華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§3.7 函数性态的研究

- 函数的单调性
- 函数的极值
- 函数的凹凸性
- 函数作图

定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 可导. 则

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增 $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b), f'(x) \geqslant 0$.
- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减 $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b), f'(x) \leqslant 0$.

此定理对开区间、无穷区间也成立.

推论

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 可导.

- 若 $\forall x \in (a,b), f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增.
- 若 $\forall x \in (a,b), f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递减.

- 推论的逆命题不成立.

  例: $f(x) = x^3$ 在 $(-1,1)$ 严格单调递增, 但 $f'(0) = 0$.
- 推论的条件可略微放宽如下:

  $f'(x) \geqslant 0, x \in (a,b)$ 且使 $f'(x) = 0$ 的点不构成任何开区间,

  则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增.

  例: $f(x) = x + \sin x$.

例

确定函数 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 的单调区间.

求函数单调区间的步骤:

- 确定函数的定义域;
- 找临界点 ($f'(x) = 0$ 的点和导数不存在的点);
- 上述点将定义域分成若干区间,
  分别在每个区间上讨论 $f'(x)$ 的符号, 确定单调性.

例

证明: 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有

$$3x < \tan x + 2\sin x.$$

例

设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 内可导.
若 $f(0)=0$ 且 $f'(x)$ 在 $(0,a)$ 内严格单调递增.
证明: 在 $(0,a]$ 上, $\frac{f(x)}{x}$ 严格单调递增.

极值的必要条件

- 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $x_0 \in (a,b)$ 是函数的极值点. 则 x_0 必为函数 $f(x)$ 的临界点:
  - 驻点: 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导且 $f'(x_0) = 0$;
  - $f(x)$ 在 x_0 处的导数不存在.
- 临界点: 函数单调性改变的点.
- 临界点未必是极值点.

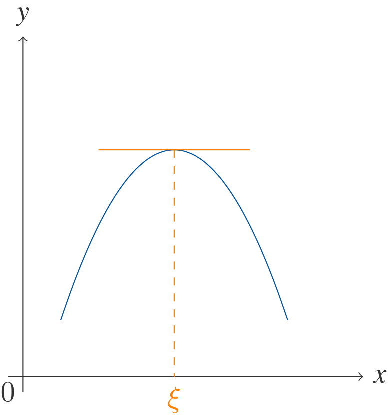
极值的一阶充分条件

定理（极值的一阶充分条件）

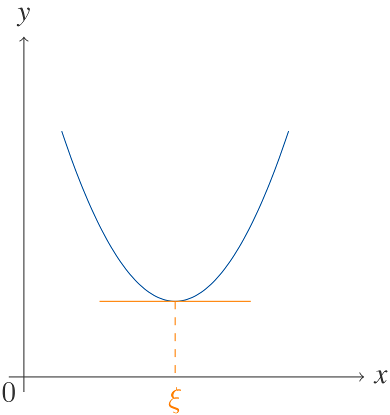
设函数 $f(x)$ 在 x_0 连续且在 x_0 的某个空心邻域内可导.

- 若 $\exists\delta > 0$, 使得
$$\begin{cases} 当 x \in (x_0 - \delta, x_0) 时, & f'(x) > 0, \\ 当 x \in (x_0, x_0 + \delta) 时, & f'(x) < 0, \end{cases}$$
则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的严格极大值.
- 若 $\exists\delta > 0$，使得
$$\begin{cases} 当 x \in (x_0 - \delta, x_0) 时, & f'(x) < 0, \\ 当 x \in (x_0, x_0 + \delta) 时, & f'(x) > 0, \end{cases}$$
则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的严格极小值.
- 若 $f'(x_0)$ 在 x_0 附近不变号, 则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

极值的一阶充分条件（几何意义）



左增右减取极大



左减右增取极小

例

求 $f(x)=(x+1)^3(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值及单调区间.

求函数极值的一般步骤:

- 确定函数的定义域;
- 找临界点: $f'(x)=0$ 的点和 $f'(x)$ 不存在的点;
- 考虑 $f'(x)$ 在临界点两边的符号（列表）;
- 求极值.

极值的二阶充分条件

定理（极值的二阶充分条件）

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可导且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)$ 存在.

- 若 $f''(x_0)<0$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的严格极大值.
- 若 $f''(x_0)>0$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的严格极小值.

- 二阶导数的符号可用于判定驻点是否是极值点.
- 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f(x_0)$ 可能是极值, 也可能不是极值.
  例：0 分别是 $x^3, x^4, -x^4$ 的非极值点、极小值点和极大值点.
- $f''(x_0)$ 不存在时, 不能用此定理判断极大极小.

例

求函数 $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 的极值.

例

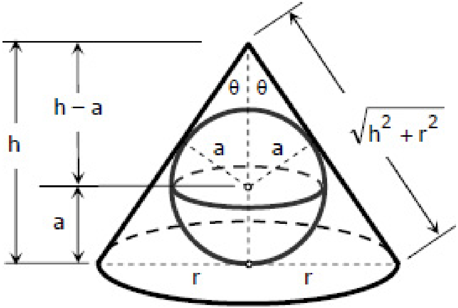
设 $a > \ln 2 - 1$, 证明: 任意 $x > 0$ 满足不等式

$$e^x > x^2 - 2ax + 1.$$

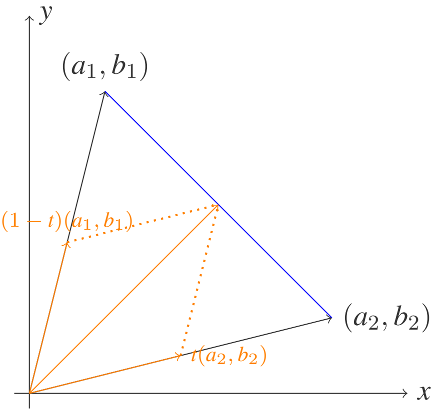
- 连续函数在闭区间上的最值是全部极值中的最大最小值.
- 若连续函数在闭区间只有唯一的极大（极小）值点, 则其必为最大（最小）值点.

例

作半径为 r 的球的外切圆锥，问圆锥高为 h 为多少时体积最小?



直线段的参数方程



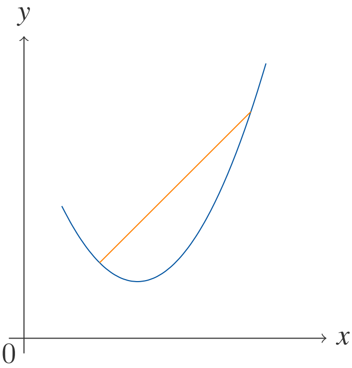
- 给定平面上的两点 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2).
- 连接它们的直线段可表示为

  $$(1-t)(a_1, b_1) + t(a_2, b_2)$$

  其中 $t \in [0, 1]$.

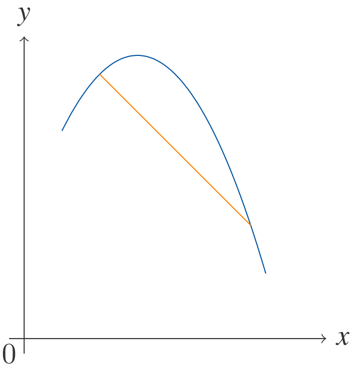
函数凸性的直观概念

下凸



任意两点之间的函数图像都在连接两点的直线段下方.

上凸



任意两点之间的函数图像都在连接两点的直线段上方.

刻画函数的弯曲方向.

函数的凸性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义.

- 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in (0,1)$, 有
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$
则称 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸的.
不等式为严格不等式时称 $f(x)$ 是严格下凸的.
- 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in (0,1)$, 有
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$
则称 $f(x)$ 在区间 I 上是上凸的.
不等式为严格不等式时称 $f(x)$ 是严格上凸的.

定理（连续函数的凸性）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，则

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是下凸的 $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2),\ \forall x_1,x_2 \in [a,b].$$

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上凸的 $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2),\ \forall x_1,x_2 \in [a,b].$$

向前向后归纳法.

定理

设 $f(x)$ 为区间 I 上的可导函数, 则下述论断互相等价.

- $f(x)$ 是下凸的.
- $f'(x)$ 为区间 I 上的增函数（下凸函数切线的斜率递增）.
- 对与 $x, a \in I$ 且 $x \neq a$ (下凸函数在任意切线的上方),

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a).$$

凸性与导数

定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 内二阶可导.

- 若 $\forall x \in (a,b), f''(x) \geqslant 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是下凸的.
- 若 $\forall x \in (a,b), f''(x) \leqslant 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上凸的.

函数的凸性

例

讨论函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的凸性.

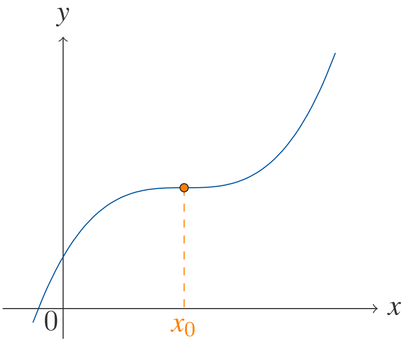
例

利用函数的凸性证明: $\forall x > 0, y > 0, \alpha > 1$, 有

$$\frac{1}{2}(x^\alpha + y^\alpha) \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha.$$

函数的拐点

- 拐点:
  设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续.
  若 $f(x)$ 在 x_0 的两侧凸的方向相反,
  则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的拐点.
- 若 x_0 是 $f(x)$ 的拐点,
  则 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在.
- $f''(x_0) = 0$ 的点未必是拐点.
- 几何意义:
  在拐点 x_0 处的切线穿过曲线.
  曲线位于拐点 x_0 处切线的两侧.



函数作图

函数作图应考虑以下关键点

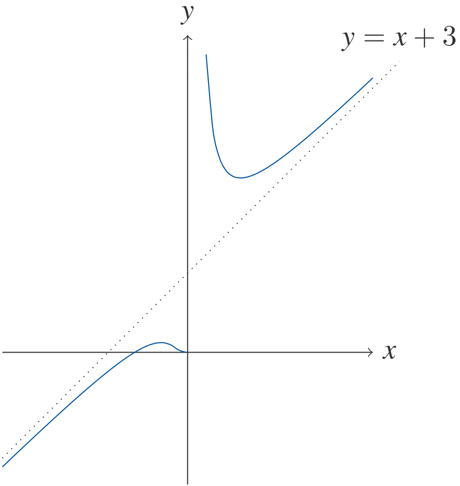
- 确定函数的定义域和值域;
- 判断函数是否有奇偶性、周期性;
- 找出函数的间断点并判断类型;
- 找出函数的渐近线;
- 求临界点, 找出单调区间和极值;
- 求拐点, 找出凹凸区间;
- 根据以上信息作图.

例

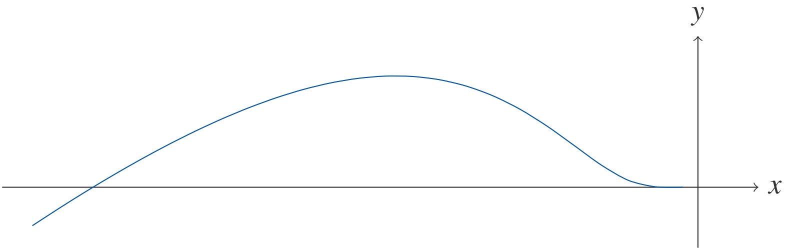
作函数

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$$

的图形.



函数作图



華南理工大學
South China University of Technology

作业：

- 习题 3.7 (A)
  2. (4)
  5. (5)
  7.
  8. (3)

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- ▶ 习题 3.7 (A)
  13. (3)
  14.
  18. (1)

  习题 3.7 (B)
  3. (2) (3)