

华南理工大学期末考试

2021-2022-2学期《工科数学分析（二）》(A) 答案

一、叙述定义和定理（共5 小题, 每小题2 分, 共10 分）

1. 二元函数的偏导数.

设二元函数 $z = f(x, y)$ 定义于开区域 D , 且点 $(a, b) \in D$, 称一元函数 $z = f(x, b)$ 在 a 点的导数为二元函数 $f(x, y)$ 在 (a, b) 点关于 x 的偏导数, (1 分)

一元函数 $z = f(a, y)$ 在 b 点的导数为二元函数 $f(x, y)$ 在 (a, b) 点关于 y 的偏导数. (2 分)

2. 高斯公式.

设 V 是 \mathbb{R}^3 内的一个有界闭区域, 其边界 Σ 由光滑曲面或分片光滑曲面组成, 方向取外侧. 又设函数 P, Q, R 在 V 上有一阶连续偏导数,

则下列高斯公式成立:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 Σ 上单位外法向量 e_n 的方向余弦. 上述公式还可写成

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

..... (2 分)

3. 条件收敛级数.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛. (2 分)

4. 函数列的一致收敛.

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上有一极限函数 $f(x)$. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时, $\forall x \in I$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ (2 分)

5. 二阶线性齐次常微分方程 $L[y] = 0$ 的基础解系.

$L[y] = 0$ 的两个线性无关解 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 称为 $L[y] = 0$ 的基础解系. (2 分)

二、 计算题(共4 小题, 每小题10 分, 共40 分)

1. 设 $u = z^2 + 2z$, 且 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z, (z \neq 1)$ 所确定, 求 du 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解: 令 $F(x, y, z) = xe^x - ye^y - ze^z$. 则 $F_x = (x+1)e^x, F_y = -(y+1)e^y, F_z = -(z+1)e^z$, 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x+1}{z+1} e^{x-z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y+1}{z+1} e^{y-z}, (z \neq -1)$$

..... (4 分)

故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2z+2) \frac{\partial z}{\partial x} = 2(x+1)e^{x-z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (2z+2) \frac{\partial z}{\partial y} = -2(y+1)e^{y-z}.$$

因此

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 2(x+1)e^{x-z} dx - 2(y+1)e^{y-z} dy$$

..... (8分)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^{x-z} + 2(x+1)e^{x-z}(1-z_x) = \frac{2e^{x-z}[(z+1) + (x+1)(z-x)e^{x-z}]}{z+1}$$

..... (10 分)

2. 计算 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$.

解:

$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx$$

..... (8 分)

$$\int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx = -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi y}{2} dy = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

..... (10 分)

3. 计算 $\iint_{\Sigma} x dy dz$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 = 1, z = x + 2$ 和 $z = 0$ 所围立体的表面, 取外侧.

解: 令 $S = S_1 + S_2 + S_3$, 其中 $S_1: z = 0$, 取下侧; $S_2: z = x + 2$, 取上侧, 在 Oyz 平面的投影区域为 $D_{yz}: \{(y, z) | y^2 + (z-2)^2 \leq 1\}$. 则由于 S_1 在 Oyz 平面的投影为线, 故

$$\iint_{S_1} x dy dz = 0.$$

..... (2 分)

而

$$\iint_{S_2} x dy dz = - \iint_{D_{yz}} (z-2) dy dz = - \int_{-1}^1 dy \int_{2-\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} (z-2) dz = 0.$$

..... (6分)

对于 $S_3: x^2 + y^2 = 1$, 令 $S_3 = S_{31} + S_{32}$. 即, $S_{31}: x = \sqrt{1-y^2}$, 取前侧 ($\cos \alpha > 0$), 在 Oyz 平面的投影区域为

$$D_{31}: 0 \leq z \leq 2 + \sqrt{1-y^2}, -1 \leq y \leq 1.$$

$S_{32}: x = -\sqrt{1-y^2}$, 取后侧 ($\cos \alpha < 0$), 在 Oyz 平面的投影区域为

$$D_{32}: 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{1-y^2}, -1 \leq y \leq 1.$$

从而

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} x dy dz &= \iint_{D_{31}} \sqrt{1-y^2} dy dz - \iint_{D_{32}} -\sqrt{1-y^2} dy dz \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_0^{2+\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dz + \int_{-1}^1 dy \int_0^{2-\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dz \\ &= 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi \end{aligned}$$

..... (8 分)

故, 原式 $= 0 + 0 + 2\pi = 2\pi$.

..... (10 分)

4. 计算 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2, (a > 0)$, 直线 $y = x$ 与 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

解: 边界分成三段: $L_1: y = 0, 0 \leq x \leq a$, $L_2: y = x, 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}a$, $L_3: x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

..... (4分)

且

$$\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx = e^a - 1.$$

$$\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}a} \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} dx = e^a - 1.$$

$$\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a d\theta = \frac{\pi a}{4} e^a.$$

..... (8分)

故

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = 2(e^a - 1) + \frac{\pi a}{4} e^a.$$

..... (10分)

三、解答题 (共3 小题, 每小题10 分, 共30 分)。

1. 设曲线积分 $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x)dy$.

解: 设 $P(x, y) = xy^2, Q(x, y) = y\varphi(x)$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)] = y\varphi'(x)$$

..... (8分)

由于积分与路径无关, 故 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 即有

$$y\varphi'(x) = 2xy \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + C.$$

由 $\varphi(0) = 0$, 知 $C = 0 \Rightarrow \varphi(x) = x^2$.

..... (10分)

因此

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x)dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yx^2 dy = \int_0^1 0dx + \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}.$$

..... (2分)

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解: 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

(1) 求收敛区间.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

..... (2分)

(2) 求和函数 $S(x)$. 对于 $x \in (-1, 1)$, 有

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n(n+1)x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

设 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$\int_0^x g(x)dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

故

$$g(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

即

$$\int_0^x S(x)dx = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

从而

$$S(x) = \left[\frac{x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{2x}{(1-x)^3} \dots\dots (8\text{分})$$

(3) 求函数 $S(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 的值.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = S\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \dots\dots (10\text{分})$$

3. 求方程 $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ 的通解.

解: (1) 特征方程为

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

解得特征根为

$$r = -2 \quad (\text{二重})$$

故齐次方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}. \dots\dots (5\text{分})$$

(2) 设方程的一个特解为

$$y^* = A \sin 2x + B \cos 2x$$

代入方程, 比较系数得 $A = \frac{1}{8}$.

故方程通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{8} \sin 2x. \dots\dots (10\text{分})$$

四、应用题 (10 分)

将长为2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解: 设铁丝分成的三段长分别为 x, y, z , 则 $x + y + z = 2$, 且依次围成的圆的半径、正方形的边长、三角形的边长分别为 $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$.

$\dots\dots (2\text{分})$

因此三个图形之和为

$$S = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{z}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36} z^2 \dots\dots (4\text{分})$$

作Lagrange函数

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36} z^2 + \lambda(x + y + z - 2) \dots\dots (6\text{分})$$

由

$$L_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0, L_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0, L_z = \frac{\sqrt{3}}{18} z + \lambda = 0, L_\lambda = x + y + z - 2 = 0,$$

得

$$x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

最小值为 $x = \frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

..... (10分)

五、证明题（10 分）。

证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

证明：对一般项 $u_n(x) = x^n(1-x)^2$ 求导，令

$$u'_n(x) = nx^{n-1}(1-x)^2 - 2x^n(1-x) = 0$$

得到可以极值点 $x = 0, 1, \frac{n}{n+2}$.

..... (4分)

由于

$$u_n\left(\frac{n}{n+2}\right) > u_n(0) = u_n(1) = 0$$

故 $u_n(\frac{n}{n+2})$ 为 $u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值. 从而

$$u_n(x) \leq \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+2}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 < \frac{4}{n^2}.$$

..... (8分)

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

..... (10分)