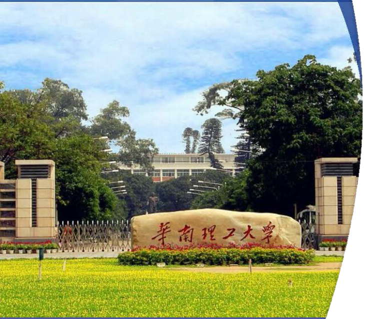

華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§4.7 反常积分

- 无穷区间上的反常积分
- 瑕积分
- Γ 函数和 B 函数

定义（无穷区间上的反常积分 I）

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，若极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 的**反常积分收敛**，记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

极限不存在时称 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 的**反常积分发散**.

定理

- 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续且有原函数 $F(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) \text{ 存在}.$$

此时有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

例

计算反常积分

$$(1)\ \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x, \qquad (2)\ \int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x.$$

例

计算反常积分

$$(1)\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,\qquad (2)\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x.$$

例

证明：反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$$

在 $p>1$ 时收敛，$p\leqslant 1$ 时发散.

无穷区间上的反常积分

例

计算反常积分

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px}\mathrm{d}x.$$

例

计算反常积分

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px}\mathrm{d}x.$$

注意:

- 计算无穷积分时，需按定义计算有限区间上的积分，判断收敛性，再求极限.

例

计算反常积分

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px}\mathrm{d}x.$$

注意:

- 计算无穷积分时, 需按定义计算有限区间上的积分, 判断收敛性, 再求极限.
- 在无穷积分的计算中尽量避免直接应用分部积分等法则.

定义（无穷区间上的反常积分 II）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 连续, 若极限

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x) \mathrm{d}x$$

存在, 则称 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, a]$ 的反常积分收敛, 记为

$$\int_{-\infty}^a f(x) \mathrm{d}x = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x) \mathrm{d}x.$$

极限不存在时称 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, a]$ 的反常积分发散.

定理

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 连续且有原函数 $F(x)$, 则

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} F(x) \text{ 存在.}$$

此时有

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{a} = F(a) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

定义（无穷区间上的反常积分 III）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 若反常积分

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛, 则称反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t_2\to+\infty}\int_{a}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

收敛, 否则称反常积分发散.

定义（无穷区间上的反常积分 III）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，若反常积分

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t_2\to+\infty}\int_{a}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

收敛，否则称反常积分发散.

注意：$t_1 \to -\infty$ 和 $t_2 \to +\infty$ 是两个完全无关的极限过程。

定理

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且有原函数 $F(x)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} F(x) \text{ 和 } \lim_{x\to+\infty} F(x) \text{ 都存在.}$$

此时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

例

讨论反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x$ 的敛散性.

例

讨论反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x$ 的敛散性.

注意:

- 判断反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性时, 需判断两个极限

$$\lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{0} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \lim_{t_2\to+\infty}\int_{0}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x$$

的存在性.

例

讨论反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x$ 的敛散性.

注意:

- 判断反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性时, 需判断两个极限
$$\lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{0} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \lim_{t_2\to+\infty}\int_{0}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x$$
的存在性.
- $t_1 \to -\infty$ 和 $t_2 \to +\infty$ 是两个完全无关的极限过程.

例

讨论反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x$ 的敛散性.

注意:

- 判断反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性时, 需判断两个极限

$$\lim_{t_1 \to -\infty} \int_{t_1}^{0} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \lim_{t_2 \to +\infty} \int_{0}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x$$

  的存在性.
- $t_1 \to -\infty$ 和 $t_2 \to +\infty$ 是两个完全无关的极限过程.
- 极限

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\mathrm{d}x$$

  存在不能说明反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性.

定义（瑕积分 I）

设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，在 a 点的某个右邻域内无界.
若极限

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

极限存在时，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称其发散.

定理

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的一个原函数. 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{t\to a+} F(x) \text{ 存在}.$$

此时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b := F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

例

证明：反常积分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q} \mathrm{d}x$$

当 $q < 1$ 时收敛，当 $q \geqslant 1$ 时发散.

例

计算积分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

瑕积分（无界函数的反常积分）

定义（瑕积分 II）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，在 b 点的某个左邻域内无界.

若极限

$$\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的反常积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

极限存在时，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称其发散.

定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的一个原函数. 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{t\to b^-} F(x) \text{ 存在}.$$

此时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b := \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a).$$

瑕积分（无界函数的反常积分）

- 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除 c 外的点连续，且
$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$
则称 c 为 $f(x)$ 的瑕点.

瑕积分（无界函数的反常积分）

- 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除 c 外的点连续，且
$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$
则称 c 为 $f(x)$ 的瑕点.
- 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的瑕点仅有 c，
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 都收敛}.$$
此时有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t_1\to c^-}\int_a^{t_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t_2\to c^+}\int_{t_2}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

瑕积分（无界函数的反常积分）

- 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除 c 外的点连续，且
$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$$
则称 c 为 $f(x)$ 的瑕点.
- 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的瑕点仅有 c,
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 都收敛.}$$
此时有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t_1\to c^-}\int_a^{t_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{t_2\to c^+}\int_{t_2}^b f(x)\mathrm{d}x.$$
- 注意: $t_1\to c^-$ 和 $t_2\to c^+$ 是两个完全独立的极限过程.

例

判断反常积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

的敛散性.

反常积分

- 考虑函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的反常积分，可能同时出现
  - a 或 b 是无穷，即区间为无限区间；
  - $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有多个瑕点 (有限个)；

此时，需把区间 (a,b) 分割成一些子区间，

使得每个子区间至多有一个使得积分反常的点.

反常积分

- 考虑函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的反常积分, 可能同时出现
  - a 或 b 是无穷, 即区间为无限区间;
  - $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有多个瑕点 (有限个);

  此时, 需把区间 (a,b) 分割成一些子区间,

  使得每个子区间至多有一个使得积分反常的点.
- 判断反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性

  需判断 $f(x)$ 在每一个子区间上的反常积分的敛散性.

- 考虑函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的反常积分，可能同时出现
  - a 或 b 是无穷，即区间为无限区间；
  - $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有多个瑕点 (有限个)；

  此时，需把区间 (a,b) 分割成一些子区间，
  使得每个子区间至多有一个使得积分反常的点.
- 判断反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性
  需判断 $f(x)$ 在每一个子区间上的反常积分的敛散性.

例

判断反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

的敛散性.

Γ 函数

- 反常积分

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

对任意 $x > 0$ 都收敛.

Γ 函数

- 反常积分
$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$
对任意 $x > 0$ 都收敛.
- 上述反常积分定义了 $(0, +\infty)$ 上的函数 $\Gamma(x)$, 称为 Γ 函数.

Γ 函数的性质

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0.$

Γ 函数的性质

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0.$
- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1.$

  若 n 为自然数, $\Gamma(n+1) = n!.$

Γ 函数的性质

- $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), x>0$.
- $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t=1$.

  若 n 为自然数, $\Gamma(n+1)=n!$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$.

  若 n 为自然数,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Γ 函数的性质

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0.$
- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1.$

  若 n 为自然数, $\Gamma(n+1) = n!$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$

  若 n 为自然数,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty.$

B 函数

- 当 $x > 0, y > 0$ 时, 反常积分

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

收敛.

B 函数

- 当 $x > 0, y > 0$ 时, 反常积分

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

  收敛.
- 二元函数 $B(x,y)$ 称为 B 函数.

B 函数

- 当 $x > 0, y > 0$ 时, 反常积分
$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$
收敛.
- 二元函数 $B(x,y)$ 称为 B 函数.
- B 函数有如下性质:
$$B(x,y) = B(y,x).$$
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

例

计算积分

$$\int_0^1 \sqrt{t^3 - t^4}\mathrm{d}t.$$

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 4.7 (A)
  2. (2) (8) (14) (16)

  习题 4.7 (B)
  1.
  3.