華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§4.6 有理函数的积分

- 有理函数的积分
- 可化为有理函数的积分

- 计算不定积分的主要工具:
  - 直接找出原函数;
  - 不定积分的线性性;
  - 换元法;
  - 分部积分.
- 并非每个不定积分都可用初等函数写出表达式.

  如 $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x, \int \sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x$.

有理函数

若函数 $f(x)$ 可写为两个多项式的商，即

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0},$$

其中 a_m, b_n 非零，则称 $f(x)$ 为有理函数.

- 当 $m > n$ 时，$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为假分式.
- 当 $m < n$ 时，$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为真分式.

例

计算下列不定积分

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\mathrm{d}x,$$

其中 n 为正整数, a 为常数.

例

设 n 为正整数, a,b,p,q 为常数且 $p^2-4q<0$, 计算不定积分

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x.$$

一般有理函数的积分

问题： 对于一般的有理函数

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0},$$

如何计算

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \quad ?$$

实系数多项式的带余除法

设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多项式且 $Q(x)$ 非零，
则存在多项式 $T(x)$ 和 $R(x)$，使得

$$P(x) = T(x)Q(x) + R(x),$$

且 $R(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数.

例

$$x^3 + x + 1 = x(x^2 + 1) + 1.$$

有理函数的结构

推论

任何有理函数都可分解为一个多项式和一个真分式的和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

例

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}.$$

多项式得积分容易计算，

因此有理函数积分的关键在于真分式的积分.

实系数多项式的因子分解

任何实系数多项式可分解为有限多个一次和二次不可约因子的乘积，分解在不计因子次序的意义下唯一.

任何实系数多项式

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

可分解为

$$Q(x) = b_n (x-\alpha_1)^{\lambda_1} \cdots (x-\alpha_r)^{\lambda_r} (x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s},$$

其中 $p_i^2 - 4q_i < 0,\ i = 1, \ldots, s.$

实系数多项式的因子分解

例

- x^2+1 不可约，不用再分解;
- $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$;
- $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

定理（部分分式）

设多项式 $Q(x)$ 有分解

$$Q(x)=b_n(x-\alpha_1)^{\lambda_1}\cdots(x-\alpha_r)^{\lambda_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s},$$

其中 $p_i^2-4q_i<0,\ i=1,\dots,s.$

则任一真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以分解为如下形式的部分分式和:

$$\begin{aligned}\frac{P(\boldsymbol{x})}{Q(\boldsymbol{x})}=&\cdots\cdots\\&+\frac{A_{i,\lambda_i}}{(\boldsymbol{x}-a_i)^{\lambda_i}}+\frac{A_{i,\lambda_i-1}}{(\boldsymbol{x}-a_i)^{\lambda_i-1}}+\cdots+\frac{A_{i,1}}{\boldsymbol{x}-a_i}\\&\cdots\cdots\\&+\frac{M_{j,\mu_j}\boldsymbol{x}+N_{j,\mu_j}}{(\boldsymbol{x}^2+p_j\boldsymbol{x}+q_j)^{\mu_j}}+\frac{M_{j,\mu_j-1}\boldsymbol{x}+N_{j,\mu_j-1}}{(\boldsymbol{x}^2+p_j\boldsymbol{x}+q_j)^{\mu_j-1}}+\cdots+\frac{M_{j,1}\boldsymbol{x}+N_{j,1}}{\boldsymbol{x}^2+p_j\boldsymbol{x}+q_j}\\&\cdots\cdots,\end{aligned}$$

其中 $A_{i,k},M_{j,l},N_{j,l}$ 为常数，由待定系数法确定.

部分分式

例

将下列有理函数写成多项式和部分分式的和:

$$(1)\frac{x+3}{x^2-5x+6},\qquad (2)\frac{x(2-x^2)}{1-x^4},$$

$$(3)\frac{1}{x(x-1)^2},\qquad (4)\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}.$$

注意:

分母的每个 k 重因子 $(x-a)^k$ 或 $(x^2+px+q)^k$ 对应部分分式中 k 个待定的项.

有理函数分解为多项式和部分分式之和的一般步骤:

- 约分;
- 分子分母做带余除法将有理函数化为多项式与真分式之和;
- 将真分式的分母分解因式;
- 待定系数写出真分式的部分分式形式;
- 由真分式和部分分式相等, 求出待定的全部常数;
  - 等式两边 x 同次幂对应的系数相等;
  - 取 x 为一些特殊值得到两边相等;
  - 两边求导后再比较相应的系数或取 x 为特殊值.
- 写出最终部分分式.

有理函数的积分

有理函数总可分解为多项式和部分分式之和，因此其积分可归结为下列形式的积分的和：

- 多项式的积分；
- $$\int \frac{A}{(x-a)^n} \mathrm{d}x,$$
  其中 A 和 a 为常数，n 为正整数；
- $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \mathrm{d}x,$$
  其中 A, B, p, q 为常数且 $p^2 - 4q < 0$, n 为正整数.

例

计算下列不定积分

$$(1)\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

$$(2)\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x, \qquad (3)\int \frac{x(2-x^2)}{1-x^4}\mathrm{d}x,$$

$$(4)\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x, \qquad (5)\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x.$$

例

计算下列不定积分

$$(1)\int \frac{x(2-x^2)}{1-x^4}\mathrm{d}x,\qquad (2)\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x,\qquad (3)\int \frac{x^7}{(1-x^2)^5}\mathrm{d}x.$$

- 部分分式法可以计算任何一个有理函数的积分，但是计算繁琐、容易出错.
- 一些特殊的有理函数可以利用其它方法积分，不必使用部分分式法.

- 若函数是一个分式, 且分子分母都是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的多项式, 则称其为三角函数有理式.
- 三角函数有理式的积分可以转化为有理函数的积分计算.
- 万能代换:

$$u = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\arctan u.$$

- 由三角函数万能公式, 有

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

例

计算不定积分

$$(1)\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x,$$

$$(2)\int \frac{1}{4-5\sin x}\mathrm{d}x,$$

$$(3)\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\mathrm{d}x.$$

例

三角函数有理式的积分

$$\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \mathrm{d}x$$

很多三角函数有理式的积分可以通过其他换元来解决,
万能代换较为繁琐,只是不得已才用的手段.

对于简单无理函数的积分，常用以下换元:

- 被积函数含 $\sqrt[n]{ax+b}$ 时，可考虑

$$t = \sqrt[n]{ax+b}.$$

- 被积函数含 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 时，可考虑

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

- 被积函数含 $\sqrt{ax^2+bx+c}$,

  先将 ax^2+bx+c 配方，然后考虑三角换元.

例

求不定积分

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\mathrm{d}x,$$

$$(2) \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x,$$

$$(3) \int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x.$$

其中 (3) 也可用 Euler 变换解决:

$$\sqrt{x^2+2x+2} = t \pm x.$$

例

计算不定积分

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} \mathrm{d}x.$$

華南理工大學
South China University of Technology

作业：

- 习题 4.6 (A)
  1. (3) (4)
  2. (2)
  3. (1)

  习题 4.6 (B)
  (3) (8)