座位号________ 线 专业班级________ 学院________（密封线内不答题）封 学号□□□□□□□□□□□□ 密 姓名________

诚信应考,考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期中考试

《工科数学分析》2020—2021 学年第一学期期中考试卷

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上；

3．考试形式：闭卷；

4. 本试卷共 4 个 大题，满分 100 分， 考试时间 90 分钟。

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

一、 计算题（3 小题，每小题 12 分，共 36 分）

得分

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = ab.$

证：令 $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$，

设 $\forall n \in N^+, |\beta_n| \le M$, 因为

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = \frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n) + (a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1}) + \dots + (a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n}$$

$$= ab + \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_{n-k+1}$$

且 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k \beta_{n-k+1}| \le \dfrac{M}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k| = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k = 0$

推出 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = ab$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \sin x}$。

解：$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{6}x^3) - (x - \frac{1}{3}x^3)}{(x + \frac{1}{3}x^3) - (x - \frac{1}{6}x^3)} = \frac{1}{3}$$

3. 设曲线的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{3\text{at}}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$， $t\in R$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{(\frac{3at^2}{1+t^3})'}{(\frac{3\text{at}}{1+t^3})'}=\dfrac{t^4-2t}{2t^3-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\frac{t^4-2t}{2t^3-1})'}{(\frac{3\text{at}}{1+t^3})'}=\frac{(2t^6+4t^3+2)(1+t^3)^2}{(2t^3-1)^2(3a-6at^2)}$$

得分

二、**解答题**（2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(\text{x})-\text{e}^{-x}}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ，其中 g''(x连续，且 g'(0)=-1，g(0)=1. 求

(1) $f'(\text{x})$;(2)讨论 $f'(\text{x})$在实数上的连续性。

解: (1) 当x=0时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{g}'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{g}''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{\text{g}''(0)-1}{2}$$

当$x\neq 0$时， $f'(\text{x})=\dfrac{x(\text{g}'(x)+e^{-x})-g(x)+e^{-x}}{x^2}$

(2) 显然 $f'(\text{x})$在上$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$上连续，讨论 $f'(\text{x})$在x=0上的连续性

$$\lim_{x\to 0}f'(\text{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x(\text{g}'(x)+e^{-x})-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{g}'(x)+e^{-x}+x(\text{g}''(x)-e^{-x})-\text{g}'(x)-e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{g}''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{\text{g}''(0)-1}{2}=f'(0)$$

则 $f'(\text{x})$在x=0处连续。

2. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的二阶可导函数，且满足条件 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b, a, b$ 都是非负数。

设 $c\in(0,1)$.

(1)写出 f(x) 在 x=c 处带拉格朗日余项的一阶泰勒公式。

(2)证明 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

解: (1) $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2, \xi\in(c,x)$

(2) 由 $f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(1-c)^2$

$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(0-c)^2$

则 $f(1)-f(0)=f'(c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(1-c)^2+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(0-c)^2$

$|f'(c)|\le|f(1)|+|f(0)|+|\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(1-c)^2|+|\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(0-c)^2|$

$\le 2a+\dfrac{b}{2}\left[(1-c)^2+c^2\right]$

$\le 2a+\dfrac{b}{2}$

得分

三、**证明题**（2 小题，每小题 15 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x)\in C(a,b)$,，且 $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 都存在，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。

证明： 定义 $F(x)=\begin{cases} f(a^+), x=a \\ f(x), a<x<b \\ f(b^-), x=b \end{cases}$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

由康托尔定理，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，故 $F(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，

则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。

2. 证明：设 $p>1$ 为实数， $q=\frac{p}{p-1}, a$和b都是大于0的实数。求证 $ab\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

证明：由加权平均不等式：$p_1 a_1+p_2 a_2 \ge a_1^{p_1} a_2^{p_2}, \left(a_1, a_2>0; 0<p_1, p_2<1; p_1+p_2=1\right)$

令 $p_1=\frac{1}{p}$， $p_2=\frac{1}{q}$，则 $p_1+p_2=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{p}{p-1}}=1$

再令 $a_1=a^p, a_2=b^q$，则 $p_1 a_1+p_2 a_2=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\ge ab$

即 $ab\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

得分

四、应用题（本小题 10 分）

设 $a>0, b>0$. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限中求一点 P，使得该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积最小。

解：设 $P(X,Y)$,则该点处切线方程：$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y=1$,截距分别为 $A=\frac{a^2}{X}, B=\frac{b^2}{Y}$

设 P 处的切线与两坐标轴所围三角形的面积为 S_Δ，

则 $S_\Delta=\frac{AB}{2}=\frac{a^2b^2}{2XY}$

要使题意中所求面积最小，即使 S_Δ 最小，即 XY 最大，$(XY)^2$ 最大

$(XY)^2=X^2(1-\frac{X^2}{a^2})b^2=-\frac{b^2}{a^2}X^4+b^2X^2$

当 $X^2=\frac{a^2}{2}$ 时，$(XY)^2$ 最大

故 $P(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$。