院 系　　　　　　　　班级　　　　　　　　姓 名　　　　　　　作业编号

第八章　重积分

作业 9　二重积分的概念与性质

1．利用二重积分的性质,比较下列积分的大小：

（1）$\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$

(a)D 是由直线 $x=0, y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域；

(b) D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成的闭区域.

解：(a)因为在区域内部有 $x+y<1, \left(x+y\right)^2>\left(x+y\right)^3$，从而 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 大

(b)因为在区域内部有 $x+y>1, \left(x+y\right)^2<\left(x+y\right)^3$，从而 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$ 大

（2）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{2xy}\mathrm{d}\sigma$

(a)D 是矩形闭区域：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$；

(b) D 是矩形闭区域：$-1\le x\le 0, 0\le y\le 1$.

解：(a)因为在区域内部有 $0<xy<2xy, 1<e^{xy}<e^{2xy}$，从而 $\iint\limits_D e^{2xy}\mathrm{d}\sigma$ 大

(b)因为在区域内部有 $0>xy>2xy, 1>e^{xy}>e^{2xy}>0$，从而 $\iint\limits_D e^{xy}\mathrm{d}\sigma$ 大

（3）$\iiint\limits_\Omega \ln(1+x+y+z)\mathrm{d}v$ 与 $\iiint\limits_\Omega \ln^2(1+x+y+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由三个坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的闭区域.

解：因为在区域内部有 $1<1+x+y+z<2<e, 0<\ln\left(1+x+y+z\right)$，从而 $0<\ln\left(1+x+y+z\right)<\ln^2\left(1+x+y+z\right)$，因此 $\iiint\limits_\Omega \ln(1+x+y+z)\mathrm{d}v$ 大

2．利用积分的性质，估计下列各积分的值：

（1）$I=\iint\limits_{D}xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是矩形闭区域：$0\le x\le 1,0\le y\le 1$；

解：因为在区域内部有$1<xy(x+y)<2,\sigma\left(D\right)=1$，因此$0<I<2$

（2）$I=\iiint\limits_{\Omega}\ln(1+x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\le 1$；

解：因为在区域内部有$1<\ln(1+x^2+y^2+z^2)<\ln 2,V\left(\Omega\right)=\dfrac{4\pi}{3}$，

因此$0<I<\dfrac{4\pi}{3}\ln 2$

（3）$I=\int_{L}(x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$位于第一象限的部分；

解：因为在曲线上积分，

不妨设$x=\cos t,y=\sin t,-\sqrt{2}\le x+y=\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$，

$s\left(L\right)=2\pi$，

因此$-2\sqrt{2}\pi<I<2\sqrt{2}\pi$

（4）$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0,z=1$所截下的部分．

解：因为在曲面上积分，从而$\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\le 1$，$S\left(\Sigma\right)=2\pi$，

因此$\pi<I<2\pi$

作业 10 二重积分的计算

1．试将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为两种不同的二次积分，其中区域 D 分别为：

（1）由直线 $y=x, x=3$ 及双曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域；

解：作图得知区域 D 可以表示为：$1\le x\le 3, \frac{1}{x}\le y\le x$，

得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_1^3 dx\int_{1/x}^{x} f(x,y)dy$

区域 D 也可以分块表示为：$\frac{1}{3}\le y\le 1, \frac{1}{y}\le x\le 3; 1\le y\le 3, y\le x\le 3$

从而 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{1/3}^{1} dy\int_{1/y}^{3} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_y^3 f(x,y)dx$

（2）环形闭区域：$1\le x^2+y^2\le 4$.

解：在极坐标下环形闭区域 $1\le x^2+y^2\le 4$ 为 $1\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$

从而 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

在直角坐标下环形闭区域 $1\le x^2+y^2\le 4$ 需分块表达，分块积分变为

$$I=\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} fdy+\int_{1}^{2} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} fdy$$

2．改换下列二次积分的积分次序（填空）：

（1）$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x=\underline{\int_0^4 dx\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy}$；

（2）$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\underline{\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx}$；

（3）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x=\underline{\int_0^2 dx\int_{x/2}^{3-x} f(x,y)dy}$.

3．画出积分区域，并计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}, y=x^2$ 所围成的闭区域；

解：作图，原式$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy=\int_0^1\frac{2x}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}-x^3\right)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{6}{55}$

（2）$\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$，其中 D 是由 $|x|+|y|\le 1$ 所确定的闭区域；

解：作图，原式$=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{1+x}e^{x+y}dy+\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x}e^{x+y}dy=e-\frac{1}{e}$

（3）$\iint\limits_D\left(x^2-y^2\right)d\sigma$，其中 D 是由不等式 $0\le y\le\sin x, 0\le x\le\pi$ 所围成的闭区域；

解：作图，原式$=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)dy=\int_0^{\pi}(x^2\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x)dx=\pi^2-4\frac{9}{4}$

（4）$\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0),(\pi,0),(\pi,\pi)$ 的三角形闭区域.

解：作图，原式$=\int_0^{\pi}xdx\int_0^{x}\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi}x(\sin 2x-\sin x)dx=-\frac{3}{2}\pi$

4．求由 $y^2=2px+p^2, y^2=-2qx+q^2\ (p,q>0)$ 曲线所围成的闭区域的面积.

解：曲线方程联立，得 $2px+p^2=-2qx+q^2, x=\frac{q-p}{2}, y=\pm\sqrt{pq}$

作图知，原式$=\int_{-\sqrt{pq}}^{\sqrt{pq}}dy\int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}}dx=\int_{-\sqrt{pq}}^{\sqrt{pq}}\left(\frac{q^2-y^2}{2q}-\frac{y^2-p^2}{2p}\right)dy=\frac{2\left(p+q\right)}{3}\sqrt{pq}$

5．求由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 所截得的立体的体积.

解：四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 决定的区域 D 为：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$

在区域 D 内部 $z=6-\left(2x+3y\right)>6-\left(2+3\right)>0$

从而所截得的立体的体积

$$V=\iint\limits_D\left(6-2x-3y\right)dv=\int_0^1 dy\int_0^1\left(6-2x-3y\right)dx=\int_0^1\left(5-3y\right)dy=\frac{7}{2}$$

6．化下列二次积分为极坐标系下的二次积分：

（1）

$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=$

$$\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr+\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{1/\cos\theta}f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr+\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_0^{1/\sin\theta}f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr$$

（2）$\int_0^2 \mathrm{d}\,y\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\,y=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int\limits_{0}^{2/\sin\theta} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr$；

7．利用极坐标计算下列积分：

（1）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域；

解：D 是圆周 $x^2+y^2=4$，即 $0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$

从而 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^2 e^{r^2} r dr = 2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^2=\pi\left(e^4-1\right)$

（2）$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=x+y$ 所围成的闭区域；

解：D 是圆周 $x^2+y^2=x+y$ 围成，

知其为 $0\le r\le\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right), -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3}{4}\pi$

从而原式=$\iint\limits_D r\left(\cos\theta+\sin\theta\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)d\theta \int\limits_0^{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)} r^2 dr$

$$=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{3}\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]^4 d\theta=\frac{4}{3}\cdot 2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t dt=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

（3）$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$， D 是 $\alpha x\le y\le\beta x$ 与 $a^2\le x^2+y^2\le b^2\left(\beta>\alpha>0, a>b>0\right)$ 所确定的闭区域；

解：D 是圆环的关于原点对称的两部分，$a\le r\le b$，$\arctan\alpha\le\theta\le\arctan\beta$ 与

$\pi+\arctan\alpha\le\theta\le\pi+\arctan\beta$

从而原式=$\iint\limits_D r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int\limits_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta}\sin\theta d\theta\int\limits_a^b r^2 dr+\int\limits_{\pi+\arctan\alpha}^{\pi+\arctan\beta}\sin\theta d\theta\int\limits_a^b r^2 dr$

$$=-\cos\theta\Big|_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_a^b+-\cos\theta\Big|_{\pi+\arctan\alpha}^{\pi+\arctan\beta}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_a^b=0$$

（由对称性更简单：因为 $\left(x,y\right)\in D\Rightarrow\left(-x,-y\right)\in D$，对称点的积分微元反号）

（4）$\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是介于两圆 $x^2+y^2=2x$ 和 $x^2+y^2=4x$ 之间的闭区域.

解：D 介于两圆之间，可知 $2\cos\theta\le r\le 4\cos\theta\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

从而原式$=\iint\limits_D r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}r^2dr=\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(64-8)\cos^4\theta d\theta$

$$=\frac{112}{3}\int^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta=\frac{112}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=7\pi$$

8．用适当的坐标计算下列积分：

（1）$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线$y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a$（$a>0$）所围成的闭区域；

解：作图知D由直角坐标表达方便，$a\le y\le 3a, y-a\le x\le y$

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}\left(x^2+y^2\right)dx=\int_a^{3a}\left(\frac{y^3-(y-a)^3}{3}+ay^2\right)dy$$

$$=\left.\left(\frac{y^4-(y-a)^4}{12}+\frac{1}{3}ay^3\right)\right|_a^{3a}=\frac{3^4-2^4}{12}a^4+9a^4-\left(\frac{2^4-1^4}{12}a^4+\frac{8}{3}a^4\right)=\frac{21}{2}a^4$$

（2）$\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$， 其中$D$是由圆周$x^2+y^2=Rx$所围成的闭区域；

解：由表达式D由极坐标表达方便，$0\le r\le R\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，

原式$=\iint\limits_D\sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}rdr=-\frac{2}{3}R^3\int_0^{\pi/2}\left(\sin^3\theta-1\right)d\theta$

$$=-\frac{2}{3}R^3\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}R^3\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)R^3$$

（3）$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，$D$：$(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$；

解：先作坐标轴平移，再用极坐标

$$u=x-1=r\cos\theta, v=y-1=r\sin\theta,\Rightarrow d\sigma=dudv=rdrd\theta, 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$$

原式$=\iint\limits_D(uv+u+v+1)\mathrm{dudv}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left[r^2\sin\theta\cos\theta+r(\cos\theta+\sin\theta)+1\right]rdr$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{1}{2}\right)d\theta=\left.\left(\frac{1}{8}\sin^2\theta+\frac{1}{3}(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{\theta}{2}\right)\right|_0^{2\pi}=\pi$$

（4）$\iint\limits_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}\sigma$，$D$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

解：用广义极坐标 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta \Rightarrow d\sigma = abrdrd\theta, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$

原式= $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rrdr = 2\pi \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$

作业 11　三重积分的概念与计算

1．试将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化为三次积分，其中积分区域 Ω 分别为：

（1）由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围的闭区域

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\underline{\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f\left(x,y,z\right)dz}\;;$$

（2）由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围的闭区域

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\underline{\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2\left(1+\sin^2\theta\right)}^{2-r^2\cos^2\theta} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right)dz}\,.$$

2．计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}v$，其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0$， $x+y+z=1$ 所围成的四面体；

解：分析边界作图知 Ω 为 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$， $0\le z\le 1-x-y$

原式$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz=\frac{-1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dy$

$=\frac{-1}{2}\int_0^1\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}$

（2）$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $xy=z$ 与平面 $x=y, x=1, z=0$ 所围的闭区域；

解：分析边界作图知 Ω 为 $0\le x\le 1, 0\le y\le x$， $0\le z\le xy$

原式$=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} xy^2z^3dz=\frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_0^x x^5y^6dy=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{264}$

（3）$\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中 Ω 是由平面 $x=y, y=1, z=0$ 及抛物柱面 $z=x^2$ 所围的闭区域.

解：分析边界作图知 Ω 为 $0\le y\le 1, 0\le x\le y$， $0\le z\le x^2$

原式$=\int_0^1 dy\int_0^y dx\int_0^{x^2} xzdz=\frac{1}{2}\int_0^1 dy\int_0^y x^5dx=\frac{1}{12}\int_0^1 y^6dy=\frac{1}{84}$

3．利用柱面坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是曲面$x^2+y^2=1$和平面$z=0,z=1$所围成的闭区域；

解：原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^1 e^{-r^2}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^1=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$

（2）$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域；

解：原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} zdz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{2}\left(2-r^2-r^4\right)dr=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left(r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^1=\frac{7}{12}\pi$$

（3）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$和平面$z=2$所围成的闭区域；

解：原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{\frac{1}{2}r^2}^{2} r^2dz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3\left(2-\frac{1}{2}r^2\right)dr=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{12}r^6\right)\Big|_0^2=\frac{16}{3}\pi$$

（4）$\iiint\limits_{\Omega}(x^3+xy^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是曲面$x^2+(y-1)^2=1$和平面$z=0,z=2$所围成的闭区域.

解：先作坐标轴平移，再用柱坐标

$$u=x=r\cos\theta,v=y-1=r\sin\theta,\Rightarrow dv=dudvdz=rdrd\theta dz,0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi,0\le z\le 2$$

原式

$$=\iiint\limits_{\Omega_1}\left[\mathrm{u}^3+u\left(v+1\right)^2\right]\mathrm{dudvdz}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left[r^3\cos^3\theta+r\cos\theta\left(r\sin\theta+1\right)^2\right]rdr\int_0^2 dz$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(r^4\cos^3\theta+r^4\sin^2\theta\cos\theta+2r^3\cos\theta\sin\theta+r^2\cos\theta\right)dr$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{5}r^5\cos^3\theta+\frac{1}{5}r^5\sin^2\theta\cos\theta+\frac{1}{2}r^4\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{3}r^3\cos\theta\right)\Big|_0^1 d\theta$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\theta\right)d\sin\theta=\frac{4}{5}\pi$$

4．利用球面坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{dv}$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所围成的闭区域；

解：$x=\rho\cos\theta\sin\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z=\rho\cos\varphi\Rightarrow$

$$dv=\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi, 0\le\rho\le R, 0\le\theta\le2\pi, 0\le\varphi\le\pi$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}\rho\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=2\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\rho^4\sin\varphi\Big|_0^R d\varphi=-\frac{\pi}{2}R^4\cos\varphi\Big|_0^{\pi}=\pi R^4$$

（2）$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{dv}$，其中$\Omega$是由不等式$x^2+y^2+z^2\le2Rz$（$R>0$），$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$所确定的闭区域；

解：$x=\rho\cos\theta\sin\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z=\rho\cos\varphi\Rightarrow$

$$dv=\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi, 0\le\rho\le2R\cos\varphi, 0\le\theta\le2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{4}\rho^4\Big|_0^{2R\cos\varphi}d\varphi$$

$$=-8\pi R^4\int_0^{\pi/4}\cos^5\varphi d\cos\varphi=-\frac{8\pi}{6}R^4\cos^6\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{7}{6}\pi R^4$$

（3）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\mathrm{dv}$，其中$\Omega$是不等式$x^2+y^2+z^2\le1$，$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$所确定的闭区域.

解：$x=\rho\cos\theta\sin\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z=\rho\cos\varphi\Rightarrow$

$$dv=\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi, 0\le\rho\le1, 0\le\theta\le2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{1}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=2\pi\cdot\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\cos^2t\sin^2tdt$$

$$=\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos4t}{8}dt=\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\frac{t}{8}-\frac{\sin4t}{32}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi^2$$

5. 选取适当的坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{dv}$，其中$\Omega$是柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0, z=1$，$x=0, y=0$所围成的在第一卦限内的闭区域；

解：用柱坐标

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, \Rightarrow dv=rdrd\theta dz, 0\le r\le1, 0\le\theta\le\frac{1}{2}\pi, 0\le z\le1$$

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^1 r\sin\theta\cdot r\cos\theta dz=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta dr=\frac{\sin^2\theta}{8}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{8}$$

（2）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=z$所围的闭区域；

解：用球坐标$x=\rho\cos\theta\sin\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z=\rho\cos\varphi\Rightarrow$

$$dv=\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi, 0\le\rho\le\cos\varphi, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}\rho\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi=-\frac{\pi}{10}\cos^5\varphi\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{10}$$

（3）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由曲面$4z^2=25(x^2+y^2)$及平面$z=5$所围的闭区域；

解：用柱坐标

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,\Rightarrow dv=rdrd\theta dz, 0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi, \frac{5}{2}r\le z\le 5$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{5r/2}^{5}r^2dz=2\pi\int_0^2\left(5r^3-\frac{5}{2}r^4\right)dr=2\pi\left(\frac{5}{4}r^4-\frac{1}{2}r^5\right)\Big|_0^2=8\pi$$

（4）$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}}\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$所围的在第一卦限内的闭区域；

解：用球坐标$x=\rho\cos\theta\sin\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z=\rho\cos\varphi\Rightarrow$

$$dv=\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi, 0\le\rho\le a, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a\rho\cos\theta\sin\varphi\cdot e^{\frac{\rho^2}{a^2}}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{a^2}te^{\frac{t}{a^2}}dt=\frac{\sin\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot a^2\int_0^{a^2}tde^{\frac{t}{a^2}}$$

$$=\frac{\pi a^2}{8}\left[te^{\frac{t}{a^2}}\Big|_0^{a^2}-\int_0^{a^2}e^{\frac{t}{a^2}}dt\right]=\frac{\pi}{8}a^4$$

（5）$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围成的闭区域.

解：用广义球坐标$x=a\rho\cos\theta\sin\varphi, y=b\rho\sin\theta\sin\varphi, z=c\rho\cos\varphi\Rightarrow$

$$dv=abc\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi, 0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi$$

原式

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 e^{\rho}\cdot abc\rho^2\sin\varphi d\rho=2\pi abc(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\int_0^1\rho^2 de^{\rho}=4(e-2)\pi abc$$

作业 12　重积分的应用

1．球心在原点，半径为 R 的球体，在其上任意一点的体密度与该点到球心的距离成正比，求这球体的质量.

解：设球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，球的密度为 $\mu=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

则球体的质量为 $\iiint\limits_{\Omega}\mu dv=\iiint\limits_{\Omega}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}k\rho^3\sin\varphi d\rho$

$$=2k\pi\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi}\int_0^{R}\rho^3d\rho=k\pi R^4$$

2．求球体 $x^2+y^2+z^2\le 2az$ 的质心，这里假设球体内各点处的密度等于该点到坐标原点的距离的平方.

解：由对称性，质心应该在 z 轴上，可设为 $\left(0,0,z_0\right)$

$$M_z=\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^4\sin\varphi\cos\varphi d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{\left(2a\cos\varphi\right)^5}{5}d\varphi=\frac{2^6a^5\pi}{5}\left(-\frac{\cos^7\varphi}{7}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{2^6a^5\pi}{35}$$

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^3\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot\frac{\left(2a\cos\varphi\right)^4}{5}d\varphi=\frac{2^5a^4\pi}{4}\left(-\frac{\cos^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{2^5a^4\pi}{20}\text{，}\ z_0={M_z}/{M}=\frac{8a}{7}$$

3．设均匀平面薄片为椭圆形闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$，求转动惯量.

解：用广义极坐标

$$I_x=\iint\limits_{D}\mu y^2d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1}\mu b^2r^2\sin^2\theta\cdot abrdr=\int_0^{2\pi}\mu ab^3\frac{1-\cos2\theta}{2}\cdot\frac{1}{4}d\theta=\frac{\pi}{4}\mu ab^3$$

$$I_y=\iint\limits_{D}\mu x^2d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1}\mu a^2r^2\cos^2\theta\cdot abrdr=\int_0^{2\pi}\mu a^3b\frac{1+\cos2\theta}{2}\cdot\frac{1}{4}d\theta=\frac{\pi}{4}\mu a^3b$$

$$I_O=\iint\limits_{D}\mu(x^2+y^2)d\sigma=I_x+I_y=\frac{\pi}{4}\mu\left(a^2+b^2\right)ab$$

4. 设半径为 R 的球体内每一点密度的大小与该点到球心的距离成正比，求质量为 M 非均匀球体对其直径的转动惯量.

解：设球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，球的密度为 $\mu=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

则球体对其直径的转动惯量为 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}k\rho^5\sin^3\varphi d\rho=2k\pi\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}\cdot\frac{k\rho^6}{6}\Bigg|_0^{R}=\frac{4}{9}k\pi R^6$$

5. 求面密度为常数 μ 的均匀圆环形薄片：$r^2\le x^2+y^2\le R^2, z=0$ 对位于 z 轴上的点 $P(0,0,a)(a>0)$ 处的单位质量的质点的引力.

解：设环域上点 $(x,y,0)$ 处的单位面积产生的引力微元为

$$d\vec{F}=\frac{G\mu d\sigma}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=G\mu\frac{\{x,y,-a\}}{r^3}d\sigma$$，由对称性 $F_x=F_y=0$

$$F_z=\iint\limits_{D}dF_z=\iint\limits_{D}\frac{-aG\mu d\sigma}{\sqrt[3]{x^2+y^2+a^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_r^{R}\frac{-aG\mu}{\sqrt[3]{r^2+a^2}}rdr$$

$$=2\pi\cdot\frac{aG\mu}{\sqrt{r^2+a^2}}\Bigg|_r^{R}=\pi\mu aG\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)$$

6. 一均匀物体（密度 ρ 为常量）占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$，$|x|=a$，$|y|=a$ 所围成，（1）求物体的体积；（2）求物体的质心；（3）求物体关于 z 轴的转动惯量.

解：$V=\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}dy\int_0^{x^2+y^2}1dz=\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}\left(x^2+y^2\right)dy=4\int_0^{a}\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)dx=\frac{8}{3}a^4$

由对称性，质心应该在 z 轴上，可设为 $(0,0,z_0)$

$$M_z=\iiint\limits_{\Omega}z\rho dv=\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}dy\int_0^{x^2+y^2}\rho zdz=2\rho\int_0^{a}dx\int_0^{a}\left(x^4+y^4+2x^2y^2\right)dy$$

$$=2\rho\int_0^{a}\left(ax^4+\frac{2a^3}{3}x^2+\frac{a^5}{5}\right)dx=\frac{56}{45}\rho a^6$$，$z_0=M_z\big/\rho V=\frac{7a^2}{15}$

$$I_z=\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}dy\int_0^{x^2+y^2}\rho\left(x^2+y^2\right)dz=\rho\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}\left(x^2+y^2\right)^2dy=\frac{112}{45}\rho a^6$$

第八章《重积分》测试题

1．选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论：

（1）设有空间闭区域$\Omega_1=\{(x,y,x)|x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge 0\}$,

$\Omega_2=\{(x,y,x)|x^2+y^2+z^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$,

则有（　　D　　）

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$；　　（B）$\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$；

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$；　　（D）$\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$.

（2）设平面闭区域

$D=\{(x,y)|-a\le x\le a,x\le y\le a\}$，$D_1=\{(x,y)|0\le x\le a,x\le y\le a\}$,

则$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　A　）

（A）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　（B）$2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（C）$4\iint\limits_{D_1}\left(xy+\cos x\sin y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　（D）$0$.

（3）设 $f(x,y)$是有界闭区域$D:x^2+y^2\le a^2$上的连续函数，则当$a\to 0$时，

$\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$得极限为（　B　）.

A.不存在；　　B. 等于 $f(0,0)$

C. 等于 $f(1,1)$　　D. 等于 $f(1,0)$.

2．选择适当的坐标系计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}\sigma$，$D$是由直线$y=x,y=0,x=\frac{\pi}{2}$所围成的区域；

解：作图，分块积分。

原式

$$=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi/4}dy\int_y^{\pi/2-y}\cos(x+y)dx-\int_{\pi/4}^{\pi/2}dx\int_{\pi/2-x}^{x}\cos(x+y)dy$$

$$=\int_0^{\pi/4}(1-\sin 2y)\,dy-\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin 2x-1)\,dx=\left(y+\frac{\cos 2y}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}+\left(x+\frac{\cos 2x}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$=\left(y+\frac{\cos 2y}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1$$

（2）$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=\dfrac{\pi}{4}, x=\pi, y=0$ 和 $y=\cos x$ 所围成；

解：作图，分块积分。

$$原式=\int_{\pi/4}^{\pi/2}dx\int_0^{\cos x}y^2dy+\int_{\pi/2}^{\pi}dx\int_{\cos x}^{0}y^2dy=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{3}dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos^3 x}{3}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}-\frac{1}{3}\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{4}{9}-\frac{5}{12}\sqrt{2}$$

（3）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$；

$$原式=\int_0^1 dx\int_1^x \mathrm{e}^{x^2}dy+\int_0^1 dy\int_1^y \mathrm{e}^{y^2}dx=2\int_0^1 dx\int_1^x \mathrm{e}^{x^2}dy=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}dx=\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=e-1$$

（4）$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x, y^2=x, y=2$ 和 $y=\cos x$ 所围成的平面区域，且 $y\ge 1$；

解：作图知 $y=\cos x$ 没有用上

$$原式=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\left(x^2+y^2\right)dx=\int_1^2\left(\frac{y^6}{3}+y^4-\frac{4y^3}{3}\right)dy$$

$$=\left(\frac{y^7}{21}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^4}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{761}{105}$$

（5）$\iint\limits_D (y-x)^2\mathrm{d}\sigma$，$D$：$y\le R+x, x^2+y^2\le R^2, y\ge 0\,(R>0)$；

解：作图知 $D:0\le y\le R, y-R\le x\le\sqrt{R^2-y^2}$，分块积分区别处理较方便

$$原式=\int_0^R dy\int_{y-R}^{\sqrt{R^2-y^2}}\left(x^2+y^2-2xy\right)dx$$

$$=\int_0^R dy\int_{y-R}^{0}(x-y)^2dx+\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R\left(r^2-2r^2\sin\theta\cos\theta\right)rdr$$

$$=\int_0^R \frac{R^3-y^3}{3}dy+\frac{R^4}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-2\sin\theta\cos\theta\right)d\theta=\frac{\pi}{8}R^4$$

3．交换下列二次积分的次序：

（1）$\int_0^4 \mathrm{d}\,y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)\mathrm{d}\,x=\underline{\int_{-2}^0 \mathrm{d}\,x\int_{2x+4}^{4-x^2} f(x,y)\mathrm{d}\,y}$；

（2）$\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}\,y=\underline{\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_0^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}\,x+\int_1^2 \mathrm{d}\,y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}\,x}$；

（3）$\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}\,y+\int_1^3 \mathrm{d}\,x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\mathrm{d}\,y=\underline{\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}\,x}$.

4．将 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y$ 变为极坐标形式的二次积分，其中 D 由不等式 $x\ge 0, y\ge 0$ 和 $(x^2+y^2)^3\le 4a^2x^2y^2$ 所规定.

解：由 $x=r\cos\theta\ge 0, y=r\sin\theta\ge 0\Rightarrow 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，

$(x^2+y^2)^3\le 4a^2x^2y^2\Rightarrow 0\le r\le a\sin 2\theta$

从而 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\sin 2\theta} f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$

5．计算 $\iint\limits_D \left|y-x^2\right|\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是矩形域：$|x|\le 1, 0\le y\le 1$.

解：作图，需要分块积分

$$\text{原式}=\int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2}\left(x^2-y\right)dy+\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1\left(y-x^2\right)dy=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}-x^2+x^4\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(1-2x^2+2x^4\right)dx=\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$$

6．计算 $\iiint\limits_\Omega \dfrac{y\sin x}{x}\mathrm{dxdydz}$，其中 Ω 由 $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围.

解：作图或分析推理，得 Ω：$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\sqrt{x}, 0\le z\le\dfrac{\pi}{2}-x$

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\int_0^{\pi/2-x}\frac{y\sin x}{x}dz=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y\sin x}{x}\left(\pi/2-x\right)dy=$$

$$=-\frac{\pi\cos x}{4}\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}xd\cos x=\frac{\pi}{4}+\frac{x\cos x}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos xdx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

7．将三次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}\mathrm{d}\,x\int_0^{\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}\,z$ 变为柱坐标及球坐标的形式.

解：由上下限知 $\Omega:0\le y\le 1,-\sqrt{y-y^2}\le x\le\sqrt{y-y^2},0\le z\le\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$

从而由坐标转化公式可推出区域表达式，因此得出

在柱坐标下 $I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sin\theta} r\mathrm{d}\,r\int_0^{\sqrt{3}r} f(r^2+z^2)\mathrm{d}\,z$

在球坐标下 $I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{d}\,\varphi\int_0^{\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}} f(\rho^2)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\,\rho$

8．计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}v$，其中 $\Omega:1\le x^2+y^2+z^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$.

解：由知 $\Omega:1\le\rho\le 2,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$

从而，原式 $=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\varphi\int_1^2\left(\rho\cos\theta\sin\varphi+\rho\cos\varphi\right)e^{-\rho^2}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\,\rho$

$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta\sin\varphi+\cos\varphi\right)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^4\frac{t}{2}e^{-t}\mathrm{d}\,t$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta\cdot\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)+\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\left(te^{-t}\Big|_1^4-\int_1^4 e^{-t}dt\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta+\frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\left(4e^{-4}-e^{-1}+e^{-t}\Big|_1^4\right)=\frac{\pi}{4}\left(2e^{-1}-5e^{-4}\right)$$

9．计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$， Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

解：由于当 $\left(x,y,z\right)\in\Omega$ 时就有 $\left(x,y,-z\right)\in\Omega$，而积分微元 $\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$

在对称点刚好反号，从而 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v=0$

（2）$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解：曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面为 $y^2+z^2=2x$，与平面 $x=5$ 的交线为

$y^2+z^2=10,x=5$，所围成的闭区域为 $\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le\sqrt{10},r^2/2\le x\le 5$

$$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{10}}rdr\int_{r^2/2}^{5}r^2dx=2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\left(5r^3-r^5/2\right)dr$$

$$=\pi\left(10\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{10}}=\frac{250}{3}\pi$$

10．求平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解：平面为$z=c\left(1-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right),z_x=-\dfrac{c}{a},z_y=-\dfrac{c}{b}$

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(-\frac{c}{a}\right)^2+\left(-\frac{c}{b}\right)^2}dxdy=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\sqrt{1+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2}dy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2}\int_0^a b\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{ab}{2}\sqrt{1+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2}=\frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

11．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，试证：

$$\int_a^b\mathrm{d}y\int_a^y(y-x)^{n-1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_a^b(b-x)^nf(x)\mathrm{d}x,$$

其中n为正整数.

证：左边$=\iint\limits_D(y-x)^{n-1}f(x)dxdy=\int_a^b\mathrm{d}x\int_x^b(y-x)^{n-1}f(x)\mathrm{d}y$

$$=\int_a^b\frac{1}{n}(y-x)^nf(x)\Big|_x^b\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_a^b(b-x)^nf(x)\mathrm{d}x=\text{右边}$$

12．求曲面$z=x^2+y^2+1$上点$M_0(1,-1,3)$处的切平面与曲面$z=x^2+y^2$所围成的空间立体的体积.

解：切平面的法向量为$\vec{n}=\left\{2x,2y,-1\right\}\big|_{M_0}=\left\{2,-2,-1\right\}$

从而切平面为$2\left(x-1\right)-2\left(y+1\right)-\left(z-3\right)=0,z=2x-2y-1$

切平面与曲面$z=x^2+y^2$的交线为投影柱面$\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$交切平面，

$$V=\iint\limits_D\left(2x-2y-1-x^2-y^2\right)dxdy=\iint\limits_D\left(1-(x-1)^2-(y+1)^2\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr=2\pi\int_0^1\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)dr=\frac{\pi}{2}$$

13．一平面薄片所占的闭区域由不等式：$x^2+y^2\le R^2, x^2+y^2\le 2Rx$所确定，其上每一点的面密度为$\rho(x,y)=x^2+y^2$，试求该薄片的质量.

解：$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$，用极坐标做方便些

求交点$x^2+y^2=R^2, x^2+y^2=2Rx \Rightarrow r=R, r=2R\cos\theta \Rightarrow \theta=\pm\dfrac{\pi}{3}$，

$$m=\iint\limits_D r^2\cdot rdrd\theta=2\int_0^{\pi/3}d\theta\int_0^R r^3dr+2\int_{\pi/3}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^3dr=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{R^4}{4}+2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{2^4R^4\cos^4\theta}{4}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{6}R^4+R^4\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(3+4\cos2\theta+\cos4\theta\right)d\theta=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)R^4$$

14．求由抛物线$y=x^2$及直线$y=1$所围成的均匀薄片（面密度为常数μ）对于直线$y=-1$的转动惯量.

解：$I=\iint\limits_D \left(y+1\right)^2\mu dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1\mu\left(y+1\right)^2dy=\int_{-1}^1\dfrac{\mu}{3}\left[8-\left(x^2+1\right)^3\right]dx$

$$=\frac{2\mu}{3}\int_7^1\left(7-x^6-3x^4-3x^2\right)dx=\frac{2\mu}{3}\left(7-\frac{1}{7}-\frac{3}{5}-1\right)=\frac{368}{105}\mu$$

15．设在xOy面上有一质量为M的匀质半圆形薄片，占有平面闭区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2, y\ge0\right\}$，过圆心$O$垂直于薄片的直线上有一质量为$m$的质点$P$，$OP=a$，求半圆形薄片质点$P$的引力.

解：$\vec{F}^{\circ}=\{x,y,-a\}\Big/\sqrt{x^2+y^2+a^2}$，$dF=\dfrac{m\mu d\sigma}{x^2+y^2+a^2}=\dfrac{2mMd\sigma}{\pi R^2\left(x^2+y^2+a^2\right)}$

由对称性$F_x=0$，$F_y=\iint\limits_D\dfrac{2mMyd\sigma}{\pi R^2\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}=\int_{-R}^R dx\int_0^R\dfrac{2mMydy}{\pi R^2\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}$

$$=\frac{4mM}{\pi R^2}\int_0^R\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2+a^2}}\right)dx=\frac{4mM}{\pi R^2}\ln\frac{R\sqrt{R^2+a^2}+R^2+a^2}{a\left(R+\sqrt{2R^2+a^2}\right)}$$

$$F_z=\iint\limits_D\frac{-2amMd\sigma}{\pi R^2\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}=2\int_0^{\pi/2}dx\int_0^R\frac{-2amMrdr}{\pi R^2\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}=\frac{2amM}{R^2\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{2mM}{R^2}$$