华南理工大学
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§1.2 函数

- 映射与函数的概念
- 常用函数
- 基本初等函数
- 函数的运算
- 函数的特性

映射

映射的定义

- 设 A 和 B 是两个非空集合。若存在一个规则 f，使得对 $\forall a \in A$，有唯一的 $b \in B$ 与之对应，则称 f 是一个从 A 到 B 的映射，记作 $f: A \to B$。
- 集合 A 称为映射 f 的定义域，记为 $D(f)$。
- 集合 B 的子集 $\{f(a) | a \in A\}$ 称为 f 的值域，记为 $R(f)$。

$$A \longrightarrow f \longrightarrow B$$

函数

函数的定义

从实数集的子集 A 到实数集的子集的一个映射称为一个函数。

例：数列是一种特殊的函数

设 $\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ 是一个实数列，则

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$$

是一个函数。

函数

- 构成一个映射（函数）必须具备三个要素：

  定义域、值域、对应法则
- 设 $f: A \to B$ 是一个映射。

  $\forall a \in A$，a 的像 $f(a)$ 是存在且唯一的。

  $\forall b \in B$，b 的原像不一定存在，也不一定唯一。
- 映射 $f: A \to B$ 的值域 $R(f)$ 不一定等于 B.

例：判断下列函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同

- $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2\ln x$.
- $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$.
- $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.
- $f(x) = 1$, $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

常用函数

- 绝对值函数：

$$f(x) = |x| := \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

- 符号函数：

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

常用函数

- 示性函数：

  设 $A \subset \mathbb{R}$，定义集合 A 的示性函数为

$$I_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

- Dirichlet 函数（有理数集的示性函数）：

$$D(x) := I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- Riemann 函数

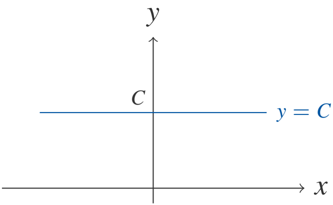
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \text{ 且 } p, q \text{ 互质}, \\ 0, & x = 0 \text{ 或} x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

基本初等函数

- 常数函数
- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数
- 三角函数
- 反三角函数

常数（值）函数

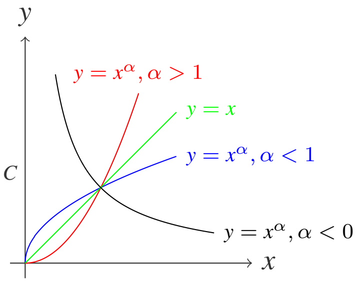
- $f(x) = C$



- 定义域：$(-\infty, +\infty)$

幂函数

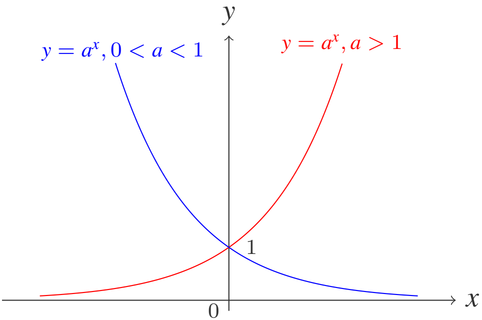
- $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.



- 定义域：$(0, +\infty)$

指数函数

- $f(x) = a^x$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

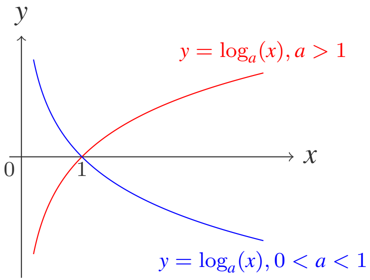


- 定义域：$(-\infty, +\infty)$
- Tips:
  指数函数通常利用下面的公式化为自然底的指数函数处理

$$a^x = e^{x \ln a}$$

对数函数

- $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

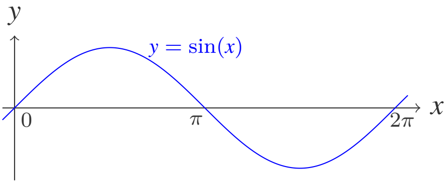


- 定义域：$(0, +\infty)$
- Tips:
  对数函数通常利用换底公式化为自然底的对数函数处理

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

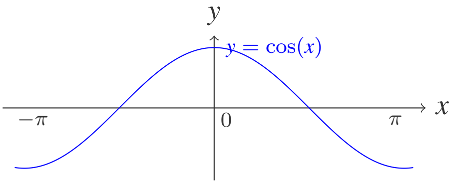
三角函数：正弦函数

- $f(x) = \sin(x)$.



- 定义域：$(-\infty, +\infty)$

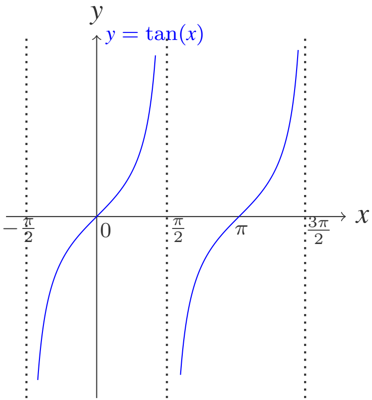
- $f(x) = \cos(x)$.



- 定义域：$(-\infty, +\infty)$

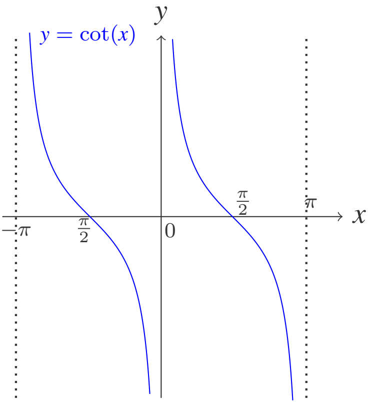
三角函数：正切函数

- $f(x) = \tan(x)$.



- 定义域：$\{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

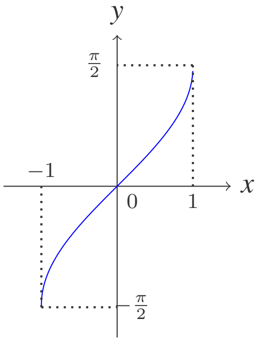
- $f(x) = \cot(x)$.



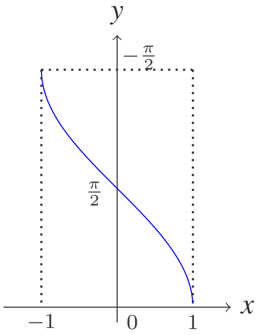
- 定义域：$\{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

反三角函数：反正弦函数

- $y = \arcsin(x), \quad x \in [-1, 1], \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

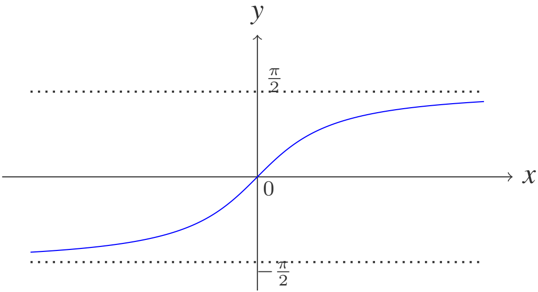


- $y = \arccos(x), \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi].$



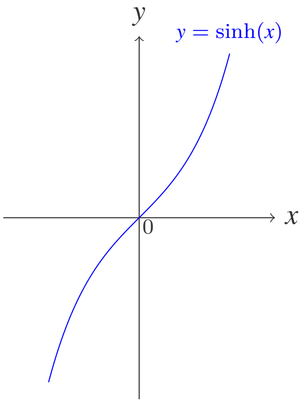
反三角函数：反正切函数

- $y = \arctan(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$



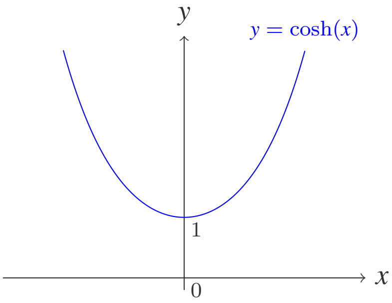
双曲三角函数：双曲正弦函数

- $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$



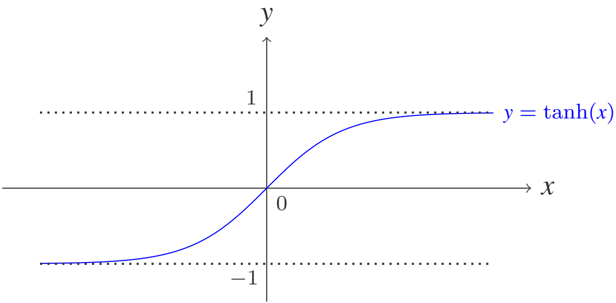
双曲三角函数：双曲余弦函数

- $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$



双曲三角函数：双曲正切函数

- $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$



反双曲三角函数

- 反双曲正弦函数:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

- 反双曲余弦函数:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, \infty).$$

- 反双曲正切函数:

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in (-1, 1).$$

函数的四则运算

设函数 $f: D_1 \to \mathbb{R}$ 和 $g: D_1 \to \mathbb{R}$ 且 $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$，
则可定义 D 上的函数

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$;
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$;
- 若 $\forall x \in D$ 有 $g(x) \neq 0$，则可定义 D 上的函数

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D.$$

函数的复合

映射的复合

设映射 $f: B \to C$，$g: A \to B$，则可定义复合映射 $f \circ g: A \to C$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in A.$$

函数的复合就是它们作为映射的复合.

- 并非任意两个函数都可复合.

  函数 $f: D_1 \to \mathbb{R}$ 和 $g: D_2 \to \mathbb{R}$ 可复合的条件是

  $$R(g) \subset D(f).$$

  例如：$f(x) = \sqrt{1-x^2}, g(x) = x^2 + 2$，则 $f \circ g$ 不存在。

函数的复合

- 函数的复合不可交换。
  例如：$f(x)=\frac{1}{x+1}, g(x)=x^2$，则 $f\circ g\neq g\circ f$。

例

- 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次}(x)$。
- 设

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1, \\ x, & x\geqslant 1, \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ x^2-1, & x\geqslant 0, \end{cases}$$

  求 $f\circ g$。
- 设 $f(x)=e^{x^2}$ 且有函数 $\varphi(x)\geqslant 0$ 使得 $f\circ\varphi(x)=1-x$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

单映射（一对一映射）

设映射 $f : A \to B$。若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称映射 f 是单映射（或一对一映射）。

逆映射（反函数）

若映射 $f : A \to B$ 是单映射，

则 f 存在逆映射

$$f^{-1} : R(f) \to A, \qquad y \mapsto x \text{ 若} f(x) = y.$$

当 f 是一个函数时，f^{-1} 称为 f 的反函数。

函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 描述的是变量 x 和 y 之间的同一个关系。但是变量 x 和 y 的地位不同.

考虑函数 $y=f(x)$ 时，x 是自变量，y 是因变量，y 随 x 变化.

考虑反函数 $x=f^{-1}(y)$ 时，y 是自变量，x 是因变量，x 随 y 变化.

例

设 $f(x)=\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，求 $f(x)$ 的反函数。

反函数的求法:

从函数 $y=f(x)$ 求解出 $x=f^{-1}(y)$.

满映射和双映射

满映射和双映射

设映射 $f : A \to B$,

- 若 $\forall y \in B, \exists x \in A$, s.t., $f(x) = y$，则称映射 f 是满射。
- 若映射 f 即是单映射又是满映射，则称 f 为双映射。

有界函数

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义。

- 若存在常数 M，使得 $\forall x \in I$，有 $f(x) \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有上界。
- 若存在常数 m，使得 $\forall x \in I$，有 $f(x) \geqslant m$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有下界。
- 若 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界，也有下界，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界。

有界性

- 有上界（下界）函数 $f(x)$ 的一个上界 M（下界 m）是与 x 无关的常数，不随 x 的变化而变化。
- 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\, x \in I, |f(x)| \leqslant M.$
- 函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界 $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\, x_0 \in I, |f(x_0)| > M.$
- 函数 $f(x)$ 的有界性与定义域 I 有关，谈论函数的有界性时必须明确区间 I。

有界性

例

- 讨论函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的有界性。
- 讨论函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$, $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 的有界性。

单调性

单调函数

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义。

- 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是严格递增的。
- 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是严格递减的。

- 注：讨论函数的单调性时必须指明单调区间。

- **注：**

  函数的单调性与函数是否为单映射是两个完全不同的概念。

反函数存在定理

若函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是区间 I 上的严格递增（减）函数，
则 f 是单映射（即一对一映射）。
此时，f 必存在反函数 $f^{-1}: R(f) \to I$。

奇偶性

奇函数和偶函数

设集合 $D \subset \mathbb{R}$ 关于原点对称且 $f(x)$ 在 D 上有定义。

- 若 $\forall x \in D$，有
$$f(-x) = -f(x)$$
则称 f 是 D 上的奇函数。
- 若 $\forall x \in D$，有
$$f(-x) = f(x)$$
则称 f 是 D 上的偶函数。

- 奇函数的图像关于原点对称。
- 偶函数的图像关于 y 轴对称。

奇偶性

命题

设 $D \subset \mathbb{R}$ 关于原点对称且函数 f 在 D 上有定义。则

- $F(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是 D 上的奇函数;
- $G(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是 D 上的偶函数;
- $f(x) = F(x) + G(x), \forall x \in D$。

周期函数

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义。

若存在 $T>0$，使得 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 T 为 f 的周期，$f(x)$ 称为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数。

- 一个周期函数 $f(x)$ 的周期不唯一，所有周期中若存在最小正数，则称其为函数 $f(x)$ 的最小正周期。

例

- 函数 $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$ 的周期有哪些，最小正周期是多少?
- 每个周期函数都有最小正周期吗?

作业:

- 习题 1.2 (A)
  6.
  7. (4)

  习题 1.3 (A)
  7. (3)

  习题 1.3 (B)
  4.

  总习题（1）
  6.
  9.