華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§2.7 连续与间断

- 函数的连续性
- 函数的间断点

连续的概念

- 极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 刻画的是当 x 在 a 的空心邻域变化时函数 $f(x)$ 的性态，它与 f 在 a 点是否可定义，如何定义无关.
- 对于很多性质较好的函数 $f(x)$，它不仅在 a 点有定义，且当 x 靠近 a 时，函数值 $f(x)$ 也靠近 $f(a)$，这反映出函数是连续变化的.

函数连续的定义

定义（函数的连续性）

设函数 $f(x)$ 在 a 的某个邻域有定义. 若

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

则称函数 $f(x)$ 在 a 点连续.

例

- 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $x = a$ 处连续.
- 函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.

函数的连续性（概念理解）

函数的连续性包含三个方面的涵义:

- 极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在;
- 函数 $f(x)$ 在 a 点有定义, 即 $f(a)$ 存在;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

函数的连续性（几何意义）

$f(x)$ 在 a 点连续：

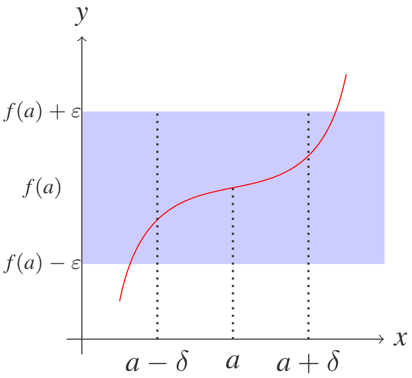
$y=f(x)$ 的图像在 $x=a$ 处是连续不断的.

对于 $y=f(a)$ 的任意带状邻域 $\{(x,y)|f(a)-\varepsilon<y<f(a)+\varepsilon\}$.

必有 x 的领域

$$\{x||x-a|<\delta\}$$

使得 $f(x)$ 在此邻域内的图像完全落入带状区域.



函数的连续性（增量描述）

$$f(x) \text{ 在} a \text{ 点连续} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} |f(a+h)-f(a)| = 0.$$

- h 表示自变量的变化量;
- $|f(a+h)-f(a)|$ 刻画了自变量变化 h 时函数值的变化量;
- 连续性的实质是:
  当自变量变化很小时函数值的变化也很小.

函数的连续性（$\varepsilon-\delta$）

$f(x)$ 在a 点连续 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$|x-a|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$

例

设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\notin\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

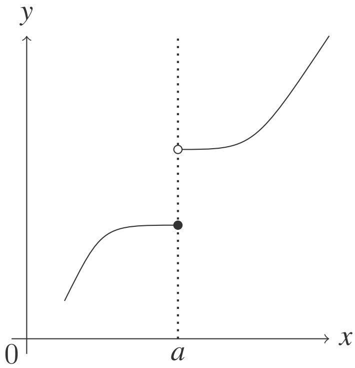
证明：$f(x)$ 在 0 处连续.

左连续

设函数 $f(x)$ 在 a 的某个左邻域（包含 a）有定义. 若

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a),$$

则称函数 $f(x)$ 在 a 点左连续.



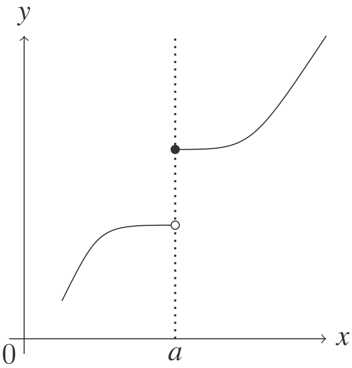
右连续

右连续

设函数 $f(x)$ 在 a 的某个右邻域（包含 a）有定义. 若

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

则称函数 $f(x)$ 在 a 点右连续.



定理

函数 $f(x)$ 在 a 点连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 a 点既左连续又右连续.

例

讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0, \\ 2-\cos x, & x < 0, \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

例

确定 a,b 的值，使得函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{1}{bx}\ln(1-3x), & x<0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续.

定义（区间上的连续函数）

- 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 的每一个点都连续，
  则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续.
- 开区间 (a,b) 上全体连续函数构成的集合记为 $C(a,b)$.
- 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续,
  且在 $x=a$ 处右连续, 在 $x=b$ 处左连续,
  则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.
- 闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数构成的集合记为 $C[a,b]$.

函数的间断点

若函数 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域有定义, 但在 $x=a$ 处不连续, 我们称 a 是函数 $f(x)$ 的间断点.

函数 $f(x)$ 在 a 点间断的原因是

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

不成立. 具体包括下面三方面的原因:

- $f(x)$ 在 a 点无定义;
- $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 或 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 不存在;
- $f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 都存在但不完全相等.

间断点的分类

- 第一类间断点：$\lim_{x\to a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 都存在.
  - 可去间断点：$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.
  - 跳跃间断点（跃点）：$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.
- 第二类间断点：$\lim_{x\to a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 至少有一个不存在.
  - 无穷间断点：$\lim_{x\to a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 有一个为 ∞.
  - $\dots$

例

对于下列函数 $f(x)$, $x=0$ 分别是 $f(x)$ 的哪一类间断点?

$$(1)\, f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

$$(2)\, f(x) = \arctan \frac{1}{x},$$

$$(3)\, f(x) = \frac{1}{x},$$

$$(4)\, f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

可去间断点

若 $x = a$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点, 则 $\lim_{x \to a} f(x) = A$ 存在.

因此可更改函数在 a 点的定义

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ A, & x = a, \end{cases}$$

则函数 $\tilde{f}(x)$ 在 a 处连续.

例

讨论函数 $f(x) = [x]$（不超过 x 的最大整数）的连续性.

例

判断函数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx^2}$$

在 $x = 0$ 处的间断点类型.

作业:

- 习题 2.7 (A)
  3.
  8. (1)(3)(4).
  10. (2).

  习题 2.7 (B)
  3.