座位号______ 专业______ 学院______ 学号______ 姓名______

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学本科生期末中考试

《工科数学分析(上)》期中考试(A)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 考试形式：闭卷;

3. 请用蓝色或黑色水笔答题，不要用铅笔或者其他颜色的笔答题;

4. 交卷时除了草稿纸不用交之外，每页试卷都要交;

5. 本试卷共 10 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

一、 (15分)用$\varepsilon-N$语言叙述$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义. 并用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1(b>1)$.

解：$\forall \varepsilon>0$ $\exists N>0$. s.t $n>N$时

有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

令 $b_n=\sqrt[n]{b}-1$ $\therefore \sqrt[n]{b}=1+b_n$

$\Rightarrow b=(1+b_n)^n \geq 1+nb_n$

$\Rightarrow b_n<\frac{b-1}{n} \Rightarrow |\sqrt[n]{b}-1|<\left|\frac{b-1}{n}\right|$

$\therefore \forall \varepsilon>0$ 令 $N=\left[\frac{b-1}{\varepsilon}\right]$ 则 $n>N$时

$|\sqrt[n]{b}-1|<\frac{|b-1|}{n}<\varepsilon$

二、 (20分)计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+ax)^b-(1+bx)^a}{x^2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ab(1+ax)^{b-1}-ab(1+bx)^{a-1}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^2b(b-1)(1+ax)^{b-2}-b^2a(a-1)(1+bx)^{a-2}}{2}$

$=\frac{1}{2}[a^2(b-1)b-b^2(a-1)a]$

$=\frac{1}{2}ab[\cancel{ab}-a-\cancel{ab}+b]=\frac{1}{2}ab(b-a)$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

解：$\because x^2\ln(1+\frac{1}{x})$

$=x^2[\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})]$

$=x-1+o(1)$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[\cancel{x}-\cancel{x}+1-o(1)]$

$=1.$ #

三、 (15分)完成下面两题

(1) 令$f(x)=x^3\mathrm{e}^x$, 求$f^{(n)}(x)$;

解: $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (x^3)^{(k)} e^x$

$=[x^3+n\cdot 3x^2+C_n^2\cdot 6x+C_n^3\cdot 6]e^x$

(2) 定义函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0, \\ 0,\ x=0. \end{cases}$$

求$f'(x)$，并讨论$f'(x)$的连续性，说明理由.

解: 当$x\neq 0$时 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$

$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

分别取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f'(0)$ 不存在.

$\therefore f'(x)$在$x=0$处不连续 #

四、 (10分)设f在$(a,+\infty)$中可导，如果

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+xf'(x)\ln x)=l,$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l.$

Pf: $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x\, f(x)}{\ln x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} f(x) + \ln x\, f'(x)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) + x f'(x) \ln x \right]$$

$= l$ #

五、 (10分)设$f(x) \in C[0,1]$并且可微，满足$\forall x \in [0,1]$有$0 < f(x) < 1$并且$f'(x) \neq 1$. 证明：$f(x)$在$[0,1]$上有唯一的不动点，即存在唯一的$x_0 \in [0,1]$，使得$f(x_0) = x_0$.

Proof: 令 $g(x) = f(x) - x$

$\because g(0) = f(0) > 0$

$g(1) = f(1) - 1 < 0$ $\left(\because 0 < f(x) < 1\right)$

$\therefore \exists \xi \in (0,1)$. s.t. $g(\xi) = 0$

即 $f(\xi) = \xi$

若又有 $\eta \in (0,1)$, s.t.

$f(\eta) = \eta$. 且 $\xi \neq \eta$ (不妨设$\xi < \eta$)

$\because g(\xi) = g(\eta) = 0$

$\therefore \exists \nu \in (\xi, \eta)$ s.t.

$g'(\nu) = 0 \Rightarrow f'(\nu) = 1$ 矛盾.

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在唯一的不动点.

六、 (15分)完成下面两题

(1) 设旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (a > 0,\ t \in [0, 2\pi]).$$

求旋轮线上斜率为1的切线.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}$

$= \frac{\sin t}{1-\cos t} = 1 \Leftrightarrow \cot\frac{t}{2} = 1$

$\Rightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 切点 $\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right), a\right)$. $\therefore y - a = x - a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ #

(2) 证明：若$p > 1$, 则对一切$x, y \in \mathbb{R}$有

$$|x + y|^p \le 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p).$$

Proof: 令 $f(x) = x^p$, $x > 0$.

$\because f'(x) = p x^{p-1}$ $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$

$\therefore f(x)$ 严格凸.

$\therefore f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$, $\forall x, y > 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^p \le 2^{p-1}(x^p + y^p)$, $x, y > 0$

$\Rightarrow |x+y|^p \le 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ #

七、(15分)设函数f在x_0处有n+1阶导数，且$f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. 将f在x_0处按Taylor公式展开：

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta_n h),$$

其中$\theta_n \in (0,1)$. 求证：

$$\lim_{h\to 0}\theta_n = \frac{1}{n+1}.$$

Proof：由已知

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta_n h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \cdots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)$$

$$\therefore \frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n h) - f^{(n)}(x_0)}{h}$$

$$= \frac{n!}{h^{n+1}}\left[f(x_0+h) - f(x_0) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1} - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)\right]$$

由L'Hospital rule：

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n h) - f^{(n)}(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\theta_n \cdot \lim_{h\to 0} f^{(n+1)}(x_0+\theta_n h) = f^{(n+1)}(x_0) \lim_{h\to 0}\theta_n$$

$$= \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x_0) \qquad \text{又} f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\theta_n = \frac{1}{n+1} \quad \#.$$