座位号________ 专业班级________ 学院________ 学号________ 姓名________

（密封线内不答题） 密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2018-2019-2 学期《概率论与数理统计》A 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上；
3. 考试形式：闭卷；
4. 本试卷共八大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

一、选择题（共 6 题，每题 3 分，共 18 分）

1、设 $X_1, X_2 \cdots X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本，记 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则下列结论中不正确的是(　　)。

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　(B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　(D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

2、设随机变量 $X \sim Pios(3)$，$Y \sim B\left(8, \frac{1}{3}\right)$，且 X, Y 相互独立，则 $Var(X - 3Y - 4)$ =(　　)。

A. -13　　B. 15　　C. 19　　D. 23

3、设一个盒子中有 5 件产品，其中有 3 件是正品，2 件次品。从盒子中任取两件，则取出的两件产品中至少有一件次品的概率为(　　)。

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{5}{10}$　　C. $\frac{7}{10}$　　D. $\frac{1}{5}$

4、随机变量 $X\sim N(0,1)$，对于给定的 $\alpha\left(0<\alpha<1\right)$，数 u_α 满足 $P(u>u_\alpha)=\alpha$，

若 $P(|X|<c)=\alpha$，则 c 等于（　）。

A. $\boldsymbol{u}_{\alpha/2}$　　B. $\boldsymbol{u}_{(1-\alpha)/2}$　C. $\boldsymbol{u}_{1-\alpha}$　　D. $\boldsymbol{u}_{1-\alpha/2}$

5．设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，而 $p_1=P\{X\le\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$，则（　）

A. 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$.　　B. 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$.

C. 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$.　　D. 对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$.

6.设 X~Pios(λ)，且 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$（　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

答案：1. B　2. C　3. C　4. B　5. A　6.A

二、填空题（共 6 题，每题 3 分，共 18 分）。

1、设 X_1,X_2 是来自于总体 X 的样本，$\hat{\mu}_1=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$ 为总体均值 μ 的无偏估计，则 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$ 中较有效的是＿＿＿＿＿＿。

2、设随机变量X与Y独立且都服从[0, 3]上的均匀分布，则 $P\left[\min\left(X,Y\right)\ge 2\right]=$＿＿＿＿。

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $\boldsymbol{F}(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$ ＿＿＿＿。

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和2,方差分别为1和4,而相关系数为 -0.5 ,则根据契比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\ge 6\}\le$＿＿＿＿。

5. 设随机变量 $\xi\sim B(n,p)$, $E(\xi)=3$, $Var(\xi)=1.2$，则n=＿＿＿＿。

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(0,4)$,而 $X_1,X_2,\cdots X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则

$$Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2\right)}$$

服从的分布是＿＿＿＿ (包括分布参数)。

答案： 1. $\widehat{\mu}_2$　　2. $\dfrac{1}{9}$　　3. 2　　4. 1/12　5. 5　6. F(10,5)

三、(10 分) 某保险公司把被保险人分为三类：谨慎的、一般的、冒失的，统计资料表明，上述三种人在一年内发生事故的概率依次为 0.05，0.15 和 0.30。如果谨慎的占总的被保人数的 20%，一般的占 50%，冒失的占 30%。

(1)求某被保人在一年内发生事故的概率；

(2)若此人在一年内发生事故，则他是谨慎的客户的概率是多少。

解. 设事件 B 为 "被保险人在一年内出了事故" 这一事件；事件 A_1, A_2, A_3 分别为"谨慎的、一般的、冒失的被保险人"，则根据全概率公式可得：

$$P(B)=p(B\mid A_1)p(A_1)+p(B\mid A_2)p(A_2)+p(B\mid A_3)p(A_3)\qquad 3\text{ 分}$$

$$=0.2\times0.05+0.5\times0.15+0.3\times0.3=0.175\qquad 5\text{ 分}$$

$$P(A_1\mid B)=\frac{p(B\mid A_1)p(A_1)}{p(B\mid A_1)p(A_1)+p(B\mid A_2)p(A_2)+p(B\mid A_3)p(A_3)}\qquad 8\text{ 分}$$

$$=\frac{0.05\times0.2}{0.175}=0.0571\qquad 10\text{ 分}$$

四、(10 分) 设某次概率统计考试考生的成绩 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 $\overline{x}=66.5$ 分，修正标准差为 $S^*=15$ 分。

(1) 在置信度为 0.95 时，求考生成绩数学期望 μ 的置信区间。

(2) 在显著性水平 α =0.05 下，检验是否可以认为这次考试的平均成绩为 70 分。

$t_{0.975}(35)=2.0301,\quad t_{0.975}(36)=2.0281,\quad t_{0.95}(35)=1.6896,\quad t_{0.95}(36)=1.6883$

解：(1) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{S^{*2}}{n}}}\sim t(n-1)$，$\delta(\overline{x})=\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}t_{0.975}(35)=\dfrac{15}{6}\times2.0301=5.07525$ (4 分)

学生成绩数学期望 μ 的置信区间：(61.42,71.58) (5 分)

(2) $H_0:\mu=70,\quad H_1:\mu\neq70,$

拒绝域：$A=\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-70}{\sqrt{\dfrac{S^{*2}}{n}}}\right|>t_{0.975}(35)\right\}$，$\left|\dfrac{66.5-70}{\sqrt{\dfrac{15^2}{36}}}\right|=1.4<t_{0.975}(35)=2.0301$ （9 分）

不拒绝原假设。可以认为这次考试的平均成绩为 70 分。（10 分）

五、（10 分） 某单位有 400 部内线电话，每时刻每部电话打外线的概率为 10%，设各电话使用外线与否是相互独立的，估计在任一时刻有 30～50 部电话同时使用外线的概率。

$\Phi(1.67)=0.9525,\quad \Phi(1.60)=0.9452,\quad \Phi(1.52)=0.9357,\quad \Phi(1.36)=0.9131$

解： 设 X 为任一时刻使用的终端数，则 X~B(400, 0.1)

$$p\{30\le X\le 50\}=p\left\{\frac{30-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{50-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \quad (5分)$$

$$=p\left\{-\frac{10}{6}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{10}{6}\right\}$$

$$=\Phi(1.67)-\Phi(-1.67)$$

$$=0.9525\times2-1=0.905 \quad (10分)$$

六.(10分) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自双参数指数分布总体的一组样本，密度函数为

$$f(x;\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} & x>\mu\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中θ,μ是未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一组样本值，求θ,μ的最大似然估计量。

解：

$$L(\mu,\theta)=\frac{1}{\theta^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)\right\},\quad \mu<\min\{x_1,\cdots,x_n\} \quad (3分)$$

$\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{n}{\theta}>0$，故$\ln L$是$\mu$的递增函数，所以

$\hat{\mu}=\min\{x_1,\cdots,x_n\}.$ (6分)

$\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta}=0$，得 $\hat{\theta}=\bar{x}-\min\{x_1,\cdots,x_n\}$

所以最大似然估计量为

$\hat{\mu}_L=X_{(1)}$，$\hat{\theta}_L=\bar{X}-X_{(1)}$ (10分)

七、(12 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

解： 三角形区域为 $G=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1\}$;随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & 当(x,y)\in G\\ 0 & 当(x,y)\notin G\end{cases} \qquad (3 分)$$

以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度,则当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_1(x)=0$;当 $0<x<1$ 时,有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1}2dy=2x$$

因此

$$EX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},\quad EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2} \qquad (5 分)$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18} \qquad (6 分)$$

同理可得，$EY=\frac{2}{3},DY=\frac{1}{18}$. (8 分)

现在求 X 和 Y 的协方差

$$EXY=\iint\limits_G 2xydxdy=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^{1}ydy=\frac{5}{12} \qquad (9 分)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36} \qquad (10 分)$$

于是

$$DU=D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18} \qquad (12 分)$$

八、(12 分) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

（1）求$P\{Y \le EY\}$；

（2）求$Z = X + Y$的概率密度。

解（1）由数字特征的计算公式可知：$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$。

则$P\{Y \le EY\} = P\left\{Y \le \frac{2}{3}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} f(y)dy = \int_0^{\frac{2}{3}} 2ydy = \frac{4}{9}$。（5 分）

（2）先求Z的分布函数，由分布函数的定义可知：$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$。

由于X为离散型随机变量，则由全概率公式可知

$$
\begin{aligned}
&F_Z(z) = P\{X + Y \le z\} \\
&= P\{X = 0\}P\{X + Y \le z \mid X = 0\} + P\{X = 1\}P\{X + Y \le z \mid X = 1\} \quad \text{（8分）} \\
&= \frac{1}{2}P\{Y \le z\} + \frac{1}{2}P\{Y \le z - 1\} \\
&= \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z - 1) \qquad \text{（10分）}
\end{aligned}
$$

（其中$F_Y(z)$为Y的分布函数：$F_Y(z) = P\{Y \le z\}$

$$
\therefore f_Z(z) = \frac{1}{2}f_Y(z) + \frac{1}{2}f_Y(z - 1) = \begin{cases} 2(z - 1) & 1 \le z \le 2 \\ 2z & 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \qquad \text{（12 分）}
$$