華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§3.2 函数的求导法则

- 函数四则运算的求导法则
- 复合函数的求导法则
- 反函数的求导法则
- 高阶导数

函数四则运算的求导法则

定理

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x 点可导，则

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- 若 $g(x) \neq 0$，则

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

推论

设函数 $f(x)$ 在 x 处可导.

- 若 C 为常数, 则 $(Cf(x))' = Cf'(x)$.
- 若 $f(x) \neq 0$, 则

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

例

- 求 $f(x)=x^3\sin x+e^x$ 的导函数.
- 求 $f(x)=\tan x$ 的导函数.
- 求 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ 的导函数.

求导运算前对函数进行必要的化简通常会使求导过程变简单.

例

设 $f(x) = \sqrt[3]{x}\sin x$, 求 $f'(0)$.

运用运算法则求某个函数在 a 处的导数,

要求参加运算的每个函数在 a 的导数都存在.

复合函数的求导（链式法则）

定理（链式法则）

若函数 $g(x)$ 在 x_0 可导，函数 $f(u)$ 在 $u_0 := g(x_0)$ 可导，
则复合函数 $f \circ g(x)$ 在 x_0 可导，其导数为

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

复合函数的求导（链式法则）

例

求下列函数的导数:

$$f(x) = \cos(e^x),$$
$$f(x) = e^{\tan\frac{1}{x}},$$
$$f(x) = \sin(nx)\sin^n x.$$

若一个函数经由多次复合得到，
运用链式法则时要逐层进行，不可遗漏.

反函数的求导法则

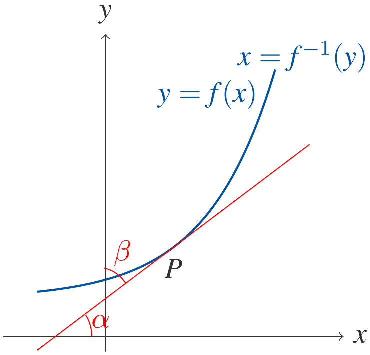
定理（反函数求导）

设函数 $y=f(x)$ 在包含 x_0 的区间上连续且严格单调.
若它在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0)\neq 0$,
则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导, 且

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

定理中 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件是重要的,
在包含 x_0 的区间上严格单调并不重要.

反函数求导法则（几何意义）



- 在 $x - y$ 坐标系下，
  函数 $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$
  的图像是同一条曲线.
- α 为切线与 x 轴正向的夹角；
  β 为切线与 y 轴正向的夹角.
- $\tan\alpha = f'(x_0)$,
  $\tan\beta = (f^{-1})'(y_0)$.
- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. 因此，
  $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

例

- 求函数 $y = \ln x$ 的导函数.
- 求函数 $y = \arcsin x$ 的导函数.
- 求函数 $y = \arctan x$ 的导函数.

基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0, \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\mathrm{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

初等函数的导数

初等函数由基本初等函数经过有限多次四则运算和复合得到，
但是初等函数在某些点处的导数不一定可以通过运算法则去求.
原因在于参与运算的初等函数在某些点处的导数可能不存在.
此时需从导数的定义出发进行计算.

例

求函数 $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x^2})$ 的导函数.

导数的计算

例

求下列函数的导数:

$$(1)\, f(x)=\sqrt{a^2-x^2}, \qquad (2)\, f(x)=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

例

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导,

- 求 $y=f(\sin 3x)$ 的导数.
- 求 $y=e^{f(x^2)}$ 的导数.

定义（高阶导数）

- 若 $f(x)$ 在 x_0 附近可导且导函数 $f'(x)$ 也在 x_0 可导，则 $(f'(x))'|_{x=x_0}$ 称为 f 在点 x_0 处的二阶导数，记为
$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$
- 设 $f(x)$ 在 x_0 附近 k 阶的导数 $f^{(k)}(x), k = 0, \ldots, n-1$，若 $f^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 可导，则其导数 $(f^{(n-1)}(x))'|_{x=x_0}$ 称为 f 在点 x_0 的 n 阶导数.

归纳定义：

$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 就是 $n-1$ 阶导函数的导数.

高阶导数

- 约定 $f^{(0)}(x) = f(x)$ 为 $f(x)$ 的零阶导数.
- $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的一阶导数.
- 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导是指
  它在 x_0 处有从零到 n 各阶的导数.
- 欲求函数的高阶导数, 只需按求导法则一阶阶的算下去.
  方法都是求一阶导数的方法.

例

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 求函数 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的二阶导数.

初等函数的高阶导数

- 若 $f(x) = e^x$, 则 $f^{(n)}(x) = e^x$.
- 若 $f(x) = \sin ax$, 则 $f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$.
- 若 $f(x) = \cos ax$, 则 $f^{(n)}(x) = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$.
- 若 $f(x) = x^\alpha$, 则 $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.
- 若 $f(x) = \ln x$, 则 $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^{n+1}}$.

计算超过 3 阶的导数时, 注意寻找其中的规律和归纳法的应用.

定理（Leibniz 公式）

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，
则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处也 n 阶可导，
其在 x_0 处的 n 阶导数为

$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)\cdot g^{(k)}(x_0).$$

例

设函数 $f(x) = x^2 \sin x$, 求 $y^{(100)}$.

设

$f(x) = \arcsin^2 x$,

- 证明: $(1 - x^2) \cdot f''(x) - x \cdot f'(x) = 2$.
- 求 $f^{(n)}(0)$.

South China University of Technology

作业:

- 习题 3.2 (A)
  - 2. (8) (12)
  - 3. (7) (8) (10)
  - 4. (7) (9)
  - 5. (11)

  习题 3.2 (B)
  - 3.
  - 4. (2)