第一章《函数与极限》测试题

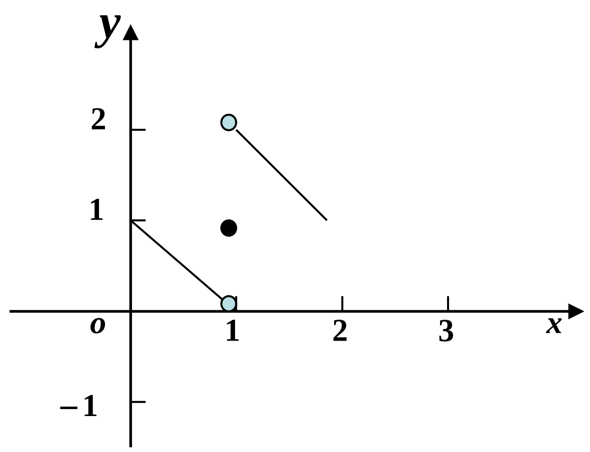
1． 填空题

（1）$e^{\frac{1-x}{1+x}}$；　（2）$\left[\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right]$；　（3）$-4$；　（4）$0$ ．

2．单选题：D C B D

3.

解：



$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(-x+1)=0，\quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x+3)=2$$

左、右极限不相等，故$\lim\limits_{x\to1} f(x)$不存在。

4．求下列极限

（1）解：原式= $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$

（2）　解：原式= $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(1+\dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-(x-1)^2}}\right]^{\frac{-2x}{x^2+1}}=e^{-1}$

（3）

解：

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}\xlongequal[\text{都有理化}]{\text{分子分母}}\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

（4）

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}\xlongequal[\text{同除}\sqrt{x}]{\text{分子分母}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（5） 解： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\cos x}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}}=1$

(因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0,$ 由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$)

(或因为无穷小乘以有界变量还是无穷小，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$

（6）

解 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2+\sin x})}\xlongequal[\text{即得}]{\text{由题(2)}}\frac{\sqrt{2}}{8}$$

（7）

解： $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan3x\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\xlongequal{\text{令}t=\frac{\pi}{6}-x}\lim\limits_{t\to0}\tan3\left(\dfrac{\pi}{6}-t\right)\cdot\tan t$

$$=\lim_{t\to0}\tan\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)\cdot\tan t=\lim_{t\to0}\cot3t\cdot\tan t=\frac{1}{3}\lim_{t\to0}\frac{\cos3t}{\cos t}\cdot\frac{3t}{\sin3t}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{3}$$

（8） 解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2-2x}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2-2x}\right)^{2-2x}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2-2x}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

5.

解： $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{-2x}{1+x+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}\dfrac{-2x}{1+x+x^2}=-2$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0-0}\frac{ax^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\tan x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0-0}\frac{ax^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\frac{1}{2}x^3}=4a$$

由连续性 $f(0)=f(0+0)=f(0-0)$ 知，$b=-2=4a,,a=-\frac{1}{2},b=-2$

6.指出下列函数的间断点及其类型.

（1）解：该初等函数函数孤立的没定义的点 $x_1=0,x_2=-1$ 均为间断点，

$$\because f(0-0)=\lim_{x\to-0}\frac{e^x-e^{\frac{1}{x}}}{e^{-1}-e^{\frac{1}{x}}}=e,\ f(0+0)=\lim_{x\to+0}\frac{e^xe^{-\frac{1}{x}}-1}{e^{-1}e^{-\frac{1}{x}}-1}=1$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{e^{x-\frac{1}{x}}-1}{e^{-1-\frac{1}{x}}-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{-1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{-x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{-1}=2$$

从而 $x_1=0$ 为第一类跳跃间断点，$x_2=-1$ 为第一类可去间断点

（2）解：因为函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处无定义，故 $\boldsymbol{x=0}$ 为函数的间断点，又

$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2/2}{x^2}=\frac{1}{2}$，故 $\boldsymbol{x=0}$ 为第一类间断点（可去间断点）

7. 证：通分后知，分子为零才是方程的根。令

$$f(x)=a_1(x-1)(x-2)(x-3)+a_2x(x-2)(x-3)+a_3x(x-1)(x-3)+a_4x(x-1)(x-2)$$

则有 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=-6a_1<0$，$f(1)=2a_2>0$，

$f(2)=-2a_3<0$，$f(3)=6a_4>0$

由闭区间连续函数的零点定理，$\exists\xi_1\in(0,1),f(\xi_1)=0$，$\exists\xi_2\in(1,2),f(\xi_2)=0$，

$\exists\xi_3\in(2,3),f(\xi_3)=0$，而一元三次函数最多有三个不同的零点，因而方程

$\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x-1}+\frac{a_3}{x-2}+\frac{a_4}{x-3}=0$ 有且仅有三个实根.

8. 证：设 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\varphi(a)\le0,\varphi(b)\ge0$，

若 $\varphi(a)=0$ 或者 $\varphi(b)=0$，则 ξ 点可以取为区间的端点；

否则由由闭区间连续函数的零点定理，$\exists\xi\in(a,b),\varphi(\xi)=0$，

即在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

9. 解：显然函数在 $x=0,x=-1$ 两点没有定义。先讨论求出极限使函数分段表达式，

当 $0<|x|<1$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+3}-x}{x^{2n+1}+1}=-x$

当 $|x|>1$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2-x^{-2n}}{1+x^{-2n-1}}=x^2$

当 $x=1$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+1}=0$

从而 $f(x)=\begin{cases}0,x=1\\-x,0<|x|<1\\x^2,|x|>1\end{cases}$

由于 $f(1)=0\neq f(1+0)=1^2=1,f(1-0)=-1$

故 $x=1$ 为第一类跳跃间断点，该函数的连续区间为 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$

10. 答：(4)、(5)为无穷小量；(1)、(2)、(3)、(6)为无穷大量.

11.

(1). 解： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}}=1+\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}})=1+\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{x}{\sqrt{x}})=1+\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=1$

故 $\sqrt{x}+\sin x$ 为 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小.

(2). 解： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}+x+3x^2}{\sqrt{x}}=1+\lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}})=1$

故 $\sqrt{x}+x+3x^2$ 为 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小.

12. 解： 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2/2)\cdot x^2}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ ， $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x^n}{x^{n+1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot x^n}{x^{n+1}}=1$

即 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$、$(e^{x^2}-1)$ 及分别是 4 阶、2 阶及 $n+1$ 的无穷小

由题意得： $2<n+1<4\quad(n\in N^+)$，即 $n+1=3$，故 $n=2$

13.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-ax+b}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-a+\dfrac{b}{x}\right)=1-a=0$

故 $a=1$；

$$b=-\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

第二章 《导数与微分》自测题

1． 填空题

（1） $\dfrac{1}{2}f'(x_0)$；

（2） $(1+2t)e^{2t}$；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=e^{-1}$；

（4） $y=1+\dfrac{x}{2}$．

2．

解：由可导必连续知 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\varphi(0),a=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}=\varphi'(0)$

3．

解：由已知 $e^3=\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{f(x)}{x}\right)\right]$，

从而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=3-1=2,\ f(x)=2x^2+o(x^2)$，

（1） $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\ f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+o(x^2)-0}{x-0}=0$；

（2） $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$．

4． 求下列导数：

（1） 解：$y=\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x}{1+\tan x}=\frac{\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)}{\cos x\left(1+\tan x\right)}=\frac{\sin 2x}{2}$

从而 $y'=\cos 2x, y''=-2\sin 2x$

（2）解：当$t=1$时 $x^2+5x+4=0,\Rightarrow x_1=-4, x_2=-1; e^y=1, y=0$

$$2x\frac{dx}{dt}+5t\frac{dx}{dt}+5x+12t^2=0, e^y\frac{dy}{dt}+y+\left(t-1\right)\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}=0,$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-12t^2}{2x+5t}, \frac{dy}{dt}=-\frac{yt+1}{t\left(e^y+t-1\right)}, \frac{dy}{dx}=\frac{\left(2x+5t\right)\left(yt+1\right)}{12t^3\left(e^y+t-1\right)}$$

当$t=1, x_1=-4, y=0$时，$\frac{dx}{dx}=-\frac{1}{4}$，当$t=1, x_1=-1, y=0$ 时，$\frac{dx}{dx}=\frac{1}{4}$

5． 解：$y=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}, y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\ln x-\frac{1}{x}\ln(x^2+1)}{\ln^2 x}$，

$$dy=\frac{2x^2\ln x-(x^2+1)\ln(x^2+1)}{x(x^2+1)\ln^2 x}dx$$

6． 解：$f(x)=\frac{1}{2}x^2\sin 2x$

$$f^{(2001)}(x)=\frac{1}{2}x^2\cdot 2^{2001}\sin\left(2x+\frac{2001}{2}\pi\right)+2001\cdot x\cdot 2^{2000}\sin\left(2x+\frac{2000}{2}\pi\right)$$

$$+\frac{2001\cdot 2000}{2}\cdot 1\cdot 2^{1999}\sin\left(2x+\frac{1999}{2}\pi\right)$$

$$f^{(2001)}\left(0\right)=2001000\cdot 2^{1999}\sin\left(500\cdot 2\pi-\frac{1}{2}\pi\right)=-2001000\cdot 2^{1999}$$

7． 解：由已知 $g'(a)=\lim\limits_{xa0}\frac{[f(x)]^2-[f(a)]^2}{x-a}=2f\left(a\right)f'\left(a\right),$

因此 $f'(a)=\frac{g'\left(a\right)}{2f\left(a\right)}$

8. 选择题

(1) 解： $\boldsymbol{f(x)=(x-2)|x|\cdot|x-1|\cdot[(x+1)|x+1|]}$，即 $\boldsymbol{f(x)}$ 有三个分段点

由结论： $\boldsymbol{y=|x|}$ 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处不可导，而 $\boldsymbol{y=x|x|}$ 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处可导，

可知 $\boldsymbol{f(x)}$ 在分段点 $\boldsymbol{x=-1}$ 处可导，而在分段点 $\boldsymbol{x=0}$、 $\boldsymbol{x=1}$ 处不可导．故选 B.

9. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x\tan x}\overset{\text{无穷小}}{\underset{\text{代换}}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(\sin^2 x+\cos x-1))-f(1)}{(\sin^2 x+\cos x-1)}\cdot\frac{(\sin^2 x+\cos x-1)}{x^2}$$

$$\overset{\text{令}\Delta x=\sin^2 x+\cos x-1}{=\!=\!=}f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=f'(1)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$$

第三章《微分中值定理及导数的应用》测试题

1．　填空题

（1）__3___；　（2）$\dfrac{1}{6}$；　（3）$\left[-\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right],[\sqrt{\dfrac{3}{2}},+\infty)$；　（4）$\dfrac{1}{6}$.

2．　求下列函数的极限:

(1)　解：$\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+n\tan\dfrac{1}{n}-1)^{\frac{1}{n\tan\frac{1}{n}-1}}\right]^{n^2\left(n\tan\frac{1}{n}-1\right)}$

先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(x\tan\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\tan t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sec^2 t-1}{3t^2}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1-\cos^2 t}{3t^2\cos^2 t}=\dfrac{1}{3}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$

(2)　解：原式

$$=e\lim_{t\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(t+1)}{t}-1}-1}{t}=e\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)-t}{t^2}=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t+1}-1}{2t}=e\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(t+1)}=-\frac{e}{2}$$

3．　解：$y'=\dfrac{x(1+x)}{1+x^2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$，$x_1=0,x_2=-1$为驻点，

在$(-\infty,-1),(0,+\infty)$内 $y'>0$，在$(-1,0)$内 $y'<0$

从而在$(-\infty,-1],[0,+\infty)$上单调增加，在$[-1,0]$上单调减少，

$y\left(-1\right)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$ 为极大值，$y\left(0\right)=-e^{\frac{\pi}{2}}$ 为极小值。

4．　证：令 $f\left(x\right)=x+2-\dfrac{3}{x}-4\ln x$，则 $f\left(x\right)$ 在 $(0,2]$ 上连续，在 $\left(0,2\right)$ 内可导且

$f'\left(x\right)=1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x}=\dfrac{\left(x-3\right)\left(x-1\right)}{x^2}$，在 $(0,1)$ 内 $f'\left(x\right)>0$，在 $(1,3)$ 内 $f'\left(x\right)<0$，

由此 $f\left(1\right)=0$ 为 $\left(0,2\right)$ 内函数 $f\left(x\right)$ 的极大值且为最大值，

故，在 $0<x<2$ 内，$f\left(x\right)\le f\left(0\right)=0,\Rightarrow 4x\ln x\ge x^2+2x-3$

5．　解：$x_t'=1-\cos t, y_t'=\sin t, \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}, \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-1}{(1-\cos t)^2}, \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-1$

从而在对应 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的曲率 $K=\left.\dfrac{|y''|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

6．　证：令 $g\left(x\right)=xf\left(x\right)$，则 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in\left(a,b\right)$ 使 $\dfrac{g\left(b\right)-g\left(a\right)}{b-a}=g'\left(\xi\right)$，即

$\dfrac{bf\left(b\right)-af\left(a\right)}{b-a}=f\left(\xi\right)+\xi f'\left(\xi\right)$

7．

证：由已知可在 c 点作一阶泰勒展开，

$f\left(x\right)=f\left(c\right)+f'\left(c\right)\left(x-c\right)+\dfrac{1}{2}f''\left(\xi\right)\left(x-c\right)^2$

令 $x=0$ 有 $f\left(0\right)=f\left(c\right)+f'\left(c\right)\left(-c\right)+\dfrac{1}{2}f''\left(\xi_1\right)\left(-c\right)^2, \xi_1\in\left(0,c\right)$

令 $x=1$ 有 $f\left(1\right)=f\left(c\right)+f'\left(c\right)\left(1-c\right)+\dfrac{1}{2}f''\left(\xi_2\right)\left(1-c\right)^2, \xi_2\in\left(c,1\right)$

因而 $f\left(1\right)-f\left(0\right)=f'\left(c\right)+\dfrac{1}{2}f''\left(\xi_2\right)\left(1-c\right)^2-\dfrac{1}{2}f''\left(\xi_1\right)c^2$，

$\left|f'\left(c\right)\right|\le 2a+\dfrac{b}{2}\left[1-2c\left(1-c\right)\right]\le 2a+\dfrac{b}{2}$