分段函数在分段点处的导数*

彭 娟[1]　郭夕敬[2]
([1] 北京工业大学应用数理学院 北京 100124; [2] 吉林大学珠海学院数学研究室 广东珠海 519041)

摘 要　求分段函数在分段点处导数的过程中, 容易产生两种错误的做法: 一种是将分段点两边的表达式分别求导, 然后将分段点的值代入; 一种是将分段点两边的表达式分别求导, 然后取其在分段点处的极限. 通过分析可发现其错误的原因所在, 从理论上可证明这两种做法在一定条件下的正确性.

关键词　分段函数; 分段点; 连续; 导数.　　中图分类号　O172.1

对于初学微积分的人来说, 求分段函数在分段点处的导数是比较令人困惑的问题. 例如, 求分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

在分段点 $x=0$ 处的导数. 通常用定义先计算函数在分段点处的左右导数, 若左右导数都存在且相等, 那么, 函数在分段点处的导数也就存在了. 但是, 除了用左导数和右导数的定义来求之外, 还有两种常见的做法:

1) 由 $(x^3)'=3x^2$ 得 $f'_+(0)=3x^2|_{x=0}=0$; 由 $(x^2)'=2x$ 得 $f'_-(0)=2x|_{x=0}=0$; 所以, $f'(0)=0$.

2) 由 $(x^3)'=3x^2$ 得 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}3x^2=0$; 由 $(x^2)'=2x$ 得 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$; 所以, $f'(0)=0$.

这两种做法都有不妥之处.

第一种做法: $(x^3)'$ 求出来的只是 $x>0$ 时函数的导数, 不包括分段点 $x=0$. 因此, 不能直接将 $x=0$ 代入导函数的表达式中.

第二种做法: $\lim\limits_{x\to 0^+}3x^2=0$ 求出的是导函数在 $x=0$ 处的右极限, 而不是右导数, 这一种做法把右导数与导数的右极限混为一谈. $\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$ 求出的也只是导函数在 $x=0$ 处的左极限而不是左导数. 同样是混淆了函数的左导数与导函数的左极限这两个概念.

但是, 两种做法对一些分段函数来说答案又是正确的. 这是一种巧合还是一种必然呢? 本文就从这两种做法入手, 讨论一下分段函数在分段点处的导数什么时候可以用这两种方法去求解.

首先, 对于第一种做法来说, 我们有如下的定理:

引理　设 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个左(或右)邻域内有定义, 如果 $f'_-(x_0)$ (或 $f'_+(x_0)$) 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 点左(或右)连续.

证明　因为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)\right]=f(x_0),$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 点左连续.

* 收稿日期: 2008-12-23.

定理 1　设 $f(x)=\begin{cases} g(x), & x<x_0, \\ a, & x=x_0, \\ h(x), & x>x_0. \end{cases}$

(1) 如果 $f(x)$ 在 x_0 点左连续, 且 $g'_-(x_0)$ 存在, 则 $f'_-(x_0)=g'_-(x_0)$;

(2) 如果 $f(x)$ 在 x_0 点右连续, 且 $h'_+(x_0)$ 存在, 则 $f'_+(x_0)=h'_+(x_0)$;

(3) 如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 且 $g'(x_0)$ 与 $h'(x_0)$ 都存在, 则

$$f'_-(x_0)=g'(x_0), \qquad f'_+(x_0)=h'(x_0).$$

证明　(1) 因为 $g'_-(x_0)$ 存在, 所以, $g(x)$ 在 x_0 点左连续, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=g(x_0)$. 又因为 $f(x)$ 在 x_0 点左连续, 所以有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=f(x_0)$. 从而 $g(x_0)=f(x_0)$. 因此,

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'_-(x_0).$$

(2) 同(1) 的证明类似.

(3) 由(1)(2) 可直接得到.

有了这个结论, 那么前述的例子就可以这样做:

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且

$$(x^3)'\big|_{x=0}=3x^2\big|_{x=0}=0, \qquad (x^2)'\big|_{x=0}=2x\big|_{x=0}=0,$$

所以, $f'_+(0)=0, f'_-(0)=0$. 从而 $f'(0)=0$.

由此可见, 对于在理工科高等数学中遇到的一般的分段函数来说, 只要在分段点处连续, 就可以通过左右两边函数在分段点处的导数来求函数的左右导数.

对于第二种做法, 我们也有相应的结论. 在文献[1] 中的中值定理的习题当中有这样的结论:

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 a 点有右导数, 此时, $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$.

受此结论的启发, 对于我们所考虑的分段函数, 有相应的结论:

定理 2　设 $f(x)=\begin{cases} g(x), & x<x_0, \\ a, & x=x_0, \\ h(x), & x>x_0. \end{cases}$

(1) 如果 $f(x)$ 在 x_0 点左连续, 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)$ 存在, 则 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)$;

(2) 如果 $f(x)$ 在 x_0 点右连续, 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)$ 存在, 则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)$;

证明　(2) 由 $\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)$ 存在知, 存在 $\delta>0$, 使得 $h'(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有定义, 因此, 取 $0<\Delta x<\delta$, 则 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上连续, 在 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 内可导. 因此, 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi\in(x_0,x_0+\Delta x)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. 从而,

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0^+}h'(\xi)=\lim_{x\to x_0^+}h'(x).$$

同理可证(1).

前述的例子就可以这样来做:

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因此,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}(x^3)'=\lim_{x\to 0^+}3x^2=0,\qquad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(x^2)'=\lim_{x\to 0^-}2x=0,$$

所以, $f'(0)=0$.

但是, 值得注意的是, 在定理 2 中若去掉左连续(或右连续), 结论是不成立的. 例如,

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ 3, & x\leqslant 1\end{cases}$, 则 $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2)'=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$, 而 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3}{x-1}=\infty$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant 1\\ 2x, x<1\end{cases}$, 则 $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2)'=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$, $\lim\limits_{x\to 1^-}(2x)'=\lim\limits_{x\to 1^-}2=2$, 但 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 因此不可导.

当然, 对于定理 2 来说, $\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)$ 不存在, 并不能保证 $f'_-(x_0)$ 不存在; 同样, $\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)$ 不存在, 也不能保证 $f'_+(x_0)$ 不存在.

由定理 2 可得如下的推论:

推论　如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 且有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x).$$

但是, 值得注意的是, $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在, 不能保证 $f'(x_0)$ 不存在. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处, 虽然 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在, 但是,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

因此, 对于常见的分段函数来说, 要讨论其在分段点处的导数, 先看其在该分段点处是否连续. 如果函数在分段点处不连续, 当然就不可导. 只要函数在分段点处连续, 就可以用此两种方法去考虑.

虽然分段函数在分段点处的导数总可以用定义来求, 本文也不能解决所有分段函数的求导问题, 但对一般常见的分段函数来说, 这两个结论能为我们求出其分段点处的导数提供新的思路. 对初学者容易困惑的地方给出了理论上的依据.

参考文献

[1] 吴智泉. 数学分析(上册)[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1988.
[2] 潘吉勋. 微积分简明教程(上册)[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2007.

(上接第 18 页)

解法二　因为当 $x\to 0$ 时 $\sin x\sim x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

两种方法的区别在于: 法一是对复合函数的外层函数进行整体代换, 而法二是对复合函数的内层函数局部直接代换的, 显示了定理 2 的妙用.

参考文献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学(上)[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2002.
[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(上)[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1991.
[3] 陈新明. 用等价无穷小代换求极限中的一些问题[J]. 高等数学研究, 2008, 11(5): 56－58.