姓 名　　　　序号

第一章《函数与极限》测试题

1．填空题

（1）若 $f\left(\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}\right)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)=$______________；

（2）函数 $f(x)$ 的定义域为$[a,b]$，则 $f(2x-1)$ 的定义域是______________；

（3）若 $x\to 0$ 时，无穷小 $\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 与 $a\sin^2\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ 等价，则常数 $a=$____________；

（4）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______________.

2．单选题：

（1）当 $x\to 0$ 时时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　　　）

（A）无穷小；　　　　（B）无穷大；

（C）有界的，但不是无穷小；　　　　（D）无界的，但不是无穷大.

（2）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　　　　）

（A）$a<0,b<0$；　　　　（B）$a>0,b>0$；

（C）$a\geq 0,b<0$；　　　　（D）$a\leq 0,b>0$.

（3）设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时（　　　　）

（A）$f(x)$ 与 x 是等价无穷小；　　　　（B）$f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小；

（C）$f(x)$ 比 x 高阶无穷小；　　　　（D）$f(x)$ 比 x 低阶无穷小.

（4）设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leq f(x)\leq g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

为（　　　　　）

（A）存在且等于零；　　　　（B）存在但不一定等于零；

（C）一定不存在；　　　　（D）不一定存在.

3. 设 $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-x+1 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x\le 2\end{cases}}$，求 $\boldsymbol{x\to 1}$ 时函数的左、右极限，并讨论极限的存在性。

4．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^{\frac{2x}{(x-1)^2}}$.

（3）$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}}$

（4）$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}}$

（5）$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}}$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^{3}}$

（7）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\tan 3x\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^{x}$

5. 确定 a,b 的值，使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^{3})}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0\\ b, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x+x^{2}}{1+x+x^{2}}, & x>0\end{cases}$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},+\infty)$ 内连续.

6.指出下列函数的间断点及其类型.

（1） $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

（2） $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^{2}}}$

7.设 a_1,a_2,a_3,a_4 为正常数，证明方程 $\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x-1}+\dfrac{a_3}{x-2}+\dfrac{a_4}{x-3}=0$ 有且仅有三个实根.

8.设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $f(a)\le g(a)$， $f(b)\ge g(b)$，证明在 $\left[a,b\right]$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

9.求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^{n}+x^{-n-1}}$ 的连续区间.

10. 下列函数在指定的变化过程中哪些是无穷小量，哪些是无穷大量？

(1). $\dfrac{x-2}{x}\quad(x\to 0)$　　(2). $\ln x\quad(x\to 0^{+})$　　(3). $e^{\frac{1}{x}}\quad(x\to 0^{+})$

(4). $e^{\frac{1}{x}}\quad(x\to 0^{-})$　　(5). $1-e^{\frac{1}{x^{2}}}\quad(x\to\infty)$　　(6). $\tan x\ (x\to -\dfrac{\pi}{2})$

11. 当 $x\to 0$ 时，试确定下列无穷小量的阶.

(1). $\sqrt{x}+\sin x$

(2). $\sqrt{x}+x+3x^{2}$

12. 设当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，求正整数 n 的值.

13. 试求常数 a , b 的值，使得下列等式成立.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right)=0$$

第二章 《导数与微分》自测题

1． 填空题

（1）设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{x-x_0}=$____________；

（2）设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f'(t)=$____________；

（3）设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$___；

（4）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的法线方程为____________.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中，$\varphi$ 具有一阶导数，且 $\varphi(0)=1$.

求常数 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$.

（1）求 $f(0), f'(0)$；　　　（2）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. 求下列导数：

（1）设 $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\tan x}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\cot x}$，求 y''；

（2）设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x^2+5xt+4t^3=0 \\ \mathrm{e}^y+y(t-1)+\ln t=1 \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\Big|_{t=1}$.

5．设 $y=\log_x(x^2+1)\quad(x>1)$,求 $\mathrm{d}\,y$.

6．设 $f(x)=x^2\sin x\cos x$,求　$f^{(2001)}(0)$.

7．若 $f(x)$ 在点 a 连续,且 $f(a)\neq 0$,而函数 $g(x)=[f(x)]^2$ 在点 a 可导,求函数 $f(x)$ 在点 a 处的导数.

8. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 有（　）个不可导点.

A.3　　　　B.2　　　　C. 0　　　　　D. 1

9. 已知 $f(1)=0$，　$f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x\tan x}$.

第三章《微分中值定理及导数的应用》测试题

1．　填空题

（1）设 $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}$ 与 x^{n} 是同阶无穷小,则 $n=$______________；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$______________；

（3）曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x^{2}}$ 的凹区间是______________；

（4）若曲线 $y=ax^{4}-x^{2}$ 拐点的横坐标为 $x=1$，则常数 $a=$______________.

2．　求下列函数的极限:

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^{2}}$；

(2)　$\lim\limits_{x\to\infty}x[(1+\dfrac{1}{x})^{x}-\mathrm{e}]$.

3．　求函数 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值.

4. 当$0<x<2$时, 证明：$4x\ln x \ge x^2+2x-3$.

5. 求摆线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$在对应$t=\dfrac{\pi}{2}$的点处的曲率.

6. 设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：在(a,b)内至少存在一点ξ使 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

7. 设 $f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，$|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b,$ 其中a,b都是非负常数，c是$(0,1)$内任一点. 证明：$|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.