座位号________ 专业班级________ 学院________ 学号________ 姓名________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2020-2021-2 学期《概率论与数理统计》试卷 A

注意事项：1. 所有答案请答在答题卡上，答在试卷上无效；
2. 选择题请用 2B 铅笔涂黑；
3. 考试形式：闭卷；
4. 本试卷共七道大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								

一、选择题（共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=($ $)$.

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{9}$ (C) $\dfrac{2}{9}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

1. B

2. 设 T 服从自由度为 n 的 t 分布，若 $P\{|T|>\lambda\}=\alpha$，则 $P\{T<-\lambda\}=$（ ）.

(A) α (B) $\dfrac{\alpha}{3}$ (C) $\dfrac{\alpha}{2}$ (D) $\dfrac{\alpha}{4}$

2. C

3. 从总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，易证估计量

$$\widehat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3,\quad \widehat{\mu}_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3$$
$$\widehat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3,\quad \widehat{\mu}_4=\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$$

均是总体均值 μ 的无偏估计量，则其中最有效的估计量是(　　).

(A) $\widehat{\mu}_3$ (B) $\widehat{\mu}_1$ (C) $\widehat{\mu}_2$ (D) $\widehat{\mu}_4$

3. A　有 $D\widehat{\mu}_3<D\widehat{\mu}_4<D\widehat{\mu}_2<D\widehat{\mu}_1$.故 $\widehat{\mu}_3$ 最有效,所以 A 项正确.

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为-0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\ge 6\}\le$(　　).

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{10}$ (C) $\dfrac{1}{12}$ (D) $\dfrac{1}{8}$

4. C

解 因为 $$E(X+Y)=EX+EY=0$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}$$

$$=1+4-2\times 0.5\times 2=3$$

根据切比雪夫不等式

$$P\left\{\left|X-EX\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

所以 $$P\left\{\left|X+Y\right|\geq 6\right\}\leq\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

5. 设 是随机事件， 互不相容，$P\left(AB\right)=\dfrac{1}{2},P\left(C\right)=\dfrac{1}{3}$,则 .

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

5. D

由于 互不相容，即

6. 设 为来自总体 的简单随机样本，则统计量$\dfrac{X_1-X_2}{\left|X_3+X_4-2\right|}$的分布 ( ).

(A) (B) (C) (D)

6. B 解 从形式上，该统计量只能服从 分布。故选 。

证明如下:

由正态分布的性质可知， 与 均服从标准正态分布且相互独立，可知

7. 设随机变量 服从参数为 1 的泊松分布，则 ( ).

(A) $\dfrac{1}{2e}$ (B) $\dfrac{1}{3e}$ (C) $\dfrac{e}{3}$ (D) $\dfrac{e}{4}$

7. A

因为 服从参数为 1 的泊松分布，所以其概率布为

从而　于是,

8. 设　为来自二项分布总体　的简单随机样本,　和　分别为样本均值和样本修正方差, 记统计量, 则

(A) np^2　(B) $n(1-p)^2$　(C) np　(D) $n(1-p)$

8. A

因为 , 故

因为 , 所以

9. 设二维离散型随机变量 X、Y 的联合分布律如下，则联合分布函数值 $F(0,3)=$( ).

$X \backslash Y$	0	2	4
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{5}{18}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{4}{9}$

9. B

10.设　为两个分布函数, 其相应的概率密度 ,　是连续函数, 则必为概率密度的是(

(A)　(B)　(C)　(D)

10. D

由分布函数和概率密度的性质可得

,

.

从而有

所以 是概率密度,即正确选项为 D

11. 设二维随机变量 服从正态分布，则（　　).

(A) $\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$ (B) $\sigma\left(\mu^2+\sigma^2\right)$ (C) $\mu^2+\sigma^2$ (D) $\mu\sigma\left(\mu^2+\sigma^2\right)$

11. A

因为 服从二维正态分布，所以

对二维正态随机变量, 所以 相互独立，从而 也相互独立，所以

12. 设随机变量，且相关系数, 则(　　).

(A) (B)

(C) (D)

12. D

因为 与 的相关系数，所以 与 正相关, 即存在常数，使得，且，排除(A)、(C) 因为

所以 从而

二、(10 分) 甲、乙两人轮流投篮，甲先投。一般来说，甲、乙两人独立投篮的命中率分别为 0.7 和 0.6。但由于心理因素的影响，如果对方在前一次投篮中投中，紧跟在后面投篮的这一方的命中率就会有所下降，甲、乙的命中率分别变为 0.4 和 0.5。求：

(1) 乙在第一次投篮时投中的概率； (2) 甲在第二次投篮时投中的概率。

解：令 A_1 表示事件“乙在第一次投篮时投中”,

令 B_i 表示事件“甲在第 i 次投篮时投中”，$i=1,2$

⑴ $P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(\overline{B_1})P(A_1|\overline{B_1})$

$=0.7\times0.5+0.3\times0.6=0.53$ (5 分)

⑵ $P(A_1)=0.53,\quad \Rightarrow P(\overline{A_1})=0.47$

$P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(B_2|\overline{A_1})$

$=0.53\times0.4+0.47\times0.7=0.541$ (5 分)

三、(10 分) 有一批建筑房屋用的木柱,其中 80%的长度不超过 3m，现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根超过 3m 的概率是多少?

附：$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.5)$=0.9332，$\Phi(2)$=0.9773，$\Phi(2.5)=0.9938$

解 $设X_i=\begin{cases}1 & 当所取的第i根木柱超过3m\\0 & 当所取的第i根木柱不超过3m\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,100)$ (2 分)

则$X_i\sim B(1,0.2)$,记$X=\sum_{i=1}^{100}X_i$,则$X\sim B(100,0.2)$. (2 分)

由棣莫佛-拉普拉斯定理得

$$P\{X\ge30\}=1-P\{X<30\} \qquad (2 分)$$

$$=1-P\left\{\frac{X-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\le\frac{30-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\right\}$$

$$\approx1-\Phi\left(\frac{30-20}{10\times0.4}\right)=1-\Phi(2.5)=0.0062 \qquad (4 分)$$

四、(10 分) 设某机器生产的零件长度（单位：cm)，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值，样本修正方差.

(1) 求 的置信度为 0.95 的置信区间；(保留四位小数)

(2) 检验假设（显著性水平为 0.05)。

附: $t_{0.975}(16)=2.1199,\quad t_{0.975}(15)=2.1315,\quad t_{0.95}(16)=1.7459,\quad t_{0.95}(15)=1.7531$

$\chi^2_{0.975}(15)=27.488,\quad \chi^2_{0.975}(16)=28.845,\quad \chi^2_{0.025}(15)=6.262,\quad \chi^2_{0.025}(16)=6.908$

解：⑴ 的置信度为的置信区间:

$$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{X}=10,\quad S^*=0.4,\quad n=16,\quad \alpha=0.05,\quad t_{0.975}(15)=2.1315$

所以μ的置信度为 0.95 的置信区间为（9.7869，10.2132）　(5 分)

(2)

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$\chi^2_{0.975}(15)=27.488,\quad \chi^2_{0.025}(15)=6.262$

$$\chi^2=\frac{15\times 0.16}{0.1}=24$$

因为$\chi^2_{0.025}(15)<\chi^2=24<\chi^2_{0.975}(15)$，所以接受$H_0$.　(5 分)

五、(10 分)

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令随机变量

(1) 求Y的分布函数；　(2) 求概率 .

解 (1)

由 的概率分布知，当 时， ;　(1 分)

当 时, ;　(1 分)

当 时,

(2 分)

综上　$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{1}{27}(y^3+18), & 1\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$　(1 分)

(2)

$$P\{X \le Y\} = P\{Y \ge X \mid X \le 1\}P\{X \le 1\} + P\{Y \ge X \mid 1 < X < 2\}P\{1 < X < 2\} + P\{Y \ge X \mid X \ge 2\}P\{X \ge 2\}$$

$$= P\{X \le 1\} + P\{1 < X < 2\} = P\{X < 2\} = \int_0^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{8}{27} \qquad (5分)$$

六、(10 分) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0 < \theta < \frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用总体 X 的样本值：

3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3.

求 θ 的矩估计和最大似然估计.

解 $$EX = 0 \times \theta^2 + 1 \times 2\theta(1-\theta) + 2 \times \theta^2 + 3 \times (1-2\theta) = 3 - 4\theta$$

$$\overline{X} = \frac{1}{8} \times (3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$$

令 $3 - 4\hat{\theta} = 2$，解得 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_M = \frac{1}{4}$.　(5 分)

对于给定的样本值,似然函数为

$$L(\theta) = 4\theta^6 (1-\theta)^2 (1-2\theta)^4$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln\theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = \frac{6 - 28\theta + 24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$,解得 $\theta_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}$.因 $\frac{7+\sqrt{13}}{12} > \frac{1}{2}$ 不合题意,所以 θ 的最大似然估计为

$\hat{\theta}_L = \frac{7 - \sqrt{13}}{12}$.　(5 分)

七、(14 分) 设随机变量　与　的概率分布分别为

	0	1

		0	1

且

(1) 求二维随机向量 的概率分布.

(2) 求 的数学期望 E(Z).

(3) 求 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

解: (1) 由 可得

(2 分)

所以

所以 的概率分布为 (4 分)

X	-1	0	1
0	0		0
1		0	

(2) 因为 的可能取值为 .

所以，从而可得 与 的相关系数为 (4 分)