第三章　　随机向量及其分布

3.1．袋中分别装有红、白、黑颜色的球分别为 5 个、3 个与 2 个．现在无放回抽取 3 个球，以 X、Y 分别表示取出 3 个球中红、白球的个数，求（X,Y）的联合分布列．

解：由题意知

$$P(X=i,Y=j)=\frac{\binom{5}{i}\binom{3}{j}\binom{2}{3-i-j}}{\binom{10}{3}},\qquad 1\le i+j\le 3; i=0,1,2,3;\ j=0,1,2,3.$$

所以(X,Y)的联合分布列为

X \ Y	0	1	2	3
0	0	1/40	1/20	1/120
1	1/24	1/4	1/8	0
2	1/6	1/4	0	0
3	1/12	0	0	0

3.2．设（X，Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求（1）常数 A；（2）$P(X<0.4，Y<1.3)$ ．

解：(1) 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1,$

所以 $\int_0^1\int_0^1 Axydxdy=1,$ 即 $\int_0^1\frac{A}{2}xdx=\frac{A}{4}=1,$

所以， $A=4.$

(2) $P(X<0.4,Y<1.3)=\int_{-\infty}^{0.4}\int_{-\infty}^{1.3}f(x,y)dxdy=\int_0^{0.4}\int_0^1 4xydxdy$

$=\int_0^{0.4}2xdx=0.16.$

3.3．设二维随机向量（X,Y）的联合分布列为

X Y	1	2	3

1	0.01	0.03	0.06
2	0.02	0.06	0.12
3	0.07	0.21	0.42

求 $P(X \le Y)$.

解：

$$\begin{aligned} P(X \le Y) &= P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3) \\ &\quad +P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=3) \\ &= 0.01+0.03+0.06+0.06+0.12+0.42 \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

3.4. 已知 X,Y 同分布，且 X 的分布列为

$$P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{4}，\ P(X=0)=\frac{1}{2}$$

又知 $P(XY=0)=1$，试求（X,Y）的联合分布列.

解： $P(XY=0)=P((X=0)\cup(Y=0))=P(X=0)+P(Y=0)-P(X=0,Y=0)$

而X,Y同分布，且$P(X=0)=\dfrac{1}{2}, P(Y=0)=\dfrac{1}{2}, P(XY=0)=1,$

所以$P(X=0，Y=0)=P(X=-1，Y=-1)=P(X=-1，Y=1)$

$=P(X=1，Y=-1)=P(X=1，Y=1)=0,$

所以，(X,Y)的联合分布列为

X \ Y	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$p_{\cdot j}$	1/4	1/2	1/4	1

3.5. 设（X，Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 12e^{-ax-4y}, & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试求（1）常数 a；（2）（X，Y）的联合分布函数.

解：(1) 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1,$

则有 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 12e^{-ax-4y}dxdy=\int_0^{+\infty}-3e^{-ax}(e^{-4y}\big|_0^{+\infty})dx$

$=\int_0^{+\infty}3e^{-ax}dx=-\frac{3}{a}e^{-ax}\big|_0^{+\infty}=\frac{3}{a}=1,$

所以，$a=3.$

(2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$

1° 当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}0dudv=0;$

2° 当$x>0$且$y>0$时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$

$=\int_0^x\int_0^y 12e^{-3u}e^{-4v}dudv=\int_0^x 3e^{-3u}(-e^{-4v})\big|_0^y du$

$=\int_0^x 3e^{-3u}(1-e^{-4y})du=(1-e^{-4y})(-e^{-3u})\big|_0^x$

$=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}).$

$$\text{所以，}\quad F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

3.6．设二维随机变量（*X*,*Y*）的联合分布列见下表???，求关于 *X* 和 *Y* 的边缘分布列．

XY	−1	0	2
−1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

解：由题意知

Y / *X*	-1	0	2	$p_{i\cdot}$
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	1/4
1	1/8	1/8	1/8	3/8

$p_{\cdot j}$	3/8	1/4	3/8	1

所以，X 的边缘分布列为

X	-1	0	1
P	3/8	1/4	3/8

Y 的边缘分布列为

Y	-1	0	2
P	3/8	1/4	3/8

3.7. 设二维连续型随机变量（X,Y）的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{16}xy & , \quad 0\le x\le 2, 0<y\le x^2 \\ 0 & , \quad \text{其他}\end{cases}$$

求关于 X 和 Y 的边缘密度函数.

解：X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,$$

当$0\le x\le 2$时，$f_X(x)=\int_0^{x^2}\dfrac{3}{16}xydy=\dfrac{3}{32}x^5$,

当$x\notin[0,2]$时，$f_X(x)=0$,

$$\text{所以，} f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{32}x^5, & 0\le x\le 2, \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx,$$

当$0<y\le 4$时，$f_Y(y)=\int_{\sqrt{y}}^{2}\dfrac{3}{16}xydx=\dfrac{3}{8}y-\dfrac{3}{32}y^2$,

当y取其它值时，$f_Y(y)=0$,

$$\text{所以，} f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}y-\dfrac{3}{32}y^2, & 0<y\le 4, \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

3.8．（1）设随机向量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}9x^2y^2 & , \quad 0<x<1, 0<y<1,\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

试判断 X 与 Y 是否独立？

（2）设随机向量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & , \quad 0<x<1, 0<y<1,\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

试判断 X 与 Y 是否独立？

解：由题意知:

（1）X 的边缘密度函数为:

当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_0^1 9x^2y^2dy=3x^2,$

当x取其它值时，$f_X(x)=0,$

所以，$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

Y 的边缘密度函数为:

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_0^1 9x^2y^2dy=3y^2,$

当y取其它值时，$f_Y(y)=0,$

所以，$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

因为 $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 独立.

（2）X 的边缘密度函数为:

当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_0^1 (x+y)dy=x+\frac{1}{2},$

当x取其它值时，$f_X(x)=0,$

所以，$f_X(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

同理，Y 的边缘密度函数为:

所以，$f_Y(y)=\begin{cases} y+\frac{1}{2}, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

而 $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立.

3.9. 设随机向量（X,Y）的分布列为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	α
x_2	$\frac{1}{3}$	β	$\frac{1}{9}$

问 α 、β 取何值才能使 X 与 Y 相互独立？

解：离散型随机变量独立的充要条件是：

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),\qquad \forall i,j\text{都成立}.$$

(X,Y)的联合分布列为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	1/6	1/9	α	$\frac{5}{18}+\alpha$
x_2	1/3	β	1/9	$\frac{4}{9}+\beta$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\beta$	$\frac{1}{9}+\alpha$	1

由 $P(X=x_1,Y=y_1)=P(X=x_1)P(Y=y_1),$

$$P(X=x_2,Y=y_1)=P(X=x_2)P(Y=y_1),$$

得

$$\begin{cases} \frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times(\frac{5}{18}+\alpha) \\ \frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times(\frac{4}{9}+\beta) \end{cases}$$

解得

$$\alpha=\frac{1}{18},\beta=\frac{2}{9}.$$

代入验证 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$ 是对任意 i,j 都成立，所以

$$\alpha=\frac{1}{18},\beta=\frac{2}{9}.$$

3.10．设二维随机变量（X,Y）的联合概率函数为

XY	0	1
0	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

试求:（1）给定 X=1 的条件下，Y 的条件分布列；

（2）给定 X=1 的条件下，Y 的条件分布函数.

解：由题意知：

（1）$P(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{4}{25}+\frac{6}{25}=\frac{2}{5}$,

所以，在 X=1 条件下，Y 的条件分布列为:

$$P(Y=0|X=1)=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)}=\frac{6/25}{2/5}=\frac{3}{5},$$

$$P(Y=1|X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{4/25}{2/5}=\frac{2}{5}.$$

（2）由分布函数的定义知, 在 X=1 条件下，Y 的条件分布函数为

$$F_Y(y|X=1)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{5}, & 0\le y<1.\\ 1, & 1\le y\end{cases}$$

3.11．设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & ,0<y<x<1\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

求给定 X =x 的条件下，Y 的条件条件密度函数 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

解：X 的边缘密度函数为:

当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_0^x 12y^2dy=4y^3\big|_0^x=4x^3$,

当x取其它值时，$f_X(x)=0$,

则 $f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

因为$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$,所以

当$0<x<1$时，Y的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

3.12．设随机变量 X 在 $(0,a)$ 上随机地取值，服从均匀分布，当观察到 $X=x$ $(0<x<a)$ 时，Y 在区间 (x,a) 内任一子区间上取值的概率与子区间的长度成正比，求：(1) (X,Y) 的联合密度函数 $f_{X,Y}$;　(2) Y 的密度函数 f_Y.

解：X 的密度函数为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<x<a,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

因为当 $X=x$ 时，Y 在区间(x,a)内任一子区间上取值的概率与子区间长度成正比，所以当 $X=x$ 时，Y 服从(x,a)上的均匀分布，所以

当$0<x<a$时，Y的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|X=x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-x}, & x<y<a,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

(1) X 与 Y 的联合密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X}(y|x)\cdot f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a(a-x)}, & x<y<a,0<x<a\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（2）Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx,$$

当$0<y<a$时，$f_Y(y)=\int_0^y\dfrac{1}{a(a-x)}dx=\dfrac{1}{a}[-\ln(a-x)]\Big|_0^y=\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{a}{a-y}$,

所以，当$0<y<a$时，$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{a}{a-y}, & 0<y<a\\ 0, & 其它.\end{cases}$

3.13．设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases},$$

试求：

（1）当$X=1/3$时，Y的条件密度函数$f_{Y|X}(y|x=1/3)$；

（2）$P(X+Y\le 1)$.

解：（1）X的边缘密度函数为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}6x-6x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

当$0<x<1$时，Y的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

所以，$f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{3})=\dfrac{f(x,\frac{1}{3})}{f_X(\frac{1}{3})}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}, & \dfrac{1}{3}<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（2）$P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{X+Y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}(\int_x^{1-x}6xdy)dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)dx=\frac{1}{4}.$$

3.14．设随机向量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1) 求关于X和Y的边沿密度函数f_Y和f_Y;

(2) 求给定$Y=y$的条件下，X的条件条件密度函数$f_{X/Y}$;

(3) 判断X与Y是否独立？

解：（1）X 的边缘密度函数为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{y}^{1}1dx=1-y, & 0<y<1,\\ \int_{-y}^{1}1dx=1+y, & -1<y\le 0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（2）当 0<y<1 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<x<1,\\ 0, & x取其它值.\end{cases}$$

当$-1<y\le 0$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+y}, & -y<x<1,\\ 0, & x取其它值.\end{cases}$$

即当-1<y<1 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1,\\ 0, & x取其它值.\end{cases}$$

（3） X与Y独立的充要条件是 $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，而由上可知 $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以，$X$ 与 Y 不独立.

3.15. 设(X,Y)的分布列为

X \ Y	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

求$2X+Y$的分布列.

解：由题意知：

P	1/9	2/9	1/9	2/9	2/9	0	1/9	0	0
(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
$Z=2X+Y$	0	1	2	2	3	4	4	5	6

所以，$Z=2X+Y$ 的分布列为

$Z=2X+Y$	0	1	2	3	4
P	1/9	2/9	1/3	2/9	1/9

3.16．设随机变量 U 与 V 独立同分布，且 $P\{U=k\}=\frac{1}{3}, k=1,2,3$．又设 $X=\max(U,V), Y=\min(U,V)$．试写出（X, Y）的联合分布列．

解： U，V 独立同分布，所以 U，V 的联合分布为

$U \backslash V$	1	2	3
1	1/9	1/9	1/9
2	1/9	1/9	1/9
3	1/9	1/9	1/9

所以，

P	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
(U,V)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$X=\max(U,V)$	1	2	3	2	2	3	3	3	3
$Y=\min(U,V)$	1	1	1	1	2	2	1	2	3

$$P(X=1,Y=1)=P(U=1,V=1)=\frac{1}{9},$$

$$P(X=2,Y=1)=P(U=1,V=2)+P(U=2,V=1)=\frac{2}{9},$$

$$P(X=2,Y=2)=P(U=2,V=2)=\frac{1}{9},$$

$$P(X=3,Y=1)=P(U=1,V=3)+P(U=3,V=1)=\frac{2}{9},$$

$$P(X=3,Y=2)=P(U=2,V=3)+P(U=3,V=2)=\frac{2}{9},$$

$P(X=3,Y=3)=P(U=3,V=3)=\frac{1}{9}.$

所以，

Y \ X	1	2	3
1	1/9	0	0
2	2/9	1/9	0
3	2/9	2/9	1/9

3.17．设随机变量 X 服从（-1，1）上的均匀分布，Y 服从参数为λ=1 的指数分布，且 X，Y 独立,求 $X+Y$ 的密度函数.

解：由题意知，(X,Y)的联合分布密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}, & -1\le x\le 1,\quad y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

令$Z=X+Y$,则Z的分布函数为：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy,$$

(1)当$z\le -1$时，$F_Z(z)=0$;

(2)当$-1<z<1$时，$F_Z(z)=\int_{-1}^{z}(\int_0^{z-x}\frac{1}{2}e^{-y}dy)dx=\frac{1}{2}(z+e^{-1-z}),$

所以，$f_Z(z)=\frac{1}{2}(1-e^{-1-z}).$

(3)当$z\ge 1$时，$F_Z(z)=\int_{-1}^{1}(\int_0^{z-x}\frac{1}{2}e^{-y}dy)dx=1-\frac{1}{2}e^{1-z}+\frac{1}{2}e^{-1-z},$

则 $f_Z(z)=\frac{1}{2}(e-e^{-1})e^{-z}.$

所以，

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le -1,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-1-z}), & -1<z<1,\\ \frac{1}{2}e^{-z}(e-e^{-1}), & z\ge 1.\end{cases}$$

3.18．设 f_1 为二维正态分布 $N(-3,2,4,9,0.5)$ 的密度函数，f_2 为二维正态分布 $N(8,2,1,6,-0.3)$ 的密度函数.

（1）证明 $g(x,y)=0.4f_1(x,y)+0.6\ f_2(x,y)$ 为密度函数；

（2）求 $g(x,y)$ 所对应的两个边缘密度函数.

解：(1)

因为$f_1(x,y)$和$f_2(x,y)$分别为$N(-3,2,4,9,0.5)$和$N(8,2,1,6,-0.3)$的密度函数，

所以 $g(x,y)=0.4f_1(x,y)+0.6f_2(x,y)\ge 0,\ \ \forall x,y$都成立.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}0.4f_1(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}0.6f_2(x,y)dxdy=0.4+0.6=1,$$

所以$g(x,y)$为分布密度函数.

(2) 由二维正态分布的性质知,

$$f_{1X}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x,y)dy=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{8}},\ f_{2X}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-8)^2}{2}},$$

$$f_{1Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x,y)dx=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{18}},\ f_{2Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{12\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{12}},$$

所以$g_{1X}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}[0.4f_1(x,y)+0.6f_2(x,y)]dy=0.4f_{1X}(x)+0.6f_{2X}(x)$

$$=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}+\frac{3}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-8)^2}{2}}.$$

$$g_{1Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[0.4f_1(x,y)+0.6f_2(x,y)]dx=0.4f_{1Y}(y)+0.6f_{2Y}(y)$$

$$=\frac{2}{15\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{18}}+\frac{3}{10\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{12}}.$$

3.19．设随机变量 X 服从（0，1）上均匀分布，Y 服从参数为$\lambda=1$ 的指数分布，且 X，Y 独立．求 $Z=\min\{X，Y\}$的分布函数与密度函数.

解：由 X,Y 独立知：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\min\{X,Y\}\le z)$$

$$=1-P(\min\{X,Y\}>z)=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-P(X\le z)][1-P(Y\le z)]$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)],$$

所以,(1)当$z<0$时，$F_Z(z)=0,\ f_Z(z)=0;$

(2)当$0\le z<1$时，

$$F_Z(z)=1-(1-z)[1-(1-e^{-z})]=1-e^{-z}+ze^{-z},$$
$$f_Z(z)=(2-z)e^{-z};$$

(3)当$z\ge 1$时，$F_X(z)=1,$

则 $F_Z(z)=1,\ f_Z(z)=0.$

综上所述，

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-e^{-z}+ze^{-z}, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}(2-z)e^{-z}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

3.20. 设随机变量X, Y独立同分布，且均服从指数分布$Exp(2)$，求随机变量$2X+3Y$的密度函数.

解：由X,Y独立同分布知，

(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-2x}e^{-2y}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X+3Y\le z)=\iint\limits_{2x+3y\le z} f(x,y)dxdy,$$

所以,(1)当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0,\ f_Z(z)=0;$

(2)当$z>0$时，

$$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\left(\int_0^{\frac{z-2x}{3}}4e^{-2x}e^{-2y}dy\right)dx=\int_0^{\frac{z}{2}}\left(2e^{-2x}-2e^{-\frac{2x+2z}{3}}\right)dx$$
$$=1+2e^{-z}-3e^{-\frac{2z}{3}},$$

则 $f_Z(z)=2e^{\frac{-2z}{3}}-2e^{-z};$

综上所述，

$$f_Z(z)=\begin{cases}2e^{\frac{-2z}{3}}-2e^{-z}, & z>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

第四章 随机变量的数字特征

4.1． 设二维随机变量（X,Y）的联合概率函数为

XY	0	1
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$

试求 $E[X],E[Y]$.

解： $E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\cdot}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}$

$=0\times(\frac{9}{25}+\frac{6}{25})+1\times(\frac{4}{25}+\frac{6}{25})=\frac{2}{5}.$

$E[Y]=\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}$

$=0\times(\frac{9}{25}+\frac{4}{25})+1\times(\frac{6}{25}+\frac{6}{25})=\frac{12}{25}.$

4.2． 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0\le x\le 2,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求随机变量 X 的期望 $E[X]$.

解： $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

$=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{32}x^4\Big|_0^2=\frac{3}{2}.$

4.3．假设机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作．若一周 5 个工作日里无故障，可获利 10 万元；发生一次故障仍可获利 5 万元；发生二次故障所获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求一周内所获平均利润是多少？

解：用 X 表示一周内的获利（单位：元），则 X 的分布列为

X	-2	0	5	10
P	$1-\sum_{k=0}^{2}\binom{5}{k}(0.2)^k(0.8)^{5-k}$	$\binom{5}{2}(0.2)^2(0.8)^3$	$\binom{5}{1}(0.2)^1(0.8)^4$	$\binom{5}{0}(0.2)^0(0.8)^5$

即

X	-2	0	5	10
P	181/3125	128/625	256/625	1024/3125

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(X=x_i)$$

$$=(-2)\times(1-\sum_{k=0}^{2}\binom{5}{k}(0.2)^k(0.8)^{5-k})+0\times\binom{5}{2}(0.2)^2(0.8)^3+5\times\binom{5}{1}(0.2)^1(0.8)^4+10\times0.8^5$$

$$=5.20896.$$

4.4．设随机变量 X 服从参数为 0.5 的泊松分布，试求随机变量 $Y=X/(1+X)$ 的数学期望 $E[Y]$.

解：$E[f(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)P(X=x_i)$

$$E[Y]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{1+x_k}P(X=x_k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{1+k}\times\frac{0.5^k}{k!}e^{-0.5}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)0.5^k}{(k+1)!}e^{-0.5}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0.5^k}{(k+1)!}e^{-0.5}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0.5^k}{k!}e^{-0.5}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0.5^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{e^{-0.5}}{0.5}$$

$$=1-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{0.5^l}{l!}\times\frac{e^{-0.5}}{0.5}=1-\frac{1}{0.5}(1-e^{-0.5})=2e^{-0.5}-1.$$

由计算过程可知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{1+k}\times\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!}e^{-\lambda}=1-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}\times\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}=1-\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

4.5．设二维连续型随机变量（X,Y）的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求（1）X 的数学期望；

（2）X^2 的数学期望；

（3）XY 的数学期望.

解：（1）$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}(\int_x^{\infty}x\cdot e^{-y}dy)dx=\int_0^{\infty}xe^{-x}dx=1.$

（2）$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}(\int_x^{\infty}x^2\cdot e^{-y}dy)dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2.$

（3）$E[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}(\int_x^{\infty}x\cdot ye^{-y}dy)dx$

$$=\int_0^{\infty}x(xe^{-x}+e^{-x})dx=\int_0^{\infty}(x^2e^{-x}+xe^{-x})dx=3.$$

4.6．现有 3 个袋子，各装有 a 个白球 b 个黑球，先从第 1 个袋子中摸出一球，记下颜色后就把它放入第 2 个袋子中，再从第 2 袋子中摸出一球，记下颜色后就把它放入第 3 个袋子中，最后从第 3 个袋子中摸出一球，记下颜色，若在这 3 次摸球中所得的白球总数为 X，求 $E[X]$.

解：解法一：

用 X 表示 3 次摸球所得白球总数，则 X=0,1,2,3. 则{X=0}表示 3 次全摸到黑球，

$$P(X=0)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+1}{a+b+1}\cdot\frac{b+1}{a+b+1}.$$

{X=1}表示 3 次中有 1 次摸到白球，

$$P(X=1)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+1}\cdot\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}\cdot\frac{b}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+1}\cdot\frac{a}{a+b+1}$$

$$=\frac{ab(3b+2)}{(a+b)(a+b+1)^2}.$$

{X=2}表示 3 次中有 2 次摸到白球 1 次摸到黑球，由{X=1}的概率可得

$$P(X=2)=\frac{ab(3a+2)}{(a+b)(a+b+1)^2}.$$

{X=3}表示 3 次全都摸到白球，

$$P(X=3)=\frac{a(a+1)^2}{(a+b)(a+b+1)^2}.$$

所以，X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{b(b+1)^2}{(a+b)(a+b+1)^2}$	$\frac{ab(3b+2)}{(a+b)(a+b+1)^2}$	$\frac{ab(3a+2)}{(a+b)(a+b+1)^2}$	$\frac{a(a+1)^2}{(a+b)(a+b+1)^2}$

所以，$E[X]=1\times\frac{ab(3b+2)}{(a+b)(a+b+1)^2}+2\times\frac{ab(3a+2)}{(a+b)(a+b+1)^2}+3\times\frac{a(a+1)^2}{(a+b)(a+b+1)^2}$

$=\frac{3a}{a+b}.$

解法二：

X_i表示第i次取得白球的个数，则$X_i=0$或1，且$X=X_1+X_2+X_3$，

所以$E[X]=E[X_1+X_2+X_3]=E[X_1]+E[X_2]+E[X_3]$.

X_1	0	1
P	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{a}{a+b}$

所以$E[X_1]=\frac{a}{a+b}$.

且知

X_2	0	1
$P(X_2\|X_1=0)$	$\frac{b+1}{a+b+1}$	$\frac{a}{a+b+1}$

X_2	0	1
$P(X_2\|X_1=1)$	$\frac{b}{a+b+1}$	$\frac{a+1}{a+b+1}$

则由全概率公式知

$$P(X_2=0)=\frac{b}{a+b},P(X_2=1)=\frac{a}{a+b},$$

所以$E[X_2]=\frac{a}{a+b}$.

X_3	0	1
$P(X_3\|X_2=0)$	$\frac{b+1}{a+b+1}$	$\frac{a}{a+b+1}$

X_3	0	1
$P(X_3\|X_2=1)$	$\frac{b}{a+b+1}$	$\frac{a+1}{a+b+1}$

同理可知 $P(X_3=0)=\frac{b}{a+b},P(X_3=1)=\frac{a}{a+b},E[X_3]=\frac{a}{a+b}$.

所以 $E[X]=E[X_1]+E[X_2]+E[X_3]=\frac{3a}{a+b}$.

4.7. 设随机变量 X 的分布列为：

X	-2	1	5

P	0.2	0.6	0.2

试求 X 的方差.

解：$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i=(-2)\times 0.2+1\times 0.6+5\times 0.2=1.2,$

$$E[X^2]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^{\ 2} p_i=(-2)^2\times 0.2+1^2\times 0.6+5^2\times 0.2=6.4,$$

$$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=6.4-1.2^2=4.96.$$

4.8. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求 X 的方差.

解：$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3},$

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2},$$

$$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18}.$$

4.9. 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

试求（1） X 的数学期望、方差，标准差;（2） $E[e^X]$.

解：（1） $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{4}{3},$

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x}{2}dx=2,$$

$$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=2-(\frac{4}{3})^2=\frac{2}{9},$$

$$\sigma[X]=\sqrt{Var[X]}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

（2）$E[e^X]=\int_{-\infty}^{\infty}e^x f(x)dx=\int_0^2 e^x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{e^2+1}{2}.$

4.10．设随机变量 *X*、*Y* 的联合分布列为：

X \ Y	-1	0	1
-2	*a*	0	0
-1	0.14	*b*	0
1	0.12	0.16	0.32

已知 $E(X+Y)=0$，求：(1)a，b；（2）$Var[Y]$;（3）$E(X^2Y)$.

解：由题意知

（1）$a+b+0.14+0.12+0.16+0.32=a+b+0.74=1\Rightarrow a+b=0.26,$

$$E[X+Y]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i+y_j)p_{ij}=-3a+(-2)\times0.14+(-1)\times b+0\times0.12+1\times0.16+2\times0.32$$

$=-3a-b+0.52=0$

$\Rightarrow 3a+b=0.52,$

由上可知，$a=b=0.13.$

（2）$E[Y]=\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}$

$=(-1)\times0.39+0\times0.29+1\times0.32=-0.07$

$$E[Y^2]=\sum_{j=1}^{\infty}y_j{}^2 p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j{}^2 p_{ij}=(-1)^2\times0.39+0^2\times0.29+1^2\times0.32=0.71,$$

$Var[Y]=E[Y^2]-(E[Y])^2=0.71-(-0.07)^2=0.7051.$

（3）$E[X^2Y]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i{}^2y_j)p_{ij}$

$$=(-2)^2\times(-1)\times0.13+(-1)^2\times(-1)\times0.14+1^2\times(-1)\times0.12+1^2\times1\times0.32$$
$$=-0.46.$$

4.11．设随机变量 *X* 的分布列为：

X	-2	0	6
P	0.2	0.4	0.4

求 X 的偏度系数.

解： 由题意知

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i=(-2)\times 0.2+0\times 0.4+6\times 0.4=2,$$

$$E[(X-E[X])^3]=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^3 p_i$$
$$=(-2-2)^3\times 0.2+(0-2)^3\times 0.4+(6-2)^3\times 0.4=9.6,$$

$$E[X^2]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i{}^2 p_i=(-2)^2\times 0.2+0^2\times 0.4+6^2\times 0.4=15.2,$$

$$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=15.2-2^2=11.2,$$

$$X\text{的偏度为}\ \frac{E[(X-E[X])^3]}{(Var[X])^{3/2}}=\frac{9.6}{\sqrt{11.2^3}}=0.256.$$

4.12．已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & -1\le x\le 1\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

试求 X 的峰度系数.

解： $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x\cdot(-x)dx+\int_{0}^{1}x\cdot xdx=0,$

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=2\int_0^1 x^2\cdot xdx=\frac{1}{2},$$

$$E[(X-E[X])^4]=E[X^4]=\int_{-\infty}^{\infty}x^4 f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^4|x|dx=2\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{3},$$

$$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2},$$

所以，X的峰度为 $\dfrac{E[(X-E[X])^4]}{(Var[X])^2}=\dfrac{1/3}{1/4}=\dfrac{4}{3}.$

4.13．已知 $Var[Y]$=36，$Cov(X，Y)$= -12，相关系数 $r(X,Y)$=-0.4，求 $Var[X]$之值.

解：

$$r(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}=\frac{-12}{\sqrt{Var[X]}\times 6}=\frac{-2}{\sqrt{Var[X]}}=-0.4,$$

所以,$\sqrt{Var[X]}=5,\qquad$ 则$Var[X]=25.$

4.14．设二维随机变量(X，Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & , \quad x^2+y^2\le 1\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

（1）证明：$Cov(X，Y)=0$；

（2）判断 X 与 Y 是否独立？

解：(1) $E[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$

$=\int_{-1}^{1}(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xy\cdot\frac{1}{\pi}dy)dx=0,$(被积函数是奇函数）

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x\frac{1}{\pi}dy)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx=0,$$

同理，$E[Y]=0,$ 所以，$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=0.$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,$

当$-1\le x\le 1$时，$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},$

所以，$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0, & 其它.\end{cases},$

同理，$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0, & 其它.\end{cases},$

因为$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以，$X$与$Y$不独立.

4.15．设随机变量 X_1,X_2,X_3 独立同分布，且 $X_i(i=1,2,3)$ 的分布列为：

$$P(X_i=k)=\frac{1}{3},(k=1,2,3)$$

求$Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$的数学期望.

解：由题意知：

$P(Y=1)=(\frac{1}{3})^3$,

$P(Y=2)=(\frac{2}{3})^3-(\frac{1}{3})^3=\frac{7}{3^3}$,

$P(Y=3)=1-P(Y=1)-P(Y=2)=\frac{19}{27}$,

$E[Y]=1\times P(Y=1)+2\times P(Y=2)+3\times P(Y=3)=\frac{8}{3}$.

4.16. 若（X,Y）服从二元正态分布 $N(-1,5,2,3,-0.5)$，试求 $Z=2X-3Y$ 的数学期望 $E[Z]$ 与方差 $Var[Z]$.

解：由题意知 $E[X]=-1,E[Y]=5,Var[X]=2,Var[Y]=3,r(X,Y)=-0.5,$

$$E[Z]=E[2X-3Y]=2E[X]-3E[Y]=2\times(-1)-3\times5=-17,$$

$$Cov(X,Y)=r(X,Y)\cdot\sqrt{Var[X]}\cdot\sqrt{Var[Y]}=(-0.5)\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\begin{aligned}Var[Z]&=Var[2X-3Y]=4Var[X]+9Var[Y]+2\times2\times(-3)Cov(X,Y)\\&=8+27-12\times(-\frac{\sqrt{6}}{2})=35+6\sqrt{6}.\end{aligned}$$

4.17. 设（X, Y）的联合分布列为

X Y	0	1
0	0.1	a
1	b	0.4

已知 $P(X=1|Y=1)=\frac{2}{3}$,试求

(1) a，b 之值；

(2) $Cov(X,2Y)$.

解：(1) 由 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$知：$a+b=0.5,$

$$P(X=1|Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.4}{a+0.4}=\frac{2}{3},$$

所以，$a=0.2,b=0.3.$

(2) $E[XY]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i y_j)p_{ij}=1\times 1\times 0.4=0.4,$

$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}=1\times(0.3+0.4)=0.7,$

$E[Y]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}=1\times(0.2+0.4)=0.6,$

所以，$Cov(X,2Y)=2Cov(X,Y)=2\times(-0.02)=-0.04.$

4.18．设二维随机变量（*X*,*Y*）的联合分布列为

XY	−1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

（1）试求 $E(X^2)$;（2）试求 *X* 与 *Y* 的相关系数;（3）*X* 与 *Y* 是否独立?

解：(1) $E[X^2]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2 p_{i\cdot}=1\times(0.08+0.32+0.2)=0.6.$

(2) $E[XY]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i y_j)p_{ij}=1\times(-1)\times 0.08+1\times 1\times 0.2=0.12,$

$E[X]=0.6,\qquad E[Y]=(-1)\times 0.15+1\times 0.35=0.2,$

则$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=0.$

所以，*X* 与 *Y* 的相关系数 $r(X,Y)=0$.

(3) 由题意知：

XY	−1	0	1	*X* 的边缘分布
0	0.07	0.18	0.15	0.4
1	0.08	0.32	0.20	0.6
Y 的边缘分布	0.15	0.5	0.35	1

显然，

$P(X=0,Y=-1)=0.07\neq P(X=0)P(Y=-1)=0.4\times 0.15,$

所以，*X* 与 *Y* 不独立.

4.19．设二维随机变量（*X*,*Y*）的联合分布列为

X \ Y	0	1
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$

试求 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的协方差.

解：

$$E[X]=1\times(\frac{4}{25}+\frac{6}{25})=\frac{2}{5},\qquad E[Y]=1\times(\frac{6}{25}+\frac{6}{25})=\frac{12}{25},$$

$$E[X^2]=1^2\times(\frac{4}{25}+\frac{6}{25})=\frac{2}{5},\qquad E[Y^2]=1^2\times(\frac{6}{25}+\frac{6}{25})=\frac{12}{25},$$

则 $Var[X]=\frac{6}{25},\qquad Var[Y]=\frac{156}{625},$

所以 $Cov(X+Y,X-Y)=Cov(X,X)-Cov(X,Y)+Cov(Y,X)-Cov(Y,Y)$

$$=Var[X]-Var[Y]=\frac{150-156}{625}=-\frac{6}{625}.$$

4.20．设二维随机变量（X,Y）的联合分布列为

X \ Y	−1	0	1
−1	0	$\frac{1}{8}$	0
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

计算条件期望 $E(X+Y|X=1)$.

解：在{X=1}发生下，$X+Y$ 的条件分布列为

$X+Y$	0	1	2
$P(X+Y\|X=1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

所以，$E[X+Y|X=1]=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1.$

4.21．设二维连续型随机变量（X,Y）的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x\ , & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

给定 Y=0.5，求 X 的条件期望 $E[X|Y=0.5]$.

解： $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx,$

当$0\le y\le 1$时，$f_Y(y)=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2)$,

即$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它.\end{cases}$

所以，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2x}{1-y^2}, & y<x<1,0\le y\le 1\\ 0, & 其它.\end{cases}$

则$E[X|Y=0.5]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx=\int_{0.5}^{1}x\cdot\frac{8x}{3}dx=\frac{7}{9}$.

4.22．袋中有红、白、黑三种颜色球若干，若从袋中任摸一球，已知摸出的球为红球的概率为 p_1，摸出的球为白球的概率为 p_2，现从袋中有放回地摸球 n 次，共摸出红球 X 次，摸出白球 Y 次，试求 X 与 Y 的相关系数 $r(X,Y)$.

解：解法一：

由题意知(X,Y)服从三项分布，所以

$$X\sim B(n,p_1),Y\sim B(n,p_2),X+Y\sim B(n,p_1+p_2),$$

则$Var[X]=np_1(1-p_1),Var[Y]=np_2(1-p_2)$,

$Var[X+Y]=n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)$,

而，$Cov(X,Y)=\frac{1}{2}\left(Var[X+Y]-Var[X]-Var[Y]\right)=-np_1p_2$,

所以，$r(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}=\frac{-np_1p_2}{\sqrt{np_1(1-p_1)}\sqrt{np_2(1-p_2)}}=-\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$.

解法二

设$X_i=\begin{cases}1，第i次摸到红球,\\0，第i次未摸到红球.\end{cases}$，$Y_j=\begin{cases}1，第j次摸到白球,\\0，第j次未摸到白球.\end{cases}$,$i,j=1,\Lambda,n.$

令$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Y=\sum_{j=1}^{n}Y_j$，且X_i与$Y_j(i\ne j)$相互独立,

X_i独立同分布$(i=1,\Lambda,n)$，Y_j独立同分布$(j=1,\Lambda,n)$,

X_i	0	1

P	$1-p_1$	p_1

Y_j	0	1
P	$1-p_2$	p_2

因为X_i独立同分布,且X_i与$Y_j\,(i\neq j)$相互独立,

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= Cov(X_1+\Lambda+X_n,Y)\\
&= nCov(X_1,Y) = n[Cov(X_1,Y_1)+\Lambda+Cov(X_1,Y_n)]\\
&= nCov(X_1,Y_1),
\end{aligned}
$$

$$Cov(X_1,Y_1)=E(X_1Y_1)-E(X_1)E(Y_1)=0-p_1p_2=-p_1p_2,$$

$$Cov(X,Y)=-np_1p_2.$$

所以$Var[X]=Var[\sum_{i=1}^{n}X_i]=np_1(1-p_1),Var[Y]=Var[\sum_{j=1}^{n}Y_j]=np_2(1-p_2),$

则$r(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}=\dfrac{-np_1p_2}{\sqrt{np_1(1-p_1)}\sqrt{np_2(1-p_2)}}=-\sqrt{\dfrac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.$

4.23．电视台有一节目“幸运观众有奖答题”：有两类题目，*A* 类题答对一题奖励 1000 元，*B* 类题答对一题奖励 500 元．答错无奖励，并带上前面得到的钱退出；答对后可继续答题，并假设节目可无限进行下去（有无限的题目与时间），选择 *A*、*B* 类型题目分别由抛均匀硬币的正、反面决定．已知某答题者 *A* 类题答对的概率都为 0.4，答错的概率都为 0.6；*B* 类题答对的概率都为 0.6，答错的概率都为 0.4．试求：

（1）该答题者答对题数的数学期望；

（2）该答题者得到奖励金额的数学期望．

解：(1) 设X为答对题数，p表示一次答题答对的概率，则

$$p=\frac{1}{2}\times 0.4+\frac{1}{2}\times 0.6=\frac{1}{2},$$

且$P(X=k)=p^k(1-p)=\dfrac{1}{2^{k+1}},k=0,1,2,\Lambda$

所以，$E[X]=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\dfrac{1}{2^{k+1}}=\dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\dfrac{1}{2^{k-1}}=1.$

(2) 令 Y 表示答题得到的奖励金额，Y_1表示第一次答题得到的奖励金额，

Y_2表示从第二次开始答题得到的奖励金额.

则$E[Y]=E[Y|Y_1=1000]\cdot P(Y_1=1000)+E[Y|Y_1=500]\cdot P(Y_1=500)+E[Y|Y_1=0]\cdot P(Y_1=0)$

$=E[Y_1+Y_2|Y_1=1000]\cdot P(Y_1=1000)+E[Y_1+Y_2|Y_1=500]\cdot P(Y_1=500)+E[Y_1+Y_2|Y_1=0]\cdot P(Y_1=0)$

由题意知，Y_1与Y_2独立，且Y_1表示第一次答对A题，

则$E[Y_1+Y_2|Y_1=1000]=E[Y_1|Y_1=1000]+E[Y_2|Y_1=1000]=1000+E[Y]$,

同理，$E[Y_1+Y_2|Y_1=500]=E[Y_1|Y_1=500]+E[Y_2|Y_1=500]=500+E[Y]$,

$E[Y_1+Y_2|Y_1=0]=0$.

所以，$E[Y]=(1000+E[Y])\times\frac{1}{2}\times0.4+(500+E[Y])\times\frac{1}{2}\times0.6+0$

$=200+0.2E[Y]+150+0.3E[Y]$,

即$E[Y]=700$.