华工包打听

资料声明

关于资料

- 来源　由同学投稿，包打听有偿收集、整理
- 分享　资料无偿分享给同学使用

注意事项

资料不保证100%正确，仅供参考，切勿依赖

资料如有错误，请反馈给包打听微信

未经授权不能转作他用

华工新生答疑、校园指引、入学考试、感情树洞、华工黑市群、学习群、闲置群、校园资讯、校内通知、吃喝玩乐、兼职、家教、大学学车、考研、留学四六级（星球）等一站式服务。

·微信号——即时互动，丰富社群，校园生活资讯

·公众号——学习资料校园百事，学校通租

·包星球——吃喝玩乐兼职考研留学信息，应有尽有

·QQ口号——百事打听！

包包微信　　包打听公众号

最全能校园服务平台

校园大小事皆可打听

学院________ 专业________ 姓名________ 学号________

（密封线内不答题）

华南理工大学 2017 级新生入学测试

数　　学

注意事项：1、本试卷共五大题，满分 100 分；时间 120 分钟

2、所有答案直接写在试卷上。

3、答卷前请将密封线内各项填写清楚。

4、请涂黑你要选报的班级前的方框

□材料　　□计算机　　□土木　　□软件

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
评卷人						

一、填空题（每小题 5 分，共 50 分）填写正确答案。

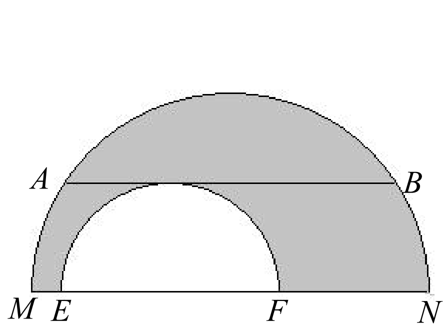
1）已知 $a+b-c=4$，$ac=3$，则 $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc+3$ 代数式的值等于________________。（答案：25）

详解　$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=16$ 结合 $ac=3$，可得

$a^2+b^2+c^2+2ab-2bc=16+2ac=16+2\times3=22$，

即 $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc+3=16+2\times3+3=25$

2）如右图所示，小半圆的直径 EF 落在大半圆的直径 MN 上，大半圆的弦 AB 平行于 MN 且与小半圆相切，弦 $AB=10cm$，则图中阴影部分的面积为________________平方厘米。（答案：$12.5cm^2$）



详解　$R^2=r^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2, S=\frac{\pi}{2}\left(R^2-r^2\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25\pi}{2}=12.5\pi$

3）n是一个三位数的正整数，其百、十、个位上的数字分别为a，b，c，则以a，b，c为边刚好构成等腰而非等边三角形的概率是______。

（答案：$\frac{13}{75}$）

详解 百位上不能是 0，否则不是三位数，即$a \neq 0$ 有九种可能，其余b，c有十种可能，999-99=900 个数。

选定$a \neq b = c$有$9 \times 8 = 72$刚好构成等腰而非等边三角形的 52 个（扣除两边之和不能大于第三边，两边之差不能少于第三边不能构成三角形的），

见列表：

1	2	2	2	1	1	3	1	1
1	3	3	2	3	3	3	2	2
1	4	4	2	4	4	3	4	4
1	5	5	2	5	5	3	5	5
1	6	6	2	6	6	3	6	6
1	7	7	2	7	7	3	7	7
1	8	8	2	8	8	3	8	8
1	9	9	2	9	9	3	9	9
4	1	1	5	1	1	6	1	1
4	2	2	5	2	2	6	2	2
4	3	3	5	3	3	6	3	3
4	5	5	5	4	4	6	4	4
4	6	6	5	6	6	6	5	5
4	7	7	5	7	7	6	7	7
4	8	8	5	8	8	6	8	8
4	9	9	5	9	9	6	9	9
7	1	1	8	1	1	9	1	1
7	2	2	8	2	2	9	2	2
7	3	3	8	3	3	9	3	3
7	4	4	8	4	4	9	4	4
7	6	6	8	5	5	9	5	5
7	5	5	8	6	6	9	6	6
7	6	6	8	7	7	9	7	7
7	9	9	8	9	9	9	8	8

选定$a = b \neq c$有$9 \times 8 = 72$刚好构成等腰而非等边三角形的 52 个（扣除两边之和不能大于第三边，两边之差不能少于第三边不能构成三角形的），

见列表：

1	1	2	2	2	1	3	3	1
1	1	3	2	2	3	3	3	2
1	1	4	2	2	4	3	3	4
1	1	5	2	2	5	3	3	5
1	1	6	2	2	6	3	3	6
1	1	7	2	2	7	3	3	7

1	1	8	2	2	8	3	3	8
1	1	9	2	2	9	3	3	9
4	4	1	5	5	1	6	6	1
4	4	2	5	5	2	6	6	2
4	4	3	5	5	3	6	6	3
4	4	5	5	5	4	6	6	4
4	4	6	5	5	6	6	6	5
4	4	7	5	5	7	6	6	7
4	4	8	5	5	8	6	6	8
4	4	9	5	5	9	6	6	9
7	7	1	8	8	1	9	9	1
7	7	2	8	8	2	9	9	2
7	7	3	8	8	3	9	9	3
7	7	4	8	8	4	9	9	4
7	7	6	8	8	5	9	9	5
7	7	5	8	8	6	9	9	6
7	7	6	8	8	7	9	9	7
7	7	9	8	8	9	9	9	8

a，b，c 为边刚好构成等腰而非等边三角形总计为 $52\times 3=156$ 个，则以 a，b，c 为边刚好构成等腰而非等边三角形的概率 $\dfrac{156}{900}=\dfrac{13\times 12}{75\times 12}=\dfrac{13}{75}$.

4）函数 $y=\dfrac{3\sin x-2}{2\cos x+3}$ 的值域为______________。

（答案：$-\dfrac{6+\sqrt{61}}{5}\le y\le\dfrac{\sqrt{61}-6}{5}$）

详解　由万能公式，

$$y=\frac{3\sin x-2}{2\cos x+3}=\frac{3\cdot\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-2}{2\cdot\dfrac{\tan^2\frac{x}{2}-1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+3}$$

$$=\frac{6\tan\frac{x}{2}-2\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{2\left(\tan^2\frac{x}{2}-1\right)+3\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{6\tan\frac{x}{2}-2-2\tan^2\frac{x}{2}}{5\tan^2\frac{x}{2}+1}$$，从而

$$y\left(5\tan^2\frac{x}{2}+1\right)=6\tan\frac{x}{2}-2-2\tan^2\frac{x}{2},(5y+2)\tan^2\frac{x}{2}-6\tan\frac{x}{2}+2+y=0,$$

由判别式 $36-4(5y+2)(2+y)\ge 0,9-\left(5y^2+12y+4\right)\ge 0,5y^2+12y-5\le 0$，

由$5y^2+12y-5=0, y=\frac{-12\pm\sqrt{144+100}}{10}=\frac{-12\pm\sqrt{244}}{10}=\frac{-6\pm\sqrt{61}}{5}$，可得

答案：$-\frac{6+\sqrt{61}}{5}\le y\le\frac{\sqrt{61}-6}{5}$。

5）直四棱柱两对角面所成的二面角为60°，两对角面的面积分别为$12cm^2$和$20cm^2$，底面面积为$15\sqrt{3}cm^2$，则此四棱柱的体积为________。

（答案：$30\sqrt{3}cm^2$）

不记得定义，网上查参考资料

直四棱柱:侧棱垂直于底面的四棱柱叫做直四棱柱。直四棱柱的侧棱长与高相等;直四棱柱的侧面及经过不相邻的两条侧棱的截面都是矩形。

直四棱柱: 侧棱垂直于底面的四棱柱叫做直四棱柱。

直四棱柱的侧棱长与高相等; 直四棱柱的侧面及经过不相邻的两条侧棱的截面都是矩形。

侧面积公式: S 侧=C*h(底面周长*高)

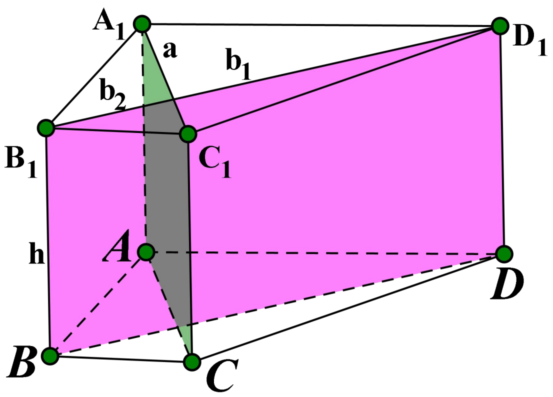
全面积公式: S 全=C*h+2*S 底面(底面周长*高+2 个底面面积)体积公式:V=S*h(底面面积*高)

例 直棱柱底面菱形的面积是 S，两对角面面积分别为 p、q，求直棱柱的体积？

解：设直棱柱长为 L,底面菱形的对角线长分别为 a、b，体积为 V,则
S=ab/2 p=aL Q=bL 即 2SPQ=(abL)^2 ，所以 V=SL=abL/2=0.5√(2SPQ)（资料需纠错）

详解　依定义，有 $ah=12, bh=20, \frac{1}{2}ab_1\sin 60^\circ+\frac{1}{2}ab_2\sin 60^\circ=\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=15\sqrt{3}$，

$\Rightarrow abh^2=240, ab\frac{\sqrt{3}}{4}=15\sqrt{3}$，故得出 $ab=60, h^2=4, h=2$，四棱柱的体积为



$V=Sh=15\sqrt{3}\cdot 2=30\sqrt{3}$。

6）在 ΔABC 中，角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c ，若 $3a$, b , c 成等比数列，且 $C-A=\frac{\pi}{2}$，则角 B 的值为________________________________。

（答案：$\frac{\pi}{3}$）

详解　$3a$, b , c 成等比数列，则 $b^2=3ac$；由正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，有

$\sin^2 B=3\sin A\sin C=\frac{3}{2}\left[\cos(C-A)-\cos(C+A)\right]$。由 $C-A=\frac{\pi}{2}$，有

$C=\frac{\pi}{2}+A, 0<B<\frac{\pi}{2}$，进而 $C=\frac{\pi}{2}+A, 0<B<\frac{\pi}{2}$，

进而 $2\sin^2 B=-3\cos(\pi-B)=3\cos B, 2-2\cos^2 B=3\cos B, 2\cos^2 B+3\cos B-2=0$

$\cos B=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}, \cos B=\frac{1}{2}$，故有答案：$\frac{\pi}{3}$.

7）已知一双曲线的中心在原点且一个焦点为 $F\left(\sqrt{7}\ ,0\right)$，直线 $y=x-1$ 与其交于 M , N 两点，MN 的中点横坐标为 $-\frac{2}{3}$，则双曲线的方程为 _______。

（答案：$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$）

详解　由题设，实轴为 x 轴，可设 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 且 $c=\sqrt{7}, a^2+b^2=c^2=7$，

M，N两点坐标可设为$(x_1,x_1-1),(x_2,x_2-1)$，由题设，$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2}{3}$，且

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{(x_1-1)^2}{b^2}=1,\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{(x_2-1)^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{{x_1}^2-{x_2}^2-2(x_1-x_2)}{b^2}=0$，

进而$\frac{(x_1+x_2)}{a^2}-\frac{(x_1+x_2)-2}{b^2}=0,\frac{-\frac{4}{3}}{a^2}-\frac{-\frac{4}{3}-2}{b^2}=0,\frac{2}{a^2}=\frac{5}{b^2},a^2=\frac{2}{5}b^2$，结合

$a^2+b^2=7$，有$\frac{7}{5}b^2=7,b^2=5,a^2=2$，从而有答案：$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$。

8）设a，b，c都是正数且$a+2b+c=1$，则数$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)$的取值范围是__________。（答案$[\frac{125}{4},+\infty)$）

详解　由题设，　$0<a<1,0<b<\frac{1}{2},0<c<1$，进而$\frac{1}{a}>1,\frac{1}{b}>2,\frac{1}{c}>1$，

$\frac{1}{a}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}>0,\frac{1}{b}-1>1>0,\frac{1}{c}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}>0$，进而可知答案必为$[\frac{3}{8},+\infty)$的一个子集，

令$y=\ln\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)\right]$，

$L=\ln\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{b}-1\right)+\ln\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)+\lambda(a+2b+c-1)$，

则再令

$$L_a=\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}\frac{-1}{a^2}+\lambda=0,L_b=\frac{1}{\frac{1}{b}-1}\frac{-1}{b^2}+2\lambda=0,L_b=\frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{1}{2}}\frac{-1}{c^2}+\lambda=0,a+2b+c-1=0$$

即$\frac{-2}{a(2-a)}+\lambda=0,\frac{-1}{b(1-b)}+2\lambda=0,\frac{-2}{c(2-c)}+\lambda=0,a+2b+c-1=0$即

$\frac{-2}{a(2-a)}+\lambda=0,\frac{-1}{b(b-1)}+2\lambda=0,\frac{-2}{c(2-c)}+\lambda=0,a+2b+c-1=0$，

由$a(2-a)=c(2-c),a^2-c^2-2(a-c)=0,\Rightarrow a=c$，$a+c=2$（因导致矛盾舍去）；

由

$$\frac{-1}{b(1-b)}+\frac{4}{c(2-c)}=0,c(2-c)=4b(1-b),c^2-2c-4b^2+4b=(c+2b-2)(c-2b)=0$$

得$c=2b,2b+c=2$（因导致矛盾舍去）；

即 $a=c=2b, a+2b+c-1=0 \Rightarrow a=c=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}$，进而

$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right) \geq \left(3-\frac{1}{2}\right)(6-1)\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{125}{4}$，故有答案 $[\frac{125}{4},+\infty)$。

不等式解法：由题设， $0<a<1, 0<b<\frac{1}{2}, 0<c<1$，进而 $\frac{1}{a}>1, \frac{1}{b}>2, \frac{1}{c}>1$，

$\frac{1}{a}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}>0, \frac{1}{2b}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}>0, \frac{1}{c}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}>0$，进而由 $a+b+c+d+e \geq 5\sqrt[5]{abcde}$ （平均值不等式）当 $a=b=c=d=e$ 时成立等式，从而

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\frac{(2-a)(2-2b)(2-c)}{2abc}$$

令 $2b=d$，即有 $a+c+d=1$， $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}\frac{(2-a)(2-d)(2-c)}{acd}=\frac{1}{4}\frac{(a+2c+2d)(2a+2c+d)(2a+c+2d)}{acd}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{d}{a}\right)\left(\frac{a}{d}+\frac{a}{d}+\frac{c}{d}+\frac{c}{d}+1\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+1+\frac{d}{c}+\frac{d}{c}\right)$$

$$\geq \frac{1}{4}\cdot 5\sqrt[5]{1\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{d}{a}\right)^2}\cdot 5\sqrt[5]{\left(\frac{a}{d}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^2\cdot 1}\cdot 5\sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^2\cdot 1\cdot\left(\frac{d}{c}\right)^2}=\frac{125}{4}\sqrt[5]{\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{d}{a}\cdot\frac{a}{d}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{c}\right)^2}=\frac{125}{4}$$

当 $\frac{c}{a}=\frac{d}{a}=\frac{a}{d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{c}=\frac{d}{c}=1$，即 $a=c=d=2b=\frac{1}{3}$ 时成立等式，

故有答案 $[\frac{125}{4},+\infty)$。

9）若 a, b 是互质（另一种说法互素）的正整数，且以 $a+b$, $3a$, $a+4b$ 为边构成的三角形是直角三角形，则 $a+b$=________________。

（答案：8 或 24）

详解　由题设， $a+b<a+4b, a+b$ 不可能是斜边，只有 $(a+b)^2+9a^2=(a+4b)^2$ 或 $(a+b)^2+(a+4b)^2=9a^2$；即 $2ab+b^2+10a^2=a^2+8ab+16b^2$ 或

$a^2+2ab+b^2+a^2+8ab+16b^2=9a^2$；即

$9a^2=6ab+15b^2, 3\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\frac{a}{b}-5=0, \frac{a}{b}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{6}=\frac{1\pm 4}{3}$ 或

$-7a^2+10ab+17b^2=0,\ 7\left(\frac{a}{b}\right)^2-10\frac{a}{b}-17=0,\left(7\frac{a}{b}-17\right)\left(\frac{a}{b}+1\right)=0$，

$\frac{a}{b}=\frac{10\pm\sqrt{100+28\times17}}{14}=\frac{5\pm\sqrt{25+7\times17}}{7}=\frac{5\pm\sqrt{144}}{7}=\frac{5\pm12}{7}$；

依题意有答案：5+3=8 或 17+7=24。

10）方程组$\begin{cases}ab+bc=25\\ac+bc=21\end{cases}$的正整数解的组数________________。

（答案：1 组）

详解　由题设，$\begin{cases}b(a+c)=25\\(a+b)c=21\end{cases}$，要正整数解可设$\begin{cases}b=1,a+c=25\\a+b=1,c=21\end{cases}$或

$\begin{cases}b=1,a+c=25\\a+b=21,c=1\end{cases}$或$\begin{cases}b=1,a+c=25\\a+b=3,c=7\end{cases}$或$\begin{cases}b=1,a+c=25\\a+b=7,c=3\end{cases}$，

或$\begin{cases}b=25,a+c=1\\a+b=1,c=21\end{cases}$或$\begin{cases}b=25,a+c=1\\a+b=21,c=1\end{cases}$或$\begin{cases}b=25,a+c=1\\a+b=3,c=7\end{cases}$或$\begin{cases}b=25,a+c=1\\a+b=7,c=3\end{cases}$，

或$\begin{cases}b=5,a+c=5\\a+b=1,c=21\end{cases}$或$\begin{cases}b=5,a+c=5\\a+b=21,c=1\end{cases}$或$\begin{cases}b=5,a+c=5\\a+b=3,c=7\end{cases}$或$\begin{cases}b=5,a+c=5\\a+b=7,c=3\end{cases}$；

进而$\begin{cases}b=1,a+c=25\\a=0\text{非正},c=21\end{cases}$或$\begin{cases}b=1,a+c=25\\a=20,c=1\end{cases}$矛盾 或$\begin{cases}b=1,a+c=25\\a=2,c=7\text{矛盾}\end{cases}$或

$\begin{cases}b=1,a+c=25\\a=6,c=3\text{矛盾}\end{cases}$，

或$\begin{cases}b=25,a+c=1\\a=-24\text{非正},c=21\end{cases}$或$\begin{cases}b=25,a+c=1\\a=-4\text{非正},c=1\end{cases}$或$\begin{cases}b=25,a+c=1\\a=-22\text{非正},c=7\end{cases}$或

$\begin{cases}b=25,a+c=1\\a=-18\text{非正},c=3\end{cases}$，

或$\begin{cases}b=5,a+c=5\\a=-4\text{非正},c=21\end{cases}$或$\begin{cases}b=5,a+c=5\\a=16,c=1\text{矛盾}\end{cases}$或$\begin{cases}b=5,a+c=5\\a=-2\text{非正},c=7\end{cases}$或$\begin{cases}b=5,a+c=5\\a=2,c=3\end{cases}$，

从而分析得仅有一组解$a=2,b=5,c=3$。

二、（本小题 12 分）证明下列不等式

1）a，b，c，d 是任意实数，证明：$a+b+c+d\le2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$；

2）当$-1<x<7$时，证明：$2\sqrt{x+3}+3\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}<2\sqrt{6x+24}$

证明：1）因为$\left(a+b+c+d\right)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

$\le 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$（反复用平均值不等式$a^2+b^2\ge 2ab$）

所以$a+b+c+d\le\left|a+b+c+d\right|\le 2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=\sqrt{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$。

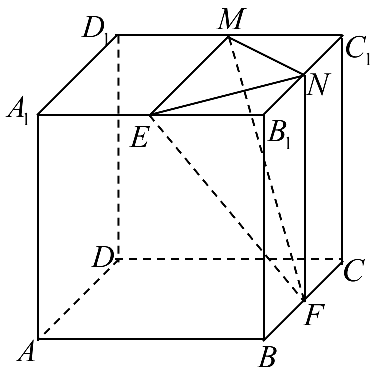
2）$2\sqrt{x+3}+3\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$

$\le\sqrt{6}\sqrt{x+3+x+3+x+1+x+1+x+1+7-x}=\sqrt{6}\sqrt{4x+16}=2\sqrt{6x+24}$

（用上题不等式的推广$a+b+c+d+e+f\le\sqrt{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}$）

因为当$-1<x<7$时，$x+3,x+1,7-x$不能同时相等，所以当$-1<x<7$时有

$2\sqrt{x+3}+3\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}<2\sqrt{6x+24}$（柯西不等式$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$）



三、（本小题12分）如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E, F, M, N分别为A_1B_1，BC, C_1D_1, B_1C_1的中点。

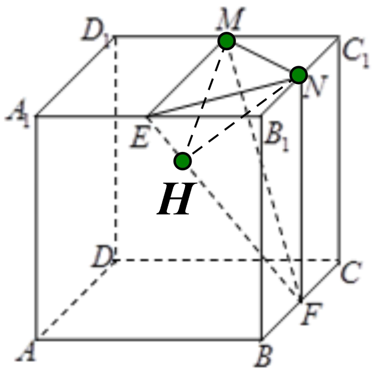
1）证明：平面$MNF\perp$平面ENF；

2）在EF求一点H使平面$MNH\perp$平面EFM，并计算出EH的值；

3）计算平面EFN和平面EFM的二面角。

解法一：1）因为$NF\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，所以$\angle ENM$是平面MNF与平面ENF的二面角。又因为E, M, N分别为A_1B_1，C_1D_1, B_1C_1的中点，所以$EN=MN=\sqrt{2}$，$EM=2$，由勾股定理可得$\angle ENM=90^\circ$。

因此有平面$MNF\perp$平面ENF；



2）过 N 向 EF 作垂线垂足为 H，

因为 $MN\perp NE, NF\perp MN$ 所以MN垂直平面 NEF，由此可得 $MN\perp EF$。

又因为 $NH\perp EF, EF\perp MN$ 所以 EF 垂直平面 MNH，由此可得平面 $MNH\perp$ 平面 EFM。

又因为 $EN=\sqrt{2}$，$FN=2$, $\angle ENF=90^{\circ}$，所以 $EF=\sqrt{6}$，由于 $\Delta ENH\sim\Delta ENF$，从而 $\dfrac{EH}{EN}=\dfrac{EN}{EF}$，故 $EH=\dfrac{EN^2}{EF}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

3）由2）的讨论可得 $\angle MHN$ 就是平面 EFN 和平面 EFM 的二面角，因为 $MN=\sqrt{2}$，由于 $\Delta ENH\sim\Delta ENF$，从而 $\dfrac{NH}{EN}=\dfrac{FN}{EF}$，故 $NH=\dfrac{FN\cdot EN}{EF}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；由于MN垂直平面 NEF，由此可得 $\angle MNH=90^{\circ}$，由勾股定理 $MH=\sqrt{\dfrac{4}{3}+2}=\sqrt{\dfrac{10}{3}}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$，

$\angle MHN=\arcsin\dfrac{MN}{MH}=\arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 或 $\angle MHN=\arctan\dfrac{MN}{NH}=\arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

方法二　建立坐标系用向量理论做（1、3简单, 2不易）

四、（本小题12分）设函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数，$g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像关于 $x-2=0$ 对称，且当 $x\in[4,5]$ 时 $g(x)=2a(x-4)-4(x-4)^3$（a 为实数）。

1）求函数 $f(x)$ 的表达式；

2）设 $a\in(2,+\infty)$，若 $f(x)$ 的图像的最高点刚好落在直线 $y=12$ 上，求出 a 的值。

解：1）向左平移 2 各单位，可得 $f(x+2)$ 与 $g(x+2)$ 关于 y 轴对称，而 $x\in[2,3]$ 时，$g(x+2)=2a(x-2)-4(x-2)^3$，所以 $x\in[-3,-2]$ 时有

$$f(x+2)=2a(-x-2)-4(-x-2)^3=-2a(x+2)+4(x+2)^3$$

由此可得 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=-2ax+4x^3$，又因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数，所以 $f(x)=\begin{cases}2ax-4x^3 & 0\le x\le 1\\ -2ax+4x^3 & -1\le x\le 0\end{cases}$

2）由对称性只需考虑 $0<x\le 1$ 的情形，因为 $a\in(2,+\infty)$ 时，

$$f(x)=2ax-4x^3=2x\left(a-2x^2\right)=\sqrt{4x^2\left(a-2x^2\right)^2}\le\sqrt{\left(\frac{4x^2+\left(a-2x^2\right)+\left(a-2x^2\right)}{3}\right)^3}$$

$$=\sqrt{\frac{8a^3}{27}}=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$$

并且当 $4x^2=a-2x^2\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{6a}}{6}$ 时等号成立，所以 $\dfrac{\sqrt{6a}}{6}\in[0,1]$ 时，即 $2<a\le 6$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $\dfrac{2a\sqrt{6a}}{9}$，若 $\dfrac{2a\sqrt{6a}}{9}=12$，则解得有 $a=3\sqrt[3]{12}>6$，所以 $(2,6]$ 中不存在满足题设要求的 a 值；

当 $a>6$ 时，设 $x_1,x_2\in[0,1]$，$x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=2a(x_2-x_1)-4\left(x_2^3-x_1^3\right)=2(x_2-x_1)\left(a-2x_2^2-2x_1x_2-2x_1^2\right)>0$$

这就说明函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是递增函数，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=2a-4$，由 $f(1)=2a-4=12$ 可得 $a=8$。

详解 2：1）(x,y) 与 (t,z) 关于 $x-2=0,x=2$ 对称，则 $y=z,\dfrac{t+x}{2}=2,t=4-x$，于是，而 $t\in[-1,0]$ 时 $x\in[4,5]$，$f(t)=f(4-x)=z=y=g(x)$，即

$f(4-x)=-2a(4-x)+4(4-x)^3$，所以 $x\in[-1,0]$ 时有，$f(x)=-2ax+4x^3$，又因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数，所以 $f(x)=\begin{cases}2ax-4x^3 & 0\le x\le 1\\ -2ax+4x^3 & -1\le x\le 0\end{cases}$

2）由对称性只需考虑 $0<x\le 1$ 的 $f(x)=2ax-4x^3$ 情形，因为 $a\in(2,+\infty)$ 时，

$f'(x)=2a-12x^2$，当$2a-12x^2=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6a}}{6}$为驻点，所以$\frac{\sqrt{6a}}{6}\in[0,1]$即要求$2<a\le 6$时，函数与端点函数值$f(0)=0,f(1)=2a-4$比较得$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$f\left(\frac{\sqrt{6a}}{6}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{6}-4\left(\frac{\sqrt{6a}}{6}\right)^3=\frac{a\sqrt{6a}}{3}-\frac{a\sqrt{6a}}{9}=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$，若$\frac{2a\sqrt{6a}}{9}=12,\frac{a\sqrt{6a}}{9}=6,\frac{a\sqrt{a}}{9}=\sqrt{6},a^3=9^2\times 6=3^5\times 2$，则解得有$a=3\sqrt[3]{18}>6$，所以$(2,6]$中不存在满足题设要求的$a$值；

当$a>6$时，$0<x\le 1$，则$f'(x)=2a-12x^2>0$这就说明函数$f(x)$在$[0,1]$上是递增函数，函数$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$f(1)=2a-4$，由
$f(1)=2a-4=12$可得$a=8$。

五、（本小题 14 分）已知数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$满足条件

$$a_1+a_2+\cdots+a_n<0\ ,\ b_1+b_2+\cdots+b_n<0$$

证明：存在数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的一个重排序数列$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$使得

$$a_{i_1}b_1+a_{i_2}b_2+\cdots+a_{i_n}b_n>0$$

分析：看到这个题目，可以分析一下条件结论各意味着什么。从条件看，马上可以想到有$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)>0$。从结论看，是一个存在性的结论，要么构造法得到，如果构造不易，应该想想能否反证，也就是要从如果不存在数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的一个重排序数列$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$使得$a_{i_1}b_1+a_{i_2}b_2+\cdots+a_{i_n}b_n>0$意味着什么来思考。为了建立联系，需要具体化

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\begin{matrix} a_1b_1+ & a_1b_2+ & \cdots+ & a_1b_n+ \\ a_2b_1+ & a_2b_2+ & \cdots+ & a_2b_n+ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1+ & a_nb_2+ & \cdots+ & a_nb_n \end{matrix}$$

，要得出结论左边的表达式，只需要每行每列各取一个且仅一个出来再相加即可。为了表达有条理，不重不漏，可以选择对角线及其平行线选取方式，于是n组，每组n个数的表达就有了，证明也就出来了。

证明：用反证法证明，假设不存在这样的重排序数列（否定结论），则有

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\le 0$$

$$a_2b_1+a_3b_2+\cdots+a_nb_{n-1}+a_1b_n\le 0$$

$$a_3b_1+a_4b_2+\cdots+a_1b_{n-1}+a_2b_n\le 0$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$a_n b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_{n-2} b_{n-1} + a_{n-1} b_n \le 0$$

以上式子相加可得$\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) \le 0$，这是与已知$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 0, b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 0, \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) > 0$矛盾（得出与已知前提推出的结论矛盾的结论），故结论得证。