TP n°1 : Entropies discrète et continue, information mutuelle

1 Lien entre entropie discrète et continue

1. $F_X = P(X \leq x)$ continue sur$[i\Delta; (i+1)\Delta]$ de dérivé f_x on applique le TAF(theoreme des accroissements finis)

   on dispose alors de $x_i \in [i\Delta; (i+1)\Delta]$ tel que : $F_X((i+1)\Delta) - F_X(i\Delta) = f_X(x_i)\Delta$
   par ailleurs : $F_X((i+1)\Delta) - F_X(i\Delta) = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f_X(x)dx$
   en r'emplacant dans la formule on a : $\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f_X(x)dx = f_X(x_i)\Delta$
   D'où le resultat.

2. la variable discrète X_Δ suit la loi $\Delta f_X(x_i)$
   car $\forall i \in \mathbb{Z}$, $P(x_\Delta = x_i) = P(X \leq (i+1)\Delta) - P(X \leq i\Delta) = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f_X(x)dx = \Delta f_X(x_i)$

3. En appliquant la formule de l'entropie on en déduit que:

   $H(X_\Delta) = -\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_X(x_i)\Delta log(\Delta f_X(x_i)$

   $= -\Delta \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_X(x_i)(log(\Delta) + log(f_X(x_i)) = -\Delta \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_X(x_i)log(f_X(x_i) - log(\Delta) \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta f_X(x_i)$

   $or \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta f_X(x_i) = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f_X(x)dx = 1$ car f(x) est une densité .

   D'où le resultat $H(X_\Delta) = -\Delta \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_X(x_i)log(f_X(x_i) - log(\Delta)$

4. On en déduit que lorsque $\Delta \to 0$ on a $H(X_\Delta) + \log(\Delta) = -\Delta \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_X(x_i)log(f_X(x_i))$ ce qui tend vers $-\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)log(f_X(x))dx = H(X)$ quand $\Delta \to 0$ car les intervales $[i\Delta; (i+1)\Delta]$ tendent à partitier entierement $\mathbb{Z}$.

   On observe alors que en prenant des intervales très petits l'entropie discrète s'approche de l'entropie continue .
   Ainsi pour approcher l'entropie continue on va prendre des intervales les plus petits possibles et utiliser l'entropie discrète.

2 Loi Gaussienne

1. question 1 :

   On utilise d'abord pour se faire la propriété suivante, soit X suit une loi normale de moyenne μ and d'écart type σ: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(0,1)$

   on peut alors modeliser, $n = 10000$ réalisations de X de la maniere suivante, en utilisant