



华南理工大学

South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§2.8 连续函数的性质

- ▶ 连续函数的运算
- ▶ 初等函数的连续性
- ▶ 有界闭区间上连续函数的性质
- ▶ 函数的一致连续性





连续函数的四则运算

定理（连续函数的四则运算）

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 点连续, 则

- ▶ $\alpha f(x) + \beta g(x)$ (α, β 为常数) 在 a 点连续;
- ▶ $f(x) \cdot g(x)$ 在 a 点连续;
- ▶ 若 $g(a) \neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 a 点连续.



复合函数的连续性

定理（复合函数的连续性）

设函数 $g(x)$ 在 x_0 点连续, $f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 点连续,
则 $f \circ g(x)$ 在 x_0 点连续.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right).$$



反函数的连续性

定理（反函数的连续性）

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增（减）且连续，值域为区间 J ，则其反函数 $x = \varphi(y)$ 在区间 J 上严格递增（减）且连续。



初等函数的连续性

- ▶ 基本初等函数（三角函数、指数函数、对数函数、幂函数、反三角函数）在其定义区间上是连续的. 这里定义区间指包含于定义域的区间.
- ▶ 初等函数由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合得到, 因此在其定义区间上仍然是连续的.
- ▶ 初等函数在定义域上未必连续.

如: 函数 $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$ 的定义域为 $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 不包含任何区间. $f(x)$ 在定义域中任意点都不连续.



连续函数的极限计算

若 $f(x)$ 在点 a 连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right).$$

因此, 计算函数趋于连续点 a 的极限只需计算 $f(a)$ 的值.

例

计算极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos(1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$



有界闭区间上连续函数的有界性

定理（有界性定理）

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必定有界.

定理的条件闭区间和连续性都必不可少.

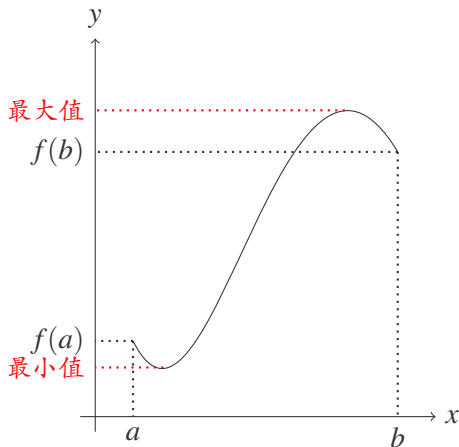
- ▶ $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续, 但无界.
- ▶ $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上不连续, 且无界.



有界闭区间上连续函数的最值

定理（最值定理）

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数
必定有最大值和最小值.





最值定理

定理的条件闭区间和连续性都必不可少.

▶ $f(x) = x^2$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续, 但无最大最小值.

▶ $f(x) = \arctan x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 但不能取到最值.

$$\text{▶ } f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

在区间 $[0, 2]$ 上不连续, 既没有最大值也没有最小值.

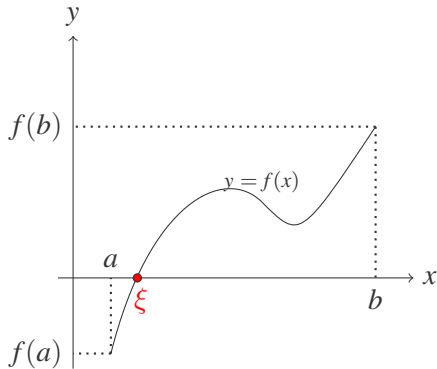


有界闭区间上连续函数的零点

定理（零点存在定理）

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使

$$f(\xi) = 0.$$





有界闭区间上连续函数的零点

例

证明方程 $x2^x = 1$ 在 $(0, 1)$ 至少有一个根.

例

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < a, f(b) > b$,
证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(\xi) = \xi.$$

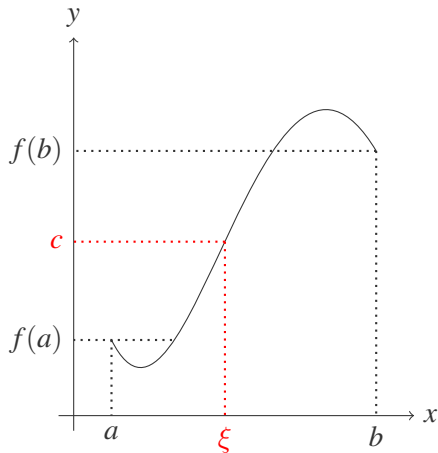


有界闭区间上连续函数的介值定理

定理（介值定理）

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数且 $f(a) \neq f(b)$. 则对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 间的任一数 c , 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使

$$f(\xi) = c.$$





介值定理的应用

推论

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数,
则其值域 $f([a, b])$ 也是一个闭区间 (可退化为一点) .

例

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $\alpha, \beta > 0$.

证明: 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}.$$



连续概念的局部性

函数的连续性反映的是函数局部的性质.

讨论函数 $f(x)$ 在 a 的连续性与 a 的值密切相关.

设 $0 < a < 1$, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 a 处连续.

$\forall 0 < \varepsilon < 1$, 有 $\delta = \frac{1}{2}a^2\varepsilon$, 当 $|x - a| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon.$$

- ▶ 若考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 的连续性, 则可取 $\delta = \frac{1}{8}\varepsilon$.
对于这一 δ , 无论 a 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 中如何变化, 只要 $|x - a| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. 因此找到了与 a 无关的 δ .
- ▶ 若考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 的连续性, 无法找到公共的 δ .



一致连续

定义 (一致连续)

设函数 $f(x)$ 在区间 I (或开或闭或无穷) 上有定义.

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (仅与 ε 有关),

使得 $\forall x_1, x_2 \in I$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.



一致连续与连续的区别

- ▶ 一致连续的定义中 x_1, x_2 都在区间 I 中变化,
只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
连续的定义中 a 是取定的, 只有 x 在变化,
只要 $|x - a| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- ▶ 一致连续的定义中 δ 由 ε 决定, 与 x_1 和 x_2 的具体位置无关.
连续的定义中 δ 随所讨论的点 a 的不同而改变.



一致连续

例

函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $[0, \infty)$ 上一致连续.

定理

区间 I 上的一致连续函数必是区间 I 上的连续函数.



不一致连续

- ▶ 函数 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续.

\Leftrightarrow

- ▶ $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in I,$
使得 $|x_1 - x_2| < \delta$ 但 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$.

\Leftrightarrow

- ▶ $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \{x_n\}, \{x'_n\} \subset I,$
使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x'_n) = 0$, 但 $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$.



不一致连续

例

函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(c, 1)$ ($c > 0$) 上一致连续,
但在 $(0, 1)$ 上不一致连续.



有界闭区间上的一致连续函数

定理 (Cantor 定理)

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必定在区间 $[a, b]$ 上一致连续.

推论

若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 连续且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在,
则 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内一致连续.



华南理工大学
South China University of Technology

作业:

- 习题 2.8 (A)
 - 2. (3)
 - 3. (2) (6) (9)
- 习题 2.8 (B)
 - 4.

