华工包打听

资料声明

关于资料

- 来源　由同学投稿，包打听有偿收集、整理
- 分享　资料无偿分享给同学使用

注意事项

资料不保证100%正确，仅供参考，切勿依赖

资料如有错误，请反馈给包打听微信

未经授权不能转作他用

华工新生答疑、校园指引、入学考试、感情树洞、华工黑市群、学习群、闲置群、 校园资讯、校内通知、吃喝玩乐、兼职、家教、大学学车、考研、留学四六级（星球)等一站式服务。

·微信号——即时互动，
丰富社群，校园生活资讯

·公众号——学习资料
校园百事，学校通租

·包星球——吃喝玩乐
兼职考研留学信息，
应有尽有

·QQ口号—-百事打听！

包包微信　　包打听公众号

最全能校园
服务平台
校园大小事
皆可打听

华南理工大学 2016 级新生入学测试

数　　学

注意事项：1、本试卷共五大题，满分 100 分；时间 120 分钟

2、所有答案直接写在试卷上。

3、答卷前请将密封线内各项填写清楚。

4、请涂黑你要选报的班级前的方框

☐材料　☐计算计　☐土木　☐软件

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
评卷人						

一、填空题（每小题 5 分，共 50 分）填写正确答案。

1）设集合 $A=\left\{(x,y)\middle|x^2+2y^2=1\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|y=kx+b\right\}$，如果任取的实数 k 都有 $A\cap B\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$。

解 将 B 的条件代入 A，得 $x^2+2(kx+b)^2=1$ 要有解，即

$(1+2k^2)x^2+4kbx+2b^2-1=0$ 要有解，即要 $16k^2b^2-4(1+2k^2)(2b^2-1)\geq 0$ 对任何实数 k 都成立，化简得要 $2b^2\leq 1+2k^2$ 对任何实数 k 都成立，即要使得 $2b^2\leq 1$ 成立，$|b|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$。

2）已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2-a_{n+1})(4+a_n)=8$，且 $a_1=2$，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ 的值等于 $2^n-1-\frac{n}{2}$。

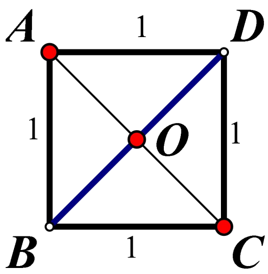
解 $(2-a_{n+1})(4+a_n)=8\Leftrightarrow 2-a_{n+1}=\frac{8}{4+a_n}\Leftrightarrow a_{n+1}=2-\frac{8}{4+a_n}=\frac{2a_n}{4+a_n}$，进而

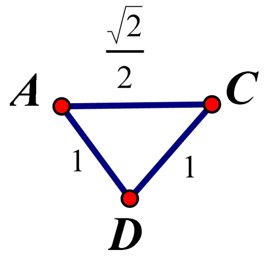
$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{a_n}\Leftrightarrow\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)=2^{n-1}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)=2^{n-1}\left(\frac{1}{2/3}-\frac{1}{2}\right)=2^{n-1}$，进而

$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_1}=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_{i+1}}-\dfrac{1}{a_{\mathrm{i}}}\right)=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{2}=\sum_{i=1}^{n}2^{\mathrm{i}-1}=2^n-1,\dfrac{1}{a_{n+1}}=2^n-\dfrac{1}{2}$，从而

$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(2^{i-1}-\dfrac{1}{2}\right)=\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}-\dfrac{n}{2}=2^n-1-\dfrac{n}{2}$。

3）已知正方形 $ABCD$，AC，BD 交于 O。若将正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成 60°





的二面角，并给出下面结论：

① $AC\perp BD$，② $AD\perp CO$，③ ΔAOC 为正三角形，④ $\cos\angle ADC=\dfrac{3}{4}$，则其中正确的命题序号是____①　③　④____。

解　由于正方形的对角线相互垂直，从而对折后 $AO\perp BD,OC\perp BD,面AOC\perp BD$ 且

由 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成 60° 的二面角得知 ΔAOC 为正三角形，进而折后有

$AC=OA=OC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$AD=DC=1$，在 ΔADC 中用余弦定理有

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\angle ADC,\dfrac{1}{2}=1^2+1^2-2\cdot1\cdot\angle ADC,\angle ADC=\dfrac{3}{4}$。

然而只要平行移动一下 AD 就知 AD,CO 异面但不成垂直关系，

（或反证若 $AD\perp CO$，由于 $OD\perp CO$，进而 $CO\perp面AOD$，与二面角 60° 矛盾）。

4）已知 a，b 都是整数，且 $6(a+b)-5\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)=10$，则 $a+b=$____0 或 6____。

解法 1

$$6(a+b)-5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=10\Leftrightarrow 6(a+b)-5\,\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=10\Leftrightarrow 6\,(a+b)=\frac{5(a+b)^2}{ab}$$

要成立，则 $a+b=0$，或 $a+b\neq0:6ab=5(a+b),ab=5k,a+b=6k,k$ 为整数，考虑

到 $5\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)$ 要是整数，故只能是 $k=1$。即得 $a+b=0$ 或 6。

解法 2　$6(a+b)-5\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)=10$ 要成立，则 $a+b$ 能被 5 整除，整数 $5\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)$ 能被 2 整除，可 $a+b=0,\dfrac{b}{a}=-1$ 或者 $a+b=6,\dfrac{b}{a}=5$ 或 $\dfrac{a}{b}=5$，即 $a+b=0$ 或 6。

5）设 $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{2}x$，则 $\dfrac{f\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+2014^2+2015^2\right)}{f\left(1^2\right)+f\left(2^2\right)+f\left(3^2\right)+\cdots+f\left(2014^2\right)+f\left(2015^2\right)}$

之值等于 $\underline{\quad\dfrac{1}{1007}\quad}$。

解　由于

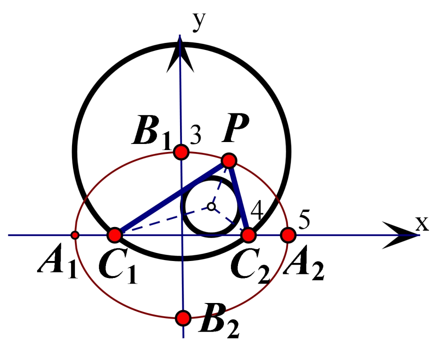
$1^2+2^2+3^2+\cdots+2014^2+2015^2=\dfrac{2015(2015+1)(4030+1)}{6}=\dfrac{2015(2015+1)(4030+1)}{6}$

$=2015\times336\times4031=2015\times4\times84\times4031$，故 $f\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+2014^2+2015^2\right)=1$，

$f\left((2k)^2\right)=f\left(2^2k^2\right)=\cos\left(2k^2\pi\right)=1,\ f\left((2k+1)^2\right)=f\left(2^2k^2+4k+1\right)=0$。从而

$$\frac{f\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+2014^2+2015^2\right)}{f\left(1^2\right)+f\left(2^2\right)+f\left(3^2\right)+\cdots+f\left(2014^2\right)+f\left(2015^2\right)}=\frac{1}{2014/2}=\frac{1}{1007}。$$

6）椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 如图所示，以 B_1 为圆心椭圆的半长轴为半径画圆弧，交 A_1A_2 于 C_1，C_2，P 为椭圆上一点，若 ΔPC_1C_2 的面积为 9，则 ΔPC_1C_2 的内切圆的面积为 $\underline{\quad\pi\quad}$。



解　由题设可知 $A_1O=OA_2=5,B_2O=OB_1=3,B_1C_1=5\Rightarrow C_1O=OC_2=4$，且由勾股定理 $5^2-3^2=4^2$ 可知 C_1,C_2 为椭圆的焦点，且 $PC_1+PC_2=2A_1O=10$，进而由内切圆的定义及把外切三角形三顶点连接内切圆心可知 $9=\dfrac{1}{2}(4+4+10)\cdot r,r=1$，故 ΔPC_1C_2 的内切圆的面积为 $\pi\cdot1^2=\pi$。

7）在箱子中装十张卡片，分别写有从 1 到 10 的十个整数；从箱子中任意取出一张卡片，记下它的读数为 x，然后放回箱子中；第二次从箱子中任取一张卡片，记下它的读数 y，则 $x+y$ 是 3 的倍数的概率为 $\underline{\quad\dfrac{33}{100}\quad}$。

解　则 $x+y$ 是3的倍数的可能数为3，6，9，12，15，18；进而有等可能的1+2，2+1；1+5，5+1，2+4，4+2，3+3；1+8，8+1，2+7，7+2，3+6，6+3，4+5，5+4；2+10，10+2，3+9，9+3，4+8，8+4，5+7，7+5，6+6；5+10，10+5，6+9，9+6，7+8，8+7；8+10，10+8，9+9。计数分析可得概率为 $\dfrac{2+5+8+9+6+3}{10\times 10}=\dfrac{33}{100}$

8）在 6×6 的方形网格中，把部分小方格涂成黑色，然后任意划掉3行和3列，使得剩下的小方格中至少有1个是黑色的。那么最少要涂黑的小方格的个数是____10个____。

解　由于划掉3行和3列任意性，不妨假设是前三行和前三列，如果正好重复的是黑色的就有九个，还要余下一个，则需要10个.

（如果可以指定，则指定4个对角线上（或不同行不同列）方格涂黑即可！）

9）角 α，β，γ 满足 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$__$\dfrac{3}{2}$__。

解　普遍成立，特殊也成立，不妨根据三角函数的奇偶性，再先偶后奇考虑问题条件，取 $\gamma=\pi,\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=-\dfrac{\pi}{3}$ 能推出条件 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ 成立，$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ 也成立，相应结论 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\dfrac{3}{2}$。

证　设复数 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,z_2=\cos\beta+i\sin\beta,z_3=\cos\gamma+i\sin\gamma$，则由三角函数公式及已知得 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,z_1+z_2+z_3=0$，由复数的几何意义可知这三个复数向量表示平移后首尾相接围成一个正三角形；起点放在圆点，则终点均匀分布于单位圆上。

不妨设 $z_1=\cos t+i\sin t,z_2=\cos\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)=z_1\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

$z_3=\cos\left(t-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(t-\dfrac{2\pi}{3}\right)=z_1\left(\cos\dfrac{-2\pi}{3}+i\sin\dfrac{-2\pi}{3}\right),t$ 为任意实数，则计算得

$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1^2(1+\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}+\cos\dfrac{-4\pi}{3}+i\sin\dfrac{-4\pi}{3})=0$，于是有

$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)=\mathrm{Re}(z_1^2+z_2^2+z_3^2)=0$

所以 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\dfrac{1+1+1}{2}=\dfrac{3}{2}$。

另证　设复数 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,z_2=\cos\beta+i\sin\beta,z_3=\cos\gamma+i\sin\gamma$，则由三角函数公式及已知得 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,z_1+z_2+z_3=0$，由复数的几何意义可知这三个复数所表示的向量表示平移后首尾相接围成一个正三角形；起点放在圆点，则终点均匀分布于单

位圆上。不妨设 $z_1=\cos t+i\sin t, z_2=\cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)$，

$z_3=\cos\left(t+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(t+\frac{4\pi}{3}\right), t$ 为任意实数，对应已知条件 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ 即

为 $\sin t+\sin\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(t+\frac{4\pi}{3}\right)=0, t$ 为任意实数。

令 $f(t)=\sin^2 t+\sin^2\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(t+\frac{4\pi}{3}\right)$，于是有

$$f'(t)=2\sin t\cos t+2\sin\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+2\sin\left(t+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(t+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\sin 2t+\sin\left(2t+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(2t+\frac{8\pi}{3}\right)=\sin 2t+\sin\left(2t+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(2t+\frac{2\pi}{3}\right)=0，$$

故 $f(t)=\sin^2 t+\sin^2\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(t+\frac{4\pi}{3}\right)$ 等于常数，即

$$f(t)\equiv f(0)=\sin^2 0+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)=0^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}。$$

10）若函数 $f(x)=\frac{-x^2+6x+c}{x^2+2x+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$，则 $c=$___-5___。

解　考虑到这个最值应该在驻点取得，从而有驻点处满足

$$f'(x)=\left(-1+\frac{8x+c+1}{x^2+2x+1}\right)'=\frac{8\left(x^2+2x+1\right)-(8x+c+1)(2x+2)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=0, \frac{-x^2+6x+c}{x^2+2x+1}=\frac{1}{3}$$

进而 $4x^2+8x+4-8x^2-cx-x-8x-c-1=0, -3x^2+18x+3c=x^2+2x+1$，

$-4x^2-(c+1)x-c+3=0, 4x^2-16x+1-3c=0\Rightarrow -(c+17)x-4c+4=0$，

进而 $x=\frac{-4c+4}{c+17}$，$4\left(\frac{-4c+4}{c+17}\right)^2-16\left(\frac{-4c+4}{c+17}\right)+1-3c=0$，

$4(-4c+4)^2-16(-4c+4)(c+17)+(1-3c)(c+17)^2=0$，

$64\left[(-c+1)^2-(-c+1)(c+17)\right]+(1-3c)(c+17)^2=0$，

$(-8c+8)^2+\left[-64+64c+c+17-3c^2-51c\right](c+17)=0$，

$64\left(c^2-2c+1\right)-47c+14c^2-3c^3-799+238c-51c^2=0$，

$-3c^3+27c^2+63c-735=0 \Leftrightarrow c^3-9c^2-21c+245=0 \Leftrightarrow (c+5)(c^2-14c+49)=0$，

$\Leftrightarrow (c+5)(c-7)^2=0 \Leftrightarrow c_1=-5, c_2=c_3=7$（试常数项的因子或用较繁的卡丹公式:

$c^3-9c^2-21c+245=0, c=y-\dfrac{-9}{3}=y+3 \Rightarrow (y+3)^3-9(y+3)^2-21(y+3)+245=0$

即 $y^3+9y^2+27y+27-9\left(y^2+6y+9\right)-21(y+3)+245=0, y^3-48y+128=0$，这里

$p=-48, q=128 \Rightarrow T=\dfrac{q}{2}=64, D=\dfrac{p}{3}=-16, y_1=\sqrt[3]{-T+\sqrt{T^2+D^3}}+\sqrt[3]{-T-\sqrt{T^2+D^3}}$

$y_1=\sqrt[3]{-64+\sqrt{64^2-16^3}}+\sqrt[3]{-64-\sqrt{4^6-4^6}}=4\sqrt[3]{-1+0}+4\sqrt[3]{-1-0}=-8$，

$\omega_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, y_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot 4\sqrt[3]{-1+0}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot 4\sqrt[3]{-1-0}=4$，

$y_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot 4\sqrt[3]{-1+0}+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot 4\sqrt[3]{-1-0}=4$，同样得 $c_1=-5, c_2=c_3=7$）。

验算 $f_1(x)=\dfrac{-x^2+6x+7}{x^2+2x+1}$，$f_2(x)=\dfrac{-x^2+6x-5}{x^2+2x+1}$ 如下，

$f_1'(x)=0, -4x^2-8x-4=0 \Rightarrow x=-1$ 是间断点，可见 $c_2=c_3=7$ 不可能有那个最值；

而 $f_2'(x)=0, -4x^2+4x+8=0, x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1$（舍去），$x_2=2$，且

$f_2'(x)=-\dfrac{4(x+1)(x-2)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}, f_2'(1.5)>0, f_2'(3)<0, f(2)=\left.\dfrac{-x^2+6x-5}{x^2+2x+1}\right|_{x=2}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ 是极大值也是最大值，确实 $c_1=-5$ 满足题设要求。

二、（本小题 12 分） 如果对任意实数 x 和任意 $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 都有 $(x+3+\sin 2\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2 \geq \dfrac{1}{8}$，求实数 a 的取值范围。

解法 1：设 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则有 $t\in\left[1, \sqrt{2}\right]$

$(x+3+\sin 2\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2 \geq \dfrac{1}{8}$ **可化为** $\left(x+2+t^2\right)^2+(x+at)^2 \geq \dfrac{1}{8}$

不等式左边是 x 为自变量的二次函数，且开口向上，而且 $\left(x+2+t^2\right)^2+(x+at)^2 \geq \dfrac{1}{8}$ 等价

于 $2x^2+2x\left(2+t^2+at\right)+\left(2+t^2\right)^2+\left(at\right)^2-\dfrac{1}{8}\geq 0$，等价于

$\Delta=\left[2\left(2+t^2+at\right)\right]^2-4\cdot 2\left[\left(2+t^2\right)^2+\left(at\right)^2-\dfrac{1}{8}\right]\leq 0$ 等价于

$\left(2+t^2+at\right)^2-2\left(2+t^2\right)^2-2\left(at\right)^2\leq-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 2at\left(2+t^2\right)-\left(2+t^2\right)^2-\left(at\right)^2\leq-\dfrac{1}{4}$

等价于 $\left(2+t^2-at\right)^2\geq\dfrac{1}{4}$，解此不等式得 $2+t^2-at\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a\leq\dfrac{3}{2t}+t$ 或 $a\geq\dfrac{5}{2t}+t$。

因为 $\dfrac{3}{2t}+t\geq 2\sqrt{\dfrac{3}{2t}\cdot t}=\sqrt{6}$，且 $t=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 时取等号，取 $\dfrac{3}{2t}+t$ 最小值 $\sqrt{6}$ 来表示；

又 $\left(\dfrac{5}{2t}+t\right)'=-\dfrac{5}{2t^2}+1<0,t\in\left(1,\sqrt{2}\right)$，函数 $\dfrac{5}{2t}+t$ 在区间 $\left[1,\sqrt{2}\right]$ 是递减函数，取 $\dfrac{5}{2t}+t$ 最大值 $\dfrac{7}{2}$ 来表示；综合得 a 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt{6}]\cup[\dfrac{7}{2},+\infty)$。

解法 2：令 $f\left(x\right)=\left(x+3+\sin 2\theta\right)^2+\left(x+a\sin\theta+a\cos\theta\right)^2$

则令 $f'\left(x\right)=2\left(x+3+\sin 2\theta\right)+2\left(x+a\sin\theta+a\cos\theta\right)=0$

得驻点 $x=\dfrac{3+\sin 2\theta+a\sin\theta+a\cos\theta}{-2}$

代入可得 $f_{\min}=\left(\dfrac{3+\sin 2\theta-a\sin\theta-a\cos\theta}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-3-\sin 2\theta+a\sin\theta+a\cos\theta}{2}\right)^2$ **即**

$f_{\min}=\dfrac{1}{2}\left(3+\sin 2\theta-a\sin\theta-a\cos\theta\right)^2$，

结合题设可得 $\left(3+\sin 2\theta-a\sin\theta-a\cos\theta\right)^2\geq\dfrac{1}{4}$，进而

$3+\sin 2\theta-a\sin\theta-a\cos\theta\geq\dfrac{1}{2}$ **或** $3+\sin 2\theta-a\sin\theta-a\cos\theta\leq-\dfrac{1}{2}$，

即 $a\leq\dfrac{\frac{5}{2}+\sin 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\frac{3}{2}+\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}+\left(\cos\theta+\sin\theta\right)$

或 $a\geq\dfrac{\frac{7}{2}+\sin 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\frac{5}{2}+\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}+\left(\cos\theta+\sin\theta\right)$，

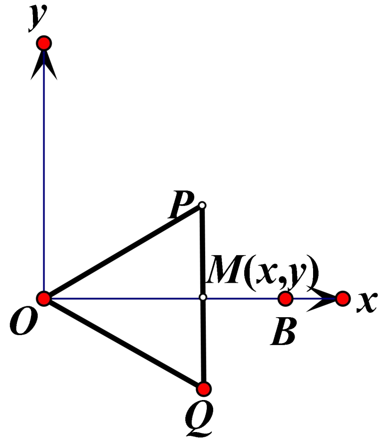
由于 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，而

$\dfrac{\frac{3}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}+\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\geq 2\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{6}$ 在 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ 处取到等号

即最小值，$\dfrac{\frac{5}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}+\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\ge 2\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 在 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{2}}\notin\left[1,\sqrt{2}\right]$ 处取到等号最小值但不能用，比较 $\dfrac{\frac{5}{2}}{1}+1=\dfrac{7}{2}=3.5,\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\dfrac{9}{4}\sqrt{2}<2.25\times1.42=3.195$，

可得 $\dfrac{\frac{5}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}+\left(\cos\theta+\sin\theta\right)$ 在指定范围内的最大值为 $\dfrac{7}{2}$。综合可得当 a 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt{6}]\cup[\dfrac{7}{2},+\infty)$ 能符合要求。

三、（本小题 12 分）设 P,Q 分别是 $\angle AOB$ 上的两动点，若 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，且 ΔPOQ 的面积为 8，求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程。



解法 1　以 O 为原点，以 $\angle AOB$ 的角平分线为 x 轴正半轴建立坐标系（注：对称性好！），

设 $OP=2a$，$OQ=2b$，M 点坐标为 (x,y)，则 P,Q 的坐标分别为

$\left(\sqrt{3}a,a\right),\left(\sqrt{3}b,-b\right)$，又因为 ΔPOQ 的面积为 8，

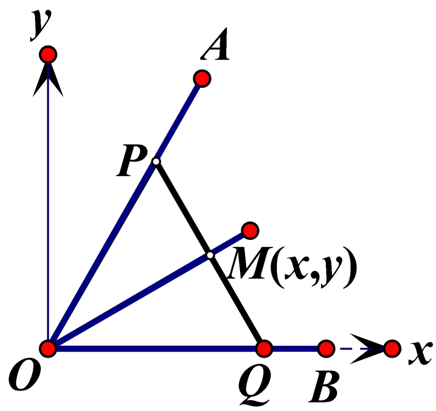
所以 $\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}ab=8$，

利用中点坐标公式可得 $x=\dfrac{\sqrt{3}\left(a+b\right)}{2}$，$y=\dfrac{a-b}{2}$

$x^2=\dfrac{3\left(a^2+b^2\right)+6ab}{4}$，$y^2=\dfrac{a^2+b^2-2ab}{4}$，

$x^2-3y^2=3ab=8\sqrt{3}$

所求点的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{8\sqrt{3}}-\dfrac{3y^2}{8\sqrt{3}}=1\quad(x>0)$。



解法 2　采用 OB 方向为 x 轴正方向建立坐标轴

由 $S_{\Delta POQ}=\dfrac{1}{2}\cdot OP\cdot OQ\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot OP\cdot OQ=8$ 知 $OP\cdot OQ=\dfrac{32}{\sqrt{3}}$。

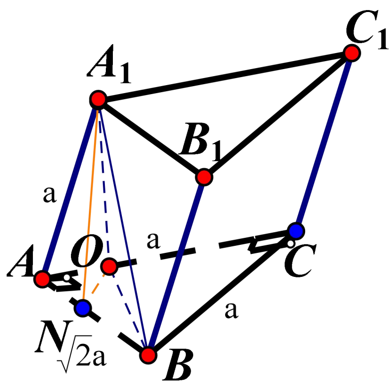
设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,0)$，则 $y_1=\sqrt{3}x_1,OP=2x_1>0,OQ=x_2>0$，从而 $2x_1x_2=\frac{32}{\sqrt{3}}$，

再设 M 点坐标为 $(x\,,\,y)$，则 $x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{1}{2}y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1$，进而

$$x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}y,x_2=\frac{16}{\sqrt{3}x_1}=\frac{16}{\sqrt{3}\frac{2}{\sqrt{3}}y}=\frac{8}{y},x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}y+\frac{8}{y}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{4}{y},$$

$\frac{\sqrt{3}}{3}y^2-xy+4=0\quad(x>0,y>0)$）。

四、（本小题 12 分） 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $AB=\sqrt{2}a$，$BC=AC=AA_1=a$，A_1 在底面 ABC 的投影 O 在 AC 上。



1）求 AB 与侧面 ACC_1A_1 所成的角；

2）若 O 是 AC 中点，求此三棱柱的侧面积。

解：1）因为 $AC=BC=a$，$AB=\sqrt{2}a$，所以由勾股定理得 $BC\perp AC$。又由题设 $A_1O\perp$ 面 ABC，所以 $A_1O\perp BC$，综上可得 $BC\perp$ 面 ACC_1A_1。$\angle BAC$ 就是 AB 与侧面 ACC_1A_1 所成的角。因为 $BC=AC$，三角形 ABC 是等腰直角三角形，所以 AB 与面 ACC_1A_1 所成的角 $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$。

2）因为 O 是 AC 中点，即 A_1O 是 AC 中垂线，所以 $A_1C=A_1A=AC=a$，

$A_1O=A_1A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$， $S_{ACC_1A_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$；

BCC_1B_1 是边长为 a 的正方形，所以 $S_{BCC_1B_1}=a^2$；

在直角三角形 OBC 中 $BO=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，在直角三角形 OBA_1 中

$A_1B=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2}=\sqrt{2}a$，从而 ABA_1 是等腰三角形，

$S_{ABB_1A_1}=a\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}a\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}a^2$，（另法：若过 O 作 AB 的垂线交于 N，则由三垂线定理有 $A_1N\perp AB$，由$\triangle ABC\sim\triangle AON,\dfrac{AO}{AB}=\dfrac{a/2}{\sqrt{2}a}=\dfrac{ON}{BC}=\dfrac{ON}{a},ON=\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$，进而$A_1N=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}a,S_{ABB_1A_1}=\sqrt{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{4}a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}a^2$）

因此，此三棱柱的侧面积为$S_{ACC_1A_1}+S_{ABB_1A_1}+S_{BCC_1B_1}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+2}{2}a^2$。

五、（本小题 14 分） 设数列$\{a_n\}$是正数数列，满足条件$\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}$，且$a_0=a_1=1$。

1）求数列$\{a_n\}$的通项；2）设$b_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$，求和$\sum\limits_{k=1}^{n}kb_k$。

解：1）因为$\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}$，所以$\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}-1=2\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$，

$2\left(\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}+1\right)=\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}+1$

设$c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}+1$，则有$c_1=2$，$c_n=2c_{n-1}$，所以数列$\{c_n\}$是公比为 2 的等比数列，且$c_n=2^n$。综上可得$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\left(2^n-1\right)^2$，$a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\left(2^2-1\right)^2\cdots\left(2^n-1\right)^2(n>1)$，

$a_0=a_1=1$；

2）由 1）可得$b_n=2^n-1$。$\sum\limits_{k=1}^{n}kb_k=\sum\limits_{k=1}^{n}k2^k-\sum\limits_{k=1}^{n}k=\sum\limits_{k=1}^{n}k2^k-\dfrac{n(n+1)}{2}$，设$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k2^k$，

则$S_n=2S_n-S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k2^{k+1}-\sum\limits_{k=1}^{n}k2^k=n2^{n+1}-\sum\limits_{k=2}^{n}2^k-2=n2^{n+1}-2^2\cdot\dfrac{2^{n-2+1}-1}{2-1}-2$

$=n\cdot2^{n+1}-2^{n+1}+2^2-2=(n-1)2^{n+1}+2$，所以$\sum\limits_{k=1}^{n}kb_k=(n-1)2^{n+1}+2-\dfrac{n(n+1)}{2}$。