华南理工大学 South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§3.6 Taylor 公式

- Taylor 公式的建立
- 几个初等函数的 Maclaurin 公式
- 近似计算与误差估计
- 其它应用

回顾函数的微分与线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则当 $|x-x_0|$ 很小时，有
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

回顾函数的微分与线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则当 $|x-x_0|$ 很小时, 有
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$
- 这一线性估计的误差
$$\sigma_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$
是比 $x-x_0, (x \to x_0)$ 更高阶的无穷小.

Taylor 公式的建立

回顾函数的微分与线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则当 $|x-x_0|$ 很小时，有
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$
- 这一线性估计的误差
$$\sigma_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$
是比 $x-x_0, (x \to x_0)$ 更高阶的无穷小.
- 上述估计较为粗略，精度不高.

回顾函数的微分与线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则当 $|x-x_0|$ 很小时, 有
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$
- 这一线性估计的误差
$$\sigma_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$
是比 $x-x_0,(x\to x_0)$ 更高阶的无穷小.
- 上述估计较为粗略, 精度不高.
- 问题: 能否给出 $f(x)$ 的更精确的估计?

- 因为误差函数 $\sigma_1(x)$ 是比 $x-x_0, x\to x_0$ 更高阶的无穷小,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sigma_1(x)}{x-x_0}=0.$$

- 因为误差函数 $\sigma_1(x)$ 是比 $x-x_0, x\to x_0$ 更高阶的无穷小,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sigma_1(x)}{x-x_0}=0.$$

- 考虑函数

$$u_1(x)=\begin{cases}\frac{\sigma_1(x)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0.\end{cases}$$

其在 x_0 连续.

- 若 $u_1(x)$ 在 x_0 可导, 则有 $u_1(x)$ 的线性估计

$$u_1(x)\approx u_1'(x_0)(x-x_0).$$

Taylor 公式的建立

- 因为误差函数 $\sigma_1(x)$ 是比 $x-x_0, x\to x_0$ 更高阶的无穷小,
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sigma_1(x)}{x-x_0}=0.$$
- 考虑函数
$$u_1(x)=\begin{cases}\frac{\sigma_1(x)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0.\end{cases}$$
其在 x_0 连续.
- 若 $u_1(x)$ 在 x_0 可导, 则有 $u_1(x)$ 的线性估计
$$u_1(x)\approx u_1'(x_0)(x-x_0).$$
- 误差 $u_1(x)-u_1'(x_0)(x-x_0)$ 是比 $x-x_0, x\to x_0$ 高阶的无穷小.

- 由 $u_1(x)$ 的线性估计, 可以得到 $\sigma_1(x)$ 的估计

$$\sigma_1(x) \approx u_1'(x_0)(x - x_0)^2$$

- 由 $u_1(x)$ 的线性估计, 可以得到 $\sigma_1(x)$ 的估计

$$\sigma_1(x) \approx u_1'(x_0)(x-x_0)^2$$

- 其误差

$$\begin{aligned}\sigma_2(x) &= \sigma_1(x) - u_1'(x_0)(x-x_0)^2 \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - u_1'(x_0)(x-x_0)^2\end{aligned}$$

是比 $(x-x_0)^2$, $(x \to x_0)$ 更高阶的无穷小.

- 由 $u_1(x)$ 的线性估计, 可以得到 $\sigma_1(x)$ 的估计

$$\sigma_1(x) \approx u_1'(x_0)(x-x_0)^2$$

- 其误差

$$\begin{aligned}\sigma_2(x) &= \sigma_1(x) - u_1'(x_0)(x-x_0)^2 \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - u_1'(x_0)(x-x_0)^2\end{aligned}$$

  是比$(x-x_0)^2$, $(x \to x_0)$ 更高阶的无穷小.

- 得到了 $f(x)$ 在 $|x-x_0|$ 很小的时候的一个新的估计

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + u_1'(x_0)(x-x_0)^2.$$

- **问题:**
  $f(x)$ 满足什么条件时,
  $u_1'(x_0)$ 存在?

Taylor 公式的建立

- **问题:**
  $f(x)$ 满足什么条件时,
  $u_1'(x_0)$ 存在?

- **一种充分条件:**
  若 $f(x)$ 在 x_0 的附近
  有连续的导数,
  且 $f''(x_0)$ 存在,
  则 $u_1'(x_0)$ 存在.

$$
\begin{aligned}
u_1'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u_1(x)-u_1(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\sigma_1(x)}{(x-x_0)^2} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} \\
&\qquad \left(\frac{0}{0}\text{型，L'Hôspital 法则条件成立}\right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} \\
&= \frac{1}{2} f''(x_0).
\end{aligned}
$$

结论:

若 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有连续的导数且 $f''(x_0)$ 存在,

则 $f(x)$ 在 $|x-x_0|$ 很小时有估计

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2.$$

且此估计的误差是比 $(x-x_0)^2, x \to x_0$ 更高阶的无穷小.

- **Taylor 多项式**

  设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有直到 n 阶的导数. 多项式

$$T_n(f,x_0;x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

  称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶 Taylor 多项式.

$$R_n(x-x_0) := f(x) - T_n(f,x_0;x)$$

  称为 n 阶余项.

带 Peano 余项的 Taylor 公式

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域内有直到 $(n-1)$ 阶的连续导数且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 关于点 x_0 处 n 阶 Taylor 多项式的余项 $R_n(x-x_0)$ 是比 $(x-x_0)^n$, $x \to x_0$ 更高阶的无穷小.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0.$$

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域内有直到 $n+1$ 阶的连续导数
则 $f(x)$ 关于点 x_0 处 n 阶 Taylor 多项式的余项 $R_n(x-x_0)$ 满足;
存在 ξ 在 x_0 和 x 之间使得

$$R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

即,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

注:

- 带 Lagrange 余项的 0 阶 Taylor 公式就是 Lagrange 中值定理: 存在某个 ξ 在 x_0 和 x 之间, 使得
$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$

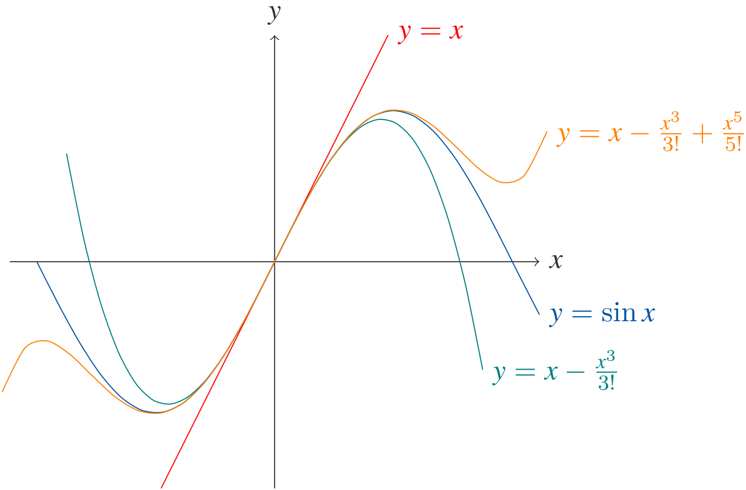
注:

- 带 Lagrange 余项的 0 阶 Taylor 公式就是 Lagrange 中值定理:
  存在某个 ξ 在 x_0 和 x 之间, 使得
  $$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$
- Peano 余项是对余项的定性描述:
  余项是比 $(x - x_0)^n$ 更高阶的无穷小.

注:

- 带 Lagrange 余项的 0 阶 Taylor 公式就是 Lagrange 中值定理: 存在某个 ξ 在 x_0 和 x 之间, 使得
$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$
- Peano 余项是对余项的定性描述: 余项是比 $(x-x_0)^n$ 更高阶的无穷小.
- Lagrange 余项是对余项的定量描述.

Taylor 公式：几何意义



例

求函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ 在 $x_0 = -1$ 处的一阶和三阶 Taylor 公式及相应的 Lagrange 余项.

Maclaurin 公式

函数在点$x_0 = 0$处的 Taylor 公式称为 Maclaurin 公式.

- 带 Peano 余项的 Maclaurin 公式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Maclaurin 公式

函数在点$x_0 = 0$处的 Taylor 公式称为 Maclaurin 公式.

- 带 Peano 余项的 Maclaurin 公式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

- 带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

常用 Maclaurin 公式

带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\cos\left(\theta x + (m+1)\pi\right)}{(2m+2)!}x^{2m+2},$$

带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\frac{x^n}{n!} + \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

$$\text{其中}\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}.$$

例

- 求 $f(x) = xe^{-x}$ 的 n 阶 Maclaurin 公式 (带 Peano 余项).

例

- 求 $f(x) = xe^{-x}$ 的 n 阶 Maclaurin 公式 (带 Peano 余项).
- 求 $f(x) = \arctan x$ 的 n 阶 Maclaurin 公式 (带 Peano 余项).

例

- 求 $f(x) = xe^{-x}$ 的 n 阶 Maclaurin 公式 (带 Peano 余项).
- 求 $f(x) = \arctan x$ 的 n 阶 Maclaurin 公式 (带 Peano 余项).
- 计算极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{\sin^3 x}.$$

例

- 求 $f(x)=xe^{-x}$ 的 n 阶 Maclaurin 公式 (带 Peano 余项).
- 求 $f(x)=\arctan x$ 的 n 阶 Maclaurin 公式 (带 Peano 余项).
- 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{\sin^3 x}.$$

- 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^6 x}{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{x^4}{12}}.$$

例

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f''(x) < 0$.

证明: $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 内二阶可导.

若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 都不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

证明: 存在 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1 \neq \xi_2$, 使得

$$f''(\xi_1) > 0 \text{ 且 } f''(\xi_2) > 0.$$

例

设函数 $f(x)$ 满足:

- 在 $[0,1]$ 连续且在 $(0,1)$ 内二阶可导;
- $f(0)=f(1)=0$;
- 在 $[0,1]$ 上的最小值为 -1.

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

例

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 二阶可导.

若 $f'_+(a)=f'_-(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant 4\cdot\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}.$$

函数值估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶导数.
  当 $|x-x_0|$ 很小时, $f(x)$ 可近似为
  $$f(x) \approx T_n(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶导数.
  当 $|x-x_0|$ 很小时, $f(x)$ 可近似为
  $$f(x) \approx T_n(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$
- 这一近似的绝对误差为
  $$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(f, x_0; x)|.$$

函数值估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶导数.
  当 $|x-x_0|$ 很小时, $f(x)$ 可近似为

$$f(x) \approx T_n(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

- 这一近似的绝对误差为

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(f, x_0; x)|.$$

- 误差 $|R_n(x)|$ 是比 $(x-x_0)^n, x \to x_0$ 高阶的无穷小.

误差估计

- 误差可由 Lagrange 余项给出

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个数.

误差估计

- 误差可由 Lagrange 余项给出

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个数.

- 若 $f^{(n+1)}(x)$ 在包含 x, x_0 的某个区间上有界, $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$. 则有绝对误差限

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

误差估计

- 误差可由 Lagrange 余项给出
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$
其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个数.
- 若 $f^{(n+1)}(x)$ 在包含 x, x_0 的某个区间上有界, $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$.
则有绝对误差限
$$|R_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$
- 若进一步 $x, x_0\in(a,b)$,
$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

例

- 用 e^x 在 0 点处的 4 阶 Taylor 多项式计算常数 e 的近似值并估计误差. （已知 n 和 x, 计算近似值并估计误差.）

例

- 用 e^x 在 0 点处的 4 阶 Taylor 多项式计算常数 e 的近似值并估计误差. (已知 n 和 x, 计算近似值并估计误差.)
- 计算 $\ln 1.1$ 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4}. (已知 x 和误差, 求 n 及近似值.)

例

- 用 e^x 在 0 点处的 4 阶 Taylor 多项式计算常数 e 的近似值并估计误差. (已知 n 和 x, 计算近似值并估计误差.)
- 计算 $\ln 1.1$ 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4}.
  (已知 x 和误差, 求 n 及近似值.)
- 现利用公式
  $$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$
  计算 $\sin x$ 的近似值, 要求误差不超过 0.001, x 的取值应限制在什么范围?
  (已知 n 和误差, 求 x 的范围.)

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 3.6 (A)

  2. (3)
  4.
  6. (3) (6)

  习题 3.6 (B)

  1.
  3. (2)
  4.