概率与期望问题选讲

于志竟成

2015 年 3 月 14 日

期望的定义

期望的定义如下：

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\Pr(\omega)$$

。其中 Ω 为概率空间，满足

$$\sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega) = 1$$

。$X : \Omega \to \mathbb{R}$ 称为随机变量。

期望的线性性质（极重要）

期望有以下性质：

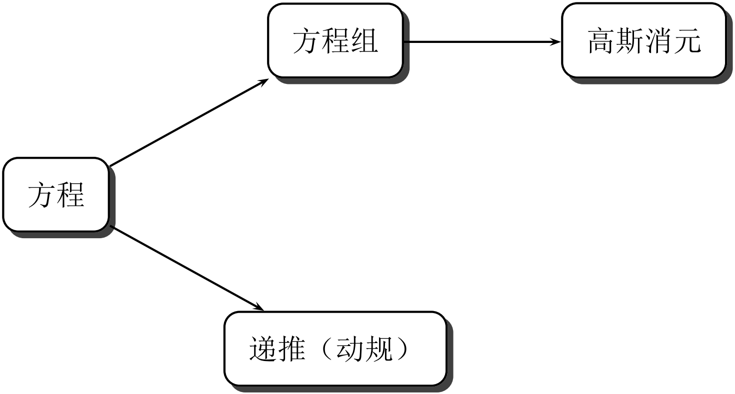
$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$$

$$\mathrm{E}(kX)=k\mathrm{E}(X)$$

，其中 k 为常数。

很容易用定义证明。

部分题的解法（今日略讲）



和的平方

Mr.Lin 要把 N 个数加起来，然后求和的平方。然而，Mr.Lin 有 p_i 的概率忽视第 i 个数。求 Mr.Lin 得到的答案的期望值。

$N \leqslant 10000$。

和的平方

Mr.Lin 要把 N 个数加起来，然后求和的平方。然而，Mr.Lin 有 p_i 的概率忽视第 i 个数。求 Mr.Lin 得到的答案的期望值。

$N \leqslant 10000$。

这是高二前段时间考的某题的简化版。

如果能做对，就能写原题的暴力了（现场没人写对暴力）。

不少人会求和的期望，平方之……

不少人会求和的期望，平方之……

然而这样在 p_i 不全为 0 或 1 的情况下是错的。

不少人会求和的期望，平方之……

然而这样在 p_i 不全为 0 或 1 的情况下是错的。

需要将

$$\mathrm{E}\left(\left(\sum v_i s_i\right)^2\right)$$

展开。

其实正确做法和之前错误做法答案的差为 Mr.Lin 得到的答案的方差。

Codeforces - 258D Little Elephant and Broken Sorting

给一个 N 的排列，M 次选择两个位置 a_i, b_i，每次有 $\frac{1}{2}$ 的概率交换这两个位置。求最终排列的逆序对数的期望值。

$N, M \leqslant 1000$。

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i<j}[v_i > v_j]\right) = \sum_{i<j}([v_i > v_j])$$

，只需要计算每对位置逆序的概率。这个直接维护就行了。

砍树

Mr.Lin 有一棵树。一天他闲着无聊开始砍树玩。给定树的根节点，Mr.Lin 每次会在当前剩下的点中等概率随机选择一个点，将以这个点为根的子树砍掉。求砍完整棵树的期望次数。

$N \leqslant 5 \times 10^5$。

$$\mathrm{E}\left(\sum s_i\right) = \sum \mathrm{E}\left(s_i\right) = \sum \mathrm{E}(p_i)$$

，仅需求每个点被选择到的概率。

$$E\left(\sum s_i\right) = \sum E(s_i) = \sum E(p_i)$$

，仅需求每个点被选择到的概率。

考虑任意时刻，一个点已经被砍掉当且仅当它到根的路径上已经选择了至少一个点，而在一个点被砍掉之后 Mr.Lin 就不可能再选它了。

因此，一个点被选的时候，它是链上第一个被选的。所以它被选择的概率是 $\frac{1}{dep(i)+1}$。

干脆面

Mr.Lin 买干脆面。干脆面成本价 0.2 元，售价 1 元，并且每包有 $\frac{1}{3}$ 的概率含有“再来一袋”奖。求 Mr.Lin 买一袋干脆面给商家带来的期望收益。

干脆面

Mr.Lin 买干脆面。干脆面成本价 0.2 元，售价 1 元，并且每包有 $\frac{1}{3}$ 的概率含有“再来一袋”奖。求 Mr.Lin 买一袋干脆面给商家带来的期望收益。

用 x 表示打开一袋期望能够获得的袋数。容易得到

$$x = 1 + \frac{1}{3}x$$

，解得 $x = 1.5$。故期望收益为 $1 - 0.2 \times 1.5 = 0.7$元。

NOI2005 - 聪聪和可可

给一张 N 个点 M 条边的无向图。初始时，聪聪在 A 点，可可在 B 点。当聪聪和可可某时刻在同一个点上时，我们就认为聪聪抓到了可可。每回合可可先等概率随机走到一个相邻的点上，然后聪聪可以至多走两步，每步都走到距可可最近的点，如果有多个选标号最小的那个。显然聪聪总能抓到可可。求聪聪抓到可可时经过的期望回合数。

$N, M \leqslant 1000$

用 $f(i,j)$ 表示聪聪在 i 点，可可在 j 点的情况下期望经过的回合数。

可以得到方程

$$f(i,j) = \sum f(i',j')p(i',j') + 1$$

。

考虑这个用这个方程计算 f 是否会出现环。

用 $f(i,j)$ 表示聪聪在 i 点，可可在 j 点的情况下期望经过的回合数。

可以得到方程

$$f(i,j) = \sum f(i',j')p(i',j') + 1$$

。

考虑这个用这个方程计算 f 是否会出现环。

由于 i, j 之间的距离不断减小，不会出现环。

于是直接递推就行了。

SCOI2008 - 奖励关

给 N 个宝物，第 i 个宝物的价值为 v_i。有 M 关，每关会等概率随机抛出一个宝物，你可以选择不保留宝物，也可以选择保留。选择保留就会得到宝物的价值。但是保留有前提，如果要保留第 i 个宝物，必须先集齐 S_i 集合中的宝物。

求如果采取最优策略，期望得到的价值是多少。

$N \leqslant 15, M \leqslant 100$。

$f(i,j)$ 表示在第 i 关，且当前保留的宝物集合为 j 的情况下采取最优策略期望得到的价值。

可以得到方程

$$f(i,j) = \sum \max\left([S_k \subseteq j]\left(f(i+1, j \cup S_k) + v_k\right), f(i+1, j)\right) / N$$

。显然直接递推就行了。