六、习题全解

1.1．试对下列随机试验写出相应的样本空间：

（1）将一枚骰子掷两次，分别观测朝上一面出现的点数；

（2）观察某商店一天中到达的顾客数；

（3）在一批灯管中任意抽取一只，测试它的寿命；

（4）在区间[a,b]中随机地取两个数字．

解：

(1)$\Omega=\{(i,j)|i,j=1,2,3,4,5,6\}$

(2)$\Omega=\{0,1,2,3,\ldots\}$

(3)$\Omega=[0,+\infty)$

(4) $\Omega=\{(x,y)|x,y\in[a, b]\}$.

1.2．一个袋中装有 12 个球，分别标有号码 1 至 12，现从中任取一球.试写出样本空间，并用样本空间Ω表示如下事件：

A={所取出球的号码为奇数}；

B={所取出球的号码不大于 8}；

C={所取出球的号码为 3 的倍数}．

解：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.11.12\}$， $A=\{1,3,5,7,9,11\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$C=\{3,6,9,12\}$

1.3．设 A, B, C 为三个事件，用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件：

(a)仅 A 发生；(b)至少有一个事件发生；(c)恰有两个事件发生.

解：

(1) $A\overline{B}\overline{C}$

(2)$A\cup B\cup C$或$\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$或$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup ABC$

(3)$AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$

1.4．令事件 $A_i=$“第 i 次击中目标”， $i=1,2,\cdots\cdots,5$，令事件 $B_i=$“5 次射击中恰有 i 次击中目标”， $i=0,1,\cdots\cdots,5$，试给出下列各对事件的关系：

（1）$\bigcup\limits_{i=1}^{5} A_i$ 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{5} B_i$；

（2）B_0 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{5} A_i$；

（3）B_2 与 $A_1A_2\overline{A_3}A_4\overline{A_5}$；

（4）B_1 与 B_2 .

解：

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{5} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{5} B_i$

(2) B_0 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{5} A_i$ 互为逆事件，即 $\overline{B_0} = \bigcup\limits_{i=1}^{5} A_i$

(3) $A_1A_2\overline{A_3}A_4\overline{A_5} \subset \overline{B_2}$

(4) B_1 与 B_2 不相容，即 $B_1 \cap B_2 = \phi$

1.5. 设样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\}$，$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}, B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_8\}$，

$C = \{\omega_6, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$，求

（1）$\overline{A} \bigcap B$；

（2）$B - \overline{\overline{A} \bigcap \overline{C}}$.

解：

(1) $\overline{A} \cap B = \{w_2, w_4, w_8\}$

(2) $B \setminus (\overline{\overline{A} \cap \overline{C}}) = B \setminus (A \cup C) = \{w_2, w_4\}$

1.6. 化简事件：

（1）$B - (\overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}})$；

（2）$\overline{(\overline{A} \bigcup B) \bigcap (A \bigcup B)}$.

解：

(1) $B \setminus (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}B$

(2) $\overline{(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B)} = \overline{(\overline{A} \cup B)} \cup \overline{(A \cup B)} = A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B} = \overline{B}$

1.7. 设盒中有 6 个白球，4 个红球，现从盒中任抽 4 个球，求取到两个红球两个白球的概率.

解：本题用古典概型，设基本事件为“从盒中取 4 个球的任何一种取法”，

记 A={从盒中任取 4 个球，取到两个红球两个白球}，根据题意有：

$$P(A)=\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}}=\frac{3}{7}$$

1.8．设盒中有 6 个白球，4 个红球，5 个黑球，现从盒中任抽 4 个球，求取到两个红两个白的概率．

解：本题用古典概型，设基本事件为“从盒中取 4 个球的任何一种取法”，

记 A={从盒中任取 4 个球，取到两个红球两个白球}，根据题意有：

$$P(A)=\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{15}{4}}=\frac{6}{91}$$

1.9．同时抛掷两颗均匀骰子，求事件 A={两颗骰子出现的点数之和为 6}的概率．

解：本题用古典概型求解．

设基本事件为“同时抛掷两颗均匀的骰子的任何一种结果”，则样本空间为 $\Omega=\{(i,j)\,|\,i,j=1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$，$P(A)=\dfrac{5}{36}$．

1.10、设盒中有 6 个白球，4 个红球，10 个黑球，现不放回地从袋中把球一个一个地摸出，求第 k 次摸到红球的概率．

解法一：将 6 个白球 4 个红球及 10 个黑球都看作是各不相同的(可设想已对它们进行编号，第 1 号到第 6 号是白球，第 7 号到 10 号是红球，第 11 号到 20 号是黑球)．若将 20 个球一一取出放到一直线的 20 个位置上，第 1 位置放的球共有 20 种方式，第 2 位置放的球就只有 19 种方式，…，到第 20 个位置，就只能放上袋中剩的那惟一的球．

于是，出现的不同排列共有

$20\times19\times\ldots\times1=20!$ 种

这可看作是样本空间的样本点总数．若将第 k 次取出的为红球（即第 k 位置上放的是红球）事件记作 A，则 A 的样本点总数为 $4\times19!$，这是因为第 k 位置放红球，有 4 种不同方式，而其余位置共 19 个，不同的放法是 19，故所求概率为

$$\mathrm{P(A)}=\frac{4\times19!}{20!}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0.2$$

解法二：

把 6 个白球 4 个红球及 10 个黑球分别看作没有区别（亦即不对球作编号处理），仍将这 20 个球从袋中一一取出并顺次放到在一直线的 20 个位置去．由于未曾编号，所以每个结果是两类元素（红球、非红球（白或黑球））的排列．这样，可算出样本点总数是两类元素的排列数为:$\binom{20}{4}$

而事件 A 包含的样本点总数应为：$\binom{19}{3}$

这是因为第 k 位置放红球只有 4 种方式，而其余 19 个位置由 3 个红球与 16 个非红球（白球或黑球）这两类元素的排列而成.

$$P(A)=\frac{\binom{19}{3}}{\binom{20}{4}}=\frac{4}{20}=0.2\ .$$

结果与 k 无关. 例如在体育比赛中进行抽签时，抽出结果与抽签的先后顺序无关，都是公平的.

1.11. 从 5 双不同尺码的鞋子中任取 4 只，4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少？

解法一：把从5双（10只）中任取4只每一种取法看成一个基本事件，

则总的基本事件数为 $\binom{10}{4}=210$，事件"四只鞋子至少有2只配成双"包含的

基本事件数为：$\binom{5}{2}+\binom{5}{1}\binom{8}{1}\binom{6}{1}\div 2=130$，所以 p(四只鞋子至少有2只配成双) $=\dfrac{130}{210}=\dfrac{13}{21}$

解法二：把从5双（10只）中任取4只每一种取法看成一个基本事件，

则总的基本事件数为 $\binom{10}{4}=210$，事件"四只鞋子至少有2只配成双"包含的

基本事件数为：$\binom{5}{1}\binom{8}{2}-\binom{5}{2}=130$，所以 p(四只鞋子至少有2只配成双) $=\dfrac{130}{210}=\dfrac{13}{21}$

其中 $\binom{5}{2}$ 为重复计算的事件数量.

解法三：记 A 表"4 只全中至少有两支配成一对"，则 $\overline{A}$ 表示"4 只都不配对"

从 10 只中任取 4 只，取法有 $\binom{10}{4}=210$ 种，每种取法等可能.要 4 只都不配对，可在 5 双中任取 4 双，再在 4 双中的每一双里任取一只，取法有 $\binom{5}{4}\times 2^4$，

$$P(\overline{A})=\frac{\binom{5}{4}\times 2^4}{\binom{10}{4}}=\frac{8}{21},\quad P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}\ .$$

1.12．已知 10 个电子管中有 7 个正品和 3 个次品，每次任意抽取 1 个来测试，测后不放回，直至把 3 个次品都测到为止，求需要测 7 次的概率.

解法一：把 10 只电子管看成两种颜色的球，3 白 7 黑，从 10 个位置中选三个放

白球的放法有 $\binom{10}{3}$ 种，若规定白球只能放前 7 个位置，且第 7 个位置只能放白球，则白球

的放法有 $\binom{6}{2}$ ，因此所求概率为

$$p=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}=15/120=1/8$$

解法二：把 10 只电子管看成两类，并且类内编号，进行 7 次检测，检测方法总数为 A_{10}^{7} ，现要求三只坏的电子管要在前 7 次检测出，且第 7 次必须检测一只坏的，另两只必须在前六次检测出，相应检测方法数为： ，

$$\binom{7}{4}\times\binom{3}{2}\times A_6^6$$

因此所求概率为：

$$p=\frac{\binom{7}{4}\times\binom{3}{2}\times A_6^6}{A_{10}^7}=\frac{1}{8}$$

1.13．任意地取两个不大于 1 的正数，试求其乘积小于 1/2 的概率.

解：本题用几何概型.

$\Omega=\{(x,y)\mid x\in[0,1],y\in[0,1]\}$

，$A=\{(x,y)\mid xy\le\frac{1}{2},x\in[0,1],y\in[0,1]\}$，$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{(1+\ln 2)/2}{1}=\frac{1+\ln 2}{2}$.

1.14．一个质地均匀的陀螺，在其圆周上半圈上均匀地标明刻度 1，另外半圈上均匀地刻上区间[0,1]上诸数，在桌面上旋转它，求当它停下来时，圆周与桌面接触处的刻度位于区间[0.2 , 0.5]上的概率.

解：设陀螺停下来与桌面接触处为刻度为[0,1]之间数所在半圈为事件A, 显然 $p(A)=1/2$, 再设圆周与陀螺接触处的刻度位于区间[0.2, 0.5]为事件B, 显然本题要求$p(AB)$,由于在[0,1]区间内任何一点都是等可能的，因此在[0,1]区间内可用几何概型计算刻度位于某个子区间的概率，即$p(B\mid A)=\frac{0.5-0.2}{1-0}=0.3$

$P(AB)=p(A)P(B\mid A)=0.15.$

1.15．随机地向半圆$0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率是多少？

证明：根据题意，本题可用几何概型证明，记 A 为事件“随机地向半圆内投掷一点，原点与该点连线与 x 轴夹角小于$\frac{\pi}{4}$”， 则

$$\Omega = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + y^2 \le a^2, 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}, x \in R, y \in R\}$$

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \text{且} \frac{y}{x} \le \tan\frac{\pi}{4} = 1\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\int_0^a \int_0^x 1dydx + \int_a^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} 1dydx}{\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} 1dydx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$$

1.16．设 A，B，C 为任意三个事件，试证明：

$$P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

证明：设$D = B \cup C$，则$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$

由加法公式得，$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(AD)$

$P(D) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC)$

$P(A(B \cup C)) = P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(A(B \cup C))$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$

1.17．假设三个人的准考证混放在一起，现在将其随意地发给三个人．试求事件 A＝{没有一个人领到自己准考证}的概率．

解：三个人的身份证放在一起，随意发给三个人的任何一种方式都是等可能的可看成一个基本事件，基本事件总数为 3!=6，事件 A 包含的基本事件数为 2，所以 P(A)=1/3.

1.18．某人从袋中抽取 5 个球，　记 A_i 为事件“抽取的 5 个球中有 i 个不是红球”，已知

$P(A_i) = iP(A_0), i = 1, 2, \cdots, 5.$ 求下列各事件的概率：

（1）抽取的 5 个球均为红球；

（2）抽取的 5 个球至少有两个红球．

解：（1）本小题实际上就是求 P（A_0）,由于

$A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$互不相容，且$\bigcup_{i=0}^{5} A_i = \Omega$，所以

$\sum_{i=0}^{5} P(A_i) = 1$, 再由$P(A_i)$=$iP(A_0)(i = 1, 2, 3, 4, 5)$得：$16P(A_0)$=1

$P(A_0)$=$\dfrac{1}{16}$

（2）设 B={抽取的 5 个球中至少有两个红球}，则

$$P(B) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}.$$

1.19．已知 P(A)=0.4,P(B)=0.25,P(A-B) =0.25,求 P(AUB)之值．

解：

由于$P(A \setminus B) = P(A\overline{B})$，而$P(A\overline{B})$+$P(AB) = P(A)$

所以$P(AB) = P(A) - P(A \setminus B) = 0.4 - 0.25 = 0.15$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.25 - 0.15 = 0.5.$

1.20．已知 P(A)=0.2,P(B)=0.3, P(C)=0.35,P(AB) =P(AB)=0.15,P(BC)=0, 求事件“A，B，C 全不发生”的概率．

解：$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.3 - 0.15 = 0.35$

$P((A \cup B) \cap C) = P$（$AC \cup BC$）=$P(AC) + P(BC) - P(ABC)$

注意到$P(BC) = 0$, 所以$P(ABC)$=0，$P((A \cup B) \cap C)$=$P(AC) = 0.15$,

$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - (0.35 + 0.35) + 0.15 = 0.45.$

1.21．设事件 A 与 B 互不相容，且 P(A)= p , P(B)= q ,求下列事件的概率：$P(A\overline{B}), P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解：由事件A与B互不相容知，$P(AB) = 0$

$P(A\overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) = P(A) = p,$

$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A\overline{B}) = 1 - q - p.$

1.22. 设事件 A, B, C 两两独立，$P(A) = P(B) = P(C) = a$，且 $A \bigcap B \bigcap C = \Phi$ 证明：(1) $P(A \bigcup B \bigcup C) \le \dfrac{3}{4}$，(2) $a \le \dfrac{1}{2}$.

证明：

（1）

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$
$$=a+a+a-a^2-a^2-a^2+0=3a(1-a)\le 3/4\ (\text{因为}a(1-a)\le(\frac{a+(1-a)}{2})^2=1/4)$$

（2）由（1）有

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)\ge 1/4$$
$$\text{而}P(\overline{A}\,\overline{B})\ge P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\ge 1/4$$
$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-a)^2$$
$$\text{所以}(1-a)^2\ge 1/4$$
$$a\le 1/2$$

1.23．已知 $P(\overline{B}\mid A)=\dfrac{1}{3},P(AB)=\dfrac{1}{5},$ 求 P(A) ．

解：

$$\because P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(A)P(\overline{B}\mid A)$$
$$\therefore P(A)=\frac{P(AB)}{1-P(\overline{B}\mid A)}=0.3.$$

1.24．已知 $P(A)=0.7$, $P(B)=0.4$, $P(\overline{AB})=0.8$，试求 $P(A\mid A\cup\overline{B})$ 之值.

解：

$$P(A\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(A\cap(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(A)}{P(A\cup\overline{B})}$$
$$\text{而}P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B}),P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)+P(\overline{AB})-1$$
$$=0.7+0,8-1=0.5,P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8,$$
$$P(A\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(A)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.7}{0.8}=\frac{7}{8}.$$

1.25．设 A,B 为两随机事件，已知 $P(A)=0.7,P(B)=0.5,\ P(A\cup B)=0.8$，试求 $P(A\mid\overline{A}\cup\overline{B})$ 之值.

解：

$$P(A|\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{P(A\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))}{P(\overline{A}\cup\overline{B})}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{A}\cup\overline{B})}$$

而$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}),P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)$

$=1-0.8=0.2,\quad P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})=0.3+0.5-0.2=0.6,$

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-(1-P(\overline{A}\cup\overline{B}))=0.3$

$$P(A|\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{A}\cup\overline{B})}=\frac{0.3}{0.6}=0.5.$$

1.26．掷两颗骰子，在已知两颗骰子点数之和为 7 的条件下，求其中一颗为 1 点的概率．

解：设 A={两颗骰子出现的点数之和为 7}，B={一颗骰子出现的点数为 1}，本题可用古典概型和求条件概率的缩减样本空间法求解.

A={（1，6），（6，1），（2，5），（5，2），（3，4），（4，3）}

AB={（1，6），（6，1）}

$$P(B|A)=\frac{|AB|}{|A|}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

1.27．假设箱中原来只有一个球，此球是黑球还是白球的概率均为 0.5．现在首先将一个白球放入箱中，然后从箱中随意取出一个球；在取出的该球是白球条件下，试求箱中原来是白球的概率．

解：本题求后验概率用 Bayes 公式求解.

设$A=\{$箱中原来的一个球为黑球$\}$,则$\overline{A}=\{$箱中原来的一个球为白球$\}$，

$B=\{$加进一个白球后，从箱中取出一个球是白球$\}$

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.5\times 1}{0.5\times 0.5+0.5\times 1}=\frac{2}{3}.$$

1.28．袋中有一个红球和一个白球，从袋中随机摸出一球，如果取出的球是红球，则把此红球放回袋中并且再加进一个红球，然后从袋中再摸一个球，如果还是红球，则仍把此红球放回袋中并且再加进一个红球，如此继续进行，直到摸出白球为止，求第 9 次取出白球的概率．

解：设 A_k，$\overline{A_k}$ 分别表示第 k 次取出的球是红、白球事件，由题意知

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\ P(\overline{A_1})=\frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

所求概率为：

$$P(A_1A_2\cdots A_8\overline{A_9})=P(\overline{A_9}\mid A_1A_2\cdots A_8)P(A_1A_2\cdots A_8)$$
$$=P(\overline{A_9}\mid A_1A_2\cdots A_8)P(A_8\mid A_1A_2\cdots A_7)P(A_1A_2\cdots A_7)$$
$$=\cdots=\frac{1}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{90}.$$

1.29．袋中有 3 只白球和 4 只红球，现从中随机地取 2 只球，在采用不放回地摸球方式下，求下列各事件的概率：

（1） 两只球均为白球；

（2） 第 1 只球为红球而第 2 只为白球；

（3） 红、白球各 1 只．

解：

设$B_i=\{$第i次取得白球$\}$ $i=1,2$，则

(1) $P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2\mid B_1)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7};$

(2) $P(\overline{B_1}B_2)=P(\overline{B_1})P(B_2\mid\overline{B_1})=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7};$

(3) $P(\overline{B_1}B_2\cup B_1\overline{B_2})=P(\overline{B_1}B_2)+P(B_1\overline{B_2})=\frac{2}{7}+P(B_1)P(\overline{B_2}\mid B_1)$

$=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{7}.$

1.30．盒中装有 5 个产品, 其中 3 个一等品，2 个二等品, 从中不放回地取产品, 每次 1 个, 求

（1）取两次，两次都取得一等品的概率；

（2）取两次，第二次取得一等品的概率；

（3）取两次，已知第二次取得一等品，求第一次取得的是二等品的概率.

解：

设$B_i=\{$第i次取得一等品$\}$ $i=1,2$，则

(1) $P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2\mid B_1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}=0.3;$

(2) $P(B_2)=P(B_1B_2)+P(\overline{B_1}B_2)=P(B_1)P(B_2\mid B_1)+P(\overline{B_1})P(B_2\mid\overline{B_1})$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}=0.6;$

(3) $P(\overline{B_1}\mid B_2)=\frac{P(\overline{B_1}B_2)}{P(B_2)}=\frac{1}{2}=0.5.$

1.31．某射击队共有 20 名射手，其中一级射手 4 人，二级射手 8 人，三级射手 7 人，四级射手 1 人，一、二、三、四级射手能通过预选赛进入正式比赛的概率分别为 0.9，0.7，0.5，0.2，求任选一名射手能进入正式比赛的概率．

解：

本题用全概率公式求解。

设$A_i=\{$射手来自第i级$\}$ $i=1,2,3,4$，$B=\{$射手能进入正式比赛$\}$，由题意

有：$P(A_1)=\dfrac{4}{4+8+7+1}=\dfrac{1}{5},P(A_2)=\dfrac{2}{5},P(A_3)=\dfrac{7}{20},P(A_4)=\dfrac{1}{20}$

$P(B|A_1)=0.9,P(B|A_2)=0.7,P(B|A_3)=0.5,P(B|A_4)=0.2$；

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{5}\times0.9+\frac{2}{5}\times0.7+\frac{7}{20}\times0.5+\frac{1}{20}\times0.2=0.645.$$

1.32．有 a,b,c 三个盒子，a 盒中有 4 个白球和 2 个黑球，b 盒中有 2 个白球和 1 个黑球，c 盒中有 3 个白球和 3 个黑球.今掷一颗骰子以决定选盒.若出现 1，2，3 点则选 a 盒，若出现 4 点，则选 b 盒, 若出现 5，6 点则选 c 盒.在选出的盒中任取一球.

（1）求取出白球的概率；

（2）若取出的是白球，球此球来自 c 盒的条件概率．

解：

设$B_1=\{$所取球来自a盒$\}$，$B_2=\{$所取球来自b盒$\}$，$B_1=\{$所取球来自c盒$\}$

$A=\{$取得的球为白球$\}$，由题意可知：

$$P(B_1)=\frac{1}{2},P(B_2)=\frac{1}{6},P(B_3)=\frac{1}{3},P(A|B_1)=\frac{2}{3},P(A|B_2)=\frac{2}{3},P(A|B_3)=\frac{1}{2},$$

(1) $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{11}{18}$;

(2) $P(B_3|A)=\dfrac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\dfrac{3}{11}.$

1.33．一袋中有 5 个红球，5 个白球，从袋中任意取出 1 个球，然后放进 1 个另一颜色的球（例如取出 1 个白球就放进 1 个红球）．如此取球，已知第一次、第二次取出的 2 个球具有相同的颜色，求它们都是白球的概率．

解：

设$B_1=\{$第一次取出的球为白球$\}$，$B_2=\{$第二次取出的球为白球$\}$，

则$\overline{B_1}=\{$第一次取出的球为红球$\}$,$\overline{B_2}=\{$第二次取出的球为红球$\}$

$C=\{$两次取出的球具有相同颜色$\}$

$$P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2|B_1)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}=0.2,P(\overline{B_1}\,\overline{B_2})=P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}|\overline{B_1})=\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}=0.2,$$

$$P(C)=P(B_1B_2)+P(\overline{B_1}\,\overline{B_2})=0.4$$

$$P(B_1B_2|C)=\frac{P(B_1B_2)P(C|B_1B_2)}{P(C)}=\frac{0.2\times1}{0.4}=0.5.$$

1.34．某超市销售某种电灭蚊器共 10 个，其中有 3 个次品，7 个合格品.某顾客选购时已售出 2 个，该顾客从剩余 8 个中任选一台，已知该顾客购到的是合格品，求已出售的两个中一个为次品一个为合格品的概率.

解：

本题用$Bayes$公式求解。

设$B_1=\{$已出售的两个电子灭蚊器都是次品$\}$，$B_2=\{$已出售的两个电子灭蚊器都是合格品$\}$，$B_3=\{$已出售的两个电子灭蚊器一个为次品一个为合格品$\}$，$A=\{$顾客买到的是合格品$\}$，

$$P(B_1)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1}{15},P(B_2)=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15},P(B_3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15},$$

$$P(A|B_1)=\frac{7}{8},P(A|B_2)=\frac{5}{8},P(A|B_3)=\frac{3}{4}$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(AB_3)}{P(A)}=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}=0.5.$$

1.35．一袋中装有 a 只红球,b 只白球，每次从袋中任取一球，记下该球颜色后将其放回袋中，同时再放进 c 只与该球同色的球，如此进行下去，记 $A_k=\{$第 k 次取到红球$\}$．试证明：

$P(A_k)=\dfrac{a}{a+b}$.

方法一：

证明：由题意 $P(A_k)$， $P(\overline{A_k})$ 分别表示第 k 次取出的球是红、白球的概率

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b}，P(\overline{A_1})=\frac{b}{a+b}$$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$$

$$=\frac{a}{a+b}\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b+c}$$

$$=\frac{a}{a+b}$$

同理

$$P(\overline{A_2})=\frac{b}{a+b}$$

当$k\geq 2$时

$$P(A_k)=P(A_{k-1})P(A_k\mid A_{k-1})+P(\overline{A_{k-1}})P(A_k\mid \overline{A_{k-1}})$$

设经过 k-2 次摸球后，红、白球分别为$a+x_1c,b+x_2c$个

其中$x_1+x_2=k-2,x_i\geq 0,i=1,2$

$$P(A_{k-1})=\frac{a+x_1c}{a+b+(k-2)c},\quad P(\overline{A_{k-1}})=\frac{b+x_2c}{a+b+(k-2)c}$$

而

$$P(A_k\mid A_{k-1})=\frac{a+(x_1+1)c}{a+b+(k-1)c}$$

$$P(A_k\mid \overline{A_{k-1}})=\frac{a+x_1c}{a+b+(k-1)c}$$

$$\begin{aligned}P(A_k)=&\\ &\frac{a+x_1c}{a+b+(k-2)c}\frac{a+(x_1+1)c}{a+b+(k-1)c}+\\ &\frac{b+x_2c}{a+b+(k-2)c}\frac{a+x_1c}{a+b+(k-1)c}\\ &=\frac{(a+x_1c)(a+b+(k-1)c)}{(a+b+(k-2)c)(a+b+(k-1)c)}\\ &=\frac{a+x_1c}{a+b+(k-2)c}=P(A_{k-1})\end{aligned}$$

所以$P(A_k)=P(A_{k-1})=\cdots=P(A_1)=\dfrac{a}{a+b}$

方法二：

证明：用数学归纳法.

因为A_1，$\overline{A_1}$分别表示第 1 次取出的球是红、白球的概率,则

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b},\quad P(\overline{A_1})=\frac{b}{a+b}$$

即 k=1 时，结论成立.

假设 k=n 时结论成立，即 $P(A_n)=\dfrac{a}{a+b}$，现证明当 k=n+1 时结论成立，

由于 $P(A_{n+1})=P(A_1)P(A_{n+1}\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_{n+1}\mid\overline{A_1})$

$P(A_{n+1}\mid A_1)$ 表示在第一次取出红球的条件下，第 n+1 取出的是红球的概率，由于第一次取出红球，需要往袋中放进 c 只红球，第二次取球之前，袋中有 a+c 只红球，b 只白球，$P(A_{n+1}\mid A_1)$ 等同于初始状态为袋中有 a+c 只红球，b 只白球，第 n 次取出的球是红球的概率，根据归纳假设有 $P(A_{n+1}\mid A_1)=\dfrac{a+c}{a+b+c}$，同理 $P(A_{n+1}\mid\overline{A_1})=\dfrac{a}{a+b+c}$，$P(A_{n+1})=\dfrac{a}{a+b}\dfrac{a+c}{a+b+c}+\dfrac{b}{a+b}\dfrac{a}{a+b+c}=\dfrac{a}{a+b}$，即当 k=n+1 时结论成立.

1.36．一袋中装有 a 只红球,b 只白球，c 个黑球，每次从袋中任取一球，记下该球颜色后将其放回袋中，同时再放进 d 只与该球同色的球，如此进行下去，记 $A_k=\{$第 k 次取到红球$\}$.

试 求 $P(A_1\mid A_k)$ 之值.

解：设$A_k=\{$第k次取到红球$\}$，$B_k=\{$第k次取到白球$\}$，$C_k=\{$第k次取到黑球$\}$，
显然A_k、B_k和C_k互不相容，且$A_k\cup B_k\cup C_k=\Omega$

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b+c},P(B_1)=\frac{b}{a+b+c},P(C_1)=\frac{c}{a+b+c}$$

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{a+d}{a+b+c+d},P(A_2\mid B_1)=\frac{a}{a+b+c+d},P(A_2\mid C_1)=\frac{a}{a+b+c+d}$$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(B_1)P(A_2\mid B_1)+P(C_1)P(A_2\mid C_1)=\frac{a}{a+b+c},$$

同理，$P(B_2)=\dfrac{b}{a+b+c},P(C_2)=\dfrac{c}{a+b+c}$

仿照1.35题的证明过程，可以证明：对任意正整数k有：

$$P(A_k)=\frac{a}{a+b+c},P(B_k)=\frac{b}{a+b+c},P(C_k)=\frac{c}{a+b+c}$$

于是 $P(A_1\mid A_2)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{P(A_1)P(A_2\mid A_1)}{P(A_2)}=P(A_2\mid A_1)=\dfrac{a+d}{a+b+c+d}$

当$k>2$时，$P(A_1\mid A_k)=\dfrac{P(A_1A_k)}{P(A_k)}=\dfrac{P(A_1)P(A_k\mid A_1)}{P(A_k)}=P(A_k\mid A_1)$

而$P(A_k\mid A_1)$等同于初始状态为袋中有a +d只红球，b 只白球，c 只黑球，第k -1次取出的球是红球的概率，由1. 35题的结论有：

$P(A_k\mid A_1)=\dfrac{a+d}{a+b+c+d}$，$P(A_1\mid A_k)=P(A_k\mid A_1)=\dfrac{a+d}{a+b+c+d}$

1.37．某实验室在器皿中繁殖成 k 个细菌的概率为

$$\frac{5^k}{k!}e^{-5}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

并设所繁殖的每个细菌为甲类菌的概率为 0.4，为乙类菌的概率为 0.6，求下列事件的概率：

（1）器皿中所繁殖的全部是乙类菌的概率；

（2）已知所繁殖的全部是乙类菌，求细菌个数为 3 的概率．

解：设 A={繁殖的细菌全是乙类菌}，

B_k={繁殖了 k 个细菌}，k=1,2, …

（1）由全概率公式和事件独立性得：

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A\mid B_k)P(B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}e^{-5}0.6^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}e^{-5}$$
$$=e^{-5}(e^{-3}-1)=e^{-2}-e^{-5}.$$

（2）由贝叶斯公式得：

$$P(B_3\mid A)=\frac{P(B_3)P(A\mid B_3)}{P(A)}=\frac{\frac{5^3}{3!}e^{-5}\times 0.6^3}{e^{-2}-e^{-5}}=\frac{9}{2(e^3-1)}.$$

1.38．设事件 A,B,C 相互独立；试证明：

（1）事件 $\overline{A},B,C$ 相互独立；（2）事件 A 与 $\overline{B}\cup C$ 相互独立．

证明：

由事件ABC的相互独立性可得：

$$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

$(1)\because P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=P(\overline{A})P(B)$

同理有：$P(\overline{A}C)=P(\overline{A})P(C)$, 又$P(BC)=P(B)P(C)$

$P(\overline{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)=P(\overline{A})P(B)P(C)$

$\therefore \overline{A},B,C$相互独立。

$(2)\because P(A\cap(\overline{B}\cup C))=P((A\cap\overline{B})\cup(A\cap C))=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap C)-P(A\overline{B}C)$

$=P(A)-P(AB)+P(AC)-P(AC)+P(ABC)=P(A)-P(A)P(B)+P(A)P(B)P(C)$

$=P(A)(1-P(B)-P(B)P(C))=P(A)(P(\overline{B})-P(B)P(C))=P(A)(P(\overline{B})+P(C)-P(\overline{B})P(C))$

$=P(A)P(\overline{B}\cup C)$

$\therefore A$与$\overline{B}\cup C$相互独立.

1.39．盒子中有 10 个球，其中 4 个白球，4 个黑球，2 个红球．现从盒中有放回地摸取 3 次，每次只取一个球，求

(1) 取到的 3 个球中恰好含有两个白球的概率；(2)取到的 3 个球中至少含有一个白球的概率．

解：

本题用伯努利试验概型求解，虽然盒子中有三类球，可以看成白球和非白球两类，这样，每次摸球试验结果只有两个，有放回地摸球可视为独立重复试验。

记 p为每次摸球摸得白球的概率，依题意知：$p=\frac{2}{5}.$

$$(1)P(\text{取到的3个球中恰好有两个白球})=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{3}{5}=\frac{36}{125};$$

$$(2)P(\text{取到的3个球中至少有一个白球})=\binom{3}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^2\frac{2}{5}+\binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{3}{5}+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{98}{125}.$$

1.40．做 10 次独立重复试验，每次试验中成功的概率为 p，试求下列事件的概率：

（1）10 次试验中恰有 3 次成功；

（2）获得 3 次成功恰好出现在第 10 次试验．

解：

本题用伯努利试验概型求解.

$$(1)P(10\text{次试验中恰有3次成功})=\binom{10}{3}(p)^3(1-p)^7;$$

$$(2)P(\text{获得第3次成功恰好出现在第10次试验})=\binom{9}{2}(p)^2(1-p)^7p=\binom{9}{2}(p)^3(1-p)^7.$$

1.41．甲、乙、丙三个射手，他们每次击中目标的概率分别为 0.4,0.5,0.7.现三人同时独立向目标射击一次.试求至少有一人命中目标的概率.

解：

本题用事件独立性求解。

设$A=\{$射击一次甲命中目标$\}$，$B=\{$射击一次乙命中目标$\}$，

$C=\{$射击一次丙命中目标$\}$，所求概率为：

$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-0.6\times0.5\times0.3=0.91.$

1.42．假定具有症状 S 的疾病有 d_1,d_2,d_3 种．现从 20000 份患有疾病 d_1,d_2,d_3 的病史中，

统计得到下列数据：

发病	人数	出现症状 S 的人数
d_1	8000	7500
d_2	5000	4000
d_3	7000	3500

试求当一个具有症状 S 的病人前来就诊时，它患有疾病 d_1,d_2,d_3 的可能性各有多大？若没

有其他可依据的诊断手段的情况下，诊断该病人患有这三种病中的哪一种较为合适？

解：设 A={患者出现症状 S}

D_i={患者患有疾病 d_i}，i=1，2，3．

每观察一张病卡可看成是作了一次试验，由于统计的病卡很多，这样以频率来近似代替概率是可行的．由统计数字，得

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}_1)=\frac{8000}{20000}\quad \mathrm{P}(\mathrm{D}_2)=\frac{5000}{20000}\quad \mathrm{P}(\mathrm{D}_3)=\frac{7000}{20000}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_1)=\frac{7500}{8000}\quad \mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_2)=\frac{4000}{5000}\quad \mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_3)=\frac{3500}{7000}$$

由贝叶斯公式，得：

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}_1\,|\,\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{D}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{D}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{D}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_2)+\mathrm{P}(\mathrm{D}_3)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_3)}=\frac{0.3750}{0.75}=0.5$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}_2\,|\,\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{D}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{D}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{D}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_2)+\mathrm{P}(\mathrm{D}_3)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_3)}=0.267$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}_3\,|\,\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{D}_3)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_3)}{\mathrm{P}(\mathrm{D}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{D}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_2)+\mathrm{P}(\mathrm{D}_3)\mathrm{P}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{D}_3)}=0.23\,3$$

当一个具有症状 S 的病人来就诊时，他患有疾病 d_1 的可能性最大，概率为 0.5.

2.1．某酒吧柜台前有吧凳 7 张，此时全空着，若有 2 陌生人进来随机入座， 试求这 2 人就座相隔凳子数 X 的分布列．

解：依题意知，X 可取值 0,1，2,3,4,5，两人就坐的方式共有 $A_7^2=7\times6=42$ 种，每种就坐方式都是等可能的，基本事件总数就是 42，

$P(X=0)=\frac{6\times 2}{42}=\frac{2}{7}$，$P(X=1)=\frac{5\times 2}{42}=\frac{5}{21}$，$P(X=2)=\frac{4\times 2}{42}=\frac{4}{21}$

$P(X=3)=\frac{3\times 2}{42}=\frac{1}{7}, P(X=4)=\frac{2\times 2}{42}=\frac{2}{21}, P(X=5)=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4	5
p	2/7	5/21	4/21	1/7	2/21	1/21

2.2．某射手有 5 发子弹，射一次命中的概率为 0.75，若果命中了就停止射击，否则就一直射到子弹用尽.则耗用子弹数 X 的分布列.

解：显然，X 可取值 1，2,3,4,5，设前后两次射击的结果是独立的，

$P(X=1)=0.75=\frac{3}{4}$，$P(X=2)=0.25\times 0.75=\frac{3}{16}$

$P(X=3)=0.25^2\times 0.75=\frac{3}{64}, P(X=4)=0.25^3\times 0.75=\frac{3}{256},$

$P(X=5)=0.25^4=\frac{1}{256}$

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3	4	5
p	3/4	3/16	3/64	3/256	1/256

2.3．设某批电子管的合格率为 3/4，不合格率为 1/4，现对该批电子管进行有放回地进行测试，设第 X 次为首次测到合格品所抽取的次数，求 X 的分布列.

解：依题意，X 服从几何分布，所以 X 的分布列为：

$$P(X=k)=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\frac{3}{4}=\frac{3}{4^k}, k=1,2,3,\cdots.:$$

2.4．一个质地均匀的陀螺，在其圆周上半圈上均匀地标明刻度 1，另外半圈上均匀地刻上区间[0,1]上诸数，在桌面上旋转它，求当它停下来时，圆周与桌面接触处的刻度 X 的分布函数.

解：设陀螺上均匀标明刻度1的半圈为A,另一半圈为B

根据题意，$P\{X=1\}=P\{$陀螺停下来时A与桌面接触$\}=\frac{1}{2}$

$P\{0\le X<1\}=P\{$陀螺停下来时B与桌面接触$\}=\frac{1}{2}$

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ P(X\le x\mid 0\le X<1)P(0\le X<1)=\frac{1}{2}\int_0^x 1dt=\frac{x}{2} & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

2.5．设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & , & x\le -1\\ ax+b & , & -1<x\le 2\\ 1 & , & x>2\end{cases}$$

试求（1）常数 a, b；（2） X 落在（-0.5 ,1.5）内的概率.

解：（1）根据分布函数的右连续性，有：$F(-1)=F(-1+0),F(2)=F(2+0)$

即$\begin{cases}-a+b=0\\ 2a+b=1\end{cases}$，解得$a=b=\frac{1}{3}$，所以$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, & -1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

(2) $P(-0.5<X<1.5)=P(X<1.5)-P(X\le -0.5)$

$=F(1.5-0)-F(-0.5)=F(1.5)-F(-0.5)=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$

2.6．设随机变量 X 的分布函数为

$$F\left(x\right)=\begin{cases}1-\exp(-\left(\dfrac{x-2}{a}\right)^3) , & x\ge 2\\ 0 , & x<2\end{cases}$$

其中$a>0$．试计算$P\left\{-1\le X\le 2(a+1)\right\}$之值.

解：根据分布函数的性质有；

$P(-1\le X\le 2(a+1))=P(X\le 2(a+1))-P(X<-1)$

$=F(2(a+1))-F(-1)+F(-1-0)=F(2(a+1))=1-\exp[\left(-2\right)^3]=1-e^{-8}$

2.7．设随机变量 X 服从泊松分布 $Poi(\lambda)$，随机变量 Y 从泊松分布 $Poi(\lambda+1)$，且

$P(X=3)=\frac{4}{3}e^{-2}$，试求$P(Y=3)$之值.

解：$\because P(X=3)=\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}=\frac{4}{3}e^{-2}$

$\therefore \lambda=2$　从而 $Y\sim Pois(3)$

$\therefore P(Y=3)=\frac{3^3}{3!}e^{-3}=\frac{9}{2}e^{-3}$

2.8．设离散型随机变量 X 的分布律为

X	**1**	**2**	**3**
P	0.2	0.3	0.5

试求 X 的分布函数．

解：因为 X 为离散型随机变量，所以 X 的分布函数为分段函数，根据离散型随机变量分布函数的定义 $F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i<=x}P(X=x_i)$，可得：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.2, & 1\le x<2\\ 0.5, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

2.9．设离散型随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0.5 & -1\le x<1\\ 0.8 & 1\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

试求 X 的分布列．

解：显然 $F(x)$为分段函数，X 的取值为：-1,1,3，

$P(X=-1)=F(-1)-F(-1-0)=0.5,$

$P(X=1)=F(1)-F(1-0)=0.8-0.5=0.3$

$P(X=3)=F(3)-F(3-0)=1-0.3=0.2$

所以 X 的分布列为：

X	-1	1	3
p	0.5	0.3	0.2

2.10、某种产品每批中合格品率为 0.9，验收每批时规定：先从中抽取一个，若是合格品就放回去再取一个，如果仍为合格品，则接受该批产品，否则拒收.求检验三批，最多有一批被拒收的概率.

解：设 A={接受受检批产品}，X 为检验三批被拒收的批数，显然 X 为随机变量，且 X 的取值为 0,1,2,3，设 B={检验三批最多有一批被拒收}

则 $P(A)=0.9\times 0.9=0.81 \quad P(\overline{A})=0.19$，

$$
\begin{aligned}
&P(X=0)=P(A)^3=0.531441\\
&P(X=1)=C_3^1P(\overline{A})P(A)^2=0.373977\\
&P(X=2)=C_3^2P(\overline{A})^2P(A)=0.087723\\
&P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=0.006859\\
&P(B)=P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0.905418
\end{aligned}
$$

2.11．自动生产线调整以后出现不合格品的概率为 0.1，当生产过程中出现废品时立即重新进行调整， 求在两次调整之间所生产的合格品数X的分布列.

解：依题意知 X 的取值为 0，1,2，…，显然 X 服从几何分布，

$P(X=k)=0.9^k\times 0.1, k=0,1,2,\cdots.$

2.12、设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$
f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{2}{9}, & 3\le x\le 6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}
$$

试求 X 的分布函数.

解：根据分布函数与密度函数的关系 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，结合密度函数的分段特性，求得分布函数如下：

$$
F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{3} & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{3} & 1\le x<3\\ \dfrac{2x-3}{9} & 3\le x<6\\ 1 & x\ge 6\end{cases}
$$

2.13、设随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ -\infty<x<+\infty$$

试求：(1) X 的分布函数；(2) X 落在（-5,5）内的概率.

解：(1) 根据分布函数与密度函数的关系 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，求得分布函数如下：

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$$

(2) $P(X\in(-5,5))=F(5+0)-F(-5)=F(5)-F(-5)$

$=1-\frac{1}{2}e^{-5}-\frac{1}{2}e^{-5}=1-e^{-5}.$

2.14．设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & , & x<0,\\ Ax^2 & , & 0\leq x<2,\\ 1 & , & x\geq 2\end{cases}$$

求：(1) 系数 A；(2) X 的密度函数 $f(x)$；(3) $P(1.3\leq X\leq 1.7)$.

解：(1) 由连续性随机变量分布函数的连续性知，

$$F(2-0)=F(2)\quad 即\ 4A=1\quad A=\frac{1}{4}.$$

(2) 根据 $f(x)=\left(F(x)\right)'$ 得：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad（注意F(x)在x=0,2处不可导）.$$

(3) $P(1.3\leq X\leq 1.7)=F(1.7)-F(1.3-0)=F(1.7)-F(1.3)=0.3.$

2.15．设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1/2, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

现对 X 进行 4 次独立重复观测，以 V_4 表示观测值不大于 0.2 的次数，试求概率 $P(V_4=2)$.

解：设 A={观测值不大于 0.2}，则 $P(A)=P(X\leq 0.2)=\int_{0}^{0.2}\frac{1}{2}dt=0.1$，

$$P(V_4=2)=C_4^2P(A)^2P(\overline{A})^2=0.0486.$$

2.16．设随机变量 X 和 Y 同分布，且 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

且事件 A={X>0.5}与事件 B={Y>0.5}独立，求：

(1) $P(A)$；

(2) $P(A\bigcup B)$ ．

解：（1） $P(A)=P(B)=\int_{0.5}^{1}3x^2dx=\frac{7}{8}.$

（2）$\because A与B独立,\therefore P(AB)=P(A)P(B)$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{7}{8}+\frac{7}{8}-\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{63}{64}.$

2.17、一白糖供应站的月销售量 X(百吨)是随机变量，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

问每月至少储存多少白糖，才能以 96%的概率不脱销？

解：设每月储存 y 百吨白糖，才能以 96%的概率不脱销，根据题意有：

$$P(X\le y)=0.96,\text{即}\int_0^y 2xdx=y^2=0.96,\quad y=0.9798$$

每月至少储存97.98吨白糖，才能以96%的概率不脱销。

2.18、设随机变量 X～ $N(-6,9)$，利用标准正态分布函数表计算下面的概率：

（1） $P\{X>0\}$；（2） $P\{-6<X<3\}$；（3） $P\{|X|<9\}$．

解： $(1)P(X>0)=P(\frac{X+6}{3}>2)=1-P(\frac{X+6}{3}\le 2)=1-\Phi(2)=0.0228$

$(2)P(-6<X<3)=P(0<\frac{X+6}{3}<3)=\Phi(3)-\Phi(0)=0.49865$

$(3)P(|X|<9)=P(-9<X<9)=P(-1<\frac{X+6}{3}<5)=\Phi(5)+\Phi(1)-1=0.8413$

2.19．设随机变量 X 的分布列为

X	**-1**	**0**	**1**	**3**
P	0.2	0.3	0.1	0.4

试求（1）$Y=3X+5$ 的分布列；（2）$Z=X^2+5$ 的分布列.

解：（1）Y 的分布列为：

Y	2	5	8	14
P	0.2	0.3	0.1	0.4

（2）Z 的分布列为：

Z	5	6	14
P	0.3	0.3	0.4

2.20．设随机变量 $X\sim B(3,0.1)$，令 $Y=2^X+1$，试求 Y 的分布律.

解：先给出 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.729	0.243	0.027	0.001

Y 的分布列为：

Y	2	3	5	9
p	0.729	0.243	0.027	0.001

2.21．设随机变量 X 服从[0,2]上的均匀分布，求随机变量 $Y=X^2+1$ 的分布函数与密度函数.

解：先求 Y 的分布函数，根据分布函数定义有：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2+1\le y)=P(X^2\le y-1)$$

$$=\begin{cases}0 & y<1\\ P(-\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1}) & y\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y<1\\ \dfrac{\sqrt{y-1}}{2} & 1\le y<5\\ 0 & y\ge 5\end{cases}$$

$$f_Y(y)=(F_Y(y))'=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y-1}}, & 1<y<5\\ 0, & 其他\end{cases}.$$