Compte-rendu - simulation numérique des équations aux dérivées partielles

TP 04 – Méthode des éléments finis

AUDREN Adrien

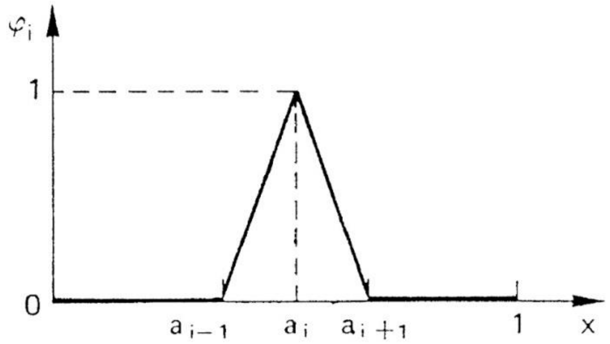
Table des matières

Partie 1 Mise en place du schéma numérique dans un cas général

A. Construction d'une base dans l'espace maillé

On considère un espace Ω maillé par des triangles.

On définit sur chaque triangle trois fonctions chapeau, les N_i $i = 1,2,3$ (de la forme $Ax + By + C$). Ces fonctions prennent la valeur δ_{ij} (symbole de kronecker) aux sommets A_j $j = 1,2,3$ du triangle. Nous savons également qu'elles varient de manière continue sur le triangle en prenant leurs valeurs dans [0,1].



La somme de ces trois fonctions chapeau vaut 1 en tout point du triangle.

Enfin, montrons que $(N_i)_{i=1,2,3}$ définit une base sur le triangle. Puisque son cardinal est identique à la dimension de l'espace du triangle, montrons que c'est une famille libre.

On suppose $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i N_i = 0$

Soit M un point du triangle. $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i N_i(M) = 0$

En particulier, $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i N_i(A_j) = 0$ $\quad et\ donc\ \lambda_j = 0$ Pour chacun des trois sommets A_j

Donc les λ_i sont tous nuls et $(N_i)_{i=1,2,3}$ définit bien une base sur le triangle.

Soit v une fonction définit sur ce triangle. Alors $v = \sum_{i=1}^{3} \beta_i N_i$

L'évaluation de v aux trois sommets du triangle conduit à $\beta_j = v(A_j)$ $\quad j = 1,2,3$

Finalement, toute fonction v définit sur le triangle peut s'écrire :

$$v = v(A_1)N_1 + v(A_2)N_2 + v(A_3)N_3$$

Autrement dit, toute fonction définit sur le triangle peut s'écrire comme la somme des trois fonctions chapeau pondérées par la valeur de cette fonction en chacun des trois sommets. On peut ainsi généraliser à Ω. Toute fonction définit sur l'espace Ω peut s'écrire comme une combinaison linéaire des N_S fonctions chapeau pondérées par les valeurs nodales de la fonction.

B. Problème variationnel

$$\textit{Problème continu} \begin{cases} -\Delta u = \alpha \quad sur\ \Omega \\ u|_{\Gamma_1} = f \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = g \end{cases}$$

On peut se ramener à un problème avec conditions aux limites homogène en introduisant $v = u - f$

$$\begin{cases} -\Delta v = \alpha_1 \quad sur\ \Omega \\ v|_{\Gamma_1} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = g_1 \end{cases}$$

Par la suite, on étudiera uniquement ce problème avec condition aux limites homogènes. La multiplication par une fonction test v dans le même ensemble que u et l'utilisation de la formule de Green conduit au problème variationnel :

$$\textit{Problème variationnel} \begin{cases} Trouver\ u\ \in V \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} \alpha v + \int_{\Gamma_2} gv \end{cases}$$

En effet, le terme de bord sur Γ_1 est nul puisque la fonction test v est dans le même espace que u et donc est nulle sur Γ_1.

C. Inversibilité du système

V désigne ici un sous espace de Ω de dimension finie qui n'est autre que notre espace après maillage. Ceci permet de chercher u sous la forme :

$u = \sum_{i=1}^{N'_S} u_i N_i$ en désignant par N'_S le nombre de sommets où u est non nul. La fonction test prendra les valeurs des $N_i \quad i \in [\![1, N'_S]\!]$.

En réinjectant ces équations dans la formulation variationnelle, on obtient :

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{N'_S} \nabla(u_j N_j) \nabla v = \int_{\Omega} \alpha v + \int_{\Gamma_2} gv$$

$$\sum_{j=1}^{N'_S} \left(\int_{\Omega} \nabla N_j \nabla N_i \right) u_j = \int_{\Omega} \alpha N_i + \int_{\Gamma_2} gN_i \qquad \forall\ i \in [\![1, N'_S]\!]$$

On pose $\begin{cases} A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_j \nabla N_i \\ b_i = \int_{\Omega} \alpha N_i + \int_{\Gamma_2} gN_i \end{cases}$

Donc $\quad \sum_{j=1}^{N'_S} A_{ij}\, u_j = b_i \quad \forall\, i \in [\![1, N'_S]\!] \quad (1)$

Ce qui correspond à un système linéaire en posant $U^T = (u_1, u_2, \dots, u_{N'_S})$ et $b^T = (b_1, b_2, \dots, b_{N'_S})$.

$$AU = b \quad (2)$$

Montrons que la matrice $A = \left(A_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,N'_S]\!]^2}$ est bien inversible.

A est évidemment symétrique. De plus, $(AU, U) = \sum_{1\le i,j\le N'_S}\left(\int_\Omega \nabla N_j \nabla N_i\right) u_i u_j$

$$= \int_\Omega \|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^{N'_S}} \ge 0$$

Cette somme est nulle si u est constant. Or $u|_{\Gamma_1} = 0$. Donc u constant de valeur 0. Donc la somme est nulle si u est nul. Ainsi, A est bien définie positive. Le système (2) est inversible.

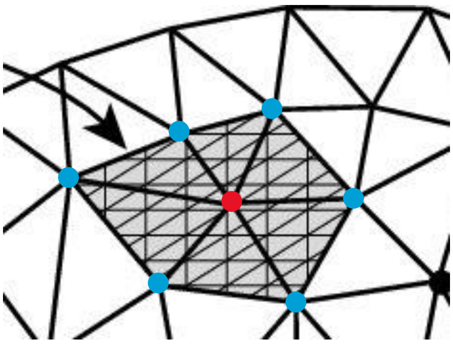
On ne peut s'empêcher de remarquer le lien avec la propriété d'ellipticité de la forme bilinéaire associée à la matrice A $\;(\,a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,)$ définie dans le théorème de Lax-Milgram qui justifie l'existence d'une unique solution au problème variationnel.

D. Equations nodales : cas du nœud intérieur

Remarquons que $A_{ij} = \int_\Omega \nabla N_j \nabla N_i = \int_{Supp(N_j)\cap Supp(N_i)} \nabla N_j \nabla N_i$

Ce terme s'annule si i et j correspondent à des nœuds appartenant à deux triangles distincts.

On s'intéresse ici au cas d'un nœud strictement intérieur au maillage. Prenons à titre d'exemple le maillage suivant : (l'aire grisé représentant le support de N_0)



Si on note 0 le point central et que les nœuds qui l'entourent sont numérotés de 1 à 6, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{6} A_{0j} u_j = b_0$$

On a donc 7 équations pour un nœud intérieur.

On désigne les 6 triangles entourant le nœud intérieur par T_i.

$$A_{00} = \int_{T_1} |\nabla N_0|^2 + \int_{T_2} |\nabla N_0|^2 + \int_{T_3} |\nabla N_0|^2 + \int_{T_4} |\nabla N_0|^2 + \int_{T_5} |\nabla N_0|^2 + \int_{T_6} |\nabla N_0|^2$$

$$A_{0j} = \int_{T_1} \nabla N_0 \nabla N_j + \int_{T_2} \nabla N_0 \nabla N_j \quad pour\ j \geq 1$$

En prenant en compte la remarque sur les supports des fonctions chapeaux. En effet le support de N_0 intersecté avec celui de N_j ne comporte que deux triangles.

On va donc pouvoir résoudre le problème global en construisant des matrices locales pour chaque triangle que l'on additionnera par la suite pour obtenir une matrice globale.

N_0 s'annulant sur le bord Γ_2 puisque ne faisant pas partie de son support. On aura :

$$b_0 = \int_{\Omega} \alpha N_0 = \int_{Supp(N_0)} \alpha N_0$$

On approximera les intégrales de surface sur le maillage de la manière suivante :

$$\iint_T F(x,y)dxdy = \frac{Aire(T)}{3}(F(A_1) + F(A_2) + F(A_3)) \quad avec\ F(A_j)\ les\ valeurs\ nodales\ de\ F$$

$$= Aire(T).F \quad si\ F\ est\ constante\ sur\ T$$

D'où $\int_T \alpha N_0 = \frac{Aire(T)}{3}\alpha_0$ (car N_0 s'annule en A_1 et A_2)

On définit par ailleurs les fonctions chapeaux de la manière suivante :

$$N_1(x,y) = \frac{(x_3 - x_2)(y - y_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$N_2(x,y) = \frac{(x - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$N_3(x,y) = \frac{(x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

On vérifie bien que : $N_i(x_j, y_j) = 1\ si\ i = j\ et\ 0\ sinon.$

$$|\nabla N_1(x,y)|^2 = \frac{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}{((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2}$$

$$|\nabla N_2(x,y)|^2 = \frac{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}{((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2}$$

$$|\nabla N_3(x,y)|^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2}$$

$$\nabla N_1(x,y)\nabla N_2(x,y) = \frac{-(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}{((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2}$$

$$\nabla N_1(x,y)\nabla N_3(x,y) = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)}{((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2}$$

$$\nabla N_2(x,y)\nabla N_3(x,y) = \frac{-(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) - (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2}$$

De plus, $Aire(T) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{N_1N_2} \times \overrightarrow{N_1N_3}).\overrightarrow{k_z}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1)\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}(x_3 - x_1) \\ (y_3 - y_1)\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$$

Ce qui va permettre de remplacer les dénominateurs précédents par $4A^2$.

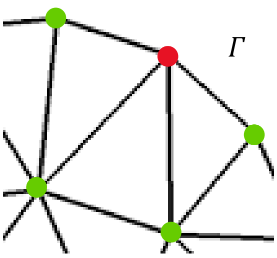
On a finalement pour chaque triangle $i\ avec\ i \in [\![1, N]\!]$ en utilisant l'approximation précédente sur le calcul d'intégrales :

$$\frac{1}{4A}\begin{bmatrix}(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2 & -(x_3-x_1)(x_3-x_2)-(y_3-y_1)(y_3-y_2) & (x_2-x_1)(x_3-x_2)+(y_2-y_1)(y_3-y_2) \\ sym & (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2 & -(x_2-x_1)(x_3-x_1)-(y_2-y_1)(y_3-y_1) \\ sym & sym & (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix}u_1 \\ u_2 \\ u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1 \\ b_2 \\ b_3\end{bmatrix} = \frac{Aire(T_i)}{3}\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3\end{bmatrix} \quad \text{pour un nœud intérieur.}$$

E. Conditions aux limites : cas du nœud extérieur

On s'intéresse maintenant à un nœud situé sur le bord du domaine Ω et où u ne s'annule pas ($i.e\ \in\ \Gamma_2$)



Cette fois, l'équation nodale s'écrit en considérant 0 le point rouge.

$$\sum_{j=0}^{4} A_{0j}u_j = b_0$$

Ce qui donne pour ce maillage 5 équations pour un nœud extérieur.

En prenant en compte les contraintes sur les supports des fonctions chapeaux, on obtient :

$$A_{00} = \int_{T_1} |\nabla N_0|^2 + \int_{T_2} |\nabla N_0|^2 + \int_{T_3} |\nabla N_0|^2$$

$$A_{0j} = \int_{T_1} \nabla N_0 \nabla N_j\ pour\ j \geq 1$$

Ici, il faut prendre en compte la condition de Neumann.

$$b_0 = \int_{\Omega} \alpha N_0 + \int_{\Gamma_2} gN_0 = \int_{Supp(N_0)} \alpha N_0 + \int_{\partial Supp(N_0)} gN_0$$

En notant $L(T_i)$ la longueur du segment appartenant au triangle T_i et confondu avec Γ_2, on obtient :

$$\int_{\partial Supp(N_0)} gN_0 = \frac{L(T_1)}{2}(0+g_0) + \frac{L(T_2)}{2}(g_0+0)$$

Et donc $\int_T \alpha N_0 + \int_T gN_0 = \frac{Aire(T)}{3}\alpha_0 + \frac{L(T)}{2}g_0$

On a finalement pour chaque triangle $i \text{ avec } i \in [\![N+1, N_S']\!]$ (triangles situés sur le bord Γ_2)

$$\frac{1}{4A}\begin{bmatrix} (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2 & -(x_3-x_1)(x_3-x_2)-(y_3-y_1)(y_3-y_2) & (x_2-x_1)(x_3-x_2)+(y_2-y_1)(y_3-y_2) \\ sym & (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2 & -(x_2-x_1)(x_3-x_1)-(y_2-y_1)(y_3-y_1) \\ sym & sym & (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{Aire(T_i)}{3}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \frac{L(T_i)}{2}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$ pour un nœud extérieur et situé sur Γ_2.

Remarquons que les g_i (valeur de g au nœud i) doivent s'annuler s'ils ne sont pas sur Γ_2.

F. Assemblage du schéma

Il s'agit maintenant de construire la matrice $A = \left(A_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,N_S]\!]^2}$.

Il va falloir assigner un numéro de ligne et de colonne à chacun des 9 blocs des matrices locales. La table d'association utilisée n'est autre que la table reliant les numéros des sommets (et donc les valeurs nodales) aux numéros des triangles, table notée « Num ».

N_1	…
N_2	…
N_3	…

$\xrightarrow{n° \text{ de triangle croissant}}$

$$n°ligne\ global = Num(n°ligne\ local\ , n°triangle)$$

$$n°colonne\ global = Num(n°colonne\ local\ , n°triangle)$$

On prendra garde à bien distinguer les trois cas : nœud intérieur, sur Γ_2 ou Γ_1. En effet, les valeurs de la matrice $B = (b_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$ telle que $AU = B$ varient selon si le triangle considéré est intérieur ou si une au moins de ses frontières se confond avec Γ_2.

Enfin, pour assurer la condition de Dirichlet sur Γ_1, pour tout sommet i situé sur Γ_1, la ligne entière i de la matrice A globale s'annulera sauf en $A(i,i)$ et le vecteur de sollicitation global B prendra la valeur 0 à la i $\grave{e}me$ ligne. Et ceci afin d'obtenir $u_i = 0 \quad \forall\ sommet\ i\ sur\ \Gamma_1$.

On peut finalement inverser le système afin de retrouver les valeurs nodales de u.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N_S} \end{bmatrix} = A^{-1}B$$

Partie 2 Résolution dans le cas d'un fluide Newtonien

A. Formulation variationnelle

$$Problème\ continu \begin{cases} div\left(\mu\, \overrightarrow{grad}(u)\right) = -a \quad sur\ \Omega \\ u = 0\ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

$$Problème\ variationnel \begin{cases} Trouver\ u\ \in V \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} av \end{cases}$$

Avec $a = 1$ constant sur Ω et $\mu = 1$ (viscosité du fluide) également constante.

B. Implémentation du schéma numérique

Il suffit ici de considérer $g = 0$ sur tout le domaine Ω. a étant constante de valeur 1, on en déduit le schéma suivant pour les matrices locales :

Pour chaque triangle $i\ avec\ i \in [\![1, N_S]\!]$

$$\frac{1}{4A}\begin{bmatrix} (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2 & -(x_3-x_1)(x_3-x_2)-(y_3-y_1)(y_3-y_2) & (x_2-x_1)(x_3-x_2)+(y_2-y_1)(y_3-y_2) \\ sym & (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2 & -(x_2-x_1)(x_3-x_1)-(y_2-y_1)(y_3-y_1) \\ sym & sym & (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{Aire(T_i)}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Implémentation MatLab des matrices locales :

```
% Calcul et affectation dans "tab" des matrices locales
% K_loc et des surfaces de chaque triangle.

for k=1:NT

    n1 = Num(1,k);
    x1 = Som(1,n1);
    y1 = Som(2,n1);

    n2 = Num(2,k);
    x2 = Som(1,n2);
    y2 = Som(2,n2);

    n3 = Num(3,k);
    x3 = Som(1,n3);
    y3 = Som(2,n3);

    tab{1,k} = (1/2)*abs((x2-x1)*(y3-y1)-(x3-x1)*(y2-y1));

    A = tab{1,k};

    tab{2,k}(1,1) = (mu/(4*A))*((x3-x2)^2+(y3-y2)^2);

    tab{2,k}(1,2) = (mu/(4*A))*(-(x3-x1)*(x3-x2)-(y3-y1)*(y3-y2));

    tab{2,k}(1,3) = (mu/(4*A))*((x2-x1)*(x3-x2)+(y2-y1)*(y3-y2));

    tab{2,k}(2,1) = tab{2,k}(1,2);

    tab{2,k}(2,2) = (mu/(4*A))*((x3-x1)^2+(y3-y1)^2);

    tab{2,k}(2,3) = (mu/(4*A))*(-(x2-x1)*(x3-x1)-(y2-y1)*(y3-y1));

    tab{2,k}(3,1) = tab{2,k}(1,3);

    tab{2,k}(3,2) = tab{2,k}(2,3);

    tab{2,k}(3,3) = (mu/(4*A))*((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);
end
```

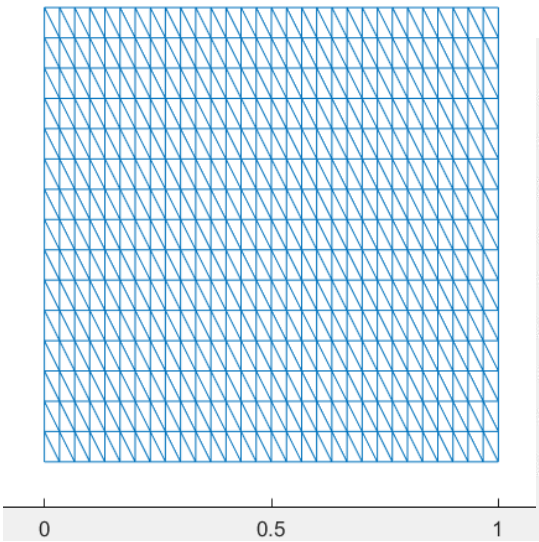
Implémentation des matrices globales :

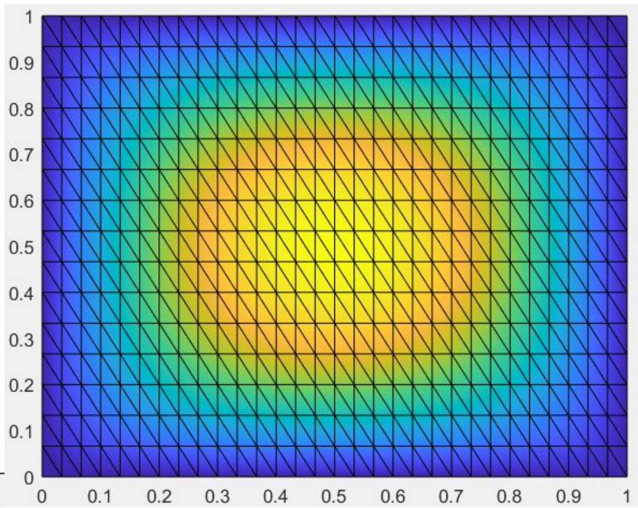
```
% *******************************************************
% Assemblage de la matrice de rigidité globale
% et du vecteur de sollicitation global
% *******************************************************

M_global = zeros(NS,NS);

F_global = zeros(NS,1);

for k=1:NT

    % Matrice de rigidité globale

    T = zeros(NS,NS);

    T(Num(1,k),Num(1,k)) = tab{2,k}(1,1);

    T(Num(1,k),Num(2,k)) = tab{2,k}(1,2);

    T(Num(1,k),Num(3,k)) = tab{2,k}(1,3);


    T(Num(2,k),Num(1,k)) = tab{2,k}(2,1);

    T(Num(2,k),Num(2,k)) = tab{2,k}(2,2);

    T(Num(2,k),Num(3,k)) = tab{2,k}(2,3);

    T(Num(3,k),Num(1,k)) = tab{2,k}(3,1);

    T(Num(3,k),Num(2,k)) = tab{2,k}(3,2);

    T(Num(3,k),Num(3,k)) = tab{2,k}(3,3);

    M_global = M_global + T;


    % Vecteur de sollicitation globale

    F = zeros(NS,1);

    F(Num(1,k)) = a*(1/3)*tab{1,k};
    F(Num(2,k)) = a*(1/3)*tab{1,k};
    F(Num(3,k)) = a*(1/3)*tab{1,k};

    F_global = F_global + F;

end
```

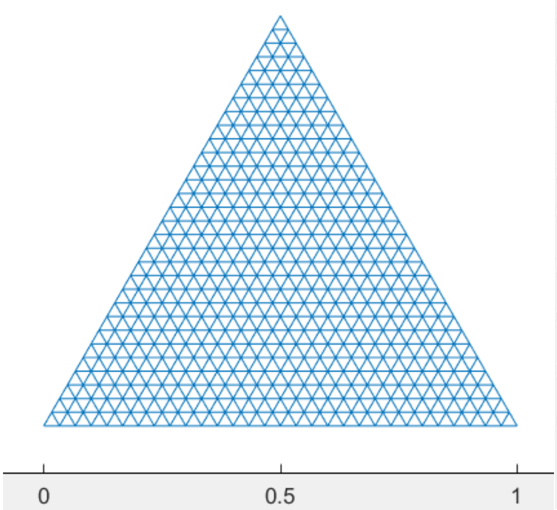
On veille également à assurer la condition de Dirichlet pour tout le bord du domaine avec l'annulation de coefficients globaux tel que mentionné précédemment.

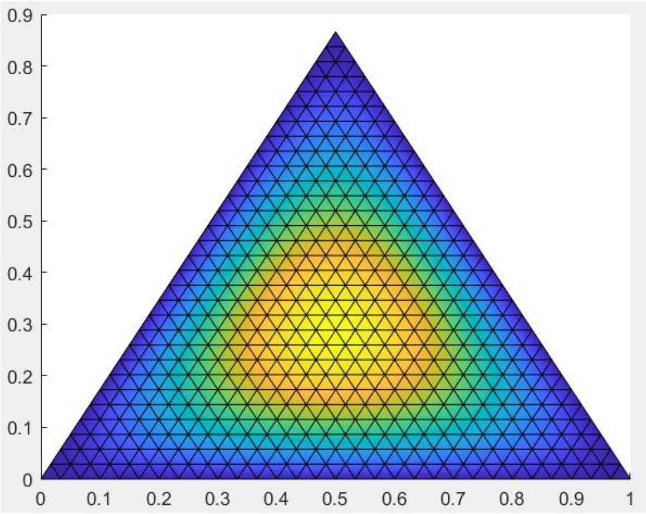
On peut ensuite inverser le système pour retrouver les valeurs nodales de u.

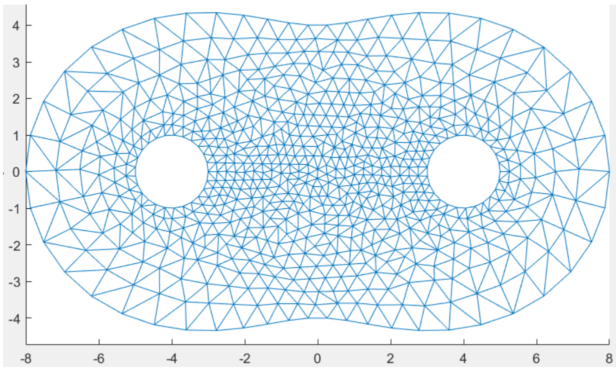
On va générer différents maillages dont les variables des triangles sont fixés à Nx = 15 et Ny = 30. On affichera la solution globale de l'équation du fluide Newtonien grâce à un affichage par patchs, c'est-à-dire un tracé de la solution sur chaque triangle constituant le maillage.

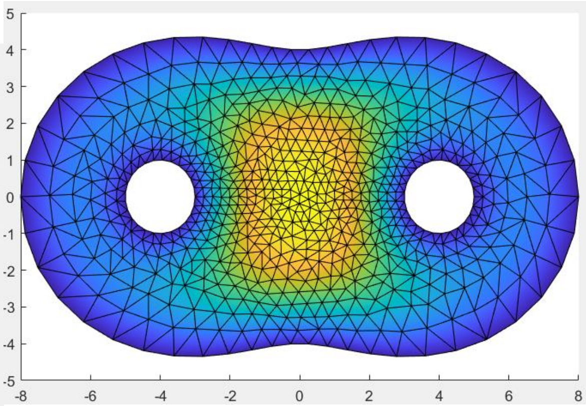






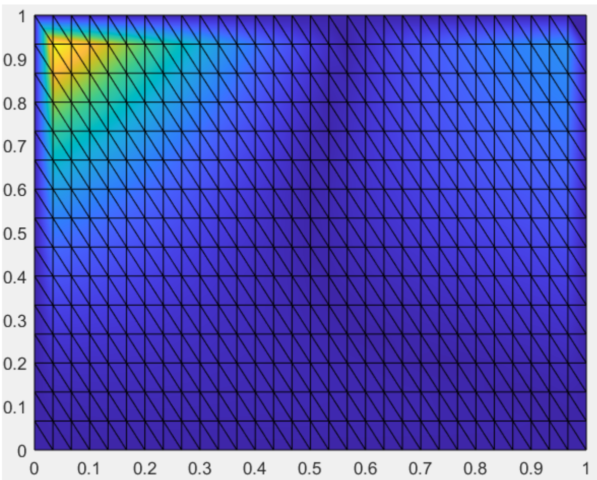


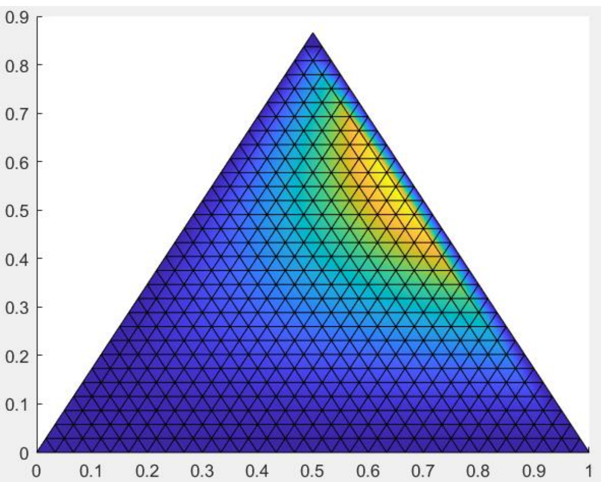




C. Comparaison à la solution théorique

On peut aussi évaluer l'écart absolu avec la solution théorique sur le domaine carré et triangulaire.





Ecart $|U-U_{\text{théorique}}|$

L'erreur semble se localiser sur les bords du domaine.

Partie 3 Résolution dans le cas d'un fluide non Newtonien

A. Formulation variationnelle

$$\textit{Problème continu} \begin{cases} div\left(\mu\, \overrightarrow{grad}(u)\right) = -a \quad sur\ \Omega \\ \mu = \mu_0 \|\nabla u\|^{n-1} \\ u = 0\ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

$$\textit{Problème variationnel} \begin{cases} Trouver\ u\ \in V \\ \mu_0 \int_\Omega \|\nabla u\|^{n-1} \nabla u \nabla v = \int_\Omega av \end{cases}$$

Avec $a = 1$ constant sur Ω et $\mu_0 = 1$ (coefficient de viscosité du fluide) également constante.

B. Implémentation du schéma numérique

$$\mu_0 \int_\Omega \left(\sqrt{\sum_{1 \le k,l \le N'_S} \nabla N_k \nabla N_l u_k u_l} \right)^{n-1} \sum_{j=1}^{N'_S} \nabla(u_j N_j) \nabla v = \int_\Omega av$$

$$\mu_0 \sum_{j=1}^{N'_S} \left(\int_\Omega \left(\sqrt{\sum_{1 \le k,l \le N'_S} \nabla N_k \nabla N_l u_k u_l} \right)^{n-1} \nabla N_j \nabla N_i \right) u_j = \int_\Omega \alpha N_i \qquad \forall\, i \in [\![1, N'_S]\!]$$

On note $\eta_u = \|\nabla u\|^{n-1} = \left(\sqrt{\sum_{1 \le k,l \le N'_S} \nabla N_k \nabla N_l u_k u_l} \right)^{n-1}$

Bien qu'un schéma linéaire semble difficile à trouver on pourrait envisager une première inversion du système sans le terme de viscosité dépendant de la vitesse du fluide. Une fois les valeurs nodales de vitesse retrouvées on pourrait calculer η_u et inverser à nouveau le système en réinjectant sa valeur à posteriori. On pourrait ainsi itérer sur cette viscosité dépendante de la vitesse et sur les valeurs nodales de la vitesse. Il reste à démontrer la convergence d'un tel schéma.