第四章：随机变量的数字特征

4.1 一维随机变量的数字特征

数字特征的引入

- 随机变量的概率函数、密度函数、分布函数是对随机变量分布的最完整刻画。
- 但实际中，对于有些随机变量，或者它的分布难以求得，只能得到某些比较片面的信息，或者即使知道了其分布但我们关心的信息却不太明确。

数字特征的引入

问题：

1. 有一大批产品，其中 15% 为一等品，75% 为二等品，10% 为三等品。一、二、三等产品的单价分别为 10 元、8 元和 6 元。有人要采购一批这种产品，但来不及检验，该如何定价?
2. 考察各个射击手的水平，既要看他们的平均环数是否高，还要看他们弹着点的范围是否小。

数字特征的引入

引入能反映随机变量重要特征的统计指标（数字特征）

- 中心位置特征(数学期望/均值)；
- 分散程度特征(方差)。

数学期望

数学期望的引入

定义离散型随机变量 X 为某位选手射中的环数，已知其分布列为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.01 & 0.02 & 0.05 & 0.06 & 0.06 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

根据随机变量的分布，我们可以想象在 100 次射击中，打出 1 环的次数近乎 1 次，打出 2 环的次数近乎 2 次，打出 3 环的次数近乎 5 次...

则这 100 次射击中的平均环数是

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10} i \cdot n_i = \sum_{i=1}^{10} i \cdot \frac{n_i}{100} \approx \sum_{i=1}^{10} i \cdot P(X=i)$$

其中 n_i 表示射中 i 环的次数.

离散型随机变量的数学期望

定义4.1.1

设离散型随机变量 X 的概率分布列 $P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$，若级数 $\sum_i |x_i|\, p_i$ 收敛，则称 X 的数学期望存在，并称

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

为 X 的数学期望或均值，简称 X 的期望.
若级数 $\sum_i |x_i|\, p_i$ 发散，则称 ξ 的数学期望不存在。

- 数学期望反映的是随机变量的加权平均值.
- 用概率替换掉频率，是因为当试验次数 n 充分大的时候频率会"稳定"在概率附近.（原因请看第 5 章伯努利大数定律）

绝对收敛的必要性

例子：假设有一个离散随机变量 X，其取值和概率如下：

$$P\left(X = (-1)^{k+1}\frac{2^k}{k}\right) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

绝对收敛的必要性

例子：假设有一个离散随机变量 X，其取值和概率如下：

$$P\left(X=(-1)^{k+1}\frac{2^k}{k}\right)=\frac{1}{2^k},\quad k=1,2,3,\ldots$$

注：下面两种情形不需要考虑 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i\left|x_i\right|$ 是否收敛，直接计算期望值即可.

1. 随机变量取值有限的情形.
2. 随机变量取值非负的情形.

期望不存在例子

设随机变量 X 取值为 $x_n = 2^n$，对应的概率为：

$$P(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

计算数学期望：

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot P(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

该级数发散，因此数学期望不存在。

“期望”名称的起源——分赌本问题

Example

在17世纪中叶，有甲、乙两名赌徒，他们的赌技相同，各自下注50法郎。约定比赛没有平局，先赢得3局者将获得全部赌注。当甲赢了2局、乙赢了1局时，赌博被迫中止。问：应该如何分配赌注才算公平?

练习

求下列随机变量的数学期望 $E[X]$.

- $X \sim B(n, p)$
- $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- $X \sim \text{Geo}(p)$

连续型随机变量的数学期望 I

设连续型随机变量 X 的分布密度函数为 f_X，那么对于任意的 x，有

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f_X(t)\,\mathrm{d}t \approx f_X(x)\Delta x$$

现在我们将 $[-\infty, \infty]$ 划分为 $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}[x_i, x_{i+1}]$，$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$，那么根据黎曼积分的定义，$X$ 的期望可以表示为

$$E[X] = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i f_X(x_i)\Delta x_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

连续型随机变量的数学期望 II

定义 4.1.2

设连续型随机变量 X 的分布密度函数为 f_X，如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

那么称

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

为 X 的数学期望（均值），简称为 X 的期望.

练习与思考

计算服从下面几种分布的连续型随机变量 X 的期望 $E[X]$.

1. $X \sim U[a, b]$
2. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

练习与思考

计算服从下面几种分布的连续型随机变量 X 的期望 $E[X]$.

1. $X \sim U[a,b]$
2. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
3. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$
4. X 服从标准柯西分布 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 判断 X 的数学期望是否存在，如果存在，求出 $E[X]$.

随机变量（向量）函数的期望

例： 设 X 的分布列如下，求 $Y = X^2$，$Z = 2X - 1$，$W = |X| + 1$ 的分布列.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

离散型随机变量函数的期望

对于离散随机变量函数 $g(X)$，若 $P(X=x_i)=p_i$
且 $\sum_{i=1}^{\infty}|g(x_i)|\,p_i$ 收敛，其期望可计算如下：

$$E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$$

注：该公式所表达的意思是，在求随机变量函数的期望时，我们不需要先求出 $g(X)$ 的分布列进而求期望，而是可以直接用 X 求！

连续型随机变量函数的期望

与离散型随机变量类似，对于连续型随机变量的函数，$Y = g(X)$ 的数学期望，可以通过下面的方法计算：

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

练习

1. 设 X 的分布列为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

计算 $E[X]$, $E[-X+2]$, $E(X^2)$.

练习

1. 设 X 的分布列为
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
计算 $E[X], E[-X+2], E(X^2)$.
2. $X \sim U[0, 2\pi]$，$Y = \sin X$，求 $E[Y]$.
3. 已知连续型随机变量 X 的概率密度为如下形式：
$$f(x) = \begin{cases} ax^k, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$
其中 $k > 0, a > 0$。又已知 $EX = 0.75$，求 k 和 a 的值。

随机向量函数的数学期望 I

对于二维的随机变量 (X,Y)，假设 $E[g(X,Y)]$ 存在，那么

1. 设离散型随机向量 (X,Y) 有概率分布
$P(X=x_i, Y=y_i)=p_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots$，则

$$E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

2. 设连续型随机向量 (X,Y) 有联合分布密度函数 $f_{X,Y}$，则

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

随机向量函数的数学期望 II

特别地，当 $g(x,y) = x$ 时，对于离散型随机向量 (X,Y)

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij} \quad E[Y] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}$$

对于连续型随机向量 (X,Y)，有

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注：随机向量每个分量的期望都可以用其联合概率分布列或联合分布密度函数计算得到.

思考与练习

1. 假设 (X, Y) 的联合分布列为

$Y\backslash X$	0	1
0	0.25	0.25
1	0.25	0.25

求 $E\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(X+Y)\right)\right)$.

思考与练习

1. 假设 (X,Y) 的联合分布列为

$Y\backslash X$	0	1
0	0.25	0.25
1	0.25	0.25

求 $E\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(X+Y)\right)\right)$.

2. 某商店经销某种商品，每周进货量 X 与需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $[10,20]$ 上的均匀分布。商店每售出一单位商品可获利 1000 元；若需求量超过进货量，商店可以从他处调剂供应，这时每单位商品可获利 500 元。试计算此商店经销该种商品每周所获的平均利润。

思考与练习

1. 假设 (X, Y) 的联合分布列为

$Y \backslash X$	0	1
0	0.25	0.25
1	0.25	0.25

求 $E\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(X+Y)\right)\right)$.

2. 某商店经销某种商品，每周进货量 X 与需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布。商店每售出一单位商品可获利 1000 元；若需求量超过进货量，商店可以从他处调剂供应，这时每单位商品可获利 500 元。试计算此商店经销该种商品每周所获的平均利润。

3. * 设 X_1 与 X_2 是独立同分布的随机变量，它们均服从指数分布 $Exp(\lambda)$，求 $Y = \max\{X_1, X_2\}$ 和 $Z = \min\{X_1, X_2\}$ 的数学期望.

数学期望的性质

数学期望的运算性质

性质(1) 任意常数 c 的数学期望等于 c.

性质(2) 若 $a \le X \le b$，则 $E[X]$ 存在，并且 $a \le E[X] \le b$.

性质(3) （线性性）设随机变量 X 和 Y 的期望都存在，a，b 都是常数，那么

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

- 若 $E[f(X)]$ 和 $E[g(Y)]$ 存在，则

$$E[f(X) + g(Y)] = E[f(X)] + E[g(Y)].$$

性质(4) 若随机变量 X 与 Y 独立，且 X 与 Y 的期望都存在，那么

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

数学期望的运算性质证明 I

性质1证明：随机变量 X 服从单点分布

$$P(X=c)=1.$$

所以其期望就是

$$E[X]=c\times 1=c.$$

性质3证明：只对连续型的随机变量证明.

先证明随机变量 $Z=aX+bY$ 的期望存在. 假设 X,Y 的联合密度函数为 $f_{X,Y}(x,y)$，判断下面积分的收敛性

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}|ax+by|\,f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\le |a|\int_{\mathbb{R}^2}|x|\,f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+|b|\int_{\mathbb{R}^2}|y|\,f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=|a|\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f_X(x)\,\mathrm{d}x+|b|\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y<\infty.
\end{aligned}$$

数学期望的运算性质证明 II

上面的式子表明$E[Z]$存在，根据积分运算的性质，有

$$
\begin{aligned}
E[aX+bY] &= \int_{\mathbb{R}^2} (ax+by) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a\int_{\mathbb{R}^2} x f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + b\int_{\mathbb{R}^2} y f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= aE[X] + bE[Y].
\end{aligned}
$$

性质4证明：

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \int_{\mathbb{R}^2} (xy) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} xy f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= E[X]E[Y].
\end{aligned}
$$

期望运算性质的运用

若 $X \sim B(n,p)$，$X_i \sim B(1,p)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，相互独立，那么

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

由于期望是线性的，

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n],$$

又因 $E[X_i] = p$，故

$$E[X] = np.$$

思考与练习

一个小班有 n 个同学，编号为 $1, 2, \ldots, n$，中秋节前每人准备一件礼物，相应编号为 $1, 2, \ldots, n$。将所有礼物集中放在一起，然后每个同学随机取一件。若取到自己的礼物，就认为配对成功。以 X 表示 n 个同学中配对成功的个数，求 $E(X)$。

条件数学期望*

条件数学期望* I

条件数学期望是关于条件分布求数学期望.

1. 离散型随机向量 设(X, Y)是二维离散型随机向量，数学期望存在，在$\{Y = b_j\}$发生的条件下，X的条件数学期望（简称条件期望）为

$$E[X \mid Y = b_j] = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(X = a_i \mid Y = b_j)$$

在$X = a_i$发生的条件下，Y的数学期望为

$$E[Y \mid X = a_i] = \sum_{j=1}^{\infty} b_j P(Y = b_j \mid X = a_i).$$

条件数学期望* II

2. 连续型随机向量 若 (X,Y) 是连续型的随机向量，并且数学期望存在. 在 $\{Y=y\}$ 发生的情况下，X 的条件数学期望是

$$E[X\mid Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X\mid Y}(x\mid y)\,\mathrm{d}x.$$

在 $\{X=x\}$ 发生的情况下，Y 的条件数学期望是

$$E[Y\mid X=x]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y\mid X}(y\mid x)\,\mathrm{d}y.$$

条件期望的性质* I

1. 条件期望是条件中的随机变量的函数. 例如 $E[X \mid Y = y]$ 就是 y 的函数.
2. 当 X 和 Y 相互独立的时候，由于

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$$

我们有 $f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x)$，于是

$$E[X \mid Y] = E[X].$$

同理

$$E[Y \mid X] = E[Y].$$

条件期望的性质* II

3 两个重要公式（对应于全概率公式）.

$$E[E[X \mid Y]] = E[X], \quad E[E[Y \mid X]] = E[Y].$$

- 若Y是离散型随机变量，则

$$E[X] = \sum_i E[X \mid Y = y_i] P(Y = y_i).$$

- 若Y是连续型随机变量，则

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} E[X \mid Y = y] f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

二维正态分布的条件分布*

对于二维正态分布，X 在 $\{Y = y\}$ 下和 Y 在 $\{X = x\}$ 下的条件分布分别为

$$N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)\right),$$

和

$$N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right).$$

条件期望的运用*

例:

若 (X,Y) 服从二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$E_{X|Y}(x\,|\,y)=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),$$

$$E_{Y|X}(y\,|\,x)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1).$$

即 $E_{X|Y}$ 和 $E_{Y|X}$ 分别是 Y 和 X 的线性函数，这是正态分布的一个独特性质.

条件期望例题*

一名矿工陷入一个有三扇门的矿井中。第一扇门通到一个隧道，走 2 小时后，他可到达安全区域；第二扇门通到另一个隧道，走 3 小时后使他回到矿井中；第三扇门通到又一个隧道，走 5 小时后也使他回到矿井中。假定这位矿工总是等可能地选择三扇门中的一扇出去，试求他到达安全区所需的平均时间。

方差

水泥厂的打包机A，B分别装一袋标准为50公斤的水泥. 其实际重量 $X_A \sim U[50-0.5, 50+0.5]$，$X_B \sim U[50-1.5, 50+1.5]$，那么

$$E[X_A] = E[X_B] = 50.$$

从均值（期望）来看，这两个打包机均满足预期要求，但

$$P(X_A \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = 0,$$

$$P(X_B \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = \frac{2}{3}.$$

随机变量的方差

水泥厂的打包机A，B分别装一袋标准为50公斤的水泥. 其实际重量 $X_A \sim U[50-0.5, 50+0.5]$，$X_B \sim U[50-1.5, 50+1.5]$，那么

$$E[X_A] = E[X_B] = 50.$$

从均值（期望）来看，这两个打包机均满足预期要求，但

$$P(X_A \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = 0,$$

$$P(X_B \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = \frac{2}{3}.$$

随机变量的数学期望只能反映随机变量的平均预期，但却无法从中看出其取值的分散程度（波动性）大小，即随机变量离开数学期望的平均偏离程度.

方差的定义

定义 1.4.3

设随机变量 X 有有限的数学期望，如果

$$E[(X-E[X])^2]<\infty,$$

则称

$$Var[X]=E[(X-E[X])^2]$$

为随机变量 X 的方差，称 $\sqrt{Var[X]}$ 为 X 的标准差，记为 $\sigma[X]$.

方差

1. 对于离散型的随机变量：

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E[X])^2 p_i$$

2. 对于连续型的随机变量：

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于求和运算与积分运算是线性的，因此对全部的离散型、连续型随机变量，有

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

课堂练习

计算下列随机变量的方差

1. $X \sim Bernoulli(p)$
2. $X \sim B(n, p)$
3. $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$
4. $X \sim \mathrm{Geo}(p)$

课堂练习

计算下列随机变量的方差

1. $X \sim Bernoulli(p)$
2. $X \sim B(n, p)$
3. $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
4. $X \sim \text{Geo}(p)$
5. $X \sim U[a, b]$
6. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$
7. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

方差的运算性质

性质1：任意常数 c 的方差为 0.

$$Var[c] = 0.$$

性质2：若随机变量 X 的方差都存在，a, b 为常数，那么

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$$

性质3：若随机变量 X 与 Y 相互独立，并且 X 与 Y 的方差都存在，a 和 b 为常数，那么

$$Var[aX \pm bY] = a^2 Var[X] + b^2 Var[Y].$$

方差性质的运用

若$X \sim B(n,p)$，$X_i \sim B(1,p)$，$i = 1,2,\cdots,n$，相互独立，则

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

由方差的性质

$$\begin{aligned} Var[X] &= Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \\ &= Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n] \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

标准化证明

设随机变量 X 的期望 $E(X)=\mu$，方差 $Var(X)=\sigma^2\neq 0$。定义标准化变量：

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

证明：

$$E(X^*) = 0 \quad Var(X^*) = 1$$

独立正态随机变量的性质

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态分布，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \cdots, n$，那么

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$$

.

例题

1. 设 $X \sim N(1,3)$，$Y \sim N(2,4)$，且 X 与 Y 独立，求下列分布：

$$Z_1 = 2X - 3Y, \quad Z_2 = 2X - 3Y + 4$$

2. 活塞直径 $X \sim N(22.40, 0.03^2)$（单位：厘米），气缸直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$，且 X 与 Y 独立。求随机选取一个活塞和一个气缸时，活塞能装入气缸的概率。

随机变量的矩

随机变量的矩

定义 4.1.4

设 X 为随机变量，c 为常数，k 为正整数，如果 $E[(X-c)^k]<\infty$，则称

$$E[(X-c)^k]$$

为 X 关于 c 的 k 阶矩.

1. “矩”的概念来自于物理学：$E[X]$ 和 $E[X^2]$ 等算式与物理学中的静力矩和惯性矩计算式相似.
2. $c=0$，称 $E[X^k]$ 为 X 的 k 阶原点矩，例如均值 $E[X]$为 1 阶原点矩.
3. $c=E[X]$，$E[(X-E[X])^k]$ 称为 X 的k 阶中心矩，例如方差 $Var[X]$为 2 阶中心矩.

定义 4.1.5

设 X 为随机变量，如果 $E[X^4] < \infty$，则称

$$\frac{E[(X - E[X])^3]}{(Var[X])^{\frac{3}{2}}} = \frac{E[(X - E[X])^3]}{(\sigma[X])^3}$$

为 X 的偏度，偏度刻画 X 的分布的偏斜程度. 而称

$$\frac{E[(X - E[X])^4]}{(Var[X])^2} = \frac{E[(X - E[X])^4]}{(\sigma[X])^4}$$

为 X 的峰度，峰度刻画随机变量的分布在其均值附近的陡峭程度.

随机变量的偏度和峰度 II

当密度函数 $f_X(x)$ 关于 $E[X] = c$ 对称时，偏度为零.

$$
\begin{aligned}
E[(X - E[X])^3] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^3 f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x + c)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

记 $g(x) = f_X(x + c)$，根据 $f_X(x + c) = f_X(c - x)$，知 $g(x) = g(-x)$，即 $g(x)$ 是偶函数，$x^3 g(x)$ 是奇函数. 因此

$$
E[(X - E[X])^3] = 0.
$$

正态分布的偏度为 0.

练习

已知随机变量 X 的分布密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 X 的偏度和峰度。

4.2 随机向量的数字特征

定义 4.2.1

设 (X, Y) 为二维随机向量，且 $Var[X] < \infty$，$Var[Y] < \infty$，

1. 称
$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$
为 X 与 Y 的协方差.

2. 称
$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma[X]\sigma[Y]}$$
为 X 与 Y 的（线性）相关系数.

对于任意的随机向量 (X, Y)

$$Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) \pm 2abCov(X, Y).$$

协方差的性质

1. $$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$
   即
   $$E[XY] = E[X]E[Y] \Longleftrightarrow Cov(X,Y) = 0.$$
2. 独立与相关性　X 与 Y 相互独立，则 X 与 Y 一定不相关，反之不成立.
3. 对称性　设随机变量 X 和 Y 的方差都存在，那么
   $$Cov(X,Y) = Cov(Y,X).$$
4. 双线性性　设随机变量 X，Y 和 Z 的方差都存在，a 和 b 为常数，那么
   $$Cov(aX+bY,Z) = aCov(X,Z) + bCov(Y,Z).$$
   以及
   $$Cov(Z,aX+bY) = aCov(Z,X) + bCov(Z,Y).$$

相关系数的性质

1. $|r(X,Y)| \leq 1$.
2. 若 $r(X,Y) > 0$，则称 X 与 Y 正相关。
   若 $r(X,Y) < 0$，则称 X 与 Y 负相关。
   若 $r(X,Y) = 0$，则称 X 与 Y 不相关。
   - 若 X 与 Y 独立，则 $r(X,Y) = 0$，即 X 与 Y 不相关.
3. 若 $|r(X,Y)| = 1$，则
   - 若 $r(X,Y) = 1$，则存在常数 $a > 0$ 和 b，使得
   $$P(Y = aX + b) = 1.$$
   - 若 $r(X,Y) = -1$，则存在常数 $a < 0$ 和 b，使得
   $$P(Y = aX + b) = 1.$$

二维正态分布的相关性

- 对于 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$， $r(X,Y) = \rho$.

- 对于二维联合正态分布，

$$X, Y \text{ 独立} \Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ 不相关}$$

即 X 与 Y 独立与 X 与 Y 不相关是等价的，这个性质是联合正态分布特有的.

课堂练习

1. 计算 $Cov(3X+2Y,X)$ 和 $Var(3X-2Y)$
2. 设 (X,Y) 的联合分布密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$E[X]$，$E[Y]$，$Var[X]$，$Var[Y]$， $Cov(X,Y)$ 和 $r(X,Y)$.

课堂练习

1. 计算 $Cov(3X+2Y,X)$ 和 $Var(3X-2Y)$
2. 设 (X,Y) 的联合分布密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

   求$E[X]$，$E[Y]$，$Var[X]$，$Var[Y]$， $Cov(X,Y)$ 和 $r(X,Y)$.
3. 设 X 和 Y 独立，均服从参数为 1/2 的0-1分布。定义：

$$U=X-Y,\quad V=X+Y.$$

   求 U 与 V 的协方差。
4. 设随机变量(X,Y)在单位圆内服从均匀分布，判断X与Y的独立性和相关性。

定义 4.2.2

设随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$ 的每个分量都有有限的方差，定义

$$E[\boldsymbol{X}] = (E[X_1], E[X_2], \cdots, E[X_n])^T$$

和

$$Var[\boldsymbol{X}] = E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])^T] = (Cov(X_i, X_j))_{n\times n}.$$

n维正态分布

设$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$，$\boldsymbol{\Sigma}$为$n$阶正定矩阵，记$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，若

$$
\begin{aligned}
& f_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \right\},
\end{aligned}
$$

则称$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$服从$n$维正态分布，记作$\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. 其中$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$

n维正态分布的函数性质

性质1：边缘正态性

n元正态随机变量

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T, \ n \geq 1,$$

其任意子向量$(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k})^T (1 \leq k \leq n)$均服从$k$元正态分布。

n维正态分布的函数性质

性质2：线性组合的正态性

n元随机变量

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T, \ n \geq 1,$$

服从n元正态分布当且仅当$X_1, X_2, \cdots, X_n$的任意线性组合

$$l_0 + l_1 X_1 + l_2 X_2 + \cdots + l_n X_n$$

均服从一元正态分布，其中$l_1, l_2, \cdots, l_n$不全为0。

命题 **3.4.1** 随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$ 服从n维正态分布的充要条件是对任意的 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^T \in \mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{X}$ 服从一维正态分布.

n维正态分布的函数性质

性质3：线性变换不变性

n元正态随机变量

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T,\ n \geq 1,$$

若$Y_1, Y_2, \cdots, Y_k, k \geq 1$均为$X_i, i = 1, 2, \cdots, n$的线性函数，则

$$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)^T$$

也服从k元正态分布。

命题 **3.4.2** 设随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$ 服从n维正态分布，期望向量为 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$，协方差矩阵为 Σ，那么对于任意的实矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，有 $\boldsymbol{AX} \sim N(\boldsymbol{A\mu}, \boldsymbol{A}\Sigma\boldsymbol{A}^T)$.

n维正态分布的函数性质

性质4：独立性与相关性

设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$，$n\geq 1$服从n元正态分布，则

$$X_1,X_2,\cdots,X_n\text{相互独立}$$

$\Leftrightarrow X_1,X_2,\cdots,X_n$两两不相关$\Leftrightarrow X$的协方差矩阵为对角矩阵：

$$\hat{C}=\begin{pmatrix} Var(X_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Var(X_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

n维正态分布例题

设 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(0,1;1,4;-\frac{1}{2})$，求：

1. $Var(2X-Y)$
2. $P(2X>Y)$
3. (Z_1,Z_2) 的分布，其中 $Z_1=X+Y$，$Z_2=X-Y$