姓名________ 学号□□□□□□□□□□□□ 学院________ 专业________ 座位号________

（密封线内不答题）

密 封 线

华南理工大学 2008 年数学竞赛试卷

一、单项选择题（本大题共 15 分，每小题 3 分）

1. 若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^{7/3}}=10$，则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处 （ C ）

(A）连续，但不一定可导； (B)必可导，但 $f'(1)\neq0$；

(C) $f'(1)=0$，但 $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值；

(D) $f'(1)=0$，但 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值

.2. 设 $f(x,y)=(x-2y)\int_x^y e^{-t^2}dt$，则 $f_{xy}(0,1)=$（ D ）

(A）$2-\frac{1}{e}$； (B) $\frac{1}{e}-2$； (C) $-2-\frac{1}{e}$； (D) $2+\frac{1}{e}$

. 3. . 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 $f'_-(x_0)$ 及 $f'_+(x_0)$ 都存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（ C ）

(A）不一定有定义； (B)有定义，但不一定连续；

(C) 连续，但不一定可导1； (D) 必可导

4. 函数 $u=xe^y\cos z$ 在点 $P_0(-1,0,\pi)$ 处沿 $\vec{l}=\{2,-1,-2\}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=$（ D ）

(A）$-\vec{i}+3\vec{j}$； (B) $-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$； (C) 1； (D) -1

.5、 给定函数 $f(x)=\dfrac{1}{c-x}$ 满足方程 $f(x)=1+\int_1^x f^2(t)dt$，其中 c 的取值情况应该是

（ B ）

(A) c 可取任意常数；(B) $c=2$；(C) $c<2$；(D) $c>2$

二、填空题 （本大题共 15 分，每小题 3 分）

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}, x\neq0\\ a, x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=\underline{-2}$

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $\underline{x=0}$

3．曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ 的渐近线方程为 $\underline{y=x+\frac{1}{e}}$

4．已知 $f'\left(e^x\right)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=\underline{\frac{1}{2}\ln^2 x}$

5.　设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中 f,φ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{yf''+\varphi'+y\varphi''}$

三、（本题 14 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，而 $f(x)\neq 0, x\in(0,1)$，求证：$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq 4$

证明：由已知，存在 $c\in(0,1)$ 使 $|f(c)|=\max|f(x)|=M>0$

$$\text{所以}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq\frac{1}{M}\int_0^1|f''(x)|dx$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足拉格朗日定理条件，

所以 $f(c)=f(c)-f(0)=f'(\xi_1)(c-0),\xi_1\in(0,c)$，即 $f'(\xi_1)=\frac{f(c)}{c}=\frac{M}{c}$

类似地，因为 $f(x)$ 在 $[c,1]$ 上满足拉格朗日定理条件，

所以 $-f(c)=f(1)-f(c)=f'(\xi_2)(1-c),\xi_2\in(c,1)$，即 $f'(\xi_2)=\frac{-M}{1-c}$

$$\text{于是}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq\frac{1}{M}\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|dx\geq\frac{1}{M}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\,dx\right|=\frac{1}{M}\left|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\right|$$

$$=\frac{1}{M}\left|\frac{-M}{1-c}-\frac{M}{c}\right|=\frac{1}{c(1-c)}\geq 4$$

四、（本题 14 分）一细长梁，两端固定，受力变形后其形状如图中虚线所示（图略，其中中点与端点都有水平切线）。请根据变形后曲线的特点，写出可能描写曲线的方程 $y=f(x)$

参考答案：$f(x)=a_0\left(-\frac{16}{l^2}x^4+\frac{8}{l^2}x^2-1\right)$ 或 $f(x)=e^{\frac{8}{l^2}\ln(1+a_0)\left(x^2-\frac{2}{l^2}x^4\right)}$

或 $f(x)=\ln\left(1+\frac{8}{l^2}\left(e^{a_0}-1\right)x^2-\frac{16}{l^2}\left(e^{a_0}-1\right)x^4\right)-a_0$ 或 $f(x)=-\frac{a_0}{2}\left[\cos\frac{2\pi x}{l}+1\right]$

五、（本题 14 分）计算曲线积分 $I=\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+3y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+(y-2)^2=10$ 上依逆时针方向自点 $(-3,1)$ 到点 $(3,1)$ 的一段有向曲线

解：由于在原点以外有 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+3y^2}\right)=\frac{-x^2+3y^2}{\left(x^2+3y^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+3y^2}\right)$

由曲线积分与路径无关的条件，可以改换路径 $x^2+3y^2=12$，参数化为

$\begin{cases}x=2\sqrt{3}\cos t\\ y=2\sin t\end{cases},t:\frac{5\pi}{6}\to\frac{13\pi}{6}$ 或 $\begin{cases}x=2\sqrt{3}\cos t\\ y=2\sin t\end{cases},t:\frac{-7\pi}{6}\to\frac{\pi}{6}$，

$$I=\frac{1}{12}\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}}4\sqrt{3}dt=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$$

六、（本题 14 分）计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma\left(e^z+\cos x\right)dydz+\frac{1}{y}dzdx+\left(e^x+\cos z\right)dxdy$，其中 Σ 是由双曲线 $y^2-x^2=9\,(3\le y\le5)$ 绕 y 轴旋转所生成之旋转曲面，其法向量与 y 轴夹锐角

解：Σ 是 $y^2=9+x^2+z^2\,(3\le y\le5)$ 右侧

取 Σ_1： $y=1,\left(x^2+z^2\le16\right)$ 方向与 y 轴正向一致

应用高斯公式 $I=-\iiint_\Omega\left(-\sin x-\frac{1}{y^2}-\sin z\right)dv+\iint_{D_{zx}}\frac{1}{5}dzdx=\int_3^5\frac{1}{y^2}dy\iint_{D_{(y)}}dzdx+\frac{16}{5}\pi$

$$=\int_3^5\frac{1}{y^2}\cdot\pi\left(y^2-9\right)dy+\frac{16}{5}\pi=4\pi$$

另外由于 Σ 关于 xoz 和 yoz 对称，由第二型曲面积分的对称积分性质，可知

$$I=\iint_\Sigma\frac{1}{y}dzdx=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\frac{1}{\sqrt{9+r^2}}rdr=2\pi\sqrt{9+r^2}\Big|_0^4=4\pi$$

七、（本题 14 分）设平面上的两条曲线 L_1,L_2 都经过点 $(1,1)$，已知 L_1 上点的纵坐标 y 与横坐标 x 之比关于 x 的变化率等于 2；而 L_2 上点的纵坐标 y 与横坐标 x 之

乘积关于 x 的变化率也等于 2. 求有这两曲线所围成的平面图形的面积。

解：由已知 $\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right)=2\\ y(1)=1\end{cases},\Rightarrow L_1: y=2x^2-x$，$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}(xy)=2\\ y(1)=1\end{cases},\Rightarrow L_1: y=2-\dfrac{1}{x}$

$$A=\int_{1/2}^{1}\left(2-\frac{1}{x}-\left(2x^2-x\right)\right)dx=\frac{19}{24}-\ln 2$$

备选题 1、（本题 14 分）设有半径为 R 的球面 Σ，其中心恰在给定的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上，问 R 为何值时 Σ 在定球面内部的面积最大并求这个最大值

简答：设球心为 $(0,0,a)$，则球面 Σ 为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$

$$z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2},D:0\le x^2+y^2\le R^2-\frac{R^4}{4a^2}=R_1^2$$

$$S(R)=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^3}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R_1}\frac{Rrdr}{\sqrt{R^2-r^2}}=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a},S\left(\frac{4a}{3}\right)=\frac{32}{27}\pi a^2$$

备选题 2、（本题 14 分）设已知连接两点 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right),B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1,2\right)$ 的直线段 AB，求线段 AB 绕 z 轴旋转所得倒的曲面的面积

解： AB 的方程为 $\dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=\dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\dfrac{z-0}{2},0<z<2$，也即

$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{z}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{z}{2},0<z<2\\ z=z\end{cases}$，曲面为 $x^2+y^2=1+\dfrac{z^2}{2},0<z<2$ 绕 z 轴旋转而成 $\begin{cases}x=\sqrt{1+\dfrac{z^2}{2}},0<z<2\\ y=0\end{cases}$

$$A=2\pi\int_0^2 x(z)\sqrt{1+\left[x'(z)\right]^2}dz=\pi\int_0^2\sqrt{4+3z^2}dz=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}dt$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=4\pi+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$