第九章　曲线积分与曲面积分

作业 13　对弧长的曲线积分

1．计算 $\oint_L x\,\mathrm{d}s$，其中 L 为直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界.

解：L 可以分解为 $L_1: y=x, y'=1, x\in[0,1]$ 及 $L_2: y=x^2, y'=2x, x\in[0,1]$

$$\oint_L x\,\mathrm{d}s=\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s+\int_{L_2} x\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}\left(1+4x^2\right)=\left.\frac{\sqrt{2}x^2}{2}\right|_0^1+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left.\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{1}{12}$$

2．$\int_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$，其中 L 为星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 在第一象限内的弧 $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

解：L 为 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t,\frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t, ds=3a\sin t\cos t dt$$

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/2} a^{\frac{4}{3}}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\cdot 3a\sin t\cos t dt=\int_0^{\pi/2}\frac{3}{2}a^{\frac{7}{3}}\left(1^2-\frac{1}{2}\sin^2 2t\right)\sin 2t dt$$

$$=-\frac{3}{8}a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos^2 2t\right)d\cos 2t=-\frac{3}{8}a^{\frac{7}{3}}\left.\left(\cos 2t+\frac{1}{3}\cos^3 2t\right)\right|_0^{\pi/2}=a^{\frac{7}{3}}$$

3．计算 $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}s$，其中 Γ 折线 ABC，这里 A，B，C 依次为点 $(0,0,0),(1,2,3),(1,4,3)$.

解：$AB:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, x=t, y=2t, z=3t, t\in[0,1], ds=\sqrt{14}dt$

$BC: x=1, z=3, y=t, t\in[2,4], ds=dt$

$CA:\frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}, x=t, y=4t, z=3t, t\in[0,1], ds=\sqrt{26}dt$

$$\int_\Gamma xyz\mathrm{d}s=\int_{AB}xyz\mathrm{d}s+\int_{BC}xyz\mathrm{d}s=\int_0^1 t\cdot 2t\cdot 3t\cdot\sqrt{14}dt+\int_2^4 1\cdot t\cdot 3dt=\frac{3}{2}\sqrt{14}-18$$

4．$\int_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)z\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为螺线$x=t\cos t, y=t\sin t, z=t$上相应于$t$从0变到1的一段弧.

解：Γ为$x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in[0,1], ds=\sqrt{2+t^2}dt$

$$\int_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)z\mathrm{d}s=\int_0^1 t^2\cdot t\cdot\sqrt{2+t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1(t^2+2-2)\sqrt{2+t^2}d\left(t^2+2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(t^2+2\right)^{\frac{5}{2}}-2\cdot\frac{2}{3}\left(t^2+2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1=\frac{9\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{5}-\frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{15}-\frac{\sqrt{3}}{5}$$

5．计算$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中$L$：$x^2+y^2=ax, a>0$.

解：将L参数化，$x=r\cos t, y=r\sin t\Rightarrow r^2=ar\cos t, r=a\cos t, x=a\cos^2 t,$

$$y=a\cos t\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], dx=-a\sin 2tdt, dy=a\cos 2tdt, ds=adt$$

$$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2 t}\,adt=2\int_0^{\pi/2}a^2\cos tdt=2a^2\sin t\Big|_0^{\pi/2}=2a^2$$

6．计算$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$及$x$轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

解：边界曲线需要分段表达，从而需要分段积分

$$L_1: y=0, x\in[0,a], ds=dx; L_2: x=a\sin t, y=a\cos t, t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], ds=adt;$$

$$L_2: y=x, x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}a}{2}\right], ds=\sqrt{2}dt; L=L_1+L_2+L_3$$

从而$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a e^x dx+\int_0^{\pi/4}e^a\cdot adt+\int_0^{\sqrt{2}a/2}e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}dx=e^x\Big|_0^a+\frac{a\pi}{4}e^a+e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\sqrt{2}a/2}$

$$=e^a-1+\frac{a\pi}{4}e^a+e^a-1=2e^a+\frac{a\pi}{4}e^a-2$$

作业 14　对坐标的曲线积分

1．计算下列第二型曲线积分：

(1) $\oint_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$，其中 L 为按逆时针方向绕椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 一周；

解：L 为 $x=a\cos t, y=b\sin t, t:0\to 2\pi$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\left[-a\sin t\left(a\cos t+b\sin t\right)+b\cos t\left(a\cos t-b\sin t\right)\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t\right)dt=\left(\frac{ab\sin 2t}{2}+\frac{a^2+b^2}{4}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0$$

(2) $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线；

解：Γ 是 $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{4-1}, x=1+t, y=1+2t, z=1+3t, t:0\to 1$

$$\text{原式}=\int_0^1\left[(1+t)+2(1+2t)+3(1+t+1+2t-1)\right]dt$$

$$=\int_0^1(6+14t)\,dt=\left(6t+7t^2\right)\Big|_0^1=13$$

(3) $\int_\Gamma y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$，其中 Γ 是圆柱螺线 $x=2\cos t, y=2\sin t, z=3t$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段弧；

解：Γ 是 $x=2\cos t, y=2\sin t, z=3t, t:0\to 2\pi$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\left[2\sin t(-2\sin t)-2\cos t(2\cos t)+3\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-4+3)\,dt=(-t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi$$

(4) 计算曲线积分 $\int_L (12xy+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x-(\cos y-x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 L 为由点 A (-1, 1)沿抛物线 $y=x^2$ 到点 O (0, 0)，再沿 x 轴到点 B (2, 0)的弧段.

解：由于积分曲线是分段表达的，需要分段积分

$AO: y=x^2, x:-1\to 0$；$OB: y=0, x:0\to 2$

原式$=\int_{-1}^{0}(12xx^2+\mathrm{e}^{x^2})\mathrm{d}x-(\cos x^2-x\mathrm{e}^{x^2})2x\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}(\mathrm{e}^0)\mathrm{d}x$

$=\int_{-1}^{0}(12x^3+\mathrm{e}^{x^2}-2x\cos x^2+2x^2\mathrm{e}^{x^2})\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\mathrm{d}x$

$=\left(3x^4-\sin x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{x^2}+2=-1+\sin 1+xe^{x^2}\Big|_{-1}^{0}=\sin 1+e-1$

2．设力$\boldsymbol{F}$的大小等于作用点的横坐标的平方，而方向依y轴的负方向，求质量为m的质点沿抛物线$1-x=y^2$从点$(1,0)$移动到点$(0,1)$时，力$\boldsymbol{F}$所作的功.

解：$\vec{F}=x^2\{0,-1\}=\{0,-x^2\},d\vec{s}=\{dx,dy\},L:x=1-y^2,y:0\to 1$

$$W=\int_L\vec{F}d\vec{s}=\int_L\left(-x^2\right)dy=-\int_0^1\left(1-2y^2+y^4\right)dy=-\left(y-\frac{2y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{8}{15}$$

3．把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$化成对弧长的曲线积分，其中$L$为：

(1) 在xOy平面内沿直线从点$(0,0)$到点$(1,1)$；

(2) 沿抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$到点$(1,1)$.

解：（1）$L:y=x,x:0\to 1,dx>0;ds=\sqrt{1+1^2}dx=\sqrt{2}dx$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L\left[P(x,x)+Q(x,x)\right]\mathrm{d}x=\int_L\frac{\left[P(x,x)+Q(x,x)\right]}{\sqrt{2}}\mathrm{ds}$$

（2）$L:y=x^2,x:0\to 1,dx>0;ds=\sqrt{1+4x^2}dx$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L\left[P\left(x,x^2\right)+2xQ\left(x,x^2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_L\frac{\left[P(x,x)+2xQ(x,x)\right]}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{ds}$$

作业 15　格林公式及其应用

1．填空题

(1) 设 L 是三顶点 (0, 0), (3, 0), (3, 2) 的三角形正向边界，$\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y=$ __12__.

(2) 设曲线 L 是以 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 为顶点的正方形边界，

$\oint_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$ 不能直接用格林公式的理由是_所围区域内部有不可道的点_.

(3)相应于曲线积分 $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 的第一型的曲线积分是 $\int_L \frac{P(x,y,z)+3R(x,y,z)}{\sqrt{5}}\mathrm{d}s$. 其中 L 为从点(1, 1 ,1)到点(1, 2, 3)的直线段.

2．计算 $I=\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-y^3)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+x^3)\mathrm{d}y$，其中 L 是沿半圆周 $x=-\sqrt{a^2-y^2}$ 从点 $A(0,-a)$ 到点 $B(0,a)$ 的弧.

解：L 加上 $BA: x=0, x: a\to -a$ 构成区域边界的负向

$$I=\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-y^3)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+x^3)\mathrm{d}y=-\iint_D 3\left(x^2+y^2\right)d\sigma-\int_a^{-a}\cos y dy$$

$$=-3\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\theta\int_0^a r^3dr+\int_{-a}^{a}\cos y dy=-\frac{3\pi a^4}{4}+2\sin a$$

3．计算 $\oint_L \left[y\mathrm{e}^{xy}+3x-y+1\right]\mathrm{d}x+\left[x\mathrm{e}^{xy}+3x-y+3\right]\mathrm{d}y$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 正向一周.

解：原式$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\mathrm{e}^{xy}+3x-y+3\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y\mathrm{e}^{xy}+3x-y+1\right)\right]dxdy$

$$=\iint_D 4dxdy=4\pi ab$$

4．计算曲线积分 $I=\int_L f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left[f(x)\cos y-\pi x\right]\mathrm{d}y$，其中 $f'(x)$ 为连续函数，L 是沿圆周 $(x-1)^2+(y-\pi)^2=1+\pi^2$ 按逆时针方向由点 $A(2,2\pi)$ 到点 $O(0,0)$ 的一段弧.

解：令 $L_1: y=\pi x, x:0\to 2$

则，原式 $I=\int_{L+L_1}-\int_{L_1}=\iint\limits_D(-\pi)\,dxdy-\int_{L_1} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left[f(x)\cos y-\pi x\right]\mathrm{d}y$

$$=-\pi\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\pi^2\right)-\int_0^2\left[f'(x)\sin\pi x+\pi f(x)\cos\pi x-\pi^2 x\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\pi\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\pi^2\right)-\left[f(x)\sin\pi x-\pi^2\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^2=-\pi\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\pi^2\right)+2\pi^2=\frac{3\pi^2}{2}-\frac{\pi^4}{2}$$

5．计算 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,其中 L 为

（1）圆周 $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$（按反时针方向）;

解：$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$，而且原点不在该圆域内部，从而由格林公式，原式 $=0$

（2）闭曲线 $|x|+|y|=1$（按反时针方向）.

解：$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$，但所围区域内部的原点且仅有该点不满足格林公式条件，从而可作一很小的圆周 $x^2+y^2=0.01$（L_1 也按反时针方向），在圆环域上用格林公式得，

$$\text{原式}=\oint_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{0.01}=100\iint\limits_D(1+1)\,dxdy=2\pi$$

6．证明下列曲线积分在 xOy 平面内与路径无关,并计算积分值：

（1）$\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{e}^x\left(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y\right)$；

解：由于 $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\mathrm{e}^x\sin y\right)=-\mathrm{e}^x\sin y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)$ 在全平面连续，从而该曲线积分

在 xOy 平面内与路径无关，沿折线 $(0,0)\to(0,b)\to(a,b)$ 积分即可，

$$\text{原式}=\int_0^b(-\sin y)dy+\int_0^a \mathrm{e}^x\cos b\mathrm{d}x=\cos b-1+(e^a-1)\cos b=e^a\cos b-1$$

（2）$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$；

解：由于 $\frac{\partial}{\partial x}(x^2-4xy^3)=2x-4y^3=\frac{\partial}{\partial y}(2xy-y^4+3)$ 在全平面连续，从而该曲线积分在 xOy 平面内与路径无关，沿直线 $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{1-0},y=x-1,x:1\to2$ 积分也可，

$$\text{原式}=\int_1^2\left[2x(x-1)-(x-1)^4+3+x^2-4x(x-1)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[3x^2-2x+3-5(x-1)^4-4(x-1)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[x^3-x^2+3x-(x-1)^5-(x-1)^4\right]\Big|_1^2=5$$

（3）$\int_{(0,0)}^{(\pi,2)}(\mathrm{e}^y\cos x-m)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^y\sin x-my)\mathrm{d}y$.

解：由于 $\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^y\sin x-my)=\mathrm{e}^y\cos x=\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^y\cos x-m)$ 在全平面连续，从而该曲线积分在 xOy 平面内与路径无关，沿折线 $(0,0)\to(\pi,0)\to(\pi,2)$ 积分即可，

$$\text{原式}=\int_0^\pi(e^0\cos x-m)dx+\int_0^2(\mathrm{e}^y\sin\pi-my)\mathrm{d}y=(\sin x-mx)\Big|_0^\pi+\left(-\frac{my^2}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$=-m\pi-2m$$

7．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，计算

$$\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y,$$

其中 L 为从点 $\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 到点 $(1,2)$ 的直线段.

解：由于 $\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\right\}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1+y^2f(xy)}{y}\right]$ 在右半平面连续，从而该曲线积分右半平面内与路径无关，沿曲线

$L_1: xy=2, y=\dfrac{2}{x}, x:3\to 1$积分即可，

原式$\displaystyle\int_3^1 \frac{1+\frac{4}{x^2}f(2)}{\frac{2}{x}}\mathrm{d}x+\frac{x\left[\left(\frac{2}{x}\right)^2 f(2)-1\right]}{\left(\frac{2}{x}\right)^2}\frac{-2\mathrm{d}x}{x^2}=\int_3^1 x dx=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_3^1=\frac{1-9}{2}=-4$

8. 验证下列$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$在整个$xOy$平面内是某一函数的全微分,并求出它的一个原函数：

（1）$\left[(x+y)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y\right]\mathrm{d}x+\left[\mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^y\right]\mathrm{d}y$；

解：由于$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^y\right]=e^x-e^y=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(x+y)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y\right]$在全平面连续，从而

该曲线积分在xOy平面内是某一函数的全微分，设这个函数为$u(x,y)$，

则$du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy, \dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^y, \dfrac{\partial u}{\partial x}=(x+y)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y$

从而$u=\int\left[\mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^y\right]dy=\mathrm{e}^x y-(x+1)\mathrm{e}^y+g(x)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=(x+y)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x y-\mathrm{e}^y+g'(x)\Rightarrow g'(x)=x\mathrm{e}^x$

$g(x)=\int xd\mathrm{e}^x=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c$，$u=(x+y-1)\mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^y+c$

（2）$\left(3x^2y+8xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y$；

解：由于$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y\right)=3x^2+16xy=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y+8xy^2\right)$在全平面连续，

从而该曲线积分在xOy平面内是某一函数的全微分，设这个函数为$u(x,y)$，

则原式$=ydx^3+4y^2\mathrm{d}x^2+x^3dy+4x^2dy^2+12y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$

$=ydx^3+x^3dy+4y^2\mathrm{d}x^2+4x^2dy^2+d\left(\int 12y\mathrm{d}\mathrm{e}^y\right)$

$=d\left(yx^3\right)+d\left(4x^2y^2\right)+d\left(12ye^y-\int 12\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\right)=d\left(yx^3+4x^2y^2+12ye^y-12\mathrm{e}^y\right)$

可取$u=yx^3+4x^2y^2+12ye^y-12\mathrm{e}^y$

（3）$\left(2x\cos y+y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(2y\sin x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y$

解：可取折线$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$作曲线积分

$$u=\int_0^x (2x)\,\mathrm{d}x+\int_0^y \left(2y\sin x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y=y^2\sin x+x^2\cos y$$

9. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2, Y=2xy-8$,这变力确定了一个力场,证明质点在此场内移动时,场力所作的功与路径无关.

证：$\vec{F}=\left\{x+y^2, 2xy-8\right\}$，

质点在此场内任意曲线 L 移动时，场力所作的功为 $w=\int_L \left(x+y^2\right)dx+\left(2xy-8\right)dy$

由于 $\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy-8\right)=2y=\frac{\partial}{\partial y}\left[x+y^2\right]$ 在全平面连续，从而质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关.

作业 16　对面积的曲面积分

1．计算下列对面积的曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$,其中Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的有限部分；

解：Σ为$z=\sqrt{x^2+y^2}, z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$， $D: 0\le r\le 2a\cos\theta, -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

原式$=\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\mathrm{dxdy}=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\cos\theta dr$

$=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\dfrac{(2a\cos\theta)^4}{4}d\theta=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}\left(1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta\right)d\sin\theta=\dfrac{64\sqrt{2}a^4}{15}$

（2）$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S$,其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=2ax$.

解：Σ为两块$x=a\pm\sqrt{a^2-y^2-z^2}, x_y=\dfrac{\pm y}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}, x_y=\dfrac{\pm z}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}$

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}dxdy$， $D: 0\le r\le a, 0\le\theta\le 2\pi$

原式$=\iint\limits_{\Sigma_1}2ax\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}2ax\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\dfrac{2a^2\left(a+\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}dxdy$

$+\iint\limits_{D}\dfrac{2a^2\left(a-\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}dxdy=4a^3\iint\limits_{D}\dfrac{dxdy}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}=4a^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\dfrac{2rdr}{2\sqrt{a^2-r^2}}$

$=-8\pi a^3\int_0^a\dfrac{d\left(a^2-r^2\right)}{2\sqrt{a^2-r^2}}=-8\pi a^3\cdot\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^a=8\pi a^4$

2．计算$\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S$，$\Sigma$是平面$x+y+z=4$被圆柱面$x^2+y^2=1$截出的有限部分.

解：Σ为两块$z=4-x-y, z_x=-1, z_y=-1$， $dS=\sqrt{1+1+1}dxdy=\sqrt{3}dxdy$，

$D: 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$

原式$=\iint\limits_D \sqrt{3}ydxdy=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\int_0^a r^2dr=-\sqrt{3}\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^1=0$

（或由$(x,y,z)\in\Sigma\Rightarrow(x,-y,z)\in\Sigma$，而积分微元反号推出）

3．求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$含在圆柱面$x^2+y^2=ax$内部的那部分面积.

解：$\sum$为两块$z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2},z_x=\frac{\pm x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},z_y=\frac{\pm y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}dxdy$，$D:0\le r\le a,0\le\theta\le 2\pi$

原式$=\iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}dS=2\iint\limits_D\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{2rdr}{2\sqrt{a^2-r^2}}$

$=2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{2rdr}{2\sqrt{a^2-r^2}}=4a\int_0^{\pi/2}(a-a\sin\theta)d\theta=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=(2\pi-4)a^2$

4．设圆锥面$z=\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ (a为圆锥面的底面半径，h为高),其质量均匀分布，求它的重心位置.

解：设密度为单位1，由对称性可设重点坐标为$(0,0,z_0)$

$\iint\limits_\Sigma zdS=\iint\limits_D\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}dxdy=\frac{h\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

$=\frac{h\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2dr=\frac{2\pi ah\sqrt{a^2+h^2}}{3}$

$\iint\limits_\Sigma dS=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\iint\limits_D dxdy=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr=\pi a\sqrt{a^2+h^2}$

$z_0=\frac{2\pi ah\sqrt{a^2+h^2}}{3\pi a\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{2h}{3}$，故重点坐标为$\left(0,0,\frac{2h}{3}\right)$

5．求抛物面壳$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\le z\le 1)$的质量，此壳的密度按规律$\rho=z$而变更.

解：$m=\iint\limits_\Sigma\rho dS=\iint\limits_D\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}dxdy==\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{r^2+1}dr$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^2(t+1-1)\sqrt{t+1}dt=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}-\frac{2}{15}\right)\pi$

作业 17　对坐标的曲面积分

1．$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截得的在第一卦限内的部分前侧.

解：$x=\sqrt{1-y^2}, D_{yz}:0\le y\le 1, 0\le z\le 3, \cos\alpha>0, x_y=\dfrac{-y}{\sqrt{1-y^2}}, x_z=0$

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0+\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^1 dy\int_0^3\sqrt{1-y^2}dz=6\int_0^1\sqrt{1-y^2}dz=\frac{3}{2}\pi$$

2．计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为旋转抛物面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$下侧介于平面$z=0$及$z=2$之间的部分.

解：$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2), z_x=x, z_y=y, D_{xy}:x^2+y^2\le 4;$

$x=\pm\sqrt{2z-y^2}, D_{yz}:0\le z\le 2, -\sqrt{2z}\le y\le\sqrt{2z}.$

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\left(z^2+\sqrt{2z-y^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}}\left(z^2-\sqrt{2z-y^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_0^2 dz\int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}}\sqrt{2z-y^2}dy+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr$$

$$=2\int_0^2\frac{2\pi z}{2}dz+\pi\int_0^2 r^3dr=\pi z^2\Big|_0^2+\pi\cdot\frac{2^4}{4}=8\pi$$

3．计算

$$\oiint_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中Σ是平面$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解：分片积分。$\Sigma_1:x=0,\cos\alpha<0;\Sigma_2:\cos\beta<0, y=0;\Sigma_3:z=0,\cos\gamma<0;$

$\Sigma_4:z=1-x-y,\cos\gamma=\cos\beta=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}>0$

原式=$\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}+\iint\limits_{\Sigma_4}=-0-0-0+\iint\limits_{\Sigma_4}=3\iint\limits_{D_{yz}}\left(1-y-z\right)y\mathrm{d}y\mathrm{d}z$（由轮换对称性）

$$=3\int_0^1 dy\int_0^{1-y}y\left(1-y-z\right)dz=3\int_0^1 y\frac{\left(1-y\right)^2}{2}dy=-\frac{3}{2}\left[\frac{\left(1-y\right)^3}{3}-\frac{\left(1-y\right)^4}{4}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{8}$$

4．把对坐标的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为对面积的曲面积分：

（1）Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧；

（2）Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在面上方的部分的上侧.

解：（1）$\because \cos\gamma>0,\vec{n}=\left\{3,2,2\sqrt{3}\right\},\vec{n}^{\circ}=\left\{\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right\}$,

原式=$\iint\limits_{\Sigma}\frac{3P(x,y,z)+2Q(x,y,z)+2\sqrt{3}R(x,y,z)}{5}\mathrm{dS}$

（2）$\because \cos\gamma>0,\vec{n}=\left\{2x,2y,1\right\},\vec{n}^{\circ}=\frac{\left\{2x,2y,1\right\}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

原式=$\iint\limits_{\Sigma}\frac{2xP(x,y,z)+2yQ(x,y,z)+R(x,y,z)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{dS}$

5．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}\,y\mathrm{d}\,z-z\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 下侧介于平面 z=0 及 z=2 之间的部分.

解：$\because \cos\gamma<0,\vec{n}=\left\{x,y,-1\right\},\vec{n}^{\circ}=\frac{\left\{x,y,-1\right\}}{\sqrt{1+x^2+y^2}},D:x^2+y^2\le 4$

原式=$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x(z^2+x)-(-z)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{dS}=\iint\limits_{\Sigma}(xz^2+x^2+z)\left(-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（两类曲面积分的互化）

$=-\iint\limits_{D_{xy}}\left[x\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\left(-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（第二类曲面积分投影法计算）

$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（用了重积分的对称性）$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=2\pi\cdot\frac{2^4}{4}=8\pi$

6．已知速度场 $v(x,y,z)=\{x,y,z\}$，求流体在单位时间内通过上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成锥体表面向外流出的流量.

解：$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}, \because \cos\gamma<0, \vec{n}=\left\{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right\}, D: x^2+y^2\le 4$

$\vec{n}^{\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right\}; \Sigma_2: z=1, \because \cos\gamma>0, \vec{n}=\{0,0,1\}, D$ 同样。

$$\Phi=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{dS}+\pi=\iint_{\Sigma_1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{dS}+\pi=\pi$$

作业 18　高斯公式和斯托克斯公式

1．利用高斯公式计算曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x=0$， $y=0$， $z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的立体的表面外侧；

解：原式 $=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)dv=6\iiint\limits_{\Omega}zdv=6\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=6\int_0^1 z\cdot\frac{(1-z)^2}{2}dz$

$$=3\int_0^1\left[(1-z)^2-(1-z)^3\right]dz=3\left[\frac{1}{3}(z-1)^3+\frac{1}{4}(z-1)^4\right]\Bigg|_0^1=0-3\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

（2）$\oiint\limits_{\Sigma} x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$，$z=3$ 所围成的立体的表面外侧；

解：原式 $=\iiint\limits_{\Omega}(y-z+0)dv=-\iiint\limits_{\Omega}zdv=-\int_0^3 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=-\int_0^3 z\cdot\pi\cdot 1^2dz$

$$=-\pi\left[\frac{1}{2}z^2\right]\Bigg|_0^3=-\frac{9}{2}\pi$$

(3) 计算

$$\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，Σ 是由曲面 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\ x=0\end{cases}(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面,它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

解：加上 $\Sigma_1: y=3, x^2+z^2\le 2$ 右侧，构成封闭区域的外侧。

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}dv-\iint\limits_{\Sigma_1}(-16)dzdx=\int_1^3 dy\iint\limits_{D_y}dzdx+16\iint\limits_{D_1}dzdx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}(y-1)^2\right]\Bigg|_1^3+32\pi=34\pi$$

2．设函数 $f(\mu)$ 有一阶连续导数，利用高斯公式计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$，式中 Σ 是

下半球面 $x^2+y^2+z^2=1(z\le 0)$ 的上侧.

解：加上 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le 1$ 下侧，构成封闭区域的内侧。

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=-\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv-0=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{1}\rho^4\sin\varphi d\rho$$

$$=-2\pi\cdot\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi}\frac{1}{5}\rho^5\Big|_0^1=-\frac{4}{5}\pi$$

3．利用斯托克斯公式计算曲面积分：

（1）$\oint_{\Gamma}3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$, 式中 Γ 是圆周 $\begin{cases}x^2+y^2=2z\\ z=2\end{cases}$，从 Oz 轴正向看去，Γ

取逆时针方向.

解：原式 $=\iint\limits_{\Sigma_1}\left(-z-3\right)dxdy+\left(z^2+x\right)dydz\overset{z=2}{=}\iint\limits_{\Sigma_1}\left(-5\right)dxdy=-5\iint\limits_{D_1}dxdy=-20\pi$

（2）$\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}z$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=4$，$x+y+z=0$，从 Oy

轴的正向看去，Γ 取逆时针方向. .

解：原式

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}\left(0-1\right)dxdy+\left(0-3\right)dydz+\left(0-2\right)dzdx=\iint\limits_{\Sigma}\frac{-1-3-2}{\sqrt{3}}dxdy=\frac{-6}{\sqrt{3}}\cdot\pi\cdot 2^2=-8\sqrt{3}\pi$$

作业 19　场论初步

1．求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 Σ 指定一侧的通量：

（1） $\boldsymbol{A}=z\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为由平面 $2x+3y+z=6$ 与 $x=0$， $y=0$， $z=0$ 所围成立体的表面，流向外侧；

解：$\Phi=\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(0+1-0)dv=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot 6=6$

（2） $\boldsymbol{A}=(2x+3y)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(\mathrm{y}^2+2z)\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为以点(3,-1,2)为球心，半径 $R=3$ 的球面，流向外侧.

解：$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}(2x+3y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(xz+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)dv$

$=3\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot 3^3=108\pi$

2．求向量场 $A=(x-z)i+(x^3+yz)j-3xy^2k$ 沿闭曲线 Γ 的环流量(从 z 轴正向看 Γ 依逆时针的方向),其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}, z=-2$.

解：$\oint\limits_{\Gamma}\vec{A}d\vec{l}=\oint\limits_{\Gamma}(x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z$

$=\iint\limits_{\Sigma}(-6xy-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-1+3y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3x^2-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{z=-2}{=}\iint\limits_{\Sigma}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\frac{3}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 r^3dr=3\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^4=192\pi$

3．求向量场 $\vec{A}=\{4xyz,-xy^2,x^2yz\}$ 在点 M (1, -1, 2)处的散度和旋度.

解：$div\vec{A}=4yz-2xy+x^2y, div\vec{A}\Big|_M=-8+2-1=-7$

$rot\vec{A}=\{x^2z,4xy-2xyz,-y^2-4xy\}, C=rot\vec{A}\Big|_M=\{2,0,-9\}$

4．证明向量场 $\vec{A}=\{-2y,-2x\}$ 为平面调和场，并求势函数.

解：由于 $div\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(-2y)+\frac{\partial}{\partial y}(-2x)=0, rot\vec{A}=\left\{0,0,\frac{\partial}{\partial x}(-2x)-\frac{\partial}{\partial y}(-2y)\right\}=\vec{0},$

因此 $\vec{A}$ 是无源场且为无旋场从而为调和场

由 $u_x=-2y,u_y=-2x\Rightarrow u=-2xy+g(y),g'(y)=0,u=-2xy+c$ 为势函数

5．验证下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 为保守场，并求其势函数：

（1） $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ ；

解：由于 $rot\vec{A}=\left\{\frac{\partial}{\partial y}(xy)-\frac{\partial}{\partial z}(zx),\frac{\partial}{\partial z}(yz)-\frac{\partial}{\partial x}(xy),\frac{\partial}{\partial x}(zx)-\frac{\partial}{\partial y}(yz)\right\}=\vec{0},$

因此 $\vec{A}$ 为无旋场从而为有势场

由 $u_x=yz,u_y=zx,u_z=xy\Rightarrow u=xyz+g\left(y,z\right),g'_y=0,\Rightarrow u=xyz+h\left(z\right),h'=0$

$\Rightarrow u=xyz+c$ 为势函数

（2） $\boldsymbol{A}=\left(2x+y\right)\boldsymbol{i}+\left(x+2z\right)\boldsymbol{j}+\left(2y-6z\right)\boldsymbol{k}$

解：由于

$$rot\vec{A}=\left\{\frac{\partial\left(2y-6z\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(x+2z\right)}{\partial z},\frac{\partial\left(2x+y\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(2y-6z\right)}{\partial x},\frac{\partial\left(x+2z\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(2x+y\right)}{\partial y}\right\}=\vec{0},$$

因此 $\vec{A}$ 为无旋场从而为有势场

由 $u_x=2x+y,u_y=x+2z,u_z=2y-6z\Rightarrow u=x^2+xy+g\left(y,z\right),g'_y=2z,$

$\Rightarrow u=x^2+xy+2yz+h\left(z\right),h'=-6z\Rightarrow u=x^2+xy+2yz-3z^2+c$ 为势函数

6．设 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，计算 $\mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\,u\right)$

解：由于 $\mathbf{grad}\,u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$

从而

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\,u\right)=\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}$$

$$=\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right\}$$

由于 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，从而 $\mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\,u\right)=\vec{0}$

第九章《曲线积分与曲面积分》测试题

1．填空题

（1）对坐标的曲线积分 $\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成第一类曲线积分是 $\underline{\oint_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s}$，其中 α,β,γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的 __切向量__ 的方向角；

（2）设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$ 则曲线积分

$\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=\underline{-18\pi}$；

（3）设曲线积分 $\int_L\left[f(x)-\mathrm{e}^x\right]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$.与积分路径无关，其中 $f(x)$ 一阶连续可导，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=\underline{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}$；

（4）$\iint_\Sigma(y^2+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{0}$，其中 Σ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧；

（5）设 $A=\mathrm{e}^x\sin y\boldsymbol{i}+(2xy^2+z)\boldsymbol{j}+xzy^2\boldsymbol{k}$，则 $\mathrm{div}A|_{(1,0,1)}=\underline{0}$，$\mathrm{rot}A|_{(1,0,1)}=\underline{\{-1,0,-1\}}$.

2．计算下列曲线积分：

（1）计算 $\oint_L z^2\mathrm{d}s$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的相交部分 $(a>0)$.

解：由轮换对称性 $\oint_L z^2\mathrm{d}s=\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L y^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L a^2\mathrm{d}s$

$=\dfrac{a^2}{3}\oint_L\mathrm{d}s=\dfrac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\dfrac{2}{3}\pi a^3$

（2）$\oint_L\dfrac{|y|}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 L 是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\x^2+y^2=2ax\end{cases}$，$z\geq 0,a>0$.

解：L 用球坐标表达是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\x^2+y^2=2ax\end{cases}\Rightarrow\rho=2a,\cos\theta=\sin\varphi\Rightarrow$

$x=2a\cos^2\theta,y=2a\sin\theta\cos\theta,z=2a\sin\theta,\theta\in[0,\pi]$

原式$=\oint_L \frac{|y|}{4a^2}\mathrm{d}s=2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}d\theta=-\int_1^0\sqrt{1+t}dt=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

（3）$\int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}y$, 其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ 由点 $A(a,0)$ 经点 $C(0,b)$ 到点 $B(-a,0)$ 的弧段；

解：L 参数表达是 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta, \theta: 0\to\pi$

原式$=\int_0^{\pi}(a^2\cos^2\theta+2ab\sin\theta\cos\theta)b\cos\theta d\theta$

$=a^2b\int_0^{\pi}\left(1-\sin^2\theta\right)d\sin\theta-2ab^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\cos\theta=0-\frac{2}{3}ab^2\left(-1-1\right)=\frac{4}{3}ab^2$

（4）$\oint_L x^2y\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z$，其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=11$ 与 $z=x^2+y^2+1$ 的交线，其方向与 z 轴正向成右手系；

解：L 参数表达是 $x=\sqrt{2}\cos\theta, y=\sqrt{2}\sin\theta, z=3\theta: 0\to 2\pi$

原式$=\int_0^{2\pi}(-4\sin^2\theta\cos^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}(\frac{\cos4\theta-1}{2}+2\sqrt{2}\cos\theta)d\theta=-\pi$

（5）$\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\,\mathrm{d}\,x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\,\mathrm{d}\,y$，其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\geq 0$，沿逆时针方向；

解：加上 $L_1: y=0, x: 0\to 2a$ 形成半圆区域的正向边界

原式$=\int_{L+L_2}-\int_{L_2}(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\,\mathrm{d}\,x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\,\mathrm{d}\,y=\iint_D 2d\sigma-0=\pi a^2$

（6）$\oint_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 L 是以点为定点 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$ 的正方形的整个边界（取正向）.

解：$L:|x|+|y|=1$ 正向

原式$=\oint_L\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\iint_D 0d\sigma=0$

3．计算下列曲面积分：

（1）$\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S$,Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $1\le z\le 2$ 之间的部分.

解：原式$=\iint\limits_{D}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{e^r}{r}\sqrt{2}rdr=2\sqrt{2}\pi\left(e^2-e\right)$

（2）计算 $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-h\right)^2}}$,其中$h\ne R$.

解：Σ 为 $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 两片 $z_x=\pm\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},dS=\frac{Rd\sigma}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

令 $t=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-r^2},dt=\frac{-rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}$

原式$=\iint\limits_{D}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2-2ht}}+\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2+2ht}}\right)\frac{Rd\sigma}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2-2ht}}+\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2+2ht}}\right)\frac{Rrdr}{\sqrt{R^2-r}}$

$=2\pi R\int_0^R\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2-2ht}}+\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2+2ht}}\right)dt=\frac{2\pi R}{h}\left[R+h-\left|R-h\right|\right]$

（3）$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中**错误！不能通过编辑域代码创建对象。**是上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧；

解：Σ 为 $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\cos\gamma>0;D:x^2+y^2\le 4,\vec{n}^{\circ}=\frac{\{x,y,z\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

原式$=\iint_{\Sigma}\left(yz\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+2\right)\cos\gamma dS=\iint_{\Sigma}\left(y^2+2\right)dxdy$

$=\iint_{\Sigma}\left(y^2+2\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy+8\pi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr+8\pi=12\pi$

（4）$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le h)$的外侧；

解：加上$\Sigma_1:z=h,x^2+y^2\le h^2$ 上侧，构成封闭区域的外侧。

原式$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(0+0+0)dv-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy=0-\iint\limits_{D}(x^2-y)dxdy$

$=-\iint_D(x^2-y)dxdy=-\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy+0=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h r^3dr=-\frac{\pi}{4}h^4$

（5）$\oint\limits_{\Gamma}2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ z=0\end{cases}$，若正对着$Oz$轴正向看去，$\Gamma$取逆时针方向；

解：由 STOCHS 公式，原式$=\iint\limits_{\Sigma}dxdy=\iint\limits_{D}dxdy=9\pi$

（6）$\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是曲线$\begin{cases}z=y^2\\ x=0\end{cases},(z\le 1)$绕$z$轴旋转所得旋转曲面的上侧.

解：加上$\Sigma_1:z=1,x^2+y^2\le 1$下侧，构成封闭区域的内侧。

原式$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=-\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv-\iint\limits_{\Sigma_1}dxdy=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1dz-(-1)\iint\limits_{D}dxdy$

$=-6\pi\int_0^1 r(1-r^2)dr+\pi=-6\pi\cdot\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1+\pi=-\frac{\pi}{2}$

4．设曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关，其中，且$\varphi(0)=0$

求$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y$.

解：曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关，$\varphi(x)$连续可导

从而$2xy=y\varphi'(x),\varphi'(x)=2x,\varphi(x)=x^2+c,$，又$\varphi(0)=0\Rightarrow c=0,\varphi(x)=x^2$

故$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+yx^2\,\mathrm{d}\,y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}d(\quad)=\frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}$

5．设$f(x)$具有连续的导数，$f(0)=0$，且使表达式$[x\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$是某函数$\mu(x,y)$的全微分，求$f(x)$，并求一个$\mu(x,y)$.

解：由已知，$[x\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$是某函数$\mu(x,y)$的全微分，

从而$x\mathrm{e}^x+f(x)=f'(x),\mathrm{e}^{-x}f'(x)-\mathrm{e}^{-x}f(x)=\left(\mathrm{e}^{-x}f(x)\right)'=x,$，

$\mathrm{e}^{-x}f(x)=\frac{x^2}{2}+c,f(x)=\left(\frac{x^2}{2}+c\right)\mathrm{e}^x$，又$f(0)=0\Rightarrow c=0,f(x)=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$

故 $d\mu(x,y)=[xe^x+\frac{x^2}{2}e^x]ydx+\frac{x^2}{2}e^x dy=d\left(\frac{x^2}{2}e^x y\right),\mu(x,y)=\frac{x^2}{2}e^x y+c$

6．证明在右半平面 $(x>0)$ 内，力 $F=\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\}$ 所做的功与所走的路径无关，并计算由点 $A(1,1)$ 到 $B(2,2)$ 所做的功.

解：$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-xy\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),w=\int_{(1,1)}^{(2,2)}\frac{xdx+dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$w=\int_{(1,1)}^{(2,2)}\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,1)}^{(2,2)}=\sqrt{2}$$

8．证明：$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

解：由于 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-xy\left(x^2+y^2\right)^{-2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$，且偏导数在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是连续的，从而 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分，

函数如 $\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\Big|_{(1,0)}^{(x,y)}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$

9．求向量 $A=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$ 通过 $0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解：$\Phi=\iint_{\Sigma}2xdydz+ydzdx-zdxdy=\iiint_{\Omega}\left(2+1-1\right)dv=2\cdot 1\cdot 1\cdot 1=2$

11．求向量场 $A=xy\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz)\boldsymbol{k}$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1,1)$ 处的散度.

解：$div\vec{A}=\frac{\partial\left(xy\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\cos(xy)\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\cos(xz)\right)}{\partial z}=y-x\sin\left(xy\right)-x\sin\left(xz\right)$

$$div\vec{A}\Big|_{(\frac{\pi}{2},1,1)}=\left[y-x\sin\left(xy\right)-x\sin\left(xz\right)\right]\Big|_{(\frac{\pi}{2},1,1)}=1-\pi$$