華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§2.2 数列的极限

- 数列极限的概念
- 数列极限与函数极限的关系

数列

- 数列：定义在自然数集合 $\mathbb{N}$ 上的函数.

数列

- **数列：** 定义在自然数集合 $\mathbb{N}$ 上的函数.
- **通项：** 数列 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 在自然数 n 处的取值 $a_n := f(n)$ 称为数列的通项. 一个数列通常表示为 $\{a_n\}$.

数列

- 数列: 定义在自然数集合 $\mathbb{N}$ 上的函数.
- 通项: 数列 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 在自然数 n 处的取值 $a_n := f(n)$ 称为数列的通项. 一个数列通常表示为 $\{a_n\}$.
- 凡是数列, 都有无穷多项.

数列

- 数列: 定义在自然数集合 $\mathbb{N}$ 上的函数.
- 通项: 数列 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 在自然数 n 处的取值 $a_n := f(n)$ 称为数列的通项. 一个数列通常表示为 $\{a_n\}$.
- 凡是数列, 都有无穷多项.
- 数列与数集不同, 其中不同的项可以有相同的值.

- 数列: 定义在自然数集合 $\mathbb{N}$ 上的函数.
- 通项: 数列 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 在自然数 n 处的取值 $a_n := f(n)$ 称为数列的通项. 一个数列通常表示为 $\{a_n\}$.
- 凡是数列, 都有无穷多项.
- 数列与数集不同, 其中不同的项可以有相同的值.

数列的性质

设 $\{a_n\}$ 是一个数列.

- **递增数列:** $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $a_n \leqslant a_{n+1}$.

数列的性质

设 $\{a_n\}$ 是一个数列.

- 递增数列: $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $a_n \leqslant a_{n+1}$.
- 递减数列: $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $a_n \geqslant a_{n+1}$.

数列的性质

设 $\{a_n\}$ 是一个数列.

- 递增数列: $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $a_n \leqslant a_{n+1}$.
- 递减数列: $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $a_n \geqslant a_{n+1}$.
- 有界数列: $\exists M > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $|a_n| < M$.

数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 为一个常数.

若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$收敛, 极限为 a, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

若数列没有极限，则称数列发散.

数列极限的定义

数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 为一个常数.

若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$收敛, 极限为 a, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

若数列没有极限，则称数列发散.

类似地，可定义

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

数列极限定义的理解

- 直观理解:

  a_n 随着 n 的增大与 a 靠近到任意程度.

数列极限定义的理解

- 直观理解:
  a_n 随着 n 的增大与 a 靠近到任意程度.
- ε 的任意性:
  ε 刻画了 a_n 与 a 靠近的程度.

数列极限定义的理解

- 直观理解:

  a_n 随着 n 的增大与 a 靠近到任意程度.

- ε 的任意性:

  ε 刻画了 a_n 与 a 靠近的程度.

- N 的存在性:

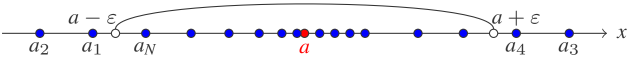
  数列从某项开始, 后面所有项都与 a_n 靠近到 ε 的程度.

  N 与 ε 有关. 一般来说, ε 越小, N 越大.

数列极限定义的理解

- 直观理解:
  a_n 随着 n 的增大与 a 靠近到任意程度.
- ε 的任意性:
  ε 刻画了 a_n 与 a 靠近的程度.
- N 的存在性:
  数列从某项开始, 后面所有项都与 a_n 靠近到 ε 的程度.
  N 与 ε 有关. 一般来说, ε 越小, N 越大.
- 数列的极限与开头的有限项无关,
  主要充分靠后的无穷多项.

数列极限的几何意义



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 有如下几何意义:

对于 a 任意 ε 领域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,

数列 $\{a_n\}$ 中除有限项 $a_1, \ldots, a_N$ 之外所有项都落于此邻域中.

利用定义证明极限

例

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

例

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$
- 设 $0 < |q| < 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

利用定义证明极限

例

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$
- 设 $0 < |q| < 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$
- 设 $a > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

利用定义证明极限

例

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$.
- 设 $0 < |q| < 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
- 设 $a > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

利用定义证明数列极限的一般方法:

- 取定正数 ε 充分小,
- 找出使得不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立的 n 的某个范围 $n > N$.

利用定义证明极限

例

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

有证明如下：

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n}\ln n < \ln(1+\varepsilon)$, 只要

$$\frac{1}{n} < \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n} \leqslant \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}.$$

取 $N = \left[\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$, 则当 $n > N$ 时，有

$$1-\varepsilon < 1 < \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

问题：上述证明是否正确？如何正确地证明？

关于 $\varepsilon - N$ 定义的说明

- 利用 $\varepsilon - N$ 定义证明数列 $\{a_n\}$ 的极限需事先知道极限值 a, 要想利用 $\varepsilon - N$ 定义来求数列的极限是非常困难的.

关于 $\varepsilon - N$ 定义的说明

- 利用 $\varepsilon - N$ 定义证明数列 $\{a_n\}$ 的极限需事先知道极限值 a, 要想利用 $\varepsilon - N$ 定义来求数列的极限是非常困难的.
- $\varepsilon - N$ 定义通常是用来进行推理和证明的, 在计算数列的极限时需寻求其他更为有效的方法.

Heine 定理（归结原则）

设函数 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域有定义. 则

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{对任意以}a\text{为极限的数列}\{x_n\}, \\ x_n \neq a, \text{有} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A. \end{array}$$

注：

此定理也适用于其他极限过程，包括

$$x \to a^+, \quad x \to a^-, \quad x \to \infty, \quad x \to +\infty, \quad x \to -\infty.$$

推论

- 若 $\exists$ 以 a 为极限的数列 $\{a_n\}$, $a_n \neq a$,
  使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ 不存在,
  则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.

归结原则的应用

推论

- 若 $\exists$ 以 a 为极限的数列 $\{a_n\}$, $a_n \neq a$,
  使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ 不存在,
  则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.
- 若 $\exists$ 两个以 a 为极限的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, $a_n \neq a$ 且 $b_n \neq a$,
  使得
  $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$
  则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.

推论

- 若 $\exists$ 以 a 为极限的数列 $\{a_n\}$, $a_n \neq a$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.
- 若 $\exists$ 两个以 a 为极限的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, $a_n \neq a$ 且 $b_n \neq a$, 使得
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$
则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.

此推论常证明函数在某点处极限不存在.

归结原则的应用

例

证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 2.2 (A)
  2. (1) (4).
  3. (2).
  5.

  习题 2.2 (B)
  1. (2) (3).
  2. (1) (2) (3).