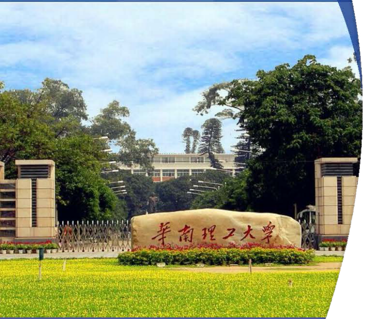

華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§4.5 分部积分法

- 分部积分公式
- 定积分的分部积分

分部积分公式

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续的导数，则

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

分部积分公式

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续的导数，则

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

- 利用微分的符号，分部积分公式可以写成

$$\int f\,\mathrm{d}g = f\cdot g - \int g\,\mathrm{d}f.$$

例

计算不定积分

$$\int x^2 e^x \mathrm{d}x.$$

分部积分公式

- 分部积分的关键在于:
  找到合适的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 将被积函数写成 $f(x) \cdot g'(x)$.

- 分部积分的关键在于:
  找到合适的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 将被积函数写成 $f(x)\cdot g'(x)$.
- 选取 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原则是:
  - 容易通过 $g'(x)$ 求得原函数 $g(x)$;
  - $\int g\,\mathrm{d}f$ 比 $\int f\,\mathrm{d}g$ 容易计算.

分部积分公式

- 分部积分的关键在于:
  找到合适的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 将被积函数写成 $f(x)\cdot g'(x)$.
- 选取 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原则是:
  - 容易通过 $g'(x)$ 求得原函数 $g(x)$;
  - $\int g\,\mathrm{d}f$ 比 $\int f\,\mathrm{d}g$ 容易计算.
- 选取 $f(x)$ 和 $g(x)$ 时, 可参考以下规律:
  如果被积函数是以下五种函数中任意两种的乘积:
  对数函数、反三角函数、幂函数、三角函数、指数函数,
  则可按"对、反、幂、三、指"的顺序, 选定前面的一种为函数 $f(x)$, 后面的一种函数为 $g'(x)$.

例

求不定积分

$$\int x\cos x\mathrm{d}x, \qquad \int \arcsin x\mathrm{d}x,$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

例

- 求不定积分

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x \text{ 和 } \int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.$$

- 求不定积分

$$\int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x.$$

例

设

$$I_n := \int \frac{1}{\sin^n x} \mathrm{d}x,$$

证明：

$$I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_n - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n+1} x}, \quad n \geqslant 0.$$

定积分的分部积分法

定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数, 则

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x.$$

例

计算定积分

$$(1)\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \qquad (2)\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x.$$

例

计算定积分

$$(1)\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \qquad (2)\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x.$$

例

设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续. 证明:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x.$$

例

设函数

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

求定积分

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

例（Wallis 公式）

证明定积分公式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n > 0 \text{为偶数}, \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n > 1 \text{为奇数}, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

作业:

- 习题 4.5 (A)
  3. (3) (9)
  5.
  6. (5) (7)

  习题 4.5 (B)
  1. (3) (5)
  3. (12) (13)
  4. (3)