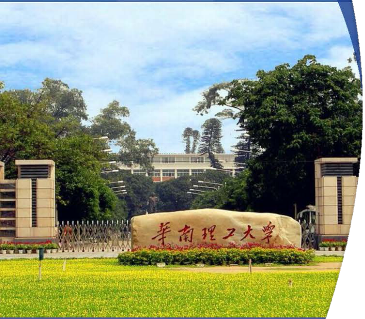

華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§2.4 极限的性质

- 唯一性
- 局部有界性
- 局部保号性
- 局部保序性
- 两边夹法则
- 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

极限的唯一性

定理（函数极限的唯一性）

若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则极限值唯一.

定理（数列极限的唯一性）

若极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，则极限值唯一.

定理（有极限函数的局部有界性）

若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有界.

定理（有极限数列的有界性）

若极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界.

定理（有极限函数的局部保号性）

- 若极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 0$,

  则 $\forall 0 < r < A$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 恒有

  $$f(x) > r > 0.$$

- 若极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A < 0$,

  则 $\forall A < r < 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 恒有

  $$f(x) < r < 0.$$

局部保号性

定理（数列极限的局部保号性）

- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$,

  则 $\forall 0 < r < A$, $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有
  $$x_n > r > 0.$$

- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A < 0$,

  则 $\forall A < r < 0$, $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有
  $$x_n < r < 0.$$

保序性

定理（函数极限的保序性）

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 都存在，

且在 a 的某个空心邻域上恒有 $f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

- 注：定理中的 $\leqslant$ 不能改为 $<$。

保序性

定理（数列极限的保序性）

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在，

且存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $x_n \leqslant y_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

- 注：定理中的 $\leqslant$ 不能改为 $<$。

定理（函数极限的两边夹法则）

若在 a 的某个空心邻域内恒有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

且

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x),$$

则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在且

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

定理（数列极限的两边夹法则）

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 是三个数列.

若存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，恒有

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n,$$

且

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

例

求下列极限:

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right], \quad [a]\ \text{表示不超过}a\ \text{的最大整数},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}, \quad \text{其中}a>b>c>0.$$

定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例

求下列极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x},$$

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}.$$

作业:

- 习题 2.4 (A)
  3.
  5. (3) (9)

  习题 2.4 (B)
  4. (4)
  5. (1) (2)