诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2016-2017 学年第二学期《概率论与数理统计》A 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上；

3. 考试形式：闭卷；

4. 本试卷共八大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

一、 填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，且已知 $E\left[(X-1)(X-2)\right]=1$，则 $\lambda=$_________ 。

2. 随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 $E(X)=$________ 。

3. 设随机变量 X 服从以 n, p 为参数的二项分布，且 $EX=15$，$DX=10$，则 $n=$________。

4. 甲乙二人独立地同时破译密码，甲破译的概率为 $\frac{1}{2}$，乙破译的概率为 $\frac{1}{3}$，则该密码被破译的概率为_______。

5. Y_1,Y_2,Y_3 独立且均服从分布 $\chi^2(n)$，则 $\frac{2Y_1}{Y_2+Y_3}$ 服从_____________分布。

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3 为来自 X 的样本，则当常数 $a=$_________时，$\hat{\mu}=\frac{1}{4}X_1+aX_2+\frac{1}{2}X_3$ 是未知参数 μ 的无偏估计。

答案:

1.1　2. 1　3. 45　4. $\frac{2}{3}$　5. $F(n,2n)$　6. $\frac{1}{4}$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，$Y \sim B\left(8,\dfrac{1}{3}\right)$，且 X,Y 相互独立，则

$D(X-3Y-4)=$（　　　　）。

（A）-13　　（B）15　　（C）19　　（D）23

2. 有 m 个球，随机地放在 n 个盒子中（$m \le n$），则某指定的 m 个盒子中各有一球的概率为(　　　　).

A. $\dfrac{m!}{n^m}$　　B. $\dfrac{C_n^m m!}{n^m}$　　C. $\dfrac{n!}{m^n}$　　D. $\dfrac{C_m^n n!}{m^n}$

3. 设 $0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,\ P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，则事件 A 与 B （　）

A. 互不相容　　B. 互相对立　　C. 互不独立　　D. 相互独立

4. 随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, x\in R$，则 $Y=3X$ 的密度函数

$f_Y(y)=$(　　)

A. $\dfrac{1}{\pi(1+y^2)},\quad y\in R$　　B. $\dfrac{3}{\pi(9+y^2)},\quad y\in R$

C. $\dfrac{1}{\pi(1+\frac{y^2}{9})},\quad y\in R$　　D. $\dfrac{1}{\pi(1+9y^2)},\quad y\in R$

5. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,对给定的 $\alpha\,(0<\alpha<1)$,数 u_α 满足

$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$.若 $P\{|X|<x\}=\alpha$,则 x 等于(　　).

(A) $u_{\alpha/2}$　　(B) $u_{1-\alpha/2}$　　(C) $u_{(1-\alpha)/2}$　　(D) $u_{1-\alpha}$

6. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 $N(1,2^2)$ 的一个样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是（　　）。

A. $\dfrac{\bar{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim t(n)$；　B. $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim F(n,1)$；

C. $\dfrac{\bar{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；　D. $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim \chi^2(n)$；

答案：

1. C　2. A；　3. D；　4. B；5. C；6. D；

三、(10 分) 某人去参加某课程的笔试和口试，笔试及格的概率为 p，若笔试及格则口试及格的概率也为 p，若笔试不及格则口试及格的概率为 $\frac{p}{2}$。

(1) 如果笔试和口试中至少有一个及格，则他能取得某种资格。求他能取得该资格的概率。

(2) 如果已知他口试已经及格，求他笔试及格的概率.

解：用 A_1、A_2 分别表示某人参加“笔试”和“口试”的事件，A 表示“他能取得该种资格”。

由已知条件得 $P(A_1)=p$，$P(\overline{A}_1)=1-p$，$P(A_2|A_1)=p$，$P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{p}{2}$.

所求概率为

(1) $P(A)=P(A_1\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)=p+P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)$

$$=p+\frac{p}{2}(1-p)=\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}p^2 \qquad (5\text{ 分})$$

(2) $$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)}=\frac{2p}{1+p}$$

(10 分)

四、(16分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-(2x+3y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

(1) 确定常数 k；　　　　(2) 求 (X, Y) 分布函数 $F(x,y)$；

(3) 求 $P\{X<Y\}$；　　　　(4) 判断 X 与 Y 是相互否独立。

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} k\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= k\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y$$
$$= k\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3y}\right]_0^{+\infty}$$
$$= k\cdot\frac{1}{6} = 1$$

所以，$k = 6$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（2 分）

(2)

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \begin{cases} \int_0^{y}\int_0^{x} 6\mathrm{e}^{-(2u+3v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = (1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-3y}), & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（5 分）

(3) $$P\{X<Y\} = \iint_{x<y} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{y} 6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{+\infty} 3\mathrm{e}^{-3y}[1-\mathrm{e}^{-2y}]\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{+\infty} 3\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} 3\mathrm{e}^{-5y}\mathrm{d}y$$
$$= 1-\frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（10 分）

(4)　X 与 Y 的边缘密度分别为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}dy, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$　（12 分）

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}dx, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x}, & y>0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$　（14 分）

显然，$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立.　　　　　　　　（16 分）

五、（10 分）设二维离散型随机变量（ξ,η）的联合分布列

η \ ξ	-1	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

求（1）$\rho_{\xi\eta}$；　　（2）$D(\xi-\eta)$

解、

ξ	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

η	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\xi\eta$	-1	0	1
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E\xi=\frac{1}{3}$　　$E\eta=0$

$D\xi=\frac{2}{9}$　　$D\eta=\frac{2}{3}$　　$E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)=E(\xi\eta)-E\xi\cdot E\eta=0-0=0$

$\therefore \rho_{\xi\eta}=0$

$$D(\xi-\eta)=E(\xi-\eta)^2-\left[E(\xi-\eta)\right]^2$$
$$=E(\xi^2)-2E(\xi\eta)+E(\eta^2)-(E\xi)^2+2E\xi\cdot E\eta-(E\eta)^2$$
$$=D\xi+D\eta=\frac{8}{9}.$$

六、(8分) 有一批种子，其中良种占$\frac{1}{6}$，从中任取 180 粒，问能以 0.99 的概率保证其中良种的比例与$\frac{1}{6}$相差多少？$\Phi(2.33)=0.99;\quad \Phi(2.48)=0.995$

解：令 $h_i=\begin{cases}1 & \text{第三粒为良种}\\ 0 & \text{第三种为非良种}\end{cases}$　　$i=1,2,\cdots 180.$

则 $p(h_i=1)=\frac{1}{6}=p.\ (q=1-p=\frac{5}{6})$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{180} h_i/180-\frac{1}{6}\right|<C\right)=P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{180} h_i-180\times\frac{1}{6}}{\sqrt{180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}\right|<\frac{\sqrt{180}\cdot C}{\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}\right)$$

$$=P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{180} h_i-30}{5}\right|<36C\right)$$

$$\approx\int_{-36C}^{36C}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_{-\infty}^{36C}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-1$$

$$=2\Phi(36C)-1=0.99$$

$\therefore \Phi(36C)=0.995$ $\quad\therefore 36C=2.48$ $\quad\therefore C=2.48/36=\frac{31}{450}=0.07$

七、(10 分)

⑴ 设总体 X 等可能地取值 1，2，3，$\cdots$，N，其中 N 是未知的正整数。$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$是取自该总体中的一个样本．试求 N 的最大似然估计量．(7 分)

⑵ 某单位的自行车棚内存放了 N 辆自行车，其编号分别为 1，2，3，…，N，假定职工从车棚中取出自行车是等可能的。某人连续 12 天记录下他观察到的取走的第一辆自行车的编号为

12，203，23，7，239，45，73，189，95，112，73，159。

试求在上述样本观测值下，N 的最大似然估计值．(3 分)

解：⑴ 总体 X 的分布列为 $P\{X=x\}=\frac{1}{N}$， $(x=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$.

所以似然函数为 $L(N)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\frac{1}{N^n}$，

$(1\le x_i\le N,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n))$. ……..3 分

当 N 越小时，似然函数 $L(N)$越大；另一方面，N 还要满足：

$1\le x_i\le N,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，即 $N\ge\max\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}=x_{(n)}$.

所以，N 的最大似然估计量为 $\hat{N}=X_{(n)}$. ……..7 分

⑵ 由上面的所求，可知 N 的最大似然估计值为 $\hat{N}=x_{(n)}=239$. ……..10 分

八、(10 分) 已知多名实习生相互独立地测量同一块土地的面积，设每名实习生得到的测量数据 X (平方米)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从这些测量数据中随机抽取 7 个，经计算，其平均面积为 125 平方米，修正标准差为 $S_n^*=2.71$ 平方米.

(1) 求 μ 的置信度为 90%的置信区间；

(2)能否认为这块土地的平均面积为 124 平方米（显著性水平 $\alpha=0.1$）?

$\mu_{0.9}=1.29,\ \mu_{0.95}=1.65,\ t_{0.9}(7)=1.415,\ t_{0.9}(6)=1.440,\ t_{0.95}(7)=1.895,\ t_{0.95}(6)=1.943$

解 （1）μ 的置信度为 $1-\alpha$ 下的置信区间为

$$(\bar{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}})$$

其中，$\overline{X}$ 表示样本均值，S_n^* 表示样本修正标准差，n 表示样本容量，又

$\bar{X}=125,\ S_n^*=2.71,\ n=7,\ \alpha=0.1,\ t_{0.95}(6)=1.943$

所以 μ 的置信度为 90%的置信区间为（123，127）. (5 分)

⑵ 本问题是在 $\alpha=0.10$ 下检验假设 $H_0:\mu=124,\ H_1:\mu\neq 124,$

由于正态总体的方差 σ^2 未知，所以选择统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}$， (6 分)

由已知得统计量的观测值 $T=\dfrac{125-124}{2.71/\sqrt{7}}=0.976$，临界值 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.95}(6)=1.943$，

因为 $|T|=0.976<1.943=t_{0.95}(6)$，所以接受原假设 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.1$ 下，可以认为这块土地的平均面积为 124 平方米. (10 分)