第五章 向量代数与空间解析几何

作业 7 向量代数

1．填空题

（1）已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模是___2___,方向余弦是 $\underline{-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}}$，方向角是 $\underline{\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{3}}$。

（2）一向量的终点在 $(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 4,-4 和 7,则这个向量的起点坐标为 $\underline{(-2,3,0)}$。

（3）向量 $\vec{a}$ 与向量 $\{2,-1,2\}$ 平行，$|\vec{a}|=2$，则 $\vec{a}=\underline{\pm\frac{2}{3}\{2,-1,2\}}$。

（4）设 $\vec{a}=\{-1,2,2\}$, $\vec{b}=\{2,-1,2\}$,则 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\underline{\mathbf{0}}$，$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\underline{\{12,12,-6\}}$。

（5）设一质点在力 $\vec{F}=-2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ 的作用下沿直线运动,从点 $M_1(1,2,-3)$ 运动到点 $M_2(3,1,4)$,此力所做的功是_21_。

2．设 $\overrightarrow{AB}=\{1,-2,0\}$, $\overrightarrow{BC}=\{0,3,1\}$, $\overrightarrow{CD}=\{5,6,-8\}$,四边形 $ABCD$ 对角线 AC 的中点为 M , BD 的中点为 N ,求向量 $\overrightarrow{MN}$。

解：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=\{3,2,-4\}$。

3．设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两垂直,且 $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{c}|=3,$ 计算 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$。

解：$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=14$

$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{14}$ 。

4．已知$\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=1,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$,问系数$\lambda$为何值时,向量$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与$-\vec{a}+3\vec{b}$垂直?

解：$(\lambda\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+3\vec{b})=-\lambda+2=0$，$\lambda=2$ 。

5．设$\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,求:(1) $\Pr j_a b$; (2) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 。

解：$\Pr j_a b=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$，

$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$ 。

6．已知三点$M(1,2,-1)$, $A(2,3,-1)$和$B(1,3,0)$,计算:(1)以$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$为邻边的平行四边形的面积；(2)求同时垂直于$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$的单位向量$\vec{n}_0$ 。

解：$S=\left|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}\right|=\left|\{1,-1,1\}\right|=\sqrt{3}$，$\vec{n}_0=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\{1,-1,1\}$ 。

作业 8 平 面

1．填空:

（1）过点 $A(2,9,-6)$ 且与向径 $\overrightarrow{OA}$ 垂直的平面方程是 $\underline{2x+9y-6z-121=0}$。

（2）过点 $(1,1,-1)$, $(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 的平面方程是 $\underline{x-3y-2z=0}$。

（3）过点 $(-3,1,-2)$ 和 z 轴的平面方程是 $\underline{x+3y=0}$。

（4）过点 $(4,0,-2)$, $(5,1,7)$ 且平行于 x 轴的平面方程是 $\underline{9y-z-2=0}$。

（5）过点 $(3,2,-7)$ 且与 xOz 面平行的平面方程是 $\underline{y=2}$。

2．设点 $P(3,-6,2)$ 是从原点到平面的垂足,求该平面方程。

解：法向量 $\vec{n}=\{3,-6,2\}$，平面方程为 $3x-6y+2z-49=0$。

3．设平面通过点 $(-5,4,3)$，且在 x,y,z 三轴上截距相等，求此平面方程。

解：设平面方程为 $x+y+z=a$，解得 $a=2$，即 $x+y+z=2$。

4．求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦。

解：法向量 $\vec{n}=\{2,-2,1\}$，单位化 $\overrightarrow{n_0}=\frac{1}{3}\{2,-2,1\}$，

故 $\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=-\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{1}{3}$。

5．平面通过 x 轴且与平面 $y=x$ 成 $\frac{\pi}{3}$ 的角，求此平面方程。

解：设平面方程为 $By+Cz=0$，又 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|B|}{\sqrt{2}\sqrt{B^2+C^2}}=\frac{1}{2}$,

即 $B=\pm C$，故平面方程为 $y\pm z=0$。

6．在平面 $2x-3y+z-6=0$ 和平面 $2x-3y+z-2=0$ 间求一平面，使之将这两平面间的距离分成 $1:3$。

解：设平面方程为 $2x-3y+z+D=0$，$-6<D<-2$ 且 $3|6+D|=|2+D|$，

故 $2x-3y+z-8=0$（舍去），$2x-3y+z-5=0$。

作业9　直　线

1．填空

（1）过点 $(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$ 的直线方程是 $\underline{\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}}$。

（2）过点 $(0,2,4)$ 且同时平行于平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 的直线方程是 $\underline{\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}}$。

（3）过点 $(2,-3,1)$ 且垂直于平面 $2x+3y+z+1=0$ 的直线方程是 $\underline{\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{1}}$。

（4）过点 $(3,4,-4)$ 且方向向量的方向角为 $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}$ 的直线方程是 $\underline{\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{\sqrt{2}}=\frac{z+4}{-1}}$。

2．求直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-5}{2}$ 与平面 $x+y+4z-3=0$ 的交点及夹角。

解：将 $x=1+2t, y=-t, z=5+2t$ 代入 $x+y+4z-3=0$ 得 $t=-2$。

故交点是 $(-3,2,1)$，$\theta=\frac{\pi}{4}$。

3．求过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程。

解：过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ 垂直的平面方程为 $x-y+2z-3=0$，

直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ 与平面 $x-y+2z-3=0$ 交点是 $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)$，

直线方程是 $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}$。

4．求通过两条相交直线 $L_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$ 及 $L_2: x=2+t, y=-1-t, z=3+2t$ 的平面方程。

解：平面的法向量是 $\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\{1,-5,-3\}$，

故平面方程是 $x-5y-3z+2=0$

5．求点 $(3,-1,2)$ 到直线 $L:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离。

解：直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\{0,-3,-3\}$，即 $\{0,1,1\}$

直线 L 上的一点为 $M_0(1,-2,0)$，

距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{MM_0}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$。

6．求直线 $L:\begin{cases} 2x+2y-2z+3=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z-1=0$ 上的投影直线方程。

解：过直线 L 的平面束方程为 $(2+\lambda)x+(2-\lambda)y+(-2+\lambda)z+3+5\lambda=0$，

由此求得过直线 L 与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程为 $4y-4z-7=0$，故投影直线方程为 $\begin{cases} 4y-4z-7=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$。

作业 31　曲面与曲线

1．指出下列方程表示哪种曲面,并作出它们的简图.

（1）$x^2+\frac{y^2}{9}=1$；

解（图略）：椭圆柱面

（2）$x^2+y^2+z^2=2az$；

解（图略）：球心在$\left(0,0,a\right)$半径为a的球面

(3) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$；

解（图略）：顶点在$\left(0,0,1\right)$的下半锥面

(4) $x^2+y^2=2Rx$.

解（图略）：对称中心轴在$\begin{cases}x=R\\y=0\end{cases}$的半径为$R$的圆柱面

2．曲线$\begin{cases}z^2=5x\\y=0\end{cases}$绕$x$轴旋转，求旋转曲面方程，并作出简图.

解（图略）：方程为$y^2+z^2=5x$的旋转抛物面

3．画出下列各曲面所围成的立体的图形：（图略）

(1) $z=x+y, z=1-x-y, x=0, y=0$；

(2) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$,在第一卦限部分；

. (3) $x=0, y=0, z=0, z=x^2+y^2, x+y=1$,在第一卦限部分.

4．指出下列方程组表示什么曲线，并作出它们的简图.

(1) $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$；

解（图略）：$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\z=a\end{cases}$ 平面$z=a$上的圆周线

(2) $\begin{cases}x^2+y^2=1\\2x+3y+3z=6\end{cases}$.

解（图略）：平面截柱面所得的椭圆线

5．求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=Rx \end{cases}$在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

解：在 xOy 面的投影为$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=Rx \end{cases}\left(\begin{matrix} 0\le x\le R \\ -\dfrac{R}{2}\le z\le\dfrac{R}{2} \end{matrix}\right)$，

xOz 面上的投影为$\begin{cases} Rx+z^2=R^2 \\ y=0 \end{cases}\left(\begin{matrix} 0\le x\le R \\ -R\le z\le R \end{matrix}\right)$

6．求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 4)$ 分别在三个坐标面上的投影，并画简图.

解：在 xOy 面的投影为 $x^2+y^2\le 4$，

yOz 面上的投影为 $z\ge y^2\left(0\le z\le 4\right)$

xOz 面上的投影为 $z\ge x^2\left(0\le z\le 4\right)$

空间解析几何测试题

1．将正确答案填在横线上：

(1)已知$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=\underline{4}$。

(2)直线$x=3y=5z$与平面$4x+12y+20z-1=0$的位置关系为__斜交__。

(3)点$(2,1,0)$到平面$3x+4y+5z=0$的距离为$\underline{\sqrt{2}}$。

2．设$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$，试在$\vec{a},\vec{b}$所决定的平面内，求一个与$\vec{a}$垂直的单位向量。

解：$\vec{a}\times\vec{b}=\{-2,3,7\}$，$\vec{c}\times\vec{a}=\{10,16,-4\}$，故$\vec{n}=\pm\dfrac{\{5,8,-2\}}{\sqrt{93}}$。

3．已知三角形的三个顶点为A（-1，2，3），B（1，1，1），C（0，0，5），试证ΔABC为直角三角形，并求角B。

解：$\cos B=\dfrac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\angle B=\dfrac{\pi}{4}$。

4．试求通过点$(2,-3,4)$，且与y轴垂直相交的直线方程。

解：$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{z}{4}\\ y=-3\end{cases}$。

5．已知直线$L_1:\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+z-2=0\end{cases}$和$L_2:1-x=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$，证明$L_1//L_2$，并求由$L_1$和$L_2$所确定的平面方程。

解：L_1和L_2的方向向量分别为$\vec{n}_1=\{1,-2,-3\}$，$\vec{n}_2=\{-1,2,3\}$，所以$L_1//L_2$。

在L_1上取一点$A(0,1,2)$，在L_2上取一点$B(1,-1,2)$，平面的法向量为$\vec{n}=\vec{n}_1\times\overrightarrow{AB}=\{-2,-1,0\}$，故平面方程为$2x+y-1=0$。

6．指出下列曲面的名称，并作出图：

（1）$x^2+y^2-z^2=1$；解（图略）：单叶旋转抛物面

（2）$x^2+y^2=z^2$；解（图略）：顶点在原点的圆锥面

（3）$z=x^2+y^2+1$．解（图略）：顶点在$(0,0,1)$的开口向上的旋转抛物面