)}=\frac{1}{2}<1$，

从而由达朗贝尔判别法，该级数收敛

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$.

解：由于 $0<u_n=\frac{n!}{(2n-1)!!}$, $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!}=\frac{1}{2}<1$,

从而由达朗贝尔判别法，该级数收敛

3．用柯西判别法判定下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n}\right)^n$ ；

解：由于 $0<u_n=\left(\frac{3n-1}{4n}\right)^n$, $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{4n}\right)^n}=\frac{3}{4}<1$,

从而由柯西判别法，该级数收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

解：由于 $0<u_n=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$, $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}}=\frac{e}{3}<1$,

从而由柯西判别法，该级数收敛

4．用 $p-$ 判别法判定下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$ ；

解：由于 $0<u_n=\frac{n+1}{n^2+1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$ ，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为 $p=1$ 的发散的 $p-$ 级数，从而由 $p-$ 判别法，该级数发散

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{5}{4}}+1}$.

解：由于 $0<u_n=\frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{5}{4}}+1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{5}{4}}+1}\cdot n^{\frac{9}{8}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^{-\frac{1}{8}}+x^{-\frac{9}{8}}}=$ ，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$ 为 $p=\frac{9}{8}>1$ 的发散的 $p-$ 级数，从而由 $p-$ 判别法，该级数发散

5．设 k 为正整数，证明：

（1）$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^k}{(2k)!}=0$ ；

解：对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ 来说，

由于 $0<u_n=\frac{n^n}{(2n)!},\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2(2n+1)}=0<1$，

从而由达朗贝尔判别法，该级数收敛

再由级数收敛的必要条件可知 $\lim_{k\to+\infty}\frac{k^k}{(2k)!}=0$

（2）$\lim_{k\to+\infty}\frac{(k!)^2}{k^k}=+\infty$.

解：对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 来说，

由于 $0<u_n=\frac{n^n}{(n!)^2},\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n+1}=0<1$，

从而由达朗贝尔判别法，该级数收敛

再由级数收敛的必要条件可知 $\lim_{k\to+\infty}\frac{k^k}{(k!)^2}=0$，

从而由无穷大量与无穷小的关系 $\lim_{k\to+\infty}\frac{(k!)^2}{k^k}=+\infty$

作业 31　交错级数与任意项级数的收敛性

1．判别下列级数的敛散性；若收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}$　；

解：该级数为交错级数，其一般项的绝对值为

$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2-n}},u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2-n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}=u_n$ 单调减少，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}=0$，从而由莱布尼茨判别法知其收敛

再由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\cdot n=1$，由 $p-$判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}\right|$ 发散，

从而原级数不会绝对收敛，只有条件收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}},(x\in R)$；

解：由于 $\left|\frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}}\right|\le\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，，由 $p-$判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}},(x\in R)$ 绝对收敛

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$　；

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{\ln x}{x}}}=\frac{1}{e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}}=\frac{1}{e^0}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在，

由收敛级数的必要条件，从而该级数发散

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n2^n}$；

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\cdot(-1)^n n2^n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}<1$，

从而由达朗贝尔判别法，该级数绝对收敛

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+1)},(x\in R)$.

解：当 $x=0$ 时显然收敛，否则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)}\cdot\frac{2^n(n+1)}{x^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{2}=\frac{|x|}{2}$，

当$\left|x\right|<2$时由达朗贝尔判别法，从而该级数绝对收敛，

当$x=2$时级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散

当$x=-2$时级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$条件收敛

7．若$\lim_{n\to\infty}n^2a_n$存在，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

证明：由已知$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_n\right|}{n^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\left|a_n\right|=\lim_{n\to\infty}\left|n^2a_n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=0$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

8．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，且$a_n\neq-1\ (n=1,2,\cdots)$，试证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$都收敛．级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$是否收敛？为什么？

证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则必收敛，由必要条件$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

由$a_n\neq-1\ (n=1,2,\cdots)$，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$都有意义，

而$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_n\right|}{\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|}=1,\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{a_n^2}{1+a_n}\right|}{\left|a_n\right|}=0$，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$都收敛。

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$发散，因为$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=1$，收敛的必要条件不满足。

作业 32　幂级数及其求和

1．　求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$；

解：$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{2n+3}{(-1)^{n+1}}\right|}=1$

当 $x=\pm1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 即为 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 条件收敛，

从而收敛域为 $[-1,1]$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}x^n$；

解：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3^n+n}\cdot\frac{3^{n+1}+n}{1}\right|=3$

当 $x=\pm3$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}x^n$ 即为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n 3^n}{3^n+n}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+n}=1$ 从而级数发散，

因此收敛域为 $(-3,3)$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+a^n}x^n\quad(a>0)$；

解：当 $0<a\le1$ 时，$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+1}{n^3+a^n}\cdot\frac{(n+1)^3+a^{n+1}}{(n+1)^2+1}\right|=1$

当 $x=1$ 时幂级数即为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+a^n}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+a^n}\cdot n=1$ 从而级数发散

当 $x=1$ 时幂级数即为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3+a^n}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+a^n}=$ 且 $\frac{n^2+1}{n^3+a^n}>\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+a^n}$ 从而级数收敛。因此收敛域当 $0<a\le1$ 时 $[-1,1)$

当 $a>1$ 时，$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+1}{n^3+a^n}\cdot\frac{(n+1)^3+a^{n+1}}{(n+1)^2+1}\right|=a$

当 $x=\pm a$ 时即为即为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3+a^n}a^n$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+a^n}a^n=1$ 从而级数发散，

从而当 $a>1$ 时收敛域为 $(-a,a)$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{2n-1}$；

解：$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}\cdot\frac{(n+1)\cdot 4^{n+1}}{(-1)^n}\right|}=2$

当 $x=\pm 2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{2n-1}$ 即为 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛，

从而收敛域为 $[-2,2]$

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!!}$ ；

解：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n+2)!!}{1}\right|=+\infty$

因此收敛域为 $(-\infty,\infty)$

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解：对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}}$，$R_t=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n+1}\right|=1$

当 $t=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}}$ 即为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛，当 $t=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}}$ 即为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，

从而原级数的收敛半径为 1，收敛域为 $-1\le t=x-5<1, 4\le x<6$

2．求下列幂级数的收敛域及其和函数：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ ；

解：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\cdot(n+2)\right|=1$

当 $x=-1$ 时，即为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 条件收敛，当 $x=1$ 时即为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，

从而幂级数的收敛域为$[-1,1)$

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，则$S(0)=1,\left[xS(x)\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},x\in[-1,1)$

从而$xS(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^n dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x),x\in[-1,1)$

故$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x),x\in[-1,0)\cup(0,1)\\1,x=0\end{cases}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；

解：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|n\cdot\frac{1}{n+1}\right|=1$

当$x=\pm1$时，即为$\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n n$发散，

从而幂级数的收敛域为$(-1,1)$

故$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$，

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$．

解：$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{1}\right|}=+\infty$

从而幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$

设$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则$s(0)=1,s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},s'(0)=0,$，

$s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=s(x)$，$s''(x)-s(x)=0$

由特征方程$r^2-1=0,r_{1,2}=\pm1$，得通解$s(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$

再由$s(0)=1,s'(0)=0,$得特解$s(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，并求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$的和.

解：$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{1}\right|}=1$，当$x=\pm1$时$\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散，

从而幂级数的收敛域为$(-1,1)$

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则$s(0)=0, s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$，

$$s(x)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\in(-1,1),\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\sqrt{2}\cdot s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

作业 33　函数展开成幂级数

1．将下列函数展开成麦克劳林级数（要指出其成立的区间）：

（1）$x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$；

解：$x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=x\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right],-\frac{x}{2}\in(-\infty,+\infty)$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{(-1)^2}{2!2^2}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!2^n}x^{n+1}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

（2）$\cos^2 x$；

解：$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n},2x\in(-\infty,+\infty)$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$$

（3）$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$；

解：$\mathrm{e}^{-t^2}=1+\left(-t^2\right)+\frac{1}{2!}\left(-t^2\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-t^2\right)^n+\cdots,-t^2\in(-\infty,+\infty)$

$$=1-t^2+\frac{1}{2!}t^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}+\cdots,t\in(-\infty,+\infty)$$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(1-t^2+\frac{1}{2!}t^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}+\cdots\right)dt$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

（4）$\arctan x$（提示：利用$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$）；

解：$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，

$$x\in[-1,1]$$

（5）$\frac{x}{2-x-x^2}$．

解：$\frac{x}{2-x-x^2}=\frac{x}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2+x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3\cdot 2^n}x^n, x\in(-1,1)$$

2．将下列函数展开成$(x-x_0)$的幂级数（要指出其成立区间）：

（1）$\dfrac{1}{3-x}$， $x_0=1$；

解：$\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{2-(x-1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n, x\in(-1,3)$$

（2）$\sin x$， $x_0=\dfrac{\pi}{4}$．

解：$\sin x=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\right], x\in(-\infty,+\infty)$$

3．求下列函数的幂级数展开式，并确定其成立区间：

（1）$\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$；

解：$\dfrac{\sin t}{t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}, t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}x^{2n+1}, x\in(-\infty,+\infty)$$

（2）$\displaystyle\int_0^x\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$．

解：$\dfrac{\arctan t}{t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n}, t\in[-1,1]$

$$\int_0^x\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1}, x\in[-1,1]$$

4．展开$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$为$x$的幂级数，并证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$．

解：$\dfrac{e^x-1}{x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}, x\in(-\infty,+\infty)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1},x\in(-\infty,+\infty)$$

从而$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\bigg|_{x=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)\bigg|_{x=1}=\frac{\mathrm{xe}^x-(e^x-1)}{x^2}\bigg|_{x=1}=1$

作业 34 傅里叶级数

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，它在一个周期上的表达式列举如下，试求 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式.

（1） $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$，$\left(-\pi\le x<\pi\right)$；

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\dfrac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nxdx=\left.\frac{e^{2x}\left(2\cos nx+n\sin nx\right)}{\pi\left(2^2+n^2\right)}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\left(-1\right)^n\left(e^{2\pi}-e^{-2\pi}\right)}{\pi\left(4+n^2\right)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin nxdx=\left.\frac{e^{2x}\left(2\sin nx-n\cos nx\right)}{\pi\left(2^2+n^2\right)}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{n\left(-1\right)^{n+1}\left(e^{2\pi}-e^{-2\pi}\right)}{\pi\left(4+n^2\right)}$$

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(e^{2\pi}-e^{-2\pi}\right)}{\pi\left(4+n^2\right)}\left(2\cos nx-n\sin nx\right),x\ne 2k\pi;$$

$$\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(e^{2\pi}-e^{-2\pi}\right)}{\pi\left(4+n^2\right)}\left(2\cos nx-n\sin nx\right)=\frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{2},x=2k\pi;$$

（2） $f(x)=\left|\sin x\right|$，$\left(-\pi<x\le\pi\right)$；

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin xdx=\left.-\dfrac{2\cos x}{\pi}\right|_{0}^{\pi}=\dfrac{4}{\pi}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx=\left.\frac{\left[\dfrac{-\cos\left(1+n\right)x}{1+n}+\dfrac{-\cos\left(1-n\right)x}{1-n}\right]}{\pi}\right|_0^{\pi}=\frac{2-2\left(-1\right)^{n+1}}{\pi\left(1-n^2\right)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin x\right|\sin nxdx=0$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\left(-1\right)^n}{1-n^2}\cos nx,x\in\left(-\infty,+\infty\right)$$

（3） $f(x)=\begin{cases} x, & (-\pi \le x < 0) \\ x+1, & (0 \le x < \pi) \end{cases}$；

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} xdx+\int_0^{\pi} dx\right]=1$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx+\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]=\frac{\sin nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx+\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} xd\cos nx+\frac{-\cos nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} xd\cos nx+\frac{-\cos nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}\left[x\cos nx\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]-\frac{(-1)^n-1}{n\pi}$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[\pi(-1)^n-\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}\right]-\frac{(-1)^n-1}{n\pi}=\frac{1-(-1)^n-2\pi(-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n-2\pi(-1)^n}{n\pi}\sin nx, x\ne k\pi;$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n-2\pi(-1)^n}{n\pi}\sin nx=\frac{f(k\pi+0)+f(k\pi-0)}{2}=\frac{1}{2}, x=k\pi;$$

（4） $f(x)=x,\quad (0<x\le 2\pi)$.

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx=2\pi$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} xd\sin nx=\frac{1}{\pi}\left[x\sin nx\big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} xd\cos nx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} xd\cos nx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nxdx\right]=-\frac{1}{n\pi}\left[2\pi-\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}\right]=\frac{-2}{n}$$

$$f(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin nx, x\ne 2k\pi;\ \pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin nx=\pi, x=2k\pi;$$

2．将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

（1） $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}$， $(-\pi\le x\le\pi)$；

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\sin\dfrac{x}{3}dx=0$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\cos nxdx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)x\right]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{1-3n}\sin\frac{(1-3n)x}{3}-\frac{3}{1+3n}\sin\frac{(1+3n)x}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}18n\sqrt{3}}{\pi\left(9n^2-1\right)}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}18n\sqrt{3}}{\pi\left(9n^2-1\right)}\sin nx, x\in(-\pi,\pi)$$

（2） $f(x)=\begin{cases}e^x, & (-\pi\le x<0)\\ 1, & (0\le x<\pi)\end{cases}$；

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^xdx+\int_0^{\pi}dx\right]=\dfrac{1-e^{-\pi}+\pi}{\pi}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nxdx+\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x\left(\cos nx+n\sin nx\right)}{1+n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1-e^{-\pi}(-1)^n}{\left(1+n^2\right)\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nxdx+\int_0^{\pi}\text{sins}\, nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x\left(\sin nx-n\cos nx\right)}{1+n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-n+ne^{-\pi}(-1)^n}{1+n^2}-\frac{(-1)^n-1}{n}\right]=\frac{\left(e^{-\pi}-1\right)(-1)^n n^2+1-(-1)^n}{\left(1+n^2\right)n\pi}$$

$$f(x)=\frac{1-e^{-\pi}+\pi}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-e^{-\pi}(-1)^n}{\left(1+n^2\right)\pi}\cos nx+\frac{\left(e^{-\pi}-1\right)(-1)^n n^2+1-(-1)^n}{\left(1+n^2\right)n\pi}\sin nx\right],$$

$x\in(-\pi,\pi)$

3．将下列各函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

（1） $f(x)=x^2$，$\left(0\le x\le \pi\right)$

解：展开成正弦级数，则作奇延拓，$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx=\frac{-2}{\pi n}\int_0^{\pi}x^2d\cos nx=\frac{-2}{\pi n}\left[x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2xd\frac{\sin nx}{n}\right]$$

$$=\frac{-2}{\pi n}\left\{\pi^2\left(-1\right)^n-\left[2x\frac{\sin nx}{n}+\frac{2\cos nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}\right\}=\frac{2\pi}{n}\left(-1\right)^{n+1}+\frac{4\left(-1\right)^n-4}{\pi n^3}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{n}\left(-1\right)^{n+1}+\frac{4\left(-1\right)^n-4}{\pi n^3}\right]\sin nx,\ x\in\left(0,\pi\right)$$

展开成余弦级数，则作偶延拓，$b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}x^2d\sin nx=\frac{2}{\pi n}\left[x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2xd\frac{\cos nx}{n}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(2x\frac{\cos nx}{n}-\frac{2\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}$$

$$f(x)=\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}\cos nx\text{，}\quad x\in\left[0,\pi\right]$$

（2） $f(x)=\mathrm{e}^x$，$\left(0\le x\le \pi\right)$

解：展开成正弦级数，则作奇延拓，$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin nxdx=\frac{-2}{\pi n}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^xd\cos nx=\cdots=\frac{2e^x\left(\sin nx-n\cos nx\right)}{\pi\left(1+n^2\right)}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2n-2ne^{\pi}\left(-1\right)^n}{\pi\left(1+n^2\right)}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-2ne^{\pi}\left(-1\right)^n}{\pi\left(1+n^2\right)}\sin nx,\ x\in\left(0,\pi\right)$$

展开成余弦级数则，作偶延拓，$b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^xdx=\frac{2}{\pi}e^x\Big|_0^{\pi}=\frac{2\left(e^{\pi}-1\right)}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nxdx=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}e^x d\sin nx=\cdots=$$

$$\left.\frac{2e^x\left(\cos nx+n\sin nx\right)}{\pi\left(1+n^2\right)}\right|_0^{\pi}=\frac{2e^{\pi}\left(-1\right)^n-2}{\pi\left(1+n^2\right)}$$

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2e^{\pi}\left(-1\right)^n-2}{\pi\left(1+n^2\right)}\cos nx,\quad x\in\left[0,\pi\right]$$

作业 35　一般周期函数的傅里叶级数

1．设 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，它在 $[-3,3)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\le x<0\\ 1, & 0\le x<3\end{cases}$$

试求 $f(x)$ 的傅里叶展开式.

解：$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}2xdx+\int_{-3}^{3}dx\right]=\frac{1}{3}\left[x^2\big|_{-3}^{0}+6\right]=-1$

$$a_n=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}2x\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=\frac{1}{n\pi}\left[\int_{-3}^{0}2xd\sin\frac{n\pi x}{3}+2\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{0}^{3}\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[2x\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}-\int_{-3}^{0}2\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}=\frac{6-6(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$b_n=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}2x\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]=\frac{-1}{n\pi}\int_{-3}^{0}2xd\cos\frac{n\pi x}{3}+0$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\left[6(-1)^n-\int_{-3}^{0}2\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=\frac{-1}{n\pi}\left[6(-1)^n-\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}\right]=\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6-6(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right),x\ne 3(2k+1);$$

$$-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6-6(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)=-2,x\ne 3(2k+1);\mathrm{k}\in\mathrm{Z}$$

2．在指定区间上展开下列函数为傅里叶级数：

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\\ 0, & 1<|x|\le 2\end{cases}$$

解：取 $T=4$ 作周期延拖在限定即可，函数为偶函数，故 $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{2}{2}\int_{0}^{1}\cos\frac{\pi x}{2}dx=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n=\int_{0}^{1}\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left[\cos\frac{(\mathrm{n}+1)\pi x}{2}+\cos\frac{(n-1)\pi x}{2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\cos\frac{(n+1)\pi x}{2}+\cos\frac{(n-1)\pi x}{2}\right]dx,n=1\text{时}$$

$$a_1=\frac{1}{2}\int_0^1[\cos\pi x+1]dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi x}{\pi}+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2},n>1\text{时}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi\left(n^2-1\right)}\left[(n-1)\sin\frac{(n+1)\pi}{2}+(n+1)\sin\frac{(n-1)\pi x}{2}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{\pi\left(n^2-1\right)}\left[(n-1)\sin\frac{(n+1)\pi}{2}+(n+1)\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right]=\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi\left(4k^2-1\right)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi\left(4k^2-1\right)}\cos k\pi x,x\in[-2,2]$$

3．将函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\dfrac{l}{2}\\ l-x, & \dfrac{l}{2}\le x<l\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解：展开成正弦级数，则作奇延拓，$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]=\frac{-2}{n\pi}\left[\int_0^{l/2}xd\cos\frac{n\pi x}{l}+\int_{l/2}^{l}(l-x)d\cos\frac{n\pi x}{l}\right]$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\int_0^{l/2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}+\int_{l/2}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left[\frac{l}{2}\cos\frac{n\pi}{2}-\int_0^{l/2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx-\frac{l}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\int_{l/2}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left[-\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}\right]=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\quad x\in[0,l]$$

展开成余弦级数，则作偶延拓，$b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2}xdx+\int_{l/2}^{l}(l-x)dx\right]=\frac{1}{l}\left[x^2\Big|_0^{l/2}-(l-x)^2\Big|_{l/2}^{l}\right]=\frac{l}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right]=\frac{2}{n\pi}\left[\int_0^{l/2}xd\sin\frac{n\pi x}{l}+\int_{l/2}^{l}(l-x)d\sin\frac{n\pi x}{l}\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\int_0^{l/2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}+\int_{l/2}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{l}{2}\sin\frac{n\pi}{2}-\int_0^{l/2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx-\frac{l}{2}\sin\frac{n\pi}{2}+\int_{l/2}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}\right]=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right)$$

$$f(x)=\frac{l}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right)\cos\frac{n\pi x}{l}，\quad x\in[0,\pi]$$

4．试将函数 $f(x)=x(4-x)\ (0\le x\le 4)$ 展开成周期为 8 的正弦级数.

解：展开成正弦级数，则作奇延拓，$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{4}\int_0^4(4x-x^2)\sin\frac{n\pi x}{4}dx=\frac{-2}{n\pi}\int_0^4(4x-x^2)d\cos\frac{n\pi x}{4}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left[(4x-x^2)\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^4-\int_0^4(4-2x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx\right]=\frac{16}{n^2\pi^2}\int_0^4(2-x)d\sin\frac{n\pi x}{4}$$

$$=\frac{16}{n^2\pi^2}\left[(2-x)\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^4+\int_0^4\sin\frac{n\pi x}{4}dx\right]=\frac{-64}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^4=\frac{1-64(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-64(-1)^n}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi x}{4}，\quad x\in[0,4]$$

第十一章《无穷级数》测试题

1．选择题：

（1）对级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，“$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$”是它收敛的__B__条件．

A．充分；　　B．必要；　　C．充要；　　D．非充分且非必要．

（2）“部分和数列$\{S_n\}$有界”是正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的__C__条件．

A．充分；　　B．必要；　　C．充要；　　D．非充分且非必要．

（3）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$必定__A__．

A．收敛；　　B．发散；　　C．绝对收敛；　　D．条件收敛．

（4）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$必定__B__．

A．收敛；　　B．发散；　　C．绝对收敛；　　D．条件收敛．

2．用适当的方法判定下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$；

解：因为$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \cdot n = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1/(x+1)} = +\infty$

从而该正项级数发散

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$；

解：因为$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}} \cdot n^{\frac{4}{3}} = 1$

从而该正项级数收敛

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{n+2}{n}$；

解：因为$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{n+2}{n} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 2$

从而该正项级数收敛

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+1}{n!}$；

解：因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4+1}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^4+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\left(1+n^{-4}\right)^4+n^{-4}}{1+n^{-4}}=0<1$

从而该正项级数收敛

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$ ；

解：因为$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^{-1}}{1+2n^{-1}}=1$

从而该正项级数发散

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b},(a,b>0)$；

解：因为$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na+b}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+bn^{-1}}=\frac{1}{a}$

从而该正项级数发散

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$；

解：因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+n^{-1}\right)^n}=\frac{3}{e}>1$

从而该正项级数发散

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n$ ；

解：设 $y=x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)^x$，则 $\ln y=x\left[\frac{\ln x}{x}+\ln\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$，而

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，$\lim_{x\to+\infty}3^{\frac{1}{x}}=3^0=1,3^{\frac{1}{x}}>1,x>0$时，$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)=-\infty$

从而$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{\ln x}{x}+\ln\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]=-\infty,\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n=0$

收敛的必要条件满足。

设$y=x^3\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)^x$，则$\ln y=x\left[\frac{3\ln x}{x}+\ln\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$,同理可以推出

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)^x=\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n\cdot n^2=0$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, p=2>1$的级数收敛，从而原正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n$ 也收敛

（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中$a_n, a, b$均为正数，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$；

解：用柯西判别法$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$

当$b>a$时$\rho>1$发散，当$b<a$时$\rho<1$该正项级数收敛

当$b=a$时$\rho=1$不能判定敛散性。

（10）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解：由积分中值定理$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\xi}}{\xi^2+1}\cdot\frac{1}{n}, 0\le\xi\le\frac{1}{n}$，

从而$0\le\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x\le\frac{\sqrt{\xi}}{n}\le\frac{1}{n\sqrt{n}}$

有比较判别法$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x$ 收敛

3．判别下列级数的敛散性；若收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ ；

解：令$f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$，则$f'(x)=-\frac{1-\frac{1}{x}}{(x-\ln x)^2}<0, x>1$时

从而$u_n=\frac{1}{n-\ln n}$单碟减少，又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$

从而以来布尼茨判别法$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛

但是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}\cdot n=1$，因此是条件收敛而不能绝对收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{R^2+n^2}$；

解：$u_n=\sin\pi\sqrt{R^2+n^2}=(-1)^{n-1}\sin\pi\left(n-\sqrt{R^2+n^2}\right)=(-1)^n\sin\dfrac{\pi R^2}{n+\sqrt{R^2+n^2}}$

从而该级数是交错级数，由于$|u_n|=\sin\dfrac{\pi R^2}{n+\sqrt{R^2+n^2}}$单碟减少且$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$

从而以来布尼茨判别法$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{R^2+n^2}$收敛

但是$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi R^2}{n+\sqrt{R^2+n^2}}\cdot n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi R^2}{1+\sqrt{R^2n^{-2}+1}}=\dfrac{\pi R^2}{2}$，

因此是条件收敛而不能绝对收敛

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\pi^n}\sin\dfrac{\pi}{n}$；

解：因为$|u_n|=\dfrac{1}{\pi^n}\sin\dfrac{\pi}{n}\le\dfrac{1}{\pi^n}$

从而该级数绝对收敛

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n},(x\ne 0)$.

解：去掉前面有限项即当n足够大时为交错级数，

由于$|u_n|=\left|\sin\dfrac{x}{n}\right|\sim\dfrac{|x|}{n},n\to\infty$，对足够大的$n$,$|u_n|$单碟减少且$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$

从而以来布尼茨判别法$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n},(x\ne 0)$收敛但不绝对收敛

4．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k^2}$；

解：由于$\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$单调增加且$\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k=e<3$

从而$0<\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k^2}\le\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{e}{3}\right)^k=\dfrac{e}{3n}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{e}{3}\right)^n}{1-\dfrac{e}{3}}\to 0,(n\to\infty)$

因此由夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=0$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots\cdots\left(2^n\right)^{\frac{1}{3^n}}\right]$.

解：令$y_n=2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots\cdots\left(2^n\right)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}$，由于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k\Big|_{x=\frac{1}{3}}$

看$\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k=x\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=x\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$

从而$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots\cdots\left(2^n\right)^{\frac{1}{3^n}}\right]=2^{\frac{3}{4}}$

5．求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$；

解：看$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+(-2)^n}{n}t^n$，

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+(-2)^n}{n}\frac{n+1}{3n+3+(-2)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(3n\cdot 2^{-n}+(-1)^n\right)\left(1+n^{-1}\right)}{3(n+1)\cdot 2^{-n}-2(-1)^n}\right|=\frac{1}{2}$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+(-2)^n}{n}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n$因一般项极限不为零而发散

从而该幂级数的收敛半径也为$\frac{1}{2}$，收敛域为$-\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2},-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}\quad(p\geq 0)$.

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^p}\cdot(n+1)^p\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1+n^{-1}\right)^p\right|=1$为收敛半径

考虑端点，当$p>1$时收敛域为$[-1,1]$；当$0<p<1$时收敛域为$[-1,1)$；

当$p=0$时收敛域为$(-1,1)$；

6．求下列幂级数的收敛域及其和函数：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ ；

解：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|n\left(n+1\right)\cdot\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\right|=1$ 为收敛半径

考虑端点则知收敛域为 $(-1,1)$ 。

在收敛域内设 $s\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ ，则 $\int_0^x s\left(x\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

在收敛域内再设 $g\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ，则 $\int_0^x g\left(x\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}, g\left(x\right)=\frac{1}{\left(1-x\right)^2}$

$$\int_0^x s\left(x\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=\frac{x^2}{\left(1-x\right)^2}, s\left(x\right)=\left[\frac{x^2}{\left(1-x\right)^2}\right]'=\frac{2x}{\left(1-x\right)^3}$$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

解：解：$R=\sqrt[4]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt[4]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{4n+1}\cdot\left(4n+5\right)\right|}=1$ 为收敛半径

考虑端点则知收敛域为 $(-1,1)$ 。

在收敛域内设 $s\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, 则 $s'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n}=\frac{x^4-1+1}{1-x^4}=\frac{1}{1-x^4}-1, s\left(0\right)=0$

$$s\left(x\right)=\int_0^x s'\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)+\frac{1}{1+x^2}\right)dx-x=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$$

7．将下列函数展开成麦克劳林级数（要指出其成立的区间）：

（1）$\left(1-x\right)\ln\left(1+x\right)$；

解：由于 $\left[\ln\left(1+x\right)\right]'=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n, \ln\left(1+x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}x^{n+1},$

$$\left(1-x\right)\ln\left(1+x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}x^{n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right]\left(-1\right)^n x^{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\left(n+1\right)}\left(-1\right)^n x^{n+1}, x\in(-1,1]$$

（2）$\arcsin x$；

解：由于 $\left[\arcsin x\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left[1+\left(-x^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-x^2\right)$

$$+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-x^2\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(-x^2\right)^n+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}x^{2n}+\cdots,\quad \arcsin 0=0$$

从而 $\arcsin x=x+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2\cdot 5}x^5+\cdots+\dfrac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-1,1)$

（3）$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解：由于 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x\left[1+x^2\right]^{-\frac{1}{2}},\left[1+x^2\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^2$

$$+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(x^2\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(x^2\right)^n+\cdots$$

$$=1+\frac{-1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}(-1)^2x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}(-1)^n x^{2n}+\cdots,$$

从而 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^5+\cdots+\dfrac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}(-1)^n x^{2n+1}+\cdots,x\in[-1,1]$

8．将下列函数展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数（要指出其成立区间）：

（1）$\dfrac{1}{x^2}$， $x_0=-1$；

解：$\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{(x+1-1)^2}=\left(\dfrac{1}{1-(x+1)}\right)'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+1)^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^{n-1}$

$$-1<x+1<1,-2<x<0$$

（2）$\lg x$， $x_0=1$.

解：$\lg x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}=\dfrac{1}{\ln 10}\ln\left[1+(x-1)\right]$，而 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

从而 $\lg x=\dfrac{1}{\ln 10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1},-1<x-1\le 2,0<x\le 3$

9．将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$$

解：该函数为奇函数，延拓为周期 2π 的周期函数展开，$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(x\right)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\cos nx+\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{-2}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx\right]+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-\left(-1\right)^n}{n}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-\left(-1\right)^n}{n}=\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}-n\pi\left(-1\right)^n}{n^2\pi}$$

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}-n\pi\left(-1\right)^n}{n^2\pi}\sin nx,x\ne\left(2k+1\right)\pi,$$

当 $x\ne\left(2k+1\right)\pi,\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\sin\frac{n\pi}{2}-n\pi\left(-1\right)^n}{n^2\pi}\sin nx=0$

10．将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}$ 在区间 $[0,2]$ 上分别展开成正弦级数和余弦级数．

解：该函数延拓为奇函数，再延拓为周期 $T=4,\left(l=2\right)$ 的周期函数展开得正弦级数，

$$a_n=0;\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{-1}{n\pi}\int_0^{2} xd\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\frac{-1}{n\pi}\left[2\left(-1\right)^n-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right]=\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n\pi}$$

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{nx\pi}{2},x\in[0,2)$$

该函数延拓为偶函数，再延拓为周期$T=4,\left(l=2\right)$的周期函数展开得余弦级数，

$b_n=0$；$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\int_0^2\frac{x}{2}dx=1$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{n\pi}\int_0^2 xd\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\frac{1}{n\pi}\left[0+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right]=\frac{2\left(-1\right)^{n+1}-2}{n^2\pi^2}$$

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}-2}{n^2\pi^2}\cos\frac{nx\pi}{2},x\in[0,2]$$