第一章 函数与极限

作业 1　函 数

1．填空题

（1）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\arcsin\dfrac{x+1}{3}$ 的定义域为$\underline{[-4,-1)\cup(1,2]}$；

（2）设 $f\left(\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)=x\ln x$，则 $f(x)=\underline{\dfrac{1-t}{1+t}e^{\frac{1-t}{1+t}}}$；

（3）设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$， $f[\varphi(x)]=1-3x$，且 $\varphi(x)\geq 0$，则 $\varphi(x)=\underline{\sqrt{\ln(1-3x)}}$，

（4）函数 $y=\cos\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{3}$ 的周期为$\underline{12\pi}$；

（5）函数 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数 $y=\underline{e^{x-1}-2}$；

（6）将函数 $y=2x+|2-x|$ 用分段函数表示为 $y=\underline{\begin{cases}3x-2, x\geq 2\\ x+2, x<2\end{cases}}$.

2．设函数 $y=f(x)$ 的定义域为［0,2］,求下列函数的定义域:

（1） $y=f(x^2)$；

解：由 $0\leq x^2\leq 2$，知该函数的定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

（2） $y=f(x+a)+f(x-a)$，（$a>0$）;

解：由$\begin{cases}0\leq x+a\leq 2\\ 0\leq x-a\leq 2\end{cases}$，知$\begin{cases}-a\leq x\leq 2-a\\ a\leq x\leq 2+a\end{cases}$，从而该函数的定义域：当 $0<a\leq 1$ 时为$[a,2-a]$，否则为空集

（3） $y=f(\operatorname{sgn} x)$，其中 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

解：由 $0\le \operatorname{sgn} x\le 2$，知该函数的定义域为 $[0,+\infty)$

3．判定下列函数的奇偶性：

（1） $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+a^2})$；

解：由 $f(-x)=\log_a\left(-x+\sqrt{(-x)^2+a^2}\right)=\log_a\dfrac{a^2}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=2-f(x)$，

知该函数非奇非偶

（2） $f(x)=|x\sin^3 x|\mathrm{e}^{\cos x}$.

解：由 $f(-x)=\left|-x\sin^3(-x)\right|e^{\cos(-x)}=\left|x\sin^3 x\right|e^{\cos x}=f(x)$，

知该函数为偶

4．设 $f(x)=\begin{cases}2-\sin x, & x\le 0\\ 2+\ln(1+x), & x>0\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

解： $f[\varphi(x)]=\begin{cases}2-\sin[\varphi(x)], & [\varphi(x)]\le 0\\ 2+\ln\{1+[\varphi(x)]\}, & [\varphi(x)]>0\end{cases}=\begin{cases}2+\sin x, x\ge 0\\ 2+\ln\left(1+x^2\right), x<0\end{cases}$

5．设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\le x\le 2\\ 10x-12, & x>2\end{cases}$，求 $f(x)$ 的反函数.

解：因为，当 $x<-1$ 时 $y=1-2x^2<-1,2x^2=1-y,x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$

当 $-1\le x\le 2$ 时 $y=x^3\in[-1,8],x=\sqrt[3]{y}$；当 $x>2$ 时 $y=10x-12>8,x=\dfrac{y+12}{10}$

故反函数为 $y==\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\le x\le 8\\ \dfrac{x+12}{10}, & x>8\end{cases}$

6．证明函数 $f(x)=|1-3x|$ 在其定义域内无界.

证明：由无界的定义，$\forall M>0,\exists x_0\in D$，使 $|f(x_0)|=|1-3x_0|>M$

因为 $|3x_0|-1\le|1-3x_0|\le|3x_0|+1$，只要 $|3x_0|-1>M$，即 $|x_0|>\dfrac{M+1}{3}$

因而只要取 $x_0=\dfrac{M+2}{3}$ 即有 $|f(x_0)|>3\dfrac{M+1}{3}-1=M$

从而 $f(x)=|1-3x|$ 在其定义域 R 内无界

作业 2　　数列的极限

1．用数列极限的“$\varepsilon - N$”定义证明下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{n^2-n}$=4；

证明：因为$\left|x_n-4\right|=\left|\dfrac{4n^2}{n^2-n}-4\right|=\dfrac{4}{n-1}<\dfrac{8}{n}$

$\forall\varepsilon>0$，要$\left|x_n-4\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{8}{n}<\varepsilon,n>\dfrac{8}{\varepsilon}$

取$N=\left[2+\dfrac{8}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时$n\ge N+1>\dfrac{8}{\varepsilon}$

从而$\left|x_n-4\right|<\varepsilon$，由定义$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{n^2-n}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$=0；

证明：因为$\left|x_n-0\right|=\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\forall\varepsilon>0$，要$\left|x_n-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon,n>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$

取$N=\left[1+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$，则当$n>N$时$n\ge N+1>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$

从而$\left|x_n-0\right|<\varepsilon$，由定义$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$=0.

证明：因为，当$n>6$　时，

$$\left(1+2\right)^n=1+n\cdot 2+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}2^2+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}2^3+\cdots>\frac{n^3}{2}$$

$$\left|x_n-0\right|=\frac{n^2}{3^n}<\frac{2}{n}$$

$\forall\varepsilon>0$，要$\left|x_n-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{2}{n}<\varepsilon,n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，取$N=\left[6+\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时

$n \geq N+1 > \dfrac{2}{\varepsilon}$，从而$|x_n - 0| < \varepsilon$，由定义$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^n}=0$

2．证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = |A|$，并举例说明其逆命题不成立.

证明：由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = A$知$\forall\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时$|u_n - A|<\varepsilon$，

而$\big||u_n|-|A|\big| \leq |u_n - A|$，从而$\big||u_n|-|A|\big|<\varepsilon$，由定义$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = |A|$

逆命题不成立，例如：$u_n = (-1)^n$，虽然$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$不存在

3．设数列$\{u_n\}$有界，而$\lim\limits_{n\to\infty}v_n = 0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n v_n = 0$.

证：$\because\{u_n\}$有界，所以存在$M>0, |u_n| \leq M$，

又$\lim\limits_{n\to\infty}v_n = 0$，$\forall\varepsilon>0$，对于$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M}$存在$N>0$，当$n>N$时$|v_n|<\varepsilon_1$，

从而$|u_n v_n| = |u_n||v_n| < M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$，由定义$\lim\limits_{n\to\infty}u_n v_n = 0$

4．设数列$\{u_n\}$，$\{v_n\}$有相同的极限为A，求证：若. $x_n = u_n - v_n$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 0$.

证：由已知$\forall\varepsilon>0$，对于$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$存在$N_1>0$，当$n>N_1$时$|u_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，存在$N_2>0$，

当$n>N_2$时$|v_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，

$|x_n - 0| = |u_n - A - (v_n - A)| \leq |u_n - A| + |v_n - A| < \varepsilon$，由定义$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 0$

5．若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = A > 0$，

（1）证明存在$N>0$，当$n>N$时，有$u_n > \dfrac{A}{2} > 0$；

（2）用数列定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

证：（1）由已知，对于$\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$存在$N>0$，当$n>N$时$|u_n - A| < \dfrac{A}{2}$

即$-\dfrac{A}{2} < u_n - A < \dfrac{A}{2}, \dfrac{A}{2} < u_n < \dfrac{3A}{2}$，从而当$n>N$时，有$u_n > \dfrac{A}{2} > 0$

（2）由（1）$\exists N_1 > 0$，当$n>N_1$时，有$u_n > \dfrac{A}{2} > 0, 0 < \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{2}{A}$，

从而$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1\right|=\dfrac{|u_{n+1}-u_n|}{|u_n|}\le\dfrac{|u_{n+1}-A|+|u_n-A|}{|u_n|}<\dfrac{2}{A}\left(|u_{n+1}-A|+|u_n-A|\right)$

又$\forall\varepsilon>0$，对于$\varepsilon_1=\dfrac{A\varepsilon}{4}$存在$N_2>0$，当$n>N_2$时$|u_n-A|<\dfrac{A\varepsilon}{4}$

因此$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1\right|<\dfrac{2}{A}\cdot 2\cdot\dfrac{A\varepsilon}{4}=\varepsilon$，由定义$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$

作业 3　函数的极限

1．根据函数极限定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)=2$；

证：不妨设$x>0$，$\left|\sqrt{x^2+4x+5}-x-2\right|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}\right|<\dfrac{1}{x}$

$\forall\varepsilon>0$，要$\left|\sqrt{x^2+4x+5}-x-2\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{x}<\varepsilon, x>\dfrac{1}{\varepsilon}$

取$X=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$，当$x>X$时一定有$\left|\sqrt{x^2+4x+5}-x-2\right|<\varepsilon$

由定义$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)=2$

（2）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-1}=1$.

证：不妨设$|x-2|<\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}<x-1<\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{|x-1|}<2$，

这时$\left|\dfrac{1}{x-1}-1\right|=\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|<2|x-2|$

$\forall\varepsilon>0$，要$\left|\dfrac{1}{x-1}-1\right|<\varepsilon$，只要$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，取$\delta=\min\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{2}\}>0$，

当$0<|x-2|<\delta$时一定有$\left|\dfrac{1}{x-1}-1\right|<\varepsilon$，由定义$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-1}=1$

2．已知$\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$，证明

（1）　存在$\delta_1>0$，使得当$0<|x-a|<\delta_1$时，　$f(x)>\dfrac{5}{6}$；

（2）　对任意取定的$K\in(0,1)$，存在δ_2，使得当$0<|x-a|<\delta_2$时，

$f(x) > K$.

证：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$，（1）对 $\varepsilon=\dfrac{1}{6}$ 存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时，$\left|f(x)-1\right|<\dfrac{1}{6}, f(x)>1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

(2) $\forall K\in(0,1), 1-K>0$, 对 $\varepsilon=1-K>0$ 存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时，$\left|f(x)-1\right|<1-K, f(x)>1-(1-K)=K$

3.（1）设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<2\\ 0 & ,x=2\\ 3x-1 & ,x>2\end{cases}$，研究 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的左极限、右极限及当 $x\to 2$ 时的极限；

（2）设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\le 1\\ x, & 1<x<2\\ 2x-2, & x\ge 2\end{cases}$，研究极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ 是否存在，若存在将它求出来.

解：（1）$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(2x+1)=5, \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(3x-1)=5$

从而 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$

（2）$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=1, f(1-0)=1^2+2-3=0$，故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在，

$f(2-0)=2, f(2+0)=2\cdot 2-2=2, \lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2\cdot 3-2=4$

4. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，证明存在 a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta_0)$，使得 $f(x)$ 在该邻域内是有界的.

证：$\because \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，由定义对 $\varepsilon=1, \exists\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(a,\delta_0)$ 时，$\left|f(x)\right|-|A|\le\left|f(x)-A\right|<1, \left|f(x)\right|<|A|+1$，从而 $f(x)$ 在该邻域内是有界的.

5. 如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在．证明此极限值唯一.

证：假设极限不惟一，则至少存在两个数 $A\ne B$，使 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$ 同时成立，由定义 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，且

$\exists\delta_2>0$，当 $x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_2)$ 时 $|f(x)-B|<\varepsilon$ 。

从而 $|A-B|\le|f(x)-A|+|f(x)-B|\le 2\varepsilon$ 矛盾，从而此极限值惟一。

作业 4　无穷小与无穷大

1．根据无穷小的定义证明：

（1）当 $n\to\infty$ 时，$u_n=\dfrac{n!}{n^n}$ 是无穷小；

证：由于 $|u_n|=\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n}\le\dfrac{1}{n}$

从而 $\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时 $n\ge N+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$，$|u_n|<\varepsilon$

由定义当 $n\to\infty$ 时，$u_n=\dfrac{n!}{n^n}$ 是无穷小

（2）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$ 是无穷小.

证：由于 $|f(x)|=x^2\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\le x^2$

对 $\forall\varepsilon>0$，要 $|f(x)|<\varepsilon$，只要 $x^2<\varepsilon,|x|<\sqrt{\varepsilon}$

取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时 $|f(x)|<\varepsilon$

由定义当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$ 是无穷小

2．根据无穷大的定义证明：当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$ 是无穷大.

证：$|f(x)|=\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|=\left|\dfrac{1}{x}+2\right|\ge\left|\dfrac{1}{x}\right|-2$

$\forall M>0$，要 $|f(x)|>M$，只要 $\left|\dfrac{1}{x}\right|-2>M,|x|<\dfrac{1}{M+2}$

取 $\delta=\dfrac{1}{M+2}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，$|f(x)|\ge\left|\dfrac{1}{x}\right|-2>M$

由定义当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$ 是无穷大

3．当 $x \to 1$ 时，将 $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+1}$ 分解为一个常数与一个无穷小之和.

证：$\because \lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=2$，$f(x)=2+\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+1}-2=2+\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$

4．求下列极限并说明理由.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x(1+\mathrm{e}^x)}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(1+\mathrm{e}^x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{e^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\right)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x(1+\mathrm{e}^x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)=0$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x(1+\mathrm{e}^x)}=0$

（2）$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)e^{-\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1-1}{0+1}=0$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}=0$

5．设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to\infty$，$g(x)\to A\quad(A\neq 0\text{为常数})$．试证明下列各式：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$；　　（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}=1$.

证：（1）$\because \left|f(x)+g(x)\right|\geq\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|$，又由已知，对 $\varepsilon=1,\exists\delta_1>0$，当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta_1$ 时，$\left|g(x)\right|-\left|A\right|\leq\left|g\left(x\right)-A\right|<1,\left|g\left(x\right)<1+\left|A\right|\right|$；

$\forall M>0$，对 $M_1=M+1+A,\exists\delta_2>0$，当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta_2$ 时，$\left|f(x)\right|>M_1$。

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，$\left|f(x)+g\left(x\right)\right|>M$，由定义，得证

（2）$\because\left|\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}-1\right|=\left|\dfrac{-g(x)}{f(x)+g(x)}\right|=\dfrac{\left|g\left(x\right)\right|}{\left|f(x)+g(x)\right|}$，

由已知，对 $\varepsilon=1,\exists\delta_1>0$，当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta_1$ 时，

$\left|g(x)\right|-\left|A\right|\leq\left|g\left(x\right)-A\right|<1,\left|g\left(x\right)<1+\left|A\right|\right|$；

$\forall\varepsilon>0$，对 $M_2=\dfrac{1+|A|}{\varepsilon},\exists\delta_3>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_3$ 时，$\left|f(x)+g(x)\right|>M_2$。

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_3\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}-1\right|<\dfrac{1+|A|}{M_2}=\varepsilon$，由定义，得证

6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$（$A$ 为实数或无穷），而 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，试问当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 必为无穷小吗？并说明理由.

答：当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 未必为无穷小。例如：当 $A=\infty$ 时，若 $f(x)=1$；

若 A 为实数，由有极限的量与无穷小量之积，可得当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 必为无穷小

7．证明：$f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

证明:因为对 $\forall M>0,\exists x_0=2\pi[M]+2\pi,f(x_0)>M$，所以由定义 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界。

$f(x)$ 不是无穷大，因为对 $\forall M>0,\exists x_1=\pm2\pi[M]\pm\dfrac{\pi}{2},f(x_1)=0$，从而无穷大量的定义不能成立。

院 系　　　　　　　班级　　　　　　　　姓 名　　　　　　作业编号

作业 5　极限的运算法则

1．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\dfrac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\sqrt{9+2x}+5}=\dfrac{12}{5}$

（3）$\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-3x+2})$

解：原式$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-4x+3}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-4+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=-2$

（4）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(4x^2-5)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(4-\dfrac{5}{x^2})^3(3-\dfrac{2}{x})^4}{(6+\dfrac{7}{x^2})^5}=\dfrac{2}{3}$

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+4x+5}-x-2)$

解：原式$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}$

（6）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$

解：

原式$=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right]$

$=-2\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0$

2．确定常数 a,b，使得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=4$.

解：$\because \lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\left[(a+b)x+b\right]=\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}\right)\dfrac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=a+2b=0$

从而 $a=-2b$

因此 $4=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left[(-2b+b)x+b\right]\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{2x-2}=-\dfrac{b}{2}\left(2\sqrt{4}\right),b=-2,a=4$

3．设 $f(x)=\dfrac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{(x-a)(x-1)}$ 满足

（1）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，（2）$\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$（$A\neq0$ 为常数）；

试确定常数 a,b 的值.

解：由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$ 知 $\lim\limits_{x\to0}(x-a)(x-1)=0,\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)\neq0$

从而 $a=0,b\neq0,b\neq1$

又 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$（$A\neq0$ 为常数），

从而 $A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(1+3x-b^2\right)(x-b)}{(1-0)(x-1)(\sqrt{1+3x}+b)},\Rightarrow b^2-1=3,b=2$（$b=-2$ 不合题意舍去）

4．确定常数 a,b 的值，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2-6x+5}-ax-b)=0$，并求出极限

$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{2x^2-6x+5}-ax-b)$ 的值.

解：$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0,\therefore 0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}(\sqrt{2x^2-6x+5}-ax-b)=\sqrt{2}-a,\Rightarrow a=\sqrt{2}$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2-6x+5}-\sqrt{2}x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x+5}{\sqrt{2x^2-6x+5}+\sqrt{2}x}=\dfrac{-6}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{2x^2-6x+5}-\sqrt{2}x+\frac{3}{\sqrt{2}})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{2}-\frac{3}{\sqrt{2}x}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

作业 6　极限存在准则与重要极限

1．利用夹逼准则求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$．

解：$\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$

从而由夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$

2．设数列$\{x_n\}$满足：$0<x_1<\pi$，且$x_{n+1}=\sin x_n$（$n=1,2,\cdots$）,证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求出此极限值．

解：由已知$0<x_1<\pi,\therefore 0<x_2=\sin x_1<1$。设$0<x_k<1$，则$0<x_{k+1}=\sin x_k<1$

从而数列$\{x_n\}$有界，又$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$从而数列$\{x_n\}$单调减少

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则$A=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin A$，从而$A=0$

3．设n为任意自然数，

（1）　令$\lambda_n=\sqrt[n]{n}-1$，对$(1+\lambda_n)^n$利用二项式定理证明：当$n\ge 2$时，

$0<\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$成立；

（2）　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$．

证：（1）显然$\lambda_n>0$，否则$\lambda_n=\sqrt[n]{n}-1<0,\sqrt[n]{n}<1,n<1$会导致矛盾。

从而$n=\left(1+\lambda_n\right)^n=1+n\lambda_n+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n<\frac{n\left(n-1\right)}{2}\lambda_n^2,\frac{n-1}{2}\lambda_n^2>1$

因此$0<\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\lambda_n\right)=1$

4．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sin 3x}{3x}\dfrac{3}{2\cos x}\right)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}=1$

（2）$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$（$n,m$ 为自然数）

解：设 $t=\pi-x$，则

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin m(\pi-t)}{\sin n(\pi-t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(-1)^{m-1}\sin mt}{(-1)^{n-1}mt}\dfrac{nt}{\sin nt}\dfrac{m}{n}=(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sqrt{2}\sin x}{x}=-\sqrt{2}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\dfrac{x}{2\sin x}=\dfrac{1}{2}$

（5）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

解：原式$=\lim\limits_{x\to \infty}\left\{\left(1+\dfrac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1}}\right\}^{\frac{-1}{1+x}x}=e^{-1}$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{2x}}=e$

5．设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$（$n=1,2,\cdots$），求 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$.

解：由 $0<x_1<3$ 知 $3-x_n>0$，$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\dfrac{x_1+(3-x_1)}{2}=\dfrac{3}{2}$

设 $0<x_k\le\dfrac{3}{2}$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\le\dfrac{x_k+(3-x_k)}{2}=\dfrac{3}{2}$

而 $x_{k+1}-x_k=\sqrt{x_k(3-x_k)}-x_k=\dfrac{x_k(3-2x_k)}{\sqrt{x_k(3-x_k)}+x_k}\geq 0$，

因此数列单调有界，必有极限，设 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$

则 $A=\lim\limits_{x\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{A(3-A)},A^2-3A-A^2,A=\dfrac{3}{2}$ （A=0 不合题意舍去）

作业 7 无穷小的比较

1． 已知当 $x\to\pi$ 时，（$\sqrt{4+3\tan x}-2$）～$A(x-\pi)^K$，试确定常数 A 和 K .

解：设 $t=\pi-x$，则 $x=t+\pi,\sqrt{4+3\tan x}-2=\sqrt{4+3\tan t}-2=\dfrac{3\tan t}{\sqrt{4+3\tan t}+2}$

由于 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{4-3\tan t}-2}{t}=\dfrac{3}{4}$，从而 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{4-3\tan t}-2}{\dfrac{3}{4}t}=1$

因此 $A=\dfrac{3}{4},K=1$

2． 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]}{2^x-1}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解：$\because x\to 0$ 时，$2^x-1\sim x\ln 2,\therefore \lim\limits_{x\to 0}\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0,$

从而 $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2\ln 2}$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=3\ln 2$

3． 当 $x\to 0$ 时，确定下列无穷小关于 x 的阶数：

（1）$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$

解：原式=$\dfrac{tanx-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\dfrac{tanx(1-\cos x)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tanx(1-\cos x)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{1}{4}$

故当 $x\to 0$ 时，该无穷小关于 x 的阶数为 3

（2）$(7x+8x^{3/5})^{\frac{1}{3}}$

解：原式=$\left[x^{3/5}(7x^{\frac{2}{5}}+8)\right]^{\frac{1}{3}}=x^{1/5}(7x^{\frac{2}{5}}+8)^{\frac{1}{3}},\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(7x+8x^{3/5})^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{5}}}=2$

故当 $x\to 0$ 时，该无穷小关于 x 的阶数为 $\dfrac{1}{5}$

4． 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)\ln(1-2x)}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\sin x(-2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{8(-2x)x}=-\dfrac{1}{16}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin^2 x)-x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}-x^2)-2x}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{-x}\sin^2 x)}{\ln(1-\mathrm{e}^{-2x}x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}\sin^2 x}{-\mathrm{e}^{-2x}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-x^2}=-1$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{\ln(\cos x)}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln(1+x)}-1}{\ln(1+\cos x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\left(1+x\right)}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\dfrac{x^2}{2}}=-2$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-x^2}}{4x^2-3x^3}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1+1-\sqrt[3]{1-x^2}}{4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{4x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{4x^2}=\dfrac{1}{12}$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{\ln(1+x-1)}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{x-1}{1-x}}=e^{-1}$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{3+2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin\pi x}{|x|}$．

解：$\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{3-2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{3+2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin\pi x}{|x|}=\dfrac{3-0}{3+0}\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\pi x}{-x}=-\pi$，

$$\lim_{x\to+0}\frac{3-2e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin\pi x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{3e^{-\frac{1}{x}}-2}{3e^{-\frac{1}{x}}+2}\cdot\frac{\pi x}{x}=-\pi$$

原式$=-\pi$

作业 8　函数的连续性

1. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且对一切 $x_1,x_2\in R$ 适合 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

证：令 $x_1=x_2=0$，得 $f(0)=f(0)+f(0), f\left(0\right)=0$

再令 $x_1=x\in R, x_2=\Delta x$，得 $f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x)$

又，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x)+f(\Delta x)\right]=f\left(x\right)$

从而 $f(x)$ 在任点 $x\in R$ 处连续，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

2. 确定常数 a,b 的值，使得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x-1}, & x\neq 1\\ -1, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续.

解：由已知，$-1=f(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b-4}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{ax+b}+2\right)}$

从而 $\lim\limits_{x\to 1}ax+b-4=0, a+b=4, b-4=-a, b=4-a$

因此 $-1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax-a}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{ax+b}+2\right)}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}+2}=\dfrac{a}{4}, a=-4, b=8$

3. 指出下列函数的间断点及其类型：

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$；

解：该初等函数函数孤立的没定义的点 $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$ 均为间断点，

$\because f(0-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{x^2-x}{-x(x^2-1)}=-1,\ f(0+0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x^2-x}{x(x^2-1)}=1,$

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-x}{x(x^2-1)}=\dfrac{1}{2},\ f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-x}{x(x^2-1)}=\dfrac{1}{2},$

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=+\infty,\ f(-1+0)=\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-x}{-x(x^2-1)}=-\infty,$$

从而 $x_1=0$ 为第一类跳跃间断点，$x_2=1$ 为第一类可去间断点，$x_3=-1$ 为第二类无穷型间断点

（2）$f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{\ln|\dfrac{x^2-5}{4}|}$.

解：$x_1=\sqrt{5},x_2=-\sqrt{5},x_3=1,x_4=-1,x_5=3,x_6=-3$ 均为该初等函数函数孤立的没定义的点，因而均为间断点，

$\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}f(x)=\lim\limits_{x\to-\sqrt{5}}f(x)=0,$ 因分母为无穷大量而分子趋于有限数。

$\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty,$ 因分母趋向于零而分子趋于有限数。

$$f(3-0)=\lim_{x\to3-0}\frac{(x-3)(x+1)}{\ln\left(\frac{4+x^2-9}{4}\right)}=\lim_{x\to3-0}\frac{(x-3)(x+1)}{\frac{(x-3)(x+3)}{4}}=\frac{8}{3}=f(3+0)$$

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{(x-3)(x+1)}{\ln\left(\frac{4+1-x^2}{4}\right)}=\lim_{x\to3-0}\frac{(x-3)(x+1)}{\frac{(1+x)(1-x)}{4}}=-8=f(-1+0)$$

从而 $x_1=\sqrt{5},x_2=-\sqrt{5},x_4=-1,x_5=3$ 为第一类可去间断点，$x_3=1,x_6=-3$ 为第二类无穷型间断点

4．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x}{x(1+\cos x)}=\dfrac{3}{1+\cos0}=\dfrac{3}{2}$

（2）$\lim\limits_{x\to\pi}(\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{4})^{\csc x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\pi}(2\cos^2\dfrac{x}{4})^{\frac{1}{2\sin x}}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[(1+\cos\dfrac{x}{2})^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{1}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}}=e^{\frac{1}{4}}$

5．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：存在点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=f(c+\frac{b-a}{2})$.

证：设 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2})$，则 $g(x)$ 在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上连续

且 $g(a)=f(a)-f(\frac{a+b}{2}),g\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(\frac{a+b}{2})-f(b),$

$\because f(a)=f(b)$，若 $g(a)=0$，则 $g\left(\frac{a+b}{2}\right)=0,c=\frac{a+b}{2}\in(a,b)$

若 $g(a)\neq 0$，则 $g(a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，由零点定理，$\exists c\in(a,b),g(c)=0,$

从而有 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=f(c+\frac{b-a}{2})$.

6．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在点 ξ，使得 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$.

证：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以在 $[a,b]$ 上连续可取得最大值和最小值，设它们为 M,m，则对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，有 $m\le f(x_i)\le M,i=1,2,\cdots,n$

从而 $nm\le\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le nM,m\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le M,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 介于两个最值之间，

由闭区间上连续函数的介值定理，在 $[a,b]$ 上至少存在点 ξ，使得 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$.

第一章《函数与极限》测试题

1．填空题

（1）若 $f\left(\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}\right)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)=\underline{e^{\frac{1-x}{1+x}}}$；

（2）函数 $f(x)$ 的定义域为$[a,b]$，则 $f(2x-1)$ 的定义域是$\underline{\left[\dfrac{a+1}{2},\dfrac{b+1}{2}\right]}$；

（3）若 $x\to 0$ 时，无穷小 $\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 与 $a\sin^2\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ 等价，则常数 $a=\underline{-4}$；

（4）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=\underline{\ 0\ }$.

2．单选题：

（1）当 $x\to 0$ 时时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　D　）

（A）无穷小；　　（B）无穷大；

（C）有界的，但不是无穷小；　　（D）无界的，但不是无穷大.

（2）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　C　）

（A）$a<0,b<0$；　　（B）$a>0,b>0$；

（C）$a\ge 0,b<0$；　　（D）$a\le 0,b>0$.

（3）设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时（　B　）

（A）$f(x)$ 与 x 是等价无穷小；　　（B）$f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小；

（C）$f(x)$ 比 x 高阶无穷小；　　（D）$f(x)$ 比 x 低阶无穷小.

（4）设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

为（　D　）

（A）存在且等于零；　　　　（B）存在但不一定等于零；

（C）一定不存在；　　　　（D）不一定存在．

3．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$；

解：原式= $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$

（2）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^{\frac{2x}{(x-1)^2}}$.

解：原式= $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(1+\dfrac{-\left(x-1\right)^2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-(x-1)^2}}\right]^{\frac{-2x}{x^2+1}}=e^{-1}$

4. 确定 a,b 的值，使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0\\ b, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}, & x>0\end{cases}$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},+\infty)$ 内

连续.

解：$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{-2x}{1+x+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}\dfrac{-2x}{1+x+x^2}=-2$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0-0}\frac{ax^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\tan x\left(1-\cos x\right)}=\lim_{x\to0-0}\frac{ax^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\frac{1}{2}x^3}=4a$$

由连续性 $f\left(0\right)=f\left(0+0\right)=f\left(0-0\right)$ 知，$b=-2=4a,,a=-\dfrac{1}{2},b=-2$

5．指出函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点及其类型.

解：该初等函数函数孤立的没定义的点 $x_1=0,x_2=-1$ 均为间断点，

$$\because\ f(0-0)=\lim_{x\to -0}\frac{e^{x}-e^{\frac{1}{x}}}{e^{-1}-e^{\frac{1}{x}}}=e,\ f(0+0)=\lim_{x\to +0}\frac{e^{x}e^{-\frac{1}{x}}-1}{e^{-1}e^{-\frac{1}{x}}-1}=1$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x-\frac{1}{x}}-1}{e^{-1-\frac{1}{x}}-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x-\dfrac{1}{x}}{-1-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to -1}\frac{x^{2}-1}{-x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{-1}=2$$

从而 $x_1=0$ 为第一类跳跃间断点， $x_2=-1$ 为第一类可去间断点

6．设 a_1,a_2,a_3,a_4 为正常数，证明方程 $\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x-1}+\dfrac{a_3}{x-2}+\dfrac{a_4}{x-3}=0$ 有且仅有三个实根.

证：通分后知，分子为零才是方程的根。令

$$f\left(x\right)=a_1\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)+a_2x\left(x-2\right)\left(x-3\right)+a_3x\left(x-1\right)\left(x-3\right)+a_4x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$$

则有 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续，且 $f\left(0\right)=-6a_1<0$ ， $f\left(1\right)=2a_2>0$ ， $f\left(2\right)=-2a_3<0$ ， $f\left(3\right)=6a_4>0$

由闭区间连续函数的零点定理，$\exists\xi_1\in\left(0,1\right),f\left(\xi_1\right)=0$ ，$\exists\xi_2\in\left(1,2\right),f\left(\xi_2\right)=0$ ，$\exists\xi_3\in\left(2,3\right),f\left(\xi_3\right)=0$ ，而一元三次函数最多有三个不同的零点，因而方程 $\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x-1}+\dfrac{a_3}{x-2}+\dfrac{a_4}{x-3}=0$ 有且仅有三个实根.

7．设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $f(a)\le g(a)$ ， $f(b)\ge g(b)$ ，证明在 $\left[a,b\right]$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

证：设 $\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ ，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\varphi(a)\le 0,\varphi(b)\ge 0$ ，

若 $\varphi(a)=0$ 或者 $\varphi(b)=0$ ，则 ξ 点可以取为区间的端点；

否则由由闭区间连续函数的零点定理，$\exists\xi\in\left(a,b\right),\varphi\left(\xi\right)=0$ ，

即在 $\left[a,b\right]$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

8．求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^{n}+x^{-n-1}}$ 的连续区间.

解：显然函数在 $x=0,x=-1$ 两点没有定义。先讨论求出极限使函数分段表达式，

当$0<|x|<1$时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+3}-x}{x^{2n+1}+1}=-x$

当$|x|>1$时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2}-x^{-2n}}{1+x^{-2n-1}}=x^2$

当$x=1$时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+1}=0$

从而 $f(x)=\begin{cases}0, x=1\\ -x, 0<|x|<1\\ x^2, |x|>1\end{cases}$

由于 $f\left(1\right)=0\neq f\left(1+0\right)=1^2=1, f\left(1-0\right)=-1$

故$x=1$为第一类跳跃间断点，该函数的连续区间为$\left(-\infty,-1\right),\left(-1,0\right),\left(0,1\right),\left(1,+\infty\right)$