華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§1.1 实数集

- 集合的概念和运算
- 实数及其性质
- 区间与邻域
- 确界原理

集合的概念

- 集合：具有某种共同属性的事物的全体
- 元素：组成集合的事物
- 记号：$a \in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素
  $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 中的元素
- 表示方法：
  - 列举法：如 $\{1, 2, 3, 4\}$
  - 描述法：如 $\{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$

集合的概念

- 集合概念的关键在于:
  任何一个集合都必须有明辨的元素.
  对于任给的事物 a 和集合 A，需清楚辨明 $a \in A$ 还是 $a \notin A$.
- 任何集合 A 都不允许是其自身的元素，即不允许出现 $A \in A$.
- 集合中的元素两两不同.

集合的关系

- 子集 $A \subset B$：A 中的元素都是 B 中的元素
- 相等 $A = B$：$A \subset B$ 且 $B \subset A$
- 真子集 $A \subsetneq B$：$A \subset B$ 且 $A \neq B$
- 空集 $\emptyset$：不含任何元素的集合.

  约定：空集是任何集合的子集.

集合的运算

- 并：$A \cup B := \{a | a \in A \text{ 或 } a \in B\}$
- 交：$A \cap B := \{a | a \in A \text{ 且 } a \in B\}$
- 差：$A \backslash B := \{a | a \in A \text{ 且 } a \notin B\}$
- 补：I 为全集且 $A \subseteq I$，则 $A^c := \{a \in I | a \notin A\}$
- 直积：$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Tips: 集合的关系和运算常用 Venn 图来表示.

集合的运算法则

- 交换律: $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- 对偶律: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- 幂等律: $A \cup A = A$
  $A \cap A = A$
- 吸收律: $A \cup \emptyset = A$
  $A \cap \emptyset = \emptyset$

实数

- 实数：
  十进制无限小数.
- 有理数：
  十进制无限循环小数.
  注：有限小数也可以表示为无限循环小数. 例：$1 = 0.\dot{9}$.
- 实数与数轴上的点一一对应.
- 记号：

实数集	有理数集	整数集	自然数集
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$

实数的性质

- 四则运算（加、减、乘、除）
- 有序且序与四则运算相容
  若 $a > b$，则 $a \pm c > b \pm c$.
  若 $a > b$ 且 $c > 0$，则 $ac > bc$.
- 稠密性：任何两个实数之间都存在另一个实数

逻辑符号

由于数学分析中常涉及存在性和任意性的叙述，引入逻辑符号

- $\forall$: 任意的
- $\exists$: 存在至少一个
- $\exists!$: 存在唯一一个（恰好存在一个）

例： 实数的稠密性

- 语言叙述：任何两个实数之间都存在另一个实数；
- 符号表达：$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $\exists c$ s.t. $a < c < b$.

常用不等式

- 三角不等式:

$$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

- Bernoulli 不等式:

  若 $a \geqslant -1$ 且 n 为自然数，则

$$(1+a)^n \geqslant 1+na.$$

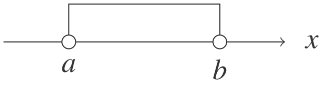
- 算术几何平均值不等式:

  设 $a_1, \ldots, a_n$ 为 n 个正实数，则

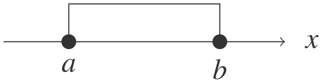
$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

区间

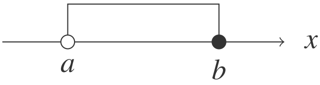
- 开区间：
  $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$



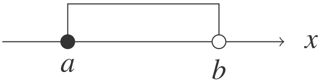
- 闭区间：
  $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\leqslant x\leqslant b\}$



- 左开右闭区间：
  $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a<x\leqslant b\}$

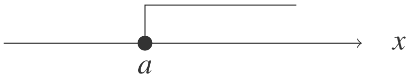


- 左闭右开区间：
  $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a\leqslant x<b\}$

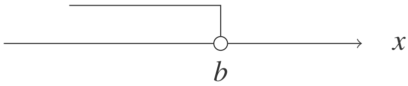


无穷区间

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant a\}$



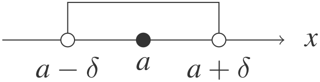
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$



给定 $a \in \mathbb{R}$ 和 $\delta > 0$,

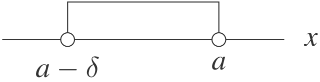
- **点 a 的 δ 邻域:**

$$O(a,\delta) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < \delta\}.$$



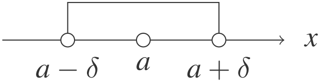
- **点 a 的 δ 左邻域:**

$$O^{-}(a,\delta) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a-\delta < x < a\}.$$



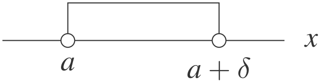
- **点 a 的 δ 空心邻域:**

$$O_0(a,\delta) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < |x-a| < \delta\}.$$



- **点 a 的 δ 右邻域:**

$$O^{+}(a,\delta) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < a+\delta\}.$$



有界集

- 有限数集有最大元素和最小元素，
  但无限数集不一定可取到最大元素和最小元素.
- 上界:
  设 $E \subseteq \mathbb{R}$, 若 $\exists\, M \in \mathbb{R}$, s.t., $\forall\, x \in E$, 有 $x \leq M$,
  则称 M 为 E 的一个上界.
- 下界:
  若 $\exists\, m \in \mathbb{R}$, s.t., $\forall\, x \in E$, 有 $x \geq m$,
  则称 m 为 E 的一个下界.
- 有界集:
  若 E 既有上界又有下界, 则称 E 是有界集.

有界集

- 无界集:
  若集合 E 没有上界或没有下界，则称 E 无界.
- 无上界:
  集合 E 没有上界 $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 \in E, x_0 > M$.
- 有界集和有限集是完全不同的概念.
- 有上（下）界的集合上（下）界不唯一.

- 上确界:
  设 $E \subset \mathbb{R}$ 且 β 是 E 的一个上界，若对 E 的 $\forall$ 上界 β' 有 $\beta \leqslant \beta'$，则称 β 是 E 的上确界（最小上界），记为
  $$\sup E = \beta.$$

- 下确界:
  设 $E \subset \mathbb{R}$ 且 α 是 E 的一个下界，若对 E 的 $\forall$ 下界 α' 有 $\alpha' \leqslant \alpha$，则称 α 是 E 的下确界（最大下界），记为
  $$\inf E = \alpha.$$

确界

例

- $\sup(0,1)$, $\inf(0,1)$
- $\inf\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$
- $\sup\{x \in \mathbb{R} | x^2 < 2\}$, $\sup\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$

- 有上（下）界的实数集的上（下）确界未必是集合中的元素.
- 有上（下）界的有理数集的上（下）界未必是有理数.

确界原理

非空有上（下）界的实数集必存在上（下）确界.

- 实数集与有理数集的 本质区别:
  非空有上（下）界的有理数集的上（下）确界未必是有理数,
  而非空有上（下）界实数集的上（下）确界必然是实数.

定理

设 E 是有上（下）界的非空实数集且 $\beta = \sup E$ （$\alpha = \inf E$），则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in E$, s.t.,

$$\beta - \varepsilon < x_0 \leqslant \beta \qquad (\alpha \leqslant x_0 < \alpha + \varepsilon).$$

推论

设 E 是有上界的非空实数集，
则 $\beta = \sup E$ 等价于下列 (1) 和 (2) 同时成立

(1) $\forall x \in E, x \leqslant \beta$ (β 是 E 的上界);

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in E$, s.t., $\beta - \varepsilon < x_0 \leqslant \beta$.

定理

- 设 E 是有上界的非空实数集且有上界 $\beta \in E$，则 $\sup E = \beta$.
- 设 E 是有下界的非空实数集且有下界 $\alpha \in E$，则 $\inf E = \alpha$.

命题

设 E 是有下界的非空实数集，记 $E^- = \{x | -x \in E\}$，则

$$\inf E = -\sup E^-.$$

作业：

- 习题 1.1 (A)
  4. (4) (5) (8),
  5.

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 1.1 (A)
  10. (2) (3)
  习题 1.1 (B)
  6. 8. (2)