華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§3.1 导数的概念

- 导数概念的引入
- 导数的定义
- 导数的几何和物理意义
- 单侧导数

导数概念的引入：瞬时速率

设质点运动的路程 s 与时间 t 满足函数关系

$$s = s(t)$$

求质点在 t_0 时刻的瞬时速率.

- 质点运动的平均速率公式

$$\text{平均速率} = \frac{\text{路程}}{\text{时间}}.$$

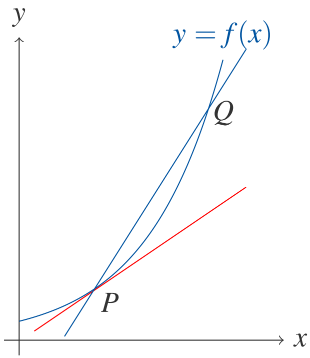
- 取 Δt 很小，用质点从时刻 t_0 到时刻 $t_0 + \Delta t$ 的平均速率近似在 t_0 的瞬时速率：

$$v(t_0) \approx \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

- 当 $\Delta t \to 0$ 时，上式右端的极限就给出了质点在 t_0 时刻的瞬时速率.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

导数概念的引入：曲线的切线



求平面曲线 $y=f(x)$

在 $P:=(x_0,f(x_0))$ 点的切线.

- 在曲线上取另一点

$$Q:=(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x)).$$

- 当 Q 靠近 P 时，割线 PQ 的斜率近似切线的斜率.
- 当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 PQ 的斜率的极限给出 P 点处切线的斜率.

$$k:=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

- 若极限
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 可导.
- 这个极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$.
- 上述极限不存在时, 称 $f(x)$ 在 x_0 处不可导.
特别地, 上述极限趋于正（负）无穷大时,
称 $f(x)$ 在 x_0 的导数为正（负）无穷大.

导数定义的理解

- 讨论函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, $f(x)$ 在 x_0 处必须有定义.
- Δx 是一个变量, 表示自变量 x 的变化量.
- $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是函数值的变化量.
- 函数值在 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率为

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

- 导数就是函数值平均变化率的极限:

  当自变量的变化量趋于 0 时, 函数值平均变化率的极限.

导数定义的其他形式

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

利用导数的定义进行证明或计算时, 可选用任意一个定义式.

导数的定义：例

例

- 求 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 在 a 处的导数 $f'(a)$ 和 $g'(a)$.
- 求 $f(x)=e^x$ 在 a 处的导数 $f'(a)$.
- 求 $f(x)=x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$ 在 $a>0$ 处的导数 $f'(a)$.

例

- 设函数 $\varphi(x)$ 在 a 点连续，$f(x)=(x-a)\varphi(x)$，求 $f'(a)$.
- 已知函数 $f(x)$ 在 a 的导数为 $f'(a)=2$，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+3x)-f(a)}{5x}, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}.$$

- 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$ 和 $f'(0)=1$，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\ln(1-x^2)}.$$

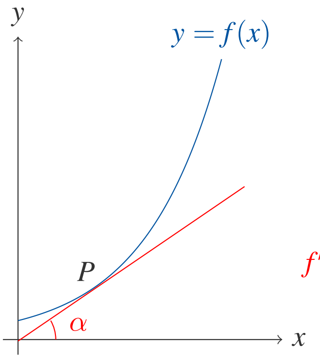
- 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,
  若 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都可导,
  则称 $f(x)$ 在区间 I 上可导.
- 若 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 I 中的每一点 x
  唯一确定函数 $f(x)$ 在 x 点处的导数值 $f'(x)$.
  因此，对应法则 $x \to f'(x)$ 给出了 I 上的一个函数 $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 表示:

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率.



$$f'(x_0)=\tan\alpha.$$

导数的几何意义

- 若 $f'(x_0)=0$, 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 点有水平切线

$$y=f(x_0).$$

- 若 $f'(x_0)\neq 0$, 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 点有切线

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

- 若 $f'(x_0)=\infty$, 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 点有垂直切线

$$x=x_0.$$

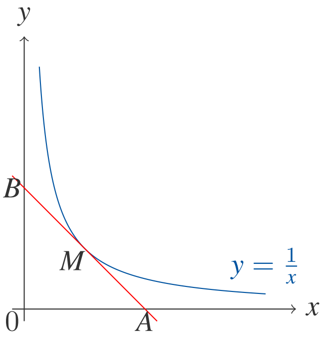
注：

导数为无穷大只是导数不存在的一种特殊情形,

导数不存在时未必有切线.

例

设曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $M\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$, $x_0\neq 0$ 处的切线与 x 轴和 y 轴分别交于 A,B. 证明：M 为线段 AB 的中点.



导数的物理意义

- 路程对时间的导数为质点的瞬时速率
$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{dt}.$$
- 电量对时间的导数为电流强度
$$i(t) = q'(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{dt}.$$
- 质量对长度 (面积、体积) 的导数为物体的线 (面、体) 密度
$$\rho(t) = m'(t) = \frac{\mathrm{d}m(t)}{dt}.$$

单侧导数

- 左导数

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- 右导数

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

定理

函数 $f(x)$ 在 x_0 可导

$\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在, 且相等.

此性质常用于判断分段函数在分段点的可导性.

例

设

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1, \\ 2x, & x\geqslant 1, \end{cases}$$

求 $f'(1)$.

例

- 讨论函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处的可导性.
- 确定常数 a, b, 使得函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant x_0, \\ ax + b, & x > x_0, \end{cases}$$

在 x_0 处可导.

定理

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

但在 x_0 处连续的函数未必在 x_0 处可导.

- 函数 $f(x)=|x|$ 在 0 处连续, 但在 0 处不可导.
- 函数
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
在 0 处连续, 但在 0 处不可导.

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 3.1 (A)

  2.(3)

  5.

  10. (1)(2)

  习题 3.1 (B)

  1. (2)

  2.