華南理工大學
South China University of Technology

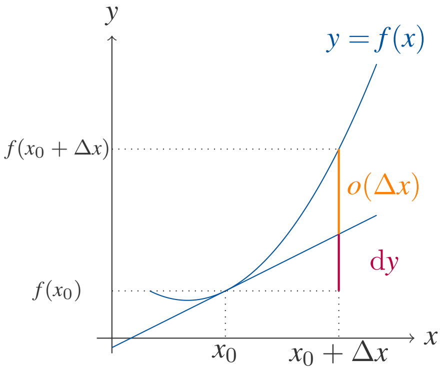
工科数学分析

刘青青

§3.4 函数的微分

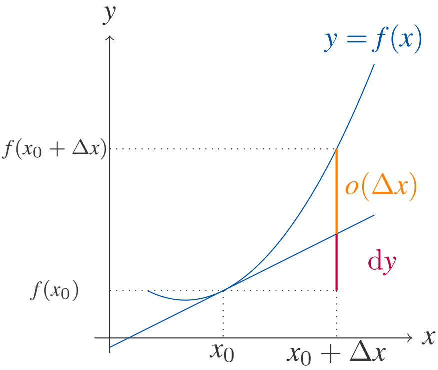
- 局部线性化与微分
- 微分公式与运算法则
- 高阶微分
- 误差估计

函数的局部线性化



- 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

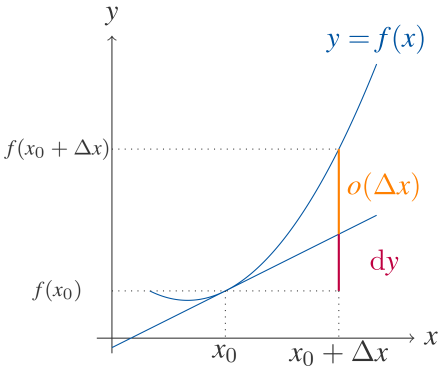
函数的局部线性化



- 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导.
- 曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处的切线为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

函数的局部线性化



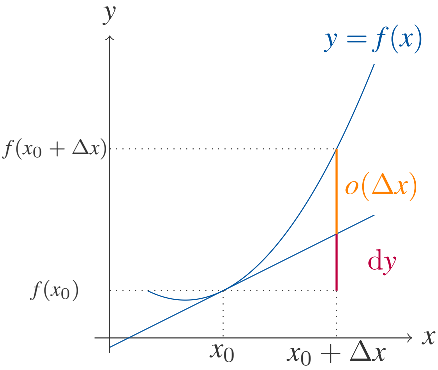
- 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导.
- 曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处的切线为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

- 在 x_0 点附近，用切线近似曲线

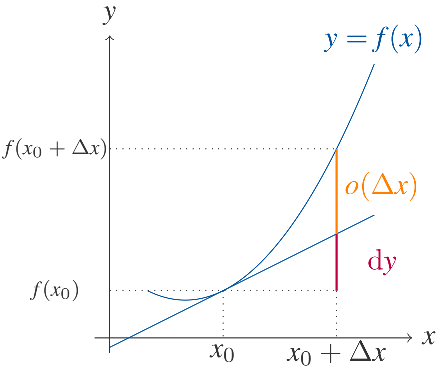
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

函数的局部线性化



- 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导.
- 曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处的切线为
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
- 在 x_0 点附近，用切线近似曲线
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
- 近似的误差是 x 趋于 x_0 时比 $x - x_0$ 更高阶的无穷小.

函数的局部线性化



- 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导.
- 曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处的切线为
$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$
- 在 x_0 点附近，用切线近似曲线
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$
- 近似的误差是 x 趋于 x_0 时比 $x-x_0$ 更高阶的无穷小.

我们称线性函数
$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的局部线性化.

微分的定义

定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义. 若有常数 A 使得

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (\Delta x \to 0),$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 可微, 称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的微分, 记为

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A\Delta x \text{ 或} \mathrm{d}f(x_0) = A\Delta x.$$

微分的定义

- 若 $\mathrm{d}f(x) = A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 的微分, 则
  $$f(x_0) + A(x - x_0)$$
  是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的一个"好"的局部线性化.

微分的定义

- 若 $\mathrm{d}f(x) = A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 的微分，则
$$f(x_0) + A(x - x_0)$$
是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的一个"好"的局部线性化.
- 这里"好"的涵义是:
误差是比 $x - x_0, (x \to x_0)$ 更高阶的无穷小,
即，用微分 $\mathrm{d}f(x)$ 近似函数值的增量 Δy 所产生的误差
被自变量的误差 Δx 所控制.

微分的定义

- 若 $\mathrm{d}f(x) = A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 的微分，则
$$f(x_0) + A(x - x_0)$$
是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的一个“好”的局部线性化.
- 这里“好”的涵义是：
误差是比 $x - x_0, (x \to x_0)$ 更高阶的无穷小，
即，用微分 $\mathrm{d}f(x)$ 近似函数值的增量 Δy 所产生的误差被自变量的误差 Δx 所控制.
- 函数微分的本质：
一种“好”的局部线性化.

定理

函数 $f(x)$ 在 x_0 点可微当且仅当函数 $f(x)$ 在 x_0 可导.

定理

函数 $f(x)$ 在 x_0 点可微当且仅当函数 $f(x)$ 在 x_0 可导.
且当 $f(x)$ 在 x_0 可微时, 有

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x_0)\Delta x.$$

- 函数在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x.$$

这里 x 和 Δx 是两个相互独立的变量.

微分与导数

- 函数在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \text{ 或} \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x.$$

这里 x 和 Δx 是两个相互独立的变量.

- 当 $f(x) = x$ 时，$\mathrm{d}x = \Delta x$. 因此，通常将微分公式写为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x.$$

微分与导数

- 函数在任意点 x 的微分, 称为函数的微分, 记作

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \text{ 或} \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x.$$

这里 x 和 Δx 是两个相互独立的变量.

- 当 $f(x) = x$ 时, $\mathrm{d}x = \Delta x$. 因此, 通常将微分公式写为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x.$$

- 导数是因变量的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 的商, 因此也把导数称为微商.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

例

设 $y = x^3$, 求 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}y|_{x=2}$.

基本微分公式

$$\mathrm{d}(C) = 0, \qquad \mathrm{d}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(e^x) = e^x\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}(\mathrm{arccot}x) = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x 点可微, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{d}f + \beta \mathrm{d}g,$$

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = (\mathrm{d}f) \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\mathrm{d}f) \cdot g - f \cdot (\mathrm{d}g)}{g^2}, g \neq 0.$$

- 设 $g(x)$ 在 x 可微, $f(u)$ 在 $u=g(x)$ 可微,
  则 $h(x):=f\circ g(x)$ 在 x 可微.
  且对 $y=f(u)=h(x)$, 有
  $$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u=f'(g(x))\cdot g'(x)\mathrm{d}x=h'(x)\mathrm{d}x.$$

- 设 $g(x)$ 在 x 可微, $f(u)$ 在 $u=g(x)$ 可微,
  则 $h(x):=f\circ g(x)$ 在 x 可微.
  且对 $y=f(u)=h(x)$, 有

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u=f'(g(x))\cdot g'(x)\mathrm{d}x=h'(x)\mathrm{d}x.$$

- 上述等式称为一阶微分形式的不变性:
  因变量 y 既可看成变量 x 的函数也可看成变量 u 的函数,
  那么 y 的一阶微分与用什么变量去描述 y 无关.

- 设 $g(x)$ 在 x 可微, $f(u)$ 在 $u=g(x)$ 可微,
  则 $h(x):=f\circ g(x)$ 在 x 可微.
  且对 $y=f(u)=h(x)$, 有
  $$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u=f'(g(x))\cdot g'(x)\mathrm{d}x=h'(x)\mathrm{d}x.$$
- 上述等式称为一阶微分形式的不变性:
  因变量 y 既可看成变量 x 的函数也可看成变量 u 的函数,
  那么 y 的一阶微分与用什么变量去描述 y 无关.
- 复合函数求导的链式法则可写为微商的形式
  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

例

- 求下列函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的微分 $\mathrm{d}y$.
- 求函数 $f(x)$ 使得 $\mathrm{d}(\sin x^2)=f(x)\mathrm{d}(\sqrt{x}), x>0$.
- 求函数 $f(x)$ 使得

$$\mathrm{d}f(x)=\frac{1}{x\cos^2(\ln x)}\mathrm{d}x.$$

二阶微分

- 一阶微分的微分称为二阶微分.
- $y=f(x)$ 的一阶微分为 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$.

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(f'(x)\Delta x)=f''(x)(\Delta x)^2+f'(x)(\Delta x)'\Delta x.$$

  注意 Δx 与 x 是相互独立的变量, 因此 $(\Delta x)'=0$, 即

$$\mathrm{d}^2y=f''(x)(\Delta x)^2=f''(x)\mathrm{d}x^2.$$

- 注意:
  $\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x)^2$, 它不是 x 的二阶微分, 也不是 x^2 的一阶微分.
- 二阶微分并不是函数 $f(x)$ 的局部线性化, 可理解为
  用自变量增量的二次函数近似函数的增量的增量.

- 类似地, 有高阶微分

$$\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} y).$$

- 高阶导数就是高阶微商:

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

- 高阶微分不具有形式不变性.

例

设 $y=\sqrt{1+x^2}$, 求 d^2y.

线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，
  当 $|x-x_0|$ 很小时，函数值 $f(x)$ 有线性近似

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0). \qquad \text{(线性估计)}$$

线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，
  当 $|x-x_0|$ 很小时，函数值 $f(x)$ 有线性近似
  $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad \text{(线性估计)}$$
- 线性估计的合理性在于：
  线性估计的误差是比 $x-x_0, x \to x_0$ 更高阶的无穷小量.

线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可微,
  当 $|x-x_0|$ 很小时, 函数值 $f(x)$ 有线性近似
  $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0). \qquad \text{(线性估计)}$$
- 线性估计的合理性在于:
  线性估计的误差是比 $x-x_0, x\to x_0$ 更高阶的无穷小量.
- 运用线性估计的条件:
  $x-x_0$ 很小, $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 容易计算.

线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可微,
  当 $|x-x_0|$ 很小时, 函数值 $f(x)$ 有线性近似

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad \text{(线性估计)}$$

- 线性估计的合理性在于:
  线性估计的误差是比 $x-x_0, x \to x_0$ 更高阶的无穷小量.
- 运用线性估计的条件:
  $x-x_0$ 很小, $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 容易计算.
- 特别地, 当 $|x|$ 很小时,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x.$$

例

- 设半径为 $10cm$ 的金属圆盘加热后半径增加了 $0.05cm$，问面积增大了多少?
- 利用线性估计求 $\arctan 0.98$ 的近似值.
- 设 $a > 0$, 且 $|b|$ 与 a^n 相比很小, 证明:

$$\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}.$$

并由此求 $\sqrt[3]{9}$ 和 $\sqrt[10]{1000}$.

当 $|x|$ 很小时,

$$\sin x \approx x, \qquad \ln(1+x) \approx x,$$

$$\tan x \approx x, \qquad \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x,$$

$$e^x \approx 1 + x.$$

例

求 $\sqrt[3]{1.021}$ 的近似值.

误差

定义（误差）

设某个量的真实值为 A, 估计值（或测量值）为 a.

- $|A-a|$ 称为 A 的绝对误差.

误差

定义（误差）

设某个量的真实值为 A, 估计值（或测量值）为 a.

- $|A-a|$ 称为 A 的绝对误差.
- $\frac{|A-a|}{|A|}$ 称为 A 的相对误差.

误差

定义（误差）

设某个量的真实值为 A, 估计值（或测量值）为 a.

- $|A-a|$ 称为 A 的绝对误差.
- $\frac{|A-a|}{|A|}$ 称为 A 的相对误差.
- 若 $|A-a| \leqslant \delta_A$, 则称 δ_A 为 A 的绝对误差限.

定义（误差）

设某个量的真实值为 A, 估计值（或测量值）为 a.

- $|A-a|$ 称为 A 的绝对误差.
- $\frac{|A-a|}{|A|}$ 称为 A 的相对误差.
- 若 $|A-a| \leqslant \delta_A$, 则称 δ_A 为 A 的绝对误差限.
- $\frac{\delta_A}{|A|}$ 称为 A 的相对误差限.

实际测量中, 通常真实值 A 是未知的,

而绝对误差限 δ_A 可以通过仪器等的精度获知.

误差估计

- 若某个量 y 是直接测量量 x 的函数 $y = f(x)$,

误差估计

- 若某个量 y 是直接测量量 x 的函数 $y = f(x)$,
- 从测量仪器获知 x 的绝对误差限为 δ_x.

误差估计

- 若某个量 y 是直接测量量 x 的函数 $y = f(x)$,
- 从测量仪器获知 x 的绝对误差限为 δ_x.
- 运用线性估计, y 的绝对误差限约为

$$\delta_y = |y'|\delta_x.$$

误差估计

- 若某个量 y 是直接测量量 x 的函数 $y=f(x)$,
- 从测量仪器获知 x 的绝对误差限为 δ_x.
- 运用线性估计, y 的绝对误差限约为

$$\delta_y = |y'|\delta_x.$$

- y 的相对误差限约为

$$\left|\frac{y'}{y}\right| \cdot \delta_x.$$

例

测得正方形的边长为 $2.41 \pm 0.005m$, 求其面积并估计绝对误差限.

South China University of Technology

作业:

- 习题 3.4 (A)
  2.(1) (2)
  5.(1)
  6.(2)
  习题 3.4 (B)
  1.(2)