诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2017-2018 学年第二学期《概率论与数理统计》A 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上；

3. 考试形式：闭卷；

4. 本试卷共八大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

可能用到的表值：

$\Phi(1.285)=0.9$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2.33)=0.99$

$t_{0.025}(35)=2.0301$, $t_{0.025}(36)=2.0281$, $t_{0.05}(35)=1.6896$, $t_{0.05}(36)=1.6883$

一、 填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设袋中有红、白、黑球个 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的求都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为______________.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} Ax^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，则 $A=$______.

3. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 独立同分布，$X_1\sim B(1,p)$，则 $P(\overline{X}=k/n)=$_______.

4. 设连续随机变量 X 的密度函数满足 $f(x)=f(-x)$，$P\{X\le x_\alpha\}=\alpha$，则

$P(|X|>x_\alpha)=$________。

5. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自 X 的简单随机样本，设

$$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$$

则当 $C=$_________ 时，$CY\sim\chi^2(2)$..

..

6. 设二维离散型随机变量(X,Y)的分布列为

(X,Y)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
P	0.4	0.2	a	b

若$E(XY)=0.8$，$a=$_______。

1. $\frac{2}{9}$ **2.** 3 3. $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 4. $\begin{cases} 2(1-\alpha) & \alpha>\frac{1}{2} \\ 1 & 0<\alpha\le\frac{1}{2} \end{cases}$ 5. $\frac{1}{3\sigma^2}$ 6. 0.1

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设随机变量X的密度$f(x)$满足$f(1-x)=f(1+x)$，$\int_0^2 f(x)dx=0.8$，则$P\{X<0\}=$______.

(A) 0.5 (B) 0.2 (C) 0.1 (D) 0.4

2. 设$X_1,X_2\cdots X_n(n\ge 2)$为来自总体$N(\mu,1)$的简单随即样本，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从χ^2分布

(B) $2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 服从χ^2分布

(D) $n(\bar{X}-\mu)^2$服从χ^2分布

3. 设随机变量X服从$N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, 记$p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$. 则（ ）

$(A)p$ 随着μ增加而增加 $(B)p$ 随着σ增加而增加

$(C)p$ 随着μ增加而减少 $(D)p$ 随着σ增加而减少

4. 随机试验E有三种两两不相容的结果$A_1,A_2,A_3,$ 且三种结果发生的概率均为$\frac{1}{3}$，将试验E独立重复做两次，X表示 2 次试验中结果A_1发生的次数，Y表示两次试验中结果A_2发生的次数，则X与Y的相关系数为（ ）

$(A)\frac{1}{3}$ $(B)-\frac{1}{3}$ $(C)-\frac{1}{2}$ $(D)\frac{1}{2}$

5. 设A,B为两个随机事件，且$0<P(A)<1, 0<P(B)<1$,如果$P\left(A\mid B\right)=1$,则

(A) $P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=1$ (B) $P\left(A\mid\overline{B}\right)=0$ (C) $P\left(A\cup B\right)=0$ (D) $P\left(B\mid A\right)=1$

6. 设随机变量ξ的数学期望$E\xi=\mu$，方差$D\xi=\sigma^2$，则由车贝雪夫不等式

$P\left(|\xi-\mu|\geq 3\sigma\right)\leq$ ____ 。

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{9}$

1.C 2.B 3.B 4.C 5. A 6. D

三、(10 分) 一个盒子中装有 4 个白球、6 个红球，现投掷一枚均匀的骰子，骰子投掷出几点就从盒中无放回地取几个球。试求：

(1) 所取的全是白球的概率。

(2) 如果已知取出的都是白球，那么骰子所掷的点数恰为 3 的概率是多少?

解 (1) $B_j=\{\text{骰子掷出第}j\text{点}\}$ $A=\{\text{取出的球全是白球}\}$ (1 分)

$P(B_j)=1/6$，$P(A\mid B_j)=\begin{cases}\dfrac{C_4^j}{C_{10}^j}, & j\leq 4\\ 0, & j>4\end{cases}$ (3 分)

$$P(A)=\sum_j P(B_j)P(A\mid B_j)=2/21=0.095 \quad (3\text{ 分})$$

(2) $P(B_3\mid A)=\dfrac{P(B_3)P(A\mid B_3)}{P(A)}=7/120=0.058$ (3 分)

四、(10 分) 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布$N\left(\mu, \sigma^2\right)$。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差$Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$，利用$Z_1$，$Z_2,\ldots Z_n$估计$\sigma$。

(1) 求Z_i的概率密度；

(2) 利用一阶矩求σ的矩估计量。

解（1）因为 $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $Y_i = X_i - \mu \sim N(0,\sigma^2)$，对应的概率密度为 $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$，设 Z_i 的分布函数为 $F(z)$，对应的概率密度为 $f(z)$。

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；(1 分)

当 $z \ge 0$ 时，$F(z) = P\{Z_i \le z\} = P\{|Y_i| \le z\} = P\{-z \le Y_i \le z\} = \int_{-z}^{z} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$； (3 分)

则 Z_i 的概率密度为 $f(z) = F'(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$；(1 分)

(2) 因为 $EZ_i = \int_0^{+\infty} z \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，(3 分)

所以 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} EZ_i$，(1 分)

从而 σ 的矩估计量为 $\widehat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$ (1 分)

五、(12 分)设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=0\} = \dfrac{1}{3}$, $P\{X=1\} = \dfrac{2}{3}$, Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\} = P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \dfrac{1}{3}$，且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$。

(1) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布。

(2) 求 $Z=XY$ 的概率分布。

(3) 求 X 与 Y 的相关系数。

解：

$P\{X^2 = Y^2\} = 1$

$\therefore P\{X^2 \ne Y^2\} = 0$ (2分)

X \ Y	-1	0	1	
0	0	1/3	0	1/3
1	1/3	0	1/3	2/3
	1/3	1/3	1/3	

(2 分)

(2) $P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{3}$ (1分)

$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\dfrac{1}{3}$ (1分)

$P\{XY=0\}=\dfrac{1}{3}$ (1分)

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(1 分)

(3) $E(X)=\dfrac{2}{3},\ E(Y)=0,\ D(X)=\dfrac{2}{9},\ D(Y)=\dfrac{2}{3},$ (2分)

$E(XY)=0$ (1分)

$\rho_{XY}=0$ (1分)

六、(10) 假设一条生产线生产的产品合格率是 0.8.要使一批产品的合格率达到在 76% 与 84%之间的概率不小于 90%, 使用中心极限定理推断这批产品至少要生产多少件?

$\Phi(3)=0.9987$ $\Phi(1.25)=0.894$ $\Phi(1.645)=0.95$ $\Phi(1.33)=0.908$

解: 设这批产品至少要生产 n 件。令

$$X_i=\begin{cases}0 & \text{第i件产品是次品}\\ 1 & \text{第i件产品是合格品}\end{cases}$$ (2 分)

$$P\{76\%<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i<84\%\}=P\{-0.04<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-0.8<0.04\}$$

$$=P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-0.8|<0.04\}=P\left\{\frac{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-0.8|}{\sqrt{0.16/n}}<\frac{0.04}{\sqrt{0.16/n}}\right\}$$

$$=2\Phi(\frac{0.04}{\sqrt{0.16/n}})-1\geq 0.9$$ (6分)

$\dfrac{0.04}{\sqrt{0.16/n}}\geq 1.645$, $n\geq 270.6025$ (2 分)

这批产品至少要生产 271 件

七、**(10 分)** 设某次概率统计考试考生的成绩 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 $\overline{x}=66.5$ 分，修正方差为 $S^{*2}=225$ 分.

(1)在置信度为 0.95 时，求出学生成绩数学期望 μ 的置信区间。

(2)在显著性水平 α =0.05 下，检验是否可以认为这次考试的平均成绩为 70 分。

$t_{0.975}(35)=2.0301,\quad t_{0.975}(36)=2.0281,\quad t_{0.95}(35)=1.6896,\quad t_{0.95}(36)=1.6883$

解：(1) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{S^{*2}}{n}}}\sim t(n-1)$，(2 分)

$\delta\left(\overline{x}\right)=\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}t_{0.975}(35)=\dfrac{15}{6}\times 2.0301=5.07525$ (2 分)

学生成绩数学期望 μ 的置信区间：(61.42,71.58) (1 分)

(2) $H_0:\mu=70,\quad H_1:\mu\neq 70,$ (1 分)

拒绝域：$A=\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-70}{\sqrt{\dfrac{S^{*2}}{n}}}\right|\geq t_{0.975}(35)\right\}$，$\left|\dfrac{66.5-70}{\sqrt{\dfrac{15^2}{36}}}\right|=1.4<t_{0.975}(35)=2.0301$ (3 分)

不拒绝原假设。可以认为这次考试的平均成绩为 70 分。 (1 分)

八、**(12 分)** 设总体 X 的密度函数是 $f(x;\theta)=\dfrac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$，其中 $\theta>0$ 是参数。样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 来自总体 X。

(1) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_L$；

(2) 证明 $\hat{\theta}_L$ 是 θ 的无偏估计，且 $\hat{\theta}_L$ 是 θ 的相合估计（一致估计）。

解：(1) 似然函数：$L=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x_i|}{\theta}}$，$L=\dfrac{1}{(2\theta)^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{\theta}}$，(3 分) $\ln L=-n\ln(2\theta)-\dfrac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (1 分)

$\frac{d}{d\theta}(\ln L)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，令$-\frac{n}{\hat{\theta}}+\frac{1}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$，（1 分）

得

$\hat{\theta}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ （1 分）

（2）$E|X|=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}xe^{-\frac{x}{\theta}}dx=-\left(xe^{-\frac{x}{\theta}}\right)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=-\left(\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\Big|_0^{+\infty}=\theta$ （2 分）

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\theta}xe^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=0$，

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\theta}x^2e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$=-\left(x^2e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$=-2\left(x\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\Big|_0^{+\infty}+2\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=-2\left(\theta^2e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\Big|_0^{+\infty}=2\theta^2$

$E\hat{\theta}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E|X|=\theta$，$\hat{\theta}_L$是$\theta$的无偏估计，（1 分）

$E|X|^2=EX^2=2\theta^2$，

$D|X|=EX^2-(E|X|)^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$，$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right)=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{\theta^2}{n}$

$P\left\{\left|\hat{\theta}_L-E\hat{\theta}_L\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\to 0$，$\hat{\theta}_L$是$\theta$的相合估计 （3 分）