華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§3.3 隐函数的导数和参数式求导

- 隐函数的导数
- 对数求导法
- 参数式求导
- 极坐标式求导
- 相关变化率

隐函数

- 因变量 y 与自变量 x 之间的关系有时
  由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 所决定.
- 特殊情形下,
  可从方程 $F(x,y)=0$ 解出函数的显示表达$y=f(x)$.
  例：方程 $x+y^3-1=0$ 可确定函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$.
- 但显示表达并不是总能解出.
  例：Kepler 方程 $y=x+\varepsilon\sin y$ 确定了一个函数 $y=f(x)$,
  但却无法给出 $f(x)$ 的具体表达式.
- 由二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

隐函数求导法

隐函数求导法的一般步骤:

设隐函数 $y=y(x)$ 由 $F(x,y)=0$ 确定, 求 y 关于 x 的导数 $y'(x)$.

- 把 $F(x,y)$ 中的 y 看成关于 x 的函数,
- 此时, $F(x,y(x))$ 是关于 x 的一个复合函数,
- 在方程 $F(x,y(x))=0$ 两边同时对 x 求导

  (注意应用复合函数求导的链式法则)
- 得到一个关于 x,y 和 y' 的方程,
- 从所得方程中解出 y'.

隐函数求导法的本质:

将先解方程再求导的问题转化为先求导再解方程的问题.

例

求有方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $y'(x)$，并求 $y'(0)$ 的值.

- 隐函数求导法所得导函数 $y'(x)$ 的表达式通常带有 $y(x)$，不一定能写成关于 x 的显示表达.
- 求 $y'(x)$ 在 $x = x_0$ 的具体值时，可求出 $x = x_0$ 时 y 的值 y_0，再将 (x_0, y_0) 代入关于导数的方程中求 $y'(x_0)$.

例

求方程 $y = \tan(x + y)$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

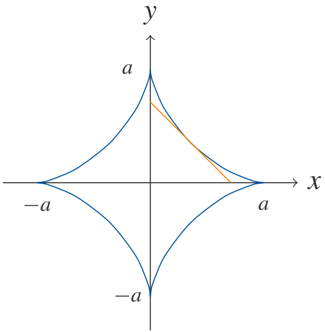
例

证明：

星形线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

除与坐标轴的交点外任一点处的切线介于两坐标轴之间的线段为定长.



对数求导法

对数求导法的一般步骤:

- 欲求 $f(x)>0$ 的导数 $f'(x)$;
- 可先对 $\ln|f(x)|$ 求导数得
$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$
- 当 $(\ln|f(x)|)'$ 比 $f'(x)$ 更容易求得时, 我们可以得到
$$f'(x) = f(x)\cdot(\ln|f(x)|)'.$$

对数求导法则的本质特征:

取对数后 $\ln|f(x)|$ 的求导比直接对 $f(x)$ 求导更简单.

对数求导法

例

求下列函数的导数:

$$f(x) = x^x, x > 0,$$

$$f(x) = \frac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\cdot e^x}.$$

对数求导法

对数求导法则的适用范围

- 若 $f(x)$ 是多个因子相乘和相除, 可用对数求导法则.

$$f(x)=\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdots g_m(x)},$$

$$\ln|f(x)|=\ln|f_1(x)|+\cdots\ln|f_n(x)|-\ln|g_1(x)|-\cdots-\ln|g_m(x)|,$$

对 $\ln|f(x)|$ 求导可避免多次应用乘积求导公式 (Lebniz 公式).

- 若 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 是幂指函数, 可用对数求导法则.

$$f(x)=u(x)^{v(x)},$$

$$\ln|f(x)|=v(x)\cdot\ln|u(x)|.$$

例

求下列函数的导数:

$$f(x) = \cos(x^{\sin x}), x > 0,$$

$$f(x) = x^{x^2} + 2^{x^x}, x > 0.$$

参数式求导

- 因变量 y 与自变量 x 之间的关系由参数方程给出：

$$\begin{cases} x = u(t), \\ y = v(t), \end{cases} \qquad t \text{ 为参数.}$$

- 例： 参数方程

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

  给出了函数关系 $y = \frac{1}{4}x^2$.
- 并非所有的参数方程都可导出 y 对于 x 的显示表达.
- 问题： 如何利用参数方程求 y 对于 x 的导数?

设有参数方程

$$\begin{cases} x = u(t), \\ y = v(t), \end{cases}$$

其中 $u(t), v(t)$ 都在 t_0 可导.

求 y 关于 x 在点 $x_0 = u(t_0)$ 的导数 $y'(x_0)$.

- 设 $u'(t_0) \neq 0$,
  $u(t)$ 在 t_0 的一个小邻域内单调, 有逆函数 $t = u^{-1}(x)$.
- y 作为 x 的函数可视为复合函数 $y(x) = v(t) = v(u^{-1}(x))$.
- 由链式法则

$$y'(x_0) = v'(u^{-1}(x_0))(u^{-1}(x_0))' = \frac{v'(u^{-1}(x_0))}{u'(u^{-1}(x_0))} = \frac{v'(t_0)}{u'(t_0)}.$$

参数式求导

设有参数方程

$$\begin{cases} x = u(t), \\ y = v(t), \end{cases}$$

其中 $u(t), v(t)$ 都在 t_0 可导.

则 y 关于 x 在点 $x_0 = u(t_0)$ 的导数 $y'(x_0)$ 为:

$$y'(x_0) = \frac{v'(t_0)}{u'(t_0)}$$

参数式求导的实质:

将参数 t 看成 x 的函数, 则 y 关于 x 的函数就是复合函数, 进而用链式法则求导.

例

设 y 和 x 满足参数方程:

$$\begin{cases} x = \ln\sqrt{t^2+1}, \\ y = \arctan t, \end{cases}$$

求 $y'(x)$ 和 $y''(x)$.

参数式求导

- 参数式求导法所求出的 $y'(x)$ 通常是参数 t 的函数,
  不必写出关于 x 的显示表达.
- 由参数方程求 n 阶导数 $y^{(n)}(x)$ 时, 逐阶进行求导.
- 欲求 n 阶导数,
  先求 $n-1$ 阶导函数并将其整理为参数 t 的函数,
  再用参数求导法求 $n-1$ 阶导数的导数, 得 n 阶导数.

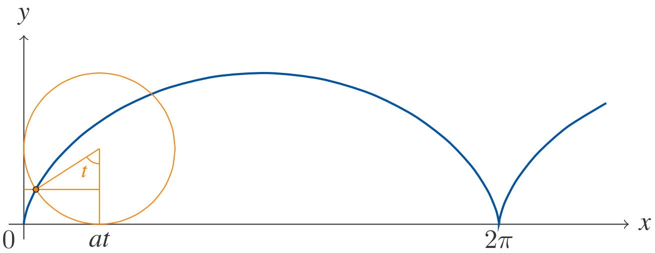
参数式求导

例

求旋轮线:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

上斜率为 1 的切线方程, 并求 $y''(x)$.



极坐标:

平面上一点 P 可由

$$(r,\theta), r>0, 0\leqslant\theta<2\pi,$$

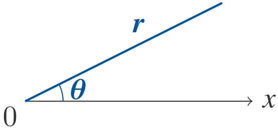
唯一确定.

(r,θ) 称为点 P 的极坐标.

极坐标与直角坐标:

同一点 P 的极坐标 (r,θ) 与直角坐标 (x,y) 满足

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$



平面曲线也可由极坐标方程 $F(r, \theta) = 0$ 给出.

- 圆:

$$r = a.$$

- 直线:

$$\theta = \theta_0.$$

- Archemed 螺线:

$$r(\theta) = a\theta.$$

- 设曲线有极坐标方程 $r = r(\theta)$.
- 化为直角坐标参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

- 由参数式求导

$$y'(x) = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta} = \frac{\tan\theta + \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1 - \tan\theta \cdot \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$$

- 只需计算 $\frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{1}{(\ln r(\theta))'}$.

极坐标式求导（几何意义）

记 β 为向径沿逆时针方向转到切线的夹角，则

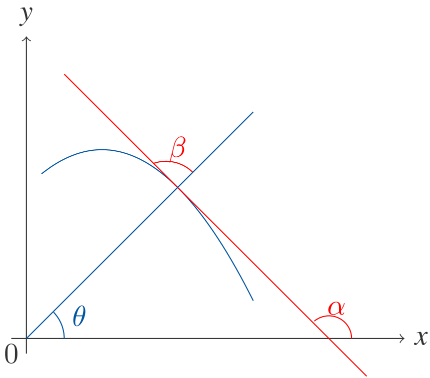
$$\tan\beta = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$

α 为切线关于 x 轴的倾角，则

$$\tan(\alpha) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\tan\theta + \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1 - \tan\theta\cdot\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$$

因此，

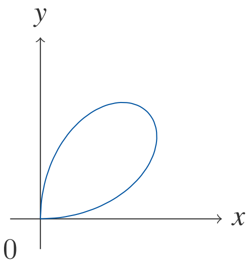
$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \tan(\alpha-\theta) = \tan\beta.$$



极坐标式求导

例

求极坐标曲线 $r = a\sin 2\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.



相关变化率

若干互相有联系的量都随同一个变量（如时间）变化，
不同量的变化率之间有相互关系，
这种有连带关系的变化率称为相关变化率.

问题的数学化：

设 $x = u(t)$ 和 $y = v(t)$ 是两个可导函数. 若 x 和 y 之间有联系，
则 $u'(t)$ 和 $v'(t)$ 之间也有联系，称为相关变化率.

相关变化率解法：

- x 与 y 满足关系式 $F(x, y) = 0$.
- 对 t 求导，得到变化率 $u'(t)$ 和 $v'(t)$ 之间的关系式.
- 求解关系式，得所求相关变化率.

例

一气球从距观察员 $500m$ 处离地垂直上升, 速率为 $140m/s$.

当气球高度为 $500m$ 时, 观察员视线的仰角的增加率是多少?

華南理工大學
South China University of Technology

作业：

- 习题 3.3 (A)
  3. (4) (7)
  4. (2)
  5. (1) (6)
  6. (4)
  7. (3)
  9. (1)

  习题 3.3 (B)
  1. (2) (4)