第十章 微分方程

作业 20　微分方程基本概念

1．写出下列条件所确定的微分方程：

（1）曲线在点 $M(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 MQ 被 y 轴平分；

解：法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}\left(X-x\right)$，法线与 x 轴的交点 $Y=0,\Rightarrow X=x+y'y$

由已知 $0=\dfrac{x+X}{2}=\dfrac{x+x+y'y}{2}\Rightarrow y'y+2x=0$

（2）曲线上任意点 $M(x,y)$ 处的切线与线段 OM 垂直；

解：切线的斜率为 y'，线段 OM 的斜率为 $k=\dfrac{y}{x}$

由已知 $y'\cdot\dfrac{y}{x}=-1,\Rightarrow yy'=-x$

（3）曲线上任意点 $M(x,y)$ 处的切线，以及 M 点与原点的连线，和 x 轴所围成的三角形的面积为常数 a^2.

解：切线方程为 $Y-y=y'\left(X-x\right)$，M 点与原点的连线为 $Y=\dfrac{y}{x}X$

切线与 x 轴即直线 $Y=0$ 的交点，$Y=0,\Rightarrow X=x-\dfrac{y}{y'}$

由已知 $\dfrac{1}{2}\left|y\cdot\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)\right|=a^2,\Rightarrow xy-\dfrac{y^2}{y'}=\pm 2a^2,\left(xy\pm 2a^2\right)y'=y^2$

2.．求曲线簇 $xy=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$　$(C_1,C_2$为任意常数$)$ 所满足的微分方程.

解：由已知，两边对自变量 x 求导 $y+xy'=C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-x}$

两边再对自变量 x 求导 $2y'+xy''=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow 2y'+xy''=xy$

3．潜水艇垂直下沉时所遇到的阻力和下沉的速度成正比，如果潜水艇的质量为 m，且是在水面由静止开始下沉，求下沉的速度所满足的微分方程和初始条件.

解：由已知，$m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv,v\left(0\right)=0$

作业21　可分离变量的微分方程

1．解微分方程 $y - xy' = a(y^2 + y')$.

解：微分方程即 $y - ay^2 = (x+a)\dfrac{dy}{dx}$

分离变量 $\dfrac{dy}{y-ay^2} = \dfrac{dx}{x+a}$

两边积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{ady}{ay(1-ay)} = \int\left(\frac{1}{ay} - \frac{1}{ay-1}\right)d(ay)$

从而 $\ln(x+a) = \ln\dfrac{ay}{ay-1} + \ln c = \ln\dfrac{acy}{ay-1} \Rightarrow x+a = \dfrac{acy}{ay-1}$

2. 求解初值问题：$(1+\mathrm{e}^{-x})y'\tan y + 1 = 0,\quad y|_{x=0} = \pi$.

解：微分方程即 $(1+\mathrm{e}^{-x})\tan y\dfrac{dy}{dx} = -1$

分离变量 $\dfrac{\sin ydy}{\cos y} = -\dfrac{dx}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

两边积分 $\displaystyle -\int \frac{d\cos y}{\cos y} = -\int \frac{dx}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\int \frac{e^x dx}{1+\mathrm{e}^x} = -\int \frac{d\left(1+e^x\right)}{1+\mathrm{e}^x}$

从而 $-\ln\cos y = -\ln\left(1+e^x\right) - \ln c \Rightarrow \cos y = c\left(1+e^x\right)$

由 $y|_{x=0} = \pi$， $\cos\pi = c\left(1+e^0\right) = 2c \Rightarrow c = -\dfrac{1}{2}, \cos y = -\dfrac{1}{2}\left(1+e^x\right)$

3．当 $\Delta x \to 0$ 时，α 是比 Δx 高阶的无穷小量，函数 $y(x)$ 在任意点处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$ ，且 $y(0) = \pi$，求 $y(1)$.

解：由已知 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y}{1+x^2}$，从而 $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y}{1+x^2}$

分离变量 $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x^2}$

两边积分 $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln y = \arctan x + \ln c \Rightarrow y = ce^{\arctan x}$

由 $y|_{x=0} = \pi$， $\pi = ce^{\arctan 0} = c \Rightarrow c = \pi, y = \pi e^{\arctan x}$

4．解微分方程 $xy' = y\ln y$.

解：微分方程即 $x\dfrac{dy}{dx} = y\ln y$

分离变量 $\dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{dx}{x}$

两边积分 $\int \dfrac{dy}{y\ln y} = \int \dfrac{d\ln y}{\ln y} = \int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln\ln y = \ln x + \ln c \Rightarrow \ln y = cx, y = e^{cx}$

5．一曲线通过点（2，3），它在两坐标轴之间的任意切线段均被切点所平分，求这曲线方程.

解：由已知 $y(2) = 3, Y - y = y'(X - x)$

当 $X = 0, Y = y - xy', \dfrac{Y+0}{2} = y \Rightarrow y - xy' = 2y, x\dfrac{dy}{dx} = -y$

分离变量 $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$

两边积分 $\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x + \ln c \Rightarrow y = \dfrac{c}{x}$

由 $y\big|_{x=2} = 3$，$3 = \dfrac{c}{2}, \Rightarrow c = 6, y = \dfrac{6}{x}$

6. 设有连接 $O(0,0)$和$A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 OA，对于 OA 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 OP 与直线段 $\overline{OP}$ 所围成的面积为 x^2，求曲线弧 OA 的方程.

解：设曲线为 $y = f(x)$

由已知 $\int_0^x y(t)dt - \dfrac{1}{2}xy = x^2, y(0) = 0, y(1) = 1 \Rightarrow y - \dfrac{y + xy'}{2} = 2x$

微分方程即 $xy' - y = -2x, \dfrac{xy' - y}{x^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)' = -\dfrac{2}{x}$

从而 $\dfrac{y}{x} = -\int \dfrac{2}{x}dx, y = -x(2\ln x - c) = x(c - 2\ln x)$

由 $y\big|_{x=1} = 1$，$1 = c - 2\ln 1, \Rightarrow c = 1, y = x(1 - 2\ln x)$，

作业 22　齐次方程

1．解微分方程 $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$．

解：令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux, y'=u+xu'$

微分方程 $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$，即 $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}=u\ln u=u+xu'$

$u\left(\ln u-1\right)=x\dfrac{du}{dx}$，分离变量 $\dfrac{du}{u\left(\ln u-1\right)}=\dfrac{dx}{x}$

两边积分 $\displaystyle\int\frac{du}{u\left(\ln u-1\right)}=\int\frac{d\left(\ln u-1\right)}{\ln u-1}=\int\frac{dx}{x}$

$\ln\left(\ln u-1\right)=\ln x+\ln c, \ln\dfrac{y}{x}=1+cx, y=xe^{1+cx}$

2．求解初值问题 $(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0(x>0), y(1)=0$．

解：令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux, y'=u+xu'$

微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$，即 $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=u+\sqrt{1+u^2}=u+xu'$

$\sqrt{1+u^2}=x\dfrac{du}{dx}$，分离变量 $\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\dfrac{dx}{x}$，两边积分 $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x}$

$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\ln x+\ln c, y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2$

由 $y(1)=0$，$0+\sqrt{1+0}=c, \Rightarrow c=1, y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$

3．作适当的变量代换，求下列方程的通解：

（1）　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$；

解：令 $u=x+y, \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=1+y'=1+u^2, \Rightarrow \dfrac{du}{1+u^2}=dx, \displaystyle\int\frac{du}{1+u^2}=\int dx$

$\arctan u=x+c, y=\tan\left(x+c\right)-x$

（2）　$y'=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$；

解：令 $x=X+a, y=Y+b$，则 $y'=\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{Y-X+b-a+1}{Y+X+b+a+5}$

再令 $b-a+1=0, b+a+5=0 \Rightarrow b=-3, a=-2$，$x=X-2, y=Y-3$

再令$Y=uX$,$\Rightarrow Xu'+u=\dfrac{u-1}{u+1},Xu'=\dfrac{u-1}{u+1}-u=\dfrac{-1-u^2}{u+1}$

从而$\displaystyle\int\frac{(u+1)du}{1+u^2}=\int\left(\frac{u}{1+u^2}+\frac{1}{1+u^2}\right)du=-\int\frac{dX}{X}$,

$\dfrac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)+\arctan u=-\ln X-\dfrac{1}{2}\ln c,e^{-2\arctan u}=cX^2\left(1+u^2\right)$

$e^{-2\arctan\frac{y+3}{x+2}}=c\left[\left(x+2\right)^2+\left(y+3\right)^2\right]$

（3）$(x+2y)^2y'=1$.

解：令$u=x+2y$，则$u'=1+2y'=1+\dfrac{2}{u^2}=\dfrac{u^2+2}{u^2}$，分离变量$\dfrac{u^2}{u^2+2}du=dx$，

两边积分$\displaystyle\int\frac{u^2+2-2}{u^2+2}du=\int dx\Rightarrow u-\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}=x+c$

$x+2y-\sqrt{2}\arctan\dfrac{x+2y}{\sqrt{2}}=x+c,2y-c=\sqrt{2}\arctan\dfrac{x+2y}{\sqrt{2}}$

4．求曲线$y=y(x)$，使它正交于圆心在x轴上且过原点的任何圆（注：两曲线正交是指在交点处两曲线的切线互相垂直）.

解：可设在x轴上且过原点的任何圆为$\left(x-a\right)^2+y^2=a^2$，

则$x^2+y^2=2ax,a=\dfrac{x^2+y^2}{2x},2\left(x-a\right)+2yy'=0,y'=\dfrac{a-x}{y}$

由已知曲线$y=y(x)$应满足$y'=-\dfrac{y}{a-x}=-\dfrac{y}{\dfrac{x^2+y^2}{2x}-x}=-\dfrac{2xy}{y^2-x^2}$

令$u=\dfrac{y}{x}$,则$y=ux,y'=u+xu'=\dfrac{2u}{1-u^2},xu'=\dfrac{u+u^3}{1-u^2},\dfrac{\left(1-u^2\right)du}{u\left(1+u^2\right)}=\dfrac{dx}{x}$，

$\displaystyle\int\frac{1+u^2-2u^2}{u\left(1+u^2\right)}du=\int\frac{dx}{x},\ln u-\ln\left(1+u^2\right)=\ln x+\ln c$

$\dfrac{u}{1+u^2}=cx,\dfrac{y}{x}=cx\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right),y=c\left(x^2+y^2\right)$

作业 23　一阶线性微分方程

1．解微分方程　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$．

解：对照标准的一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$,

$$\Rightarrow P(x)=\frac{1}{x},Q(x)=\frac{\sin x}{x},y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=e^{-\ln x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x}dx+C\right]=e^{\ln\frac{1}{x}}\left[\int\frac{\sin x}{x}xdx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\sin xdx+C\right]=\frac{C-\cos x}{x}$$

2．解微分方程　$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x^2+3x+2$．

解：微分方程即　$\frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}x}=x^2+3x+2,$

$$xy=\int\left(x^2+3x+2\right)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+c,y=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{c}{x}$$

3．解微分方程　$(y^2-6x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$．

解：观察发现，微分方程等价为 $y^2-6x+2y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2},$

$$\Rightarrow P(y)=\frac{-3}{y},Q(y)=\frac{-y}{2},x=e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C\right]$$

$$x=e^{-\int\frac{-3}{y}dy}\left[\int\frac{-y}{2}e^{\int\frac{-3}{y}dy}dy+C\right]=e^{3\ln y}\left[\int\frac{-y}{2}e^{-3\ln y}dy+C\right]$$

$$=y^3\left(-\int\frac{1}{2y^2}dy+C\right)=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)=\frac{y^2}{2}+Cy^3$$

4．求解初值问题　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\tan x=\sec x$，　$y\big|_{x=0}=0$．

解：对照标准的一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$,

$$\Rightarrow P(x)=-\tan x,Q(x)=\sec x,y=e^{-\int-\tan xdx}\left[\int\sec x\cdot e^{\int-\tan xdx}dx+C\right]$$

$y=e^{-\ln\cos x}\left[\int\sec x\cdot e^{\ln\cos x}dx+C\right]=\frac{x+c}{\cos x}$，由 $y\big|_{x=0}=0$，　$y=\frac{x}{\cos x}$

5．设曲线积分 $\int_L yf(x)\mathrm{d}x+[2xf(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 在右半平面（$x>0)$ 内与路径无关，其中 $f(x)$ 可导，且 $f(1)=1$，求 $f(x)$.

解：由曲线积分在右半平面（$x>0)$ 内与路径无关可知，

$$f(x)=2f(x)+2xf'(x)-2x,\ f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=1$$

$$\Rightarrow P\left(x\right)=\frac{1}{2x},Q\left(x\right)=1,y=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int 1\cdot e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]=e^{-\frac{1}{2}\ln x}\left[\int e^{\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right]$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c\right)=\frac{2}{3}x+\frac{c}{\sqrt{x}}=f\left(x\right)$$

由 $f(1)=1$，$1=\frac{2}{3}+c,\Rightarrow c=\frac{1}{3},f\left(x\right)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3\sqrt{x}}$

6．解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3xy=xy^2$.

解：微分方程化为 $\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3\frac{x}{y}=x,-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right)-3\frac{x}{y}=x,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right)+3\frac{x}{y}=-x,$

令 $u=\frac{1}{y},\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+3xu=-x,$ 为一阶线性微分方程

$$P\left(x\right)=3x,Q\left(x\right)=-x,u=e^{-\int 3xdx}\left[\int\left(-x\right)\cdot e^{\int 3xdx}dx+C\right]=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[-\int xe^{\frac{3}{2}x^2}dx+C\right]$$

$$u=\frac{1}{y}=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[-\int\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}d\left(\frac{3}{2}x^2\right)x+C\right]=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}+C\right]=Ce^{-\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3}$$

作业 24　全微分方程

1．判别下列方程中哪些是全微分方程，并求全微分方程的通解：

（1）$(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$；

解：因为$\dfrac{\partial(3x^2+6xy^2)}{\partial y}$=$12xy$=$\dfrac{\partial(6x^2y+4y^2)}{\partial x}$且连续，从而该方程是全微分方程

$$0=3x^2\mathrm{d}x+6xy^2\mathrm{d}x+6x^2ydy+4y^2\mathrm{d}y=\mathrm{d}x^3+3y^2\mathrm{d}x^2+3x^2dy^2+\frac{4}{3}\mathrm{d}y^3$$

$=\mathrm{d}\left(x^3++3x^2y^2+\dfrac{4}{3}y^3\right)$，从而$x^3++3x^2y^2+\dfrac{4}{3}y^3=c$

（2）$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$；

解：方程即$(x\cos y+\cos x)dy+\left(-y\sin x+\sin y\right)dx=0$

因为$\dfrac{\partial\left(-y\sin x+\sin y\right)}{\partial y}=-\sin x+\cos y=\dfrac{\partial(x\cos y+\cos x)}{\partial x}$且连续，从而该方程

是全微分方程，方程右边为某个函数$u\left(x,y\right)$的全微分，

即$\exists u,u_x=-y\sin x+\sin y,u_y=x\cos y+\cos x$

$u=y\cos x+x\sin y+g\left(y\right),u_y=x\cos y+\cos x=\cos x+x\cos y+g'\left(y\right)$

$\Rightarrow g'\left(y\right)=0,g\left(y\right)=c_1$

从而微分方程的通解为$y\cos x+x\sin y=c$

（3）$\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$．

解：因为$\dfrac{\partial\mathrm{e}^y}{\partial y}$=$e^y=\dfrac{\partial(x\mathrm{e}^y-2y)}{\partial x}$且连续，从而该方程是全微分方程，从而该方程是全微分方程，方程右边为某个势函数$u\left(x,y\right)$的全微分，可用曲线积分法求一个来。

$$\mathrm{u}=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=\int_0^x e^0dx+\int_0^y(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=x\mathrm{e}^y-y^2$$

从而微分方程的通解为$xe^y-y^2=c$

作业 25　可降阶的高阶微分方程

1．求下列微分方程的通解

（1）$y''=x+\sin x$；

解：$y'=\int\left(x+\sin x\right)dx=\dfrac{1}{2}x^2-\cos x+c_1,$

$$y=\int\left(\frac{1}{2}x^2-\cos x+c_1\right)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+c_1x+c_2$$

（2）$y''(\mathrm{e}^x+1)+y'=0$；

解：令 $p=y',\Rightarrow y''=\dfrac{dp}{dx},(\mathrm{e}^x+1)\dfrac{dp}{dx}+p=0$

分离变量 $\dfrac{dp}{p}=-\dfrac{dx}{\mathrm{e}^x+1}$，

两边积分 $\int\dfrac{dp}{p}=-\int\dfrac{\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}dx=-x+\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)+\ln c_1$，　$p=c_1\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{dy}{dx}$

分离变量 $dy=c_1\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}dx$，两边积分 $y=c_1\int\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}dx=c_1\int\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)dx$

$$y=c_2+c_1\left(x-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

（3）$y''+\dfrac{2}{1-y}y'^2=0$；

解：令 $p=y',\Rightarrow y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy},p\dfrac{dp}{dy}+\dfrac{2}{1-y}p^2=0$

分离变量 $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{2}{y-1}dy$，

两边积分 $\int\dfrac{dp}{p}=\int\dfrac{2}{y-1}dy,\ln p=2\ln\left(y-1\right)+\ln c_1$，　$p=c_1\left(y-1\right)^2=\dfrac{dy}{dx}$

分离变量 $\dfrac{dy}{\left(y-1\right)^2}=c_1dx$，两边积分 $c_1x+c_2=\int\dfrac{dy}{\left(y-1\right)^2}=\dfrac{-1}{y-1}$

$$y=1-\frac{1}{c_1x+c_2}$$

(4) $y''=(y')^3+y'$.

解：令 $p=y',\Rightarrow y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy},p\dfrac{dp}{dy}=p^3+p$

分离变量 $\dfrac{dp}{p^2+1}=dy$，

两边积分 $y=\int\dfrac{1}{p^2+1}dp=\arctan p-c_1,p=\tan\left(y+c_1\right)=\dfrac{dy}{dx}$，

分离变量 $\cot\left(y+c_1\right)dy=dx$，

两边积分 $x+c_2=\int\cot\left(y+c_1\right)dy=\ln\left|\sin\left(y+c_1\right)\right|$， $\sin\left(y+c_1\right)=\pm e^{x+c_2}$

2．求解初值问题 $\begin{cases}y^3y''+1=0\\ y\big|_{x=1}=1,y'\big|_{x=1}=0\end{cases}$.

解：令 $p=y',\Rightarrow y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy},y^3p\dfrac{dp}{dy}+1=0$

分离变量 $pdp=\dfrac{-1}{y^3}dy$，两边积分 $\dfrac{p^2}{2}=\int\dfrac{-1}{y^3}dy=\dfrac{1}{2y^2}+\dfrac{1}{2}c_1,p^2=y^{-2}+c_1$，

由 $y\big|_{x=1}=1,y'\big|_{x=1}=0$， $0=1+c_1,\Rightarrow p^2=y^{-2}-1,p=\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$

分离变量 $\dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx$，两边积分 $-\int\dfrac{-2ydy}{2\sqrt{1-y^2}}=\pm x-c=-\sqrt{1-y^2}$，

$\sqrt{1-y^2}=\pm x+c$，由 $y\big|_{x=1}=1,c=\mp1$，从而 $\sqrt{1-y^2}=\pm x\mp1$

3. 设第一象限内的曲线 $y=y(x)$ 对应于 $0\le x\le a$ 一段的长在数值上等于曲边梯形：

$0\le y\le y(x)$，$0\le x\le a$ 的面积，其中 $a>0$ 是任意给定的，$y(0)=1$，求 $y(x)$.

解：由已知 $\int_0^a\sqrt{1+\left[y'\left(x\right)\right]^2}dx=\int_0^a y\left(x\right)dx\Rightarrow1+y'^2=y,y'=\pm\sqrt{y-1}$

$\int\dfrac{dy}{\sqrt{y-1}}=\pm\int dx=c\pm x,2\sqrt{y-1}=c\pm x,y=1+\dfrac{\left(c\pm x\right)^2}{4}$

由 $y(0)=1$，$1=1+\dfrac{c^2}{4},c=0,y=1+\dfrac{x^2}{4}$

作业 26　线性微分方程解的结构

1．已知 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$ 是齐次线性方程

$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的一个解，求此方程的通解．

解：方程即 $y''-\dfrac{2x+1}{2x-1}y'+\dfrac{2}{2x-1}y=0, p\left(x\right)=-\dfrac{2x+1}{2x-1}, q\left(x\right)=\dfrac{2}{2x-1}$

由刘维尔公式 $y_2=y_1\int\dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=e^x\int\dfrac{1}{e^{2x}}e^{-\int-\frac{2x+1}{2x-1}dx}dx$

$$y_2=e^x\int e^{-2x}e^{\int\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)dx}dx=e^x\int e^{-2x}e^{x+\ln\left(2x-1\right)}dx=e^x\int\left(2x-1\right)e^{-x}dx$$

$$=-e^x\int\left(2x-1\right)de^{-x}=-e^x\left[\left(2x-1\right)e^{-x}+2e^{-x}\right]=-2x-1$$

由解的结构定理可知，方程的通解 $y=c_1e^x-c_2\left(2x+1\right)$

2．若 y_1，y_2，y_3 是二阶非齐次线性微分方程（1）的线性无关的解，试用 y_1，y_2，y_3 表达方程（1）的通解．

解：由解的结构定理可知，y_2-y_1, y_3-y_1 均为对应的二阶齐次线性微分方程的解，而且现行无关。

从而：由解的结构定理方程（1）的通解为 $y=c_1\left(y_2-y_1\right)+c_2\left(y_3-y_1\right)+y_1$

3．已知 $y_1=x^2$，$y_2=x+x^2$，$y_3=\mathrm{e}^x+x^2$ 都是二阶线性非齐次方程（$x-1$）$y''-xy'+y=-x^2+2x-2$ 的解，求此方程的通解．

解：易知 $y_2-y_1=x$，$y_3-y_1=\mathrm{e}^x$ 线性无关，从而为二阶线性齐次方程（$x-1)y''-xy'+y=0$ 的线性无关的特解，由解的结构定理，二阶线性非齐次方程（$x-1)y''-xy'+y=-x^2+2x-2$ 的通解为 $y=x^2+\mathrm{c}_1x+c_2\mathrm{e}^x$

作业 27　二阶常系数齐次线性微分方程

1．求下列微分方程的通解

（1）$4y''-12y'+9y=0$；

解：特征方程为

$$4r^2-12r+9=0,r_{1,2}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot4\cdot9}}{2\cdot4}=\frac{3\pm\sqrt{9-9}}{2}=\frac{3}{2}$$

从而通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{\frac{3}{2}x}$

（2）$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$；

解：特征方程为 $r^2+r=r(r+1)=0,r_1=0,r_2=-1$

从而通解为 $y=c_1+c_2e^{-x}$

（3）$y''+6y'+13y=0$；

解：特征方程为 $r^2+6r+13=0,r_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot13}}{2}=-3\pm2i,\alpha=-3,\beta=2$

从而通解为 $y=(c_1\cos2x+c_2\sin2x)e^{-3x}$

（4）$y^{(5)}+2y'''+y'=0$．

解：特征方程为 $r^5+2r^3+1=r\left(r^2+1\right)^2=0,r_{1,2}=i,r_{3,4}=-i,r_5=0$

从而通解为 $y=(c_1+c_2x)\cos2x+(c_3+c_4x)\sin2x+c_5$

2．求方程 $4y''+4y'+y=0$ 满足所给初始条件 $y\big|_{x=0}=2$，$y'\big|_{x=0}=0$ 的特解.

解：特征方程为 $4r^2+4r+1=(2r+1)^2=0,r_{1,2}=-\frac{1}{2}$

从而通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{1}{2}x}$，由 $y\big|_{x=0}=2$ 得 $2=(c_1+c_2\cdot0)e^0\Rightarrow c_1=2$

由 $y'\big|_{x=0}=0$，$y'=c_2e^{-\frac{1}{2}x}+(c_1+c_2x)e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ 得 $0=c_2+c_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),c_2=\frac{1}{2}c_1=1$

因此 $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$

3． 设可微函数$\varphi(x)$满足方程$\varphi(x)=\mathrm{e}-\int_0^x (x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u$，求$\varphi(x)$.

解：由已知$\varphi(0)=e$， $\varphi(x)=\mathrm{e}-x\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u+\int_0^x u\varphi(u)\mathrm{d}u$

$\Rightarrow \varphi'(x)=-\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u, \varphi'(0)=0$， $\Rightarrow \varphi''(x)=-\varphi(x), \varphi''(x)+\varphi(x)=0$

特征方程为$r^2+1=0, r_{1,2}=\pm i$

从而通解为$\varphi\left(x\right)=c_1\cos x+c_2\sin x,$， 由$\varphi(0)=e$得$e=c_1+c_2\cdot 0\Rightarrow c_1=e$

由$\varphi'\left(0\right)=0$， $\varphi'\left(x\right)=-c_1\sin x+c_2\cos x,$ 得$0=0+c_2, c_2=0$

因此$\varphi\left(x\right)=e\cos x$

作业 28　二阶线性非齐次微分方程

1．求下列各方程的通解

（1）$y''+5y'+4y=3-2x$；

解：对应齐次方程特征方程为$r^2+5r+4=(r+4)(r+1)=0, r_1=-4, r_2=-1$

非齐次项 $f(x)=3-2x$，与标准式 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 比较得$n=1,\lambda=0$

对比特征根，推得$k=0$，从而 $y^*=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}=ax+b, y^{*\prime}=a, y^{*\prime\prime}=0$

代入方程得$0+5a+4(ax+b)=3-2x \Rightarrow 5a+4b=3, 4a=-2, a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{11}{8}$

从而通解为$y=c_1e^{-4x}+c_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{8}$

（2）$2y''+y'-y=2\mathrm{e}^x$；

解：对应齐次方程特征方程为

$$2r^2+r-1=0, r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 3}{4}, r_1=\frac{1}{2}, r_2=-1$$

非齐次项 $f(x)=2e^x$，与标准式 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 比较得$n=0,\lambda=1$

对比特征根，推得$k=0$，从而 $y^*=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}=ae^x, y^{*\prime}=ae^x, y^{*\prime\prime}=ae^x$

代入方程得$2a+a-a=2 \Rightarrow a=1$

从而通解为$y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{-x}+e^x$

（3）$y''+3y'+2y=3xe^{-x}$；

解：对应齐次方程特征方程为$r^2+3r+2=(r+2)(r+1)=0, r_1=-2, r_2=-1$

非齐次项 $f(x)=3xe^{-x}$，与标准式 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 比较得$n=1,\lambda=-1$

对比特征根，推得$k=1$，从而 $y^*=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}=(ax^2+bx)e^{-x}$,

$$y^{*\prime}=(-ax^2+2ax-bx+b)e^{-x}, y^{*\prime\prime}=(ax^2-4ax+bx+2a-2b)e^{-x}$$

代入方程得$(ax^2-4ax+bx+2a-2b)+3(-ax^2+2ax-bx+b)+2(ax^2+bx)=3x$

$\Rightarrow 2a+b=0, 2a=3, \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}, b=-2a=-3$，$y=\left(\dfrac{3}{2}x^2-3x+c_1\right)e^{-x}+c_2e^{-2x}$

（4） $y''+4y=x\cos x$；

解：对应齐次方程特征方程为$r^2+4=0, r_{1,2}=\pm 2i$

非齐次项 $f\left(x\right)=x\cos x,$，与标准式 $f\left(x\right)=e^{\alpha x}\left[P_m\left(x\right)\cos\beta x+P_l\left(x\right)\sin\beta x\right]$

比较得$n=\max\left\{m,l\right\}=1, \lambda=i$，对比特征根，推得$k=0$，从而特解形式可设为

$y^*=x^k\left[{}_1Q_n\left(x\right)\cos\beta x+{}_2Q_n\left(x\right)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}=(ax+b)\cos x+\left(cx+d\right)\sin x,$

$y^{*\prime}=(-ax-b+c)\sin x+\left(cx+d+a\right)\cos x, y^{*\prime\prime}=(-ax-b+2c)\cos x-\left(cx+d+2a\right)\sin x$

代入方程得$3ax+3b+2c=x, 3cx+3d-2a=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}, c=0, b=0, d=\dfrac{2}{9}$

$y=c_1\cos 2x++c_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$

（5） $y''-y=\sin^2 x$.

解：对应齐次方程特征方程为$r^2-1=0, r_{1,2}=\pm 1$

非齐次项 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x,$ 利用解的结构定理知特解形式可设为

$y^*=a+b\cos 2x+c\sin 2x,$

$y^{*\prime}=-2b\sin 2x+2c\cos 2x, y^{*\prime\prime}=-4b\cos 2x-4c\sin 2x$

代入方程得$-a-5b\cos 2x-5c\sin 2x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{10}, c=0$

$y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$

2．求方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 满足初始条件 $y(0)=0$， $y'(0)=1$ 的特解.

解：对应齐次方程特征方程为$r^2+4r+4=\left(r+2\right)^2=0, r_1=r_2=-2$

非齐次项 $f\left(x\right)=e^{-2x}$，与标准式 $f\left(x\right)=P_n\left(x\right)e^{\lambda x}$ 比较得$n=0, \lambda=-2$

对比特征根，推得$k=2$，从而

$y^*=x^kQ_n\left(x\right)e^{\lambda x}=ax^2e^{-2x}, y^{*\prime}=\left(2ax-2ax^2\right)e^{-2x}, y^{*\prime\prime}=\left(2a-8ax+4ax^2\right)e^{-2x}$

代入方程得$\left(2a-8ax+4ax^2\right)+4\left(2ax-2ax^2\right)+4ax^2=1, 2a=1, a=\dfrac{1}{2}$

从而通解为$y=(c_1+c_2x+\dfrac{1}{2}x^2)e^{-2x}$， $y(0)=0\Rightarrow c_1=0$

$y'=(-2c_2x-x^2+c_2+x)e^{-2x}$， $y'(0)=1,\Rightarrow c_2=1$要的特解为$y=\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x}$

3．已知二阶线性非齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个特解为$y_1=x$，

$y_2=\mathrm{e}^x$， $y_3=\mathrm{e}^{2x}$．试求方程满足初始条件$y(0)=1$， $y'(0)=3$的特解.

解：由这个三个解的线性无关性，以及解的结构理论，得通解为

$y=c_1\left(\mathrm{e}^x-x\right)+c_2\left(\mathrm{e}^{2x}-x\right)+x$，由$y(0)=1$得$c_1+c_2=1$

$y'=c_1\left(\mathrm{e}^x-1\right)+c_2\left(2\mathrm{e}^{2x}-1\right)+1$及$y'(0)=3$得$c_2\left(2-1\right)+1=3\Rightarrow c_2=2,c_1=-1$

所要特解为$y=x-\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}-2x+x=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$

4．设$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，其中$f(x)$连续，求$f(x)$.

解： $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt\Rightarrow f\left(0\right)=0$

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt\Rightarrow f'\left(0\right)=\cos 0=1$， $f''(x)+f(x)=-\sin x$

对应齐次方程特征方程为$r^2+1=0,r_{1,2}=\pm i$

非齐次项$f\left(x\right)=-\sin x,$，与标准式$f\left(x\right)=e^{\alpha x}\left[P_m\left(x\right)\cos\beta x+P_l\left(x\right)\sin\beta x\right]$

比较得$n=\max\left\{m,l\right\}=0,\lambda=i$, 对比特征根，推得$k=1$，从而特解形式可设为

$y^*=x^k\left[{}_1Q_n\left(x\right)\cos\beta x+{}_2Q_n\left(x\right)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}=ax\cos x+bx\sin x,$

$y^{*\prime}=(a+bx)\cos x+(b-ax)\sin x, y^{*\prime\prime}=(2b-ax)\cos x+(-2a-bx)\sin x$

代入方程得$2b\cos x-2a\sin x=-\sin x\Rightarrow b=0,a=\frac{1}{2}$

$f\left(x\right)=c_1\sin x+c_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x$，由$f\left(0\right)=0\Rightarrow c_2=0$

$f'\left(x\right)=c_1\cos x-c_2\sin x-\frac{x}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$，由$f'\left(0\right)=1\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}$

因此$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$

第十章《微分方程》测试题

1．填空题

（1）函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 是常系数线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解的充分必要条件是 $\underline{r^2+pr+q=0}$；

（2）曲线簇 $y=\cos(x+C)$（C 为任意常数）满足的一阶微分方程是 $\underline{y^2+\left(y'\right)^2=1}$；

（3）已知二阶线性齐次方程的两个解 $y_1=\mathrm{e}^x$， $y_2=x\mathrm{e}^x$，则该方程为 $\underline{y''+2y'+y=0}$；

（4）方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解 y 为 $\underline{\sin\dfrac{y}{x}=cx}$；

（5）设 $y_1=3$， $y_2=3+x^2$， $y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$ 都是方程

$$(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=6x-6$$

的解，则方程的通解为 $\underline{y=3+c_1x^2+c_2\mathrm{e}^x}$.

2．求下列各方程的通解

（1）$(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})\mathrm{d}y=0$；

解：令 $u=\dfrac{x}{y}$，则 $x=yu, dx=ydu+udy$

原方程化为 $(1+\mathrm{e}^u)ydu+(u+\mathrm{e}^u)\mathrm{d}y=0$，分离变量 $\dfrac{(1+\mathrm{e}^u)du}{u+\mathrm{e}^u}+\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=0$，

两边积分得 $\displaystyle\int\frac{(1+\mathrm{e}^u)du}{(u+\mathrm{e}^u)}+\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln(u+\mathrm{e}^u)+\ln y=\ln c$

从而 $y(u+\mathrm{e}^u)=c, x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=c$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y^3}$；

解：原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{x}{y}=y^2$，,

从而 $x=e^{-\int\frac{-1}{y}dy}\left(\int y^2e^{\int\frac{-1}{y}dy}dy+c\right)=e^{\ln y}\left(\int ydy+c\right)=\frac{y^3}{2}+cy$

（3）$(1+x^2)y''+2xy'=0$；

解：令 $y'=p$，则 $y''=p'$ 原方程化为 $(1+x^2)p'+2xp=0$，

分离变量 $\frac{\mathrm{d}p}{p}+\frac{2xdx}{1+x^2}=0$，

两边积分得 $\int\frac{\mathrm{d}p}{p}+\int\frac{2xdx}{1+x^2}=\ln p+\ln\left(1+x^2\right)=\ln c$

从而 $p=\frac{dy}{dx}=\frac{c}{1+x^2},y=c\arctan x+c_1$

（4）$y''=\frac{1}{x}y'+x\mathrm{e}^x$；

解：令 $y'=p$，则 $y''=p'$ 原方程化为 $p'-\frac{1}{x}p=x\mathrm{e}^x$，

从而 $p=e^{-\int\frac{-1}{x}dx}\left(\int xe^xe^{\int\frac{-1}{x}dx}dx+c\right)=e^{\ln x}\left(\int e^xdx+2c_1\right)=xe^x+2c_1x=\frac{dy}{dx}$

$y=\int xe^xdx+c_1x=(x-1)e^x+c_1x^2+c_2$

（5）$y''+9y=x\sin 3x$；

解：对应齐次方程特征方程为 $r^2+9=0,r_{1,2}=\pm 3i$

非齐次项 $f\left(x\right)=x\sin 3x,$，与标准式 $f\left(x\right)=e^{\alpha x}\left[P_m\left(x\right)\cos\beta x+P_l\left(x\right)\sin\beta x\right]$

比较得 $n=\max\left\{m,l\right\}=1,\lambda=3i$，对比特征根，推得 $k=1$，从而特解形式可设为

$y^*=x^k\left[{}_1Q_n\left(x\right)\cos\beta x+{}_2Q_n\left(x\right)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}=(ax^2+bx)\cos 3x+\left(cx^2+dx\right)\sin 3x,$

$y^{*\prime}=(3cx^2+3dx+2ax+b)\cos 3x+\left(2cx+d-3ax^2-3bx\right)\sin 3x$

$y^{*\prime\prime}=(2c-6b-12ax-9dx-9cx^2)\sin 3x+\left(6d+2a+12cx-9bx-9ax^2\right)\cos 3x$

代入方程得 $(2c-6b-12ax)\sin 3x+\left(6d+2a+12cx\right)\cos 3x=x\sin 3x$

$2c-6b-12ax=x,6d+2a+12cx=0\Rightarrow a=-\frac{1}{12},c=b=0,d=\frac{1}{36}$

$y=c_1\cos 3x++c_2\sin 3x-\frac{1}{12}x^2\cos 3x+\frac{1}{36}x\sin 3x$

（6） $xy''-y'=x^2$；

解：方程可化为 $\dfrac{xy''-y'}{x^2}=\left(\dfrac{y}{x}\right)'=1$，从而 $\dfrac{y'}{x}=x+2c_1, y'=x^2+2c_1x$

因此 $y=\int\left(x^2+2c_1x\right)dx=\dfrac{1}{3}x^3+c_1x+c_2$

（7） $y''+4y'+4y=3\mathrm{e}^{-2x}$；

解：对应齐次方程特征方程为 $r^2+4r+4=\left(r+2\right)^2=0, r_1=r_2=-2$

非齐次项 $f\left(x\right)=3e^{-2x}$，与标准式 $f\left(x\right)=P_n\left(x\right)e^{\lambda x}$ 比较得 $n=0,\lambda=-2$

对比特征根，推得 $k=2$，从而

$y^*=x^kQ_n\left(x\right)e^{\lambda x}=ax^2e^{-2x}, y^{*\prime}=\left(2ax-2ax^2\right)e^{-2x}, y^{*\prime\prime}=\left(2a-8ax+4ax^2\right)e^{-2x}$

代入方程得 $\left(2a-8ax+4ax^2\right)+4\left(2ax-2ax^2\right)+4ax^2=3, 2a=3, a=\dfrac{3}{2}$

从而通解为 $y=(c_1+c_2x+\dfrac{3}{2}x^2)e^{-2x}$

（8） $(2x-5y+3)\mathrm{d}x-(2x+4y-6)\mathrm{d}y=0$.

解：令 $x=X+a, y=Y+b$，则 $y'=\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{2X-5Y+2a-5b+3}{2X+4Y+2a+4b-6}$

再令 $2a-5b+3=0, 2a+4b-6=0\Rightarrow b=1, a=1$， $x=X+1, y=Y+1$

再令 $Y=uX, \Rightarrow Xu'+u=\dfrac{2-5u}{2+4u}, Xu'=\dfrac{2-5u}{2+4u}-u=\dfrac{2-7u-4u^2}{2+4u}$

从而 $\int\dfrac{2+4u}{(2+u)(1-4u)}du=\int\left(\dfrac{-2/3}{2+u}+\dfrac{4/3}{1-4u}\right)du=\int\dfrac{dX}{X},$

$-\dfrac{2}{3}\ln\left(2+u\right)-\dfrac{1}{3}\ln\left(1-4u\right)=\ln X-\dfrac{1}{3}\ln c$

$2\ln\left(2+u\right)+\ln\left(1-4x\right)+3\ln X=\ln c, \left(2+u\right)^2\left(1-4u\right)X^3=c$

$\left(2X+Y\right)^2\left(X-4Y\right)=c$ 即 $\left(2x+y-3\right)^2\left(x-4y+3\right)=c$

3. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，并且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

为一全微分方程，求 $f(x)$.

解：由已知 $x(x+2y)-f(x)=f''(x)+2xy,\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=x^2$

对应齐次方程特征方程为 $r^2+1=0,r_{1,2}=\pm i$

非齐次项 $f\left(x\right)=x^2$，与标准式 $f\left(x\right)=P_n\left(x\right)e^{\lambda x}$

比较得 $n=2,\lambda=0$，对比特征根，推得 $k=0$，从而特解形式可设为

$y^*=ax^2+bx+c,y^{*\prime}=2ax+b,y^{*\prime\prime}=2a$

$2a+ax^2+bx+c=x^2\Rightarrow a=1,b=0,c=-2$

从通解为 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x^2-2,f'(x)=c_2\cos x-c_1\sin x+2x$，

由 $f(0)=0,f'(0)=1$，$c_1-2=0,c_2=1,c_1=2$

因此 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$

4．已知方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\mathrm{e}^{2x}$ 有形如 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 的解，试求出这个解.

解：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(u\right)e^x\sin y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(u\right)\left(e^x\sin y\right)^2+f'\left(u\right)e^x\sin y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\left(u\right)e^x\cos y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(u\right)\left(e^x\cos y\right)^2+f'\left(u\right)e^x(-\sin y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(u\right)e^{2x}=f(u)\mathrm{e}^{2x},\Rightarrow f''\left(u\right)-f(u)=0$

特征方程为 $r^2-1=0,r_1=1,r_2=-1,f\left(u\right)=c_1e^u+c_2e^{-u}$

因而，这个解为 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)=c_1e^{\mathrm{e}^x\sin y}+c_2e^{-\mathrm{e}^x\sin y}$

5．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续导数，且满足

$$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4,$$

求 $f(x)$.

解：由极坐标 $f(t)=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t r^2f\left(r\right)rdr+t^4=4\pi\int_0^t r^3f\left(r\right)dr+t^4$

从而 $f'(t)=4\pi t^3 f\left(t\right)+4t^3, f\left(0\right)=0$，即 $f'(t)-4\pi t^3 f\left(t\right)=4t^3,$

$$f\left(t\right)=e^{-\int\left(-4\pi t^3\right)}\left(\int 4t^3 e^{\int\left(-4\pi t^3\right)}dt+c\right)=e^{\pi t^4}\left(-\frac{1}{\pi}e^{-\pi t^4}+c\right)=-\frac{1}{\pi}+ce^{\pi t^4}$$

由 $f\left(0\right)=0$，得 $c=\frac{1}{\pi}, f\left(t\right)=\frac{1}{\pi}e^{\pi t^4}-\frac{1}{\pi}, f\left(x\right)=\frac{1}{\pi}e^{\pi x^4}-\frac{1}{\pi}$

6．设函数 $\varphi(x)$ 在实轴上连续，$\varphi'(0)$ 存在，且具有性质 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$，试求出 $\varphi(x)$.

解：由已知 $\varphi(x+0)=\varphi(x)\varphi(0),\Rightarrow \varphi\left(0\right)=1$

$$\varphi'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(x)}{y}=\varphi(x)\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y}$$

从而 $\varphi'(x)=\varphi(x)\varphi'(0)$，$\int\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\int\varphi'(0)dx=\varphi'(0)x+\ln c$

因此 $\varphi(x)=ce^{\varphi'(0)x}$，由于 $\varphi\left(0\right)=1$，故 $c=1,\varphi(x)=e^{\varphi'(0)x}$

7．设函数 $y(x)$（$x\ge 0$）二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$，过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形面积记为 S_1，区间 $(0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1．求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

解:过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线为 $Y-y=y'\left(X-x\right)$

当 $Y=0, X=x-\frac{y}{y'}$，从而 $S_1=\frac{1}{2}y\left[x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right]=\frac{y^2}{2y'}, S_2=\int_0^x y\left(x\right)dx$

由已知 $y\left(0\right)=1, 2S_1-S_2=1, \frac{y^2}{y'}-\int_0^x y\left(x\right)dx=1,\Rightarrow y'\left(0\right)=1,$，$y\left(y'\right)^2-y^2y''=0$

令 $y'=p,\Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}, yp^2=y^2p\frac{dp}{dy},\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y},\ln p=\ln y+\ln c$

从而 $y'=p=cy,\int\frac{dy}{y}=\int cdx,\ln y=cx+\ln c_1, y=c_1e^{cx}$，

由于 $y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=1$，因此 $c=1, c_1=1, y=e^x$