一、 填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1．设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2,方差分别为 1 和 4,而相关系数为 -0.5，则根据契比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq$ <u>1/12</u>.

解 因为
$$E(X+Y)=EX+EY=0$$
$$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)$$
$$=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}$$
$$=1+4-2\times 0.5\times 2=3$$
根据契比雪夫不等式
$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$
所以
$$P\{|X+Y|\geq 6\}\leq\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

2．设总体 X 服从正态分布 $N\left(0,2^2\right)$,而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则随机变量
$$Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2\right)}$$
服从<u>　F　</u>分布,参数为<u>(10, 5)</u>.

3．设总体 X 的概率密度 $f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$，其中参数 $\sigma(\sigma>0)$ 未知，若 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\widehat{\sigma}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ 是 σ 的估计量，则 $E(\widehat{\sigma})=$______________

解 $E\hat{\sigma}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=\frac{n}{n-1}E|X_i|$
$$=\frac{n}{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}\cdot e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\frac{2n}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{x}{2\sigma}\cdot e^{-\frac{x}{\sigma}}dx\xrightarrow{t=\frac{x}{\sigma}}\frac{n}{n-1}\int_0^{+\infty}te^{-t}\sigma dt$$
$$=\frac{n\sigma}{n-1}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=\frac{n}{n-1}\sigma$$

4．设二维随即变量 (X,Y) 服从 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$_____.

解 因为 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，从而有

$$E(X)=\mu, E\left(X^2\right)=D(X)+E^2(X)=\sigma^2+\mu^2$$

又由 $\rho=0$ 知 X,Y 相互独立，于是 X 与 Y^2 也独立；故

$$E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=\mu(\sigma^2+\mu^2).$$

5．设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$ _____ .

解　由概率值与分布函数的定义知：

$$P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}.$$

6．设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X=EX^2\right\}=$ ________ .

解　由 $DX=EX^2-(EX)^2$，得 $EX^2=DX+(EX)^2$，又因为 X 服从参数为 1 的泊松分布，

所以 $DX=EX=1$，所以 $EX^2=1+1=2$，所以 $P\left\{X=2\right\}=\dfrac{1^2}{2!}e^{-1}=\dfrac{1}{2}e^{-1}$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1.　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $X\sim N(0,1)$ 的一个样本，$\bar{X}$ 与 S^2 分别为样本均值和样本方差,则(　　)成立.

(A) $\bar{X}\sim N(0,1)$　　　　(B) $\sqrt{n}\bar{X}\sim N(0,1)$

(C) $\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(2n)$　　　　(D) $\bar{X}/S\sim t(n-1)$

解：因为 $\bar{X}\sim N(0,1/n)$,所以 A 项不正确,B 项正确.

因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，$X_i\sim N(0,1)$,所以 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$,因此 C 项也不正确.

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)$；当 $\mu=0$，$n\ne 1$ 时，$\dfrac{\bar{X}}{S/\sqrt{n-1}}\ne\dfrac{\bar{X}}{S}$,所以 D 项也不正确.

2．设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则(　　　). **[C]**

(A) $X+Y$ 服从正态分布　　　　(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布　　　　(D) X^2/Y^2 服从 F 分布

3．设随机事件 A，B 满足 $A\subset B$ 且 $0<P(A)<1$，则必有（　）

(A) $P(A)\geq P(A|A\cup B)$　　　　(B) $P(A)\leq P(A|A\cup B)$

(C) $P(B)\geq P(B|A)$　　　　(D) $P(B)\leq P(B|\overline{A})$

解 因为 $A\subset B$，$0<P(A)<1$，有 $0<P(A)\leq P(B)<1$，$A\cup B=B, AB=A$，故

$$P(A|A\cup B)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}\geq P(A)$$

故选（B）.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，S^2 是样本方差,则 $DS^2=$（　　）.

(A) $\frac{1}{5}\sigma^2$　　　(B) $\frac{1}{5}\sigma^4$　　　(C) $\frac{2}{5}\sigma^2$　　　(D) $\frac{5}{18}\sigma^4$

解：因为是正态分布,且 $n=6$,故 $\frac{6S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)$

由 χ^2 分布的性质可知 $D\left(\frac{6S^2}{\sigma^2}\right)=2\times5=10$,即 $DS^2=\frac{10}{36}\sigma^4=\frac{5}{18}\sigma^4$.故 D 项正确.

5. 随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　）

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

解　用排除法. 设 $Y=aX+b$，由 $\rho_{XY}=1$，知道 X,Y 正相关，得 $a>0$，排除 (A)、(C)；由 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,4)$，得 $EX=0, EY=1$，所以

$E(Y)=E(aX+b)=aEX+b=a\times0+b=1$，因此 $b=1$. 排除 (B). 故选择 (D)

6. 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$　　　　(B) $6p(1-p)^2$

（C）$3p^2(1-p)^2$ （D）$6p^2(1-p)^2$

解 第 4 次一定要命中，则对前 3 次使用伯努列概型：$C_3^1 p(1-p)^2$，加上第 4 次命中，概率为$C_3^1 p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2$.故选（C）.

三、(10 分) 箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别是 1，2，3 个，现从箱中随机地取出 2 个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数.

（Ⅰ）求随机变量(X,Y)的概率分布；（Ⅱ）求$Cov(X,Y)$.

解 （Ⅰ）(X,Y)是二维离散型随机变量，X 只能取 0 和 1，而Y 可以取 0，1，2 各值，由于$P\{X=0,Y=0\}=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$，$P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$，

$P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$，$P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$，$P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$，

$P\{X=1,Y=2\}=P\{\phi\}=0$；于是得(X,Y)的联合概率分布

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X=i\}$
0	1/5	2/5	1/15	2/3
1	1/5	2/15	0	1/3
$P\{Y=j\}$	2/5	8/15	1/15	

（Ⅱ）根据(X,Y)的联合概率分布表可以计算出$E(X)=\dfrac{1}{3},E(Y)=\dfrac{2}{3},E(XY)=\dfrac{2}{15}$，

于是有$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{4}{45}$.

四、(8分) 已知男子中有5%是色盲患者，女子中有0.25%是色盲患者，若从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少?

解 设A={抽到一名男性}；B={抽到一名女性}；C={抽到一名色盲患者}，由全概率公式得

$$P(C)=P(C\mid A)P(A)+P(C\mid B)P(B)=5\%\times\frac{1}{2}+0.25\%\times\frac{1}{2}=2.625\%$$

$$P(AC)=P(A)P(C\mid A)=\frac{1}{2}\times 5\%=2.5\%$$

由贝叶斯公式得

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{20}{21}$$

五.（12 分） 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<2\\ 0,\quad 其他\end{cases}$ ，令 $Y=X^2,F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.

(Ⅰ)求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$;(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,Y)$；(Ⅲ) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

解（I） 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，即 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$，则

1) 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

2) 当 $0\le y<1$ 时， $F_Y(y)=P(X^2<y)=P\left(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\right)$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y}.$$

3) 当 $1\le y<4$ 时，$F_Y(y)=P(X^2<y)=P\left(-1<X<\sqrt{y}\right)$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{y}+\frac{1}{2}.$$

4) 当 $y\ge 4$，$F_Y(y)=1$． 所以

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}},0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}},1\le y<4\\ 0,其他\end{cases}.$$

(II) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=E(X-EX)(X^2-EX^2)=EX^3-EXEX^2$，而

$$EX=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4},\quad EX^2=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}\mathrm{d}x=\frac{5}{6},$$

$$EX^3=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}\mathrm{d}x=\frac{7}{8}，\text{所以}\ \mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}.$$

(III) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left(X\le-\frac{1}{2},Y\le4\right)=P\left(X\le-\frac{1}{2},X^2\le4\right)$

$$=P\left(X\le-\frac{1}{2},-2\le X\le2\right)=P\left(-2\le X\le-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

六.（8 分） 某地某种商品在一家商场中的月消费额$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$,且已知$\sigma=100$元。现商业部门要对该商品在商场中的平均月消费额μ进行估计，且要求估计的结果须以不小于95%的把握保证估计结果的误差不超过20元，问至少需要随机调查多少家商场?

$\Phi(1.65)=0.95\quad\Phi(1.96)=0.975\quad\Phi(1.45)=0.926\quad\Phi(1.40)=0.92$

解：求 n，s.t. $P\left\{\left|\mu-\overline{X}\right|\le20\right\}\ge0.95$

$$P\left\{\left|\mu-\overline{X}\right|\le20\right\}=P\left\{-\frac{20}{\sigma/\sqrt{n}}\le\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le\frac{20}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.975\quad n=96.04$　　　至少调查 97 家

七、(16 分)、设总体X服从$[0,\theta]$的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的样本.

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$；(2) 求θ的最大似然估计$\hat{\theta}_2$；(3) 证明$\hat{\theta}_1$，$T_1=\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$和$T_2=(n+1)\min\limits_{1\le i\le n}X_i$均是$\theta$的无偏估计量。

解 (1)
$$EX=\int_0^\theta x dx=\frac{\theta}{2}$$
令$\frac{\theta}{2}=\overline{X}$,得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}_1=2\overline{X}$.

(2)似然函数为

$$L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta\right)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n} & \text{当}0<x_i<\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \left(i=1,2,\cdots,n\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n} & \text{当}0\le x_{(1)}\le x_{(2)}\le\cdots\le x_{(n)}\le\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

又因为$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}<0$,所以$L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta\right)$关于$\theta$单调减,故当$\theta=X_{(n)}$时,$L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta\right)$取得最大值,因此,$\theta$的最大似然估计量是

$$\hat{\theta}_2=X_{(n)}=\max_{1\le i\le n}\left(X_i\right)$$

(3)
$$E\hat{\theta}_1=E\left(2\overline{X}\right)=2E\overline{X}=2EX=2\times\frac{\theta}{2}=\theta$$

所以$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计量.

$X_{(n)}$的密度函数为

$$f_{X_{(n)}}\left(x\right)=\begin{cases}n\frac{x^{n-1}}{\theta^n} & \text{当}0<x<\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故
$$ET_1=\frac{n+1}{n}E\left(X_{(n)}\right)=\frac{n+1}{n}\int_0^\theta n\frac{x^n}{\theta^n}dx=\theta$$

所以T_1是θ的无偏估计量.

$X_{(1)}=\min_{1\le i\le n}\left(X_i\right)$的密度函数为

$$f_{X_{(1)}}\left(x\right)=n\left[1-F\left(x;\theta\right)\right]^{n-1}f\left(x;\theta\right)$$

$$=\begin{cases}n\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta} & \text{当}0<x<\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故
$$ET_2=\left(n+1\right)E\left(X_{(1)}\right)=\left(n+1\right)\int_0^\theta n\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\frac{x}{\theta}dx=\theta$$

所以T_2也是θ的无偏估计量.

八.（10分）

化肥厂用自动打包机装化肥，某日测得8包化肥的重量（斤）如下：

98.7　100.5　101.2　98.3　99.7　99.5　101.4　100.5

已知各包重量服从正态分布N（μ,σ^2）

（1）是否可以认为每包平均重量为100斤（取$\alpha=0.05$）？

（2）求参数σ^2的90%置信区间。

可能用到的分位点：

$t_{0.99}(7)=2.998$，$t_{0.95}(7)=1.895$，$t_{0.975}(7)=2.3646$，$t_{0.95}(6)=1.943$

$\chi^2_{0.95}(7)=14.067$　$\chi^2_{0.05}(7)=2.167$

$\chi^2_{0.95}(6)=12.592$　$\chi^2_{0.05}(6)=1.635$

解、$H_0:\mu_0=100$　　$H_1:\mu_0\neq 100$

检验统计量为$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}}$，$H_0$的拒绝域为$W=\{|t|\geq t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$

计算可得：$\overline{x}=99.975,\ s^2=1.102,\ t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}}=-0.063$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(7)=2.3646$　，$|t|\leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$　故接受原假设。

（2）$\alpha=0.1$，n=8　查表得$\chi^2_{0.95}(7)=14.067$，$\chi^2_{0.05}(7)=2.167$

$s^2=1.102$　故置信区间为

$$[\frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}]=[0.627,4.068]$$