姓名________ 学号□□□□□□□□□□□□ 学院________ 专业________ 座位号________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考,考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学期末考试

《数学分析（一）》试卷 A

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上(或答题纸上)；

3. 考试形式：闭卷；

4. 本试卷共 5 大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
评卷人						

一、选择题（每小题 3 分， 共 15 分）

1．已知四命题：

(a) 若$\{a_n\}$的任一个子列都收敛，则$\{a_n\}$可能不收敛；

(b) 若$\{a_n\}$有一个子列收敛，则$\{a_n\}$收敛；

(c) 若$\{a_{2n-1}\}$和$\{a_{2n}\}$都收敛于同一个常数，则$\{a_n\}$收敛；

(d) 若$\{a_n\}$单调，则$\{a_n\}$可能收敛；

在上述命题中，正确命题的个数是________

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2．下列各选项中，________是函数 $y = x[x]$ 的不连续点。

(A) -1 (B) 0 (C) 0.1 (D) 2.5

3．设 $k>1$，则函数 $f(x)=\begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 的导数 $f'(0)=$______

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 不存在

4．已知 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $g(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{\cos x-1}=2$ 则在点 $x=0$ 处 $g(x)$________

(A) 可导且 $g'(0)=1$ (B) 不可导 (C) 取得极小值 (D) 取得极大值

5．下列命题

(a) $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\sigma>0$，当

$|x'-x_0|<\sigma$, $|x''-x_0|<\sigma$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 。

(b)　任一有界数列必有收敛的子列，同样若是一个无界数列，则也存在收敛子列。

(c) 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(\mathrm{n}=1,2,3,\cdots)$，则 $\{x_n\}$ 是发散的。

(d)　设 $0<\theta<1$，则

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left[\theta x+\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi\right],$$

错误个数为______________

(A) 1　　　　(B) 2　　　　(C) 3　　　　(D) 4

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1． $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的 ε 语言描述为____________________________________

____

____。

2．数 β 为非空实数集 E 下确界的定义是______________________________

____

____。

3．若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^{2x}=\frac{1}{e}$，则 $a=$______________________________。

4．设 $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$____________________________。

5． $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$______________。

三、证明（每小题 6 分，共 24 分）

1．用定义证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$ 。

2．证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$ 。

3．试用 Cauchy 收敛准则证明

$x_n=\frac{\cos1}{1\cdot2}+\frac{\cos2}{2\cdot3}+\cdots+\frac{\cos n}{n\cdot(n+1)}$ 收敛。

4．若 $u=g(x)$ 在点 x_0 可导， $g(x_0)=u_0$，而 $y=f(u)$ 在 u_0 可导，则复合函数在点 x_0 可导。

四、计算（共 26 分）

1．求 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 的间断点，并判别其类型。（6 分）

2．求 $y=(x-1)\sqrt[5]{x^2}$ 的极值、凸性和拐点。（10 分）

3．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-g(x)}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$，已知 $g(x)$ 有连续的二阶导数，且 $g(0)=1$。

1) 确定 A 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。（10 分）

五、解答题（每小题 10 分，20 分）

1．讨论

(1) 对于满足 $0<\eta<1$ 的每个 η， $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $[\eta,\ 1]$ 上的一致连续性；

(2) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,\ 1)$ 上的一致连续性，并证明你的结论。

2．若 $f(x)$ 在点 x_0 具有直到 m 阶连续导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(m-1)}(x_0)=0,\ f^{(m)}(x_0)\neq 0,$$

试讨论当 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 的极值情况。