

# 小白鼠试毒问题

## 一、问题：

现在有 1000 瓶药水，其中有 1 瓶毒药，毒药药性发作致死时间为 1 小时。现在有 1 个小时的时间找出毒药，那么至少需要多少只小白鼠来试毒？假设药水量无限，可以无限稀释，喝药时间不计。

## 二进制解法

这道题实际上是一个二进制问题。小白鼠喝了一定量的药水之后，只有两种状态，联想到就是二进制的 0 和 1。那么现在我们给这 1000 瓶药水用二进制标号，所有药水的编号可以由一个 10 位二进制数表示。由于喝药之后的小白鼠会有两种状态，分别代表 0 和 1，刚好可以表示二进制数的 1 位，所以最少需要 10 只小白鼠。

具体的操作方式如下：

1. 第  $N$  只小白鼠喝掉二进制编号第  $N$  位为 1 的所有药。比如第一只小白鼠喝掉所有编号符合 XXXXXXXXX1 的药。
2. 1 个小时后，对于第  $N$  只小白鼠，假设死亡，那么可以判断毒药编号的第  $N$  位为 1；如果未死亡则第  $N$  位为 0。
3. 以此类推，可以判断出毒药的二进制编号，即可以找出毒药。

### 公式

总结来说，每只小白鼠能确定二进制的一位，那么  $x$  只小白鼠就能确认  $2^x$  瓶药水中的 1 瓶毒药。

换句话说，如果最初有  $y$  瓶药水，需要的小白鼠数目  $x = \text{ceil}(\log_2 y)$  只。

## 信息论解法

根据信息论，假设一只小白鼠喝  $t$  瓶药，那么这一只小白鼠死亡的概率为  $n = \frac{t}{1000}$  能够获得的信息量为  $H(n) = -n\log_2(n) - (1-n)\log_2(1-n)$ 。容易证明  $n = 0.5$  时  $H(n)$  最大，所以每只小白鼠喝 500 瓶药，获得的信息量最大。

接下来，1000 瓶中有 1 瓶毒药的信息量为  $-\log_2(\frac{1}{1000}) = \log_2 1000$ ，一只小白鼠的信息量为  $-\log_2(\frac{1}{2}) = 1$ 。所以需要的小白鼠的数量  $x = \text{ceil}(\log_2 1000)$

### 公式

根据上述分析，可以知道  $y$  瓶中有 1 瓶毒药的信息量为  $-\log_2(\frac{1}{y}) = \log_2 y$ ，一只小白鼠的信息量为  $-\log_2(\frac{1}{2}) = 1$ 。所以需要小白鼠的数量  $x = \text{ceil}(\log_2 y)$  只。

## 二、问题变体：

现在毒药的药性改变，会在 15 分钟之内发作。其他条件不变，1 个小时的时间，请问需要多少只小白鼠？

## 二进制解法

由于毒药 15 分钟发作，小白鼠采用的策略的是每隔 15 分钟喝 1 瓶毒药（如果这 15 分钟小白鼠没死，分别是第 0、15、30、45 分钟时）。那么实际上就是 5 进制，小白鼠每隔 15 分钟喝药之后，在 1 个小时之内有 4 个不同的死亡时间段，也可能不死，那么一共就有 5 种状态。按照 5 进制编号，一共需要 5 位 5 进制数。所以需要最少 5 只小白鼠。

具体操作如下：

1. 把药水按照 5 进制编号。第  $N$  只小白鼠在一个小时时间内，每隔 15 分钟分别喝掉对应位为 0、1、2、3 的药水。比如第一只小白鼠在第 20 分钟，喝掉编号为 XXXX1 的药（如果还没死的话）。第 3 只小白鼠第 50 分钟喝掉编号为 XX3XX 的药（如果还没死的话）。
2. 如果在喝药之后 15 分钟之内死亡，那么就说明毒药在对应编号的药。如果最终也没死，那么毒药是对应位为 4 的药。
3. 以此类推，可以判断出毒药五进制的对应编号，即可找出毒药。

### 公式

类似的，最初有  $y$  瓶药，那么需要小白鼠数量  $x = \text{ceil}(\log_5 y)$  只。

## 信息论解法

由于毒药 15 分钟发作，小白鼠采用的策略的是每隔 15 分钟喝 1 瓶毒药（如果这 15 分钟小白鼠没死）。那么小白鼠可能死亡的时间段一共有 4 种，以及 1 种不死亡的情况。所以，一只小白鼠的信息量为  $-\log_2\left(\frac{1}{5}\right)$

接下来，1000 瓶中有 1 瓶毒药的信息量为  $-\log_2\left(\frac{1}{1000}\right) = \log_2 1000$ ，一只小白鼠的信息量为  $-\log_2\left(\frac{1}{5}\right) = \log_2 5$ 。所以需要的小白鼠的数量  $x = \text{ceil}\left(\frac{\log_2 1000}{\log_2 5}\right) = 5$