華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§3.6 Taylor 公式

- Taylor 公式的建立
- 几个初等函数的 Maclaurin 公式
- 近似计算与误差估计
- 其它应用

回顾函数的微分与线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则当 $|x-x_0|$ 很小时，有
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

回顾函数的微分与线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则当 $|x-x_0|$ 很小时，有
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$
- 这一线性估计的误差
$$\sigma_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$
是比 $x-x_0, (x\to x_0)$ 更高阶的无穷小.

回顾函数的微分与线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则当 $|x-x_0|$ 很小时，有
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$
- 这一线性估计的误差
$$\sigma_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$
是比 $x-x_0, (x \to x_0)$ 更高阶的无穷小.
- 上述估计较为粗略，精度不高.

Taylor 公式的建立

回顾函数的微分与线性估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则当 $|x-x_0|$ 很小时, 有
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$
- 这一线性估计的误差
$$\sigma_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$
是比 $x-x_0, (x \to x_0)$ 更高阶的无穷小.
- 上述估计较为粗略, 精度不高.
- 问题: 能否给出 $f(x)$ 的更精确的估计?

问题: 考虑用二次多项式近似 $f(x)$，并且误差是比 $(x-x_0)^2$ 更高阶的无穷小?

▶
$$f(x) = A + B(x-x_0) + C(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2),\ \ x \to x_0.$$

Taylor 公式的建立

问题: 考虑用二次多项式近似 $f(x)$，并且误差是比 $(x-x_0)^2$ 更高阶的无穷小?

- $$f(x) = A + B(x-x_0) + C(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), \quad x \to x_0.$$
- $$A = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- $$B = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$
- $$C = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

现在我们证明了有惟一的一个二次多项式 $T_2(f, x_0; x)$:

$$T_2(f, x_0; x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

满足要求，那么 $f(x) - T_2(f, x_0; x)$ 是否是比 $(x - x_0)^2$ 更高阶的无穷小?

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2}$$

Type $\left(\frac{0}{0} \right.$ L'Hospital Rule $\left. \right)$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)}$$

$$= 0.$$

- $T_2(f,x_0;x_0)=f(x_0)$: 近似二次多项式与 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 重合
- $T_2'(f,x_0;x_0)=f'(x_0)$: 近似二次多项式与 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 具有相同的切线
- $T_2''(f,x_0;x_0)=f''(x_0)$: 近似二次多项式与 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 凹凸性 (弯曲程度) 相同

结论:

$f(x)$ 在 x_0 的邻域内有连续的导数，并且 $f''(x_0)$ 存在，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2),$$

即

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2,$$

$$R_2(x-x_0)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2]=o((x-x_0)^2).$$

- **Taylor 多项式**

  设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有直到 n 阶的导数. 多项式

$$T_n(f,x_0;x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶 Taylor 多项式.

$$R_n(x-x_0) := f(x) - T_n(f,x_0;x)$$

称为 n 阶余项.

Taylor 公式的惟一性

设 $f(x)$ 足够好 (函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有 $n-1$ 阶导数且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在), 若有 n 次逼近多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

使得

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

则

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0.1, 2, \cdots, n.$$

即

$$P_n(x) = T_n(f, x_0; x)$$

定理证明

▶ 对于 a_n, 由 $\sigma_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n), x \to x_0$, 有

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} - a_n \right).$$

因此,

$$\begin{aligned}
a_n &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - (n-1)!a_{n-1}}{n!(x-x_0)}, \quad (n-1\text{次 L'Hôpital 法则}) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}, \\
&= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (f^{(n)}(x_0)\text{的定义})
\end{aligned}$$

Taylor 多项式的特征

函数 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶 Taylor 多项式

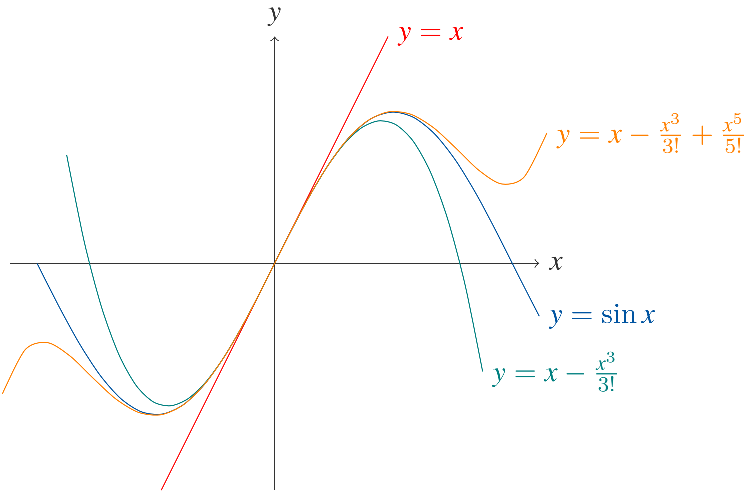
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

与 $f(x)$ 在 x_0 点处有相等的函数值和直到 n 阶的导数.

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Taylor 公式：几何意义



带 Peano 余项的 Taylor 公式

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域内有直到 $(n-1)$ 阶的连续导数且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 关于点 x_0 处 n 阶 Taylor 多项式的余项 $R_n(x-x_0)$ 是比 $(x-x_0)^n$, $x \to x_0$ 更高阶的无穷小.

$$R_n(x-x_0) = o((x-x_0)^n),$$

即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0.$$

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域内有直到 $n+1$ 阶的连续导数
则 $f(x)$ 关于点 x_0 处 n 阶 Taylor 多项式的余项 $R_n(x-x_0)$ 满足;
存在 ξ 在 x_0 和 x 之间使得

$$R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

即，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

注:

- 带 Lagrange 余项的 0 阶 Taylor 公式就是 Lagrange 中值定理: 存在某个 ξ 在 x_0 和 x 之间, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

注:

- 带 Lagrange 余项的 0 阶 Taylor 公式就是 Lagrange 中值定理:
  存在某个 ξ 在 x_0 和 x 之间, 使得
  $$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$
- Peano 余项是对余项的定性描述:
  余项是比 $(x - x_0)^n$ 更高阶的无穷小.

注:

- 带 Lagrange 余项的 0 阶 Taylor 公式就是 Lagrange 中值定理:
  存在某个 ξ 在 x_0 和 x 之间, 使得
  $$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$
- Peano 余项是对余项的定性描述:
  余项是比 $(x-x_0)^n$ 更高阶的无穷小.
- Lagrange 余项是对余项的定量描述.

例

求函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ 在 $x_0 = -1$ 处的一阶和三阶 Taylor 公式及相应的 Lagrange 余项.

Maclaurin 公式

函数在点$x_0 = 0$处的 Taylor 公式称为 Maclaurin 公式.

- 带 Peano 余项的 Maclaurin 公式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Maclaurin 公式

函数在点$x_0 = 0$处的 Taylor 公式称为 Maclaurin 公式.

- 带 Peano 余项的 Maclaurin 公式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

- 带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\cos\left(\theta x + (m+1)\pi\right)}{(2m+2)!}x^{2m+2},$$

带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\frac{x^n}{n!} + \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

$$\text{其中}\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}.$$

例

写出 $f(x)=\frac{\sin x}{1-x^2}$ 的带有 Peano 余项的三阶 Maclaurin 公式, 并求 $f'''(0)$ 的值.

注:

- 若对简单函数的 Maclaurin 公式进行加减乘除和变量替换可将 $f(x)$ 写为

$$f(x)=P_n(x)+o(x^n),\quad x\to 0,$$

  其中 $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则 $P_n(x)$ 必为 $f(x)$ 的 n 次 Maclaurin 多项式. 这是 Taylor 多项式的唯一性保证的.
- 由 Taylor 多项式的唯一性, 从 Taylor 多项式的系数中可读出 $f^{(k)}(x_0)$.

例

把 $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$ 在 $x=0$ 点展开到 x^4.

例

求下列函数的带有 Peano 余项的三阶 Maclaurin 公式:

$$(1)\, f(x)=e^{\sin x}, \qquad (2)\, g(x)=\sin(e^x).$$

注:
间接展开法的核心是把函数写成多项式加高阶无穷小,
无法得到高阶无穷小时需直接展开法 (直接计算高阶导数) 写 Taylor 公式.

例

求 $f(x) = \arctan x$ 的带 Peano 余项的 n 阶 Maclaurin 公式.

注: 求函数在某个点处的高阶导数时, 应注意技巧.

例 (习题 3.6 (A)-5)

求函数 $f(x) = xe^x$ 的带有 Lagrange 余项的 n 阶 Maclaurin 公式.

注:
带 Peano 余项的 Taylor 公式可以通过间接展开法求出,
但 Lagrange 余项一般不能通过间接展开法得到, 需直接求高阶导数.

回顾有理函数的极限计算

例

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+4x^5+2x^8}{3x^3+x^4+3x^{20}}=\lim_{x\to 0}\frac{2+4x^2+2x^5}{3+x+3x^{17}}=\frac{2}{3}.$$

观后感:

- 当 $x\to 0$ 时, 有理函数的极限仅依赖于其分子和分母的**最低次项**.
- 对于多项式, 可以用高阶无穷小来表示更高次项:

$$\begin{aligned}2x^3+4x^5+2x^8 &= 2x^3+o(x^3),\\ 3x^3+x^4+3x^{20} &= 3x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

利用 Taylor 公式求极限

核心事实

当 $x\to 0$ 时 $f(x)=ax^m+o(x^m),\ g(x)=bx^n+o(x^n),\ a,b\neq 0$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^m+o(x^m)}{bx^n+o(x^n)}=\begin{cases}\frac{a}{b}, & \text{if } m=n,\\ 0, & \text{if } m>n,\\ \infty, & \text{if } m<n.\end{cases}$$

注:

计算分式的极限的核心是:

将分子和分母分别写成一个单项式和比它更高阶的无穷小之和.

Taylor 多项式中最低次项(第一个非零的项) 就是我们需要的单项.

例

- 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{\sin^3 x}.$$

例

- 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{\sin^3 x}.$$

- 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^6 x}{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{12}}.$$

例

- 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\beta}-(1+\beta x)^{\alpha}}{x^2}.$$

例

- 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\beta}-(1+\beta x)^{\alpha}}{x^2}.$$

- 计算极限

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right).$$

例 (自己做)

计算下列极限

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x},$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\sqrt{1-x^2}}{\ln(1+x^4)},$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

例

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f''(x)<0$.

证明: $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 内二阶可导.
若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 都不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.
证明: 存在 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1 \neq \xi_2$, 使得

$$f''(\xi_1) > 0 \text{ 且 } f''(\xi_2) > 0.$$

例

设函数 $f(x)$ 满足:

- 在 $[0,1]$ 连续且在 $(0,1)$ 内二阶可导;
- $f(0)=f(1)=0$;
- 在 $[0,1]$ 上的最小值为 -1.

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

例

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 二阶可导.

若 $f'_+(a) = f'_-(b) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geqslant 4 \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

函数值估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶导数.
  当 $|x-x_0|$ 很小时, $f(x)$ 可近似为
  $$f(x) \approx T_n(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶导数.
  当 $|x-x_0|$ 很小时, $f(x)$ 可近似为
  $$f(x) \approx T_n(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$
- 这一近似的绝对误差为
  $$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(f, x_0; x)|.$$

函数值估计

- 若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶导数.
  当 $|x-x_0|$ 很小时, $f(x)$ 可近似为
  $$f(x) \approx T_n(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$
- 这一近似的绝对误差为
  $$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(f, x_0; x)|.$$
- 误差 $|R_n(x)|$ 是比 $(x-x_0)^n, x \to x_0$ 高阶的无穷小.

- 误差可由 Lagrange 余项给出

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个数.

- 误差可由 Lagrange 余项给出

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个数.

- 若 $f^{(n+1)}(x)$ 在包含 x, x_0 的某个区间上有界, $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$. 则有绝对误差限

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

- 误差可由 Lagrange 余项给出

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个数.

- 若 $f^{(n+1)}(x)$ 在包含 x, x_0 的某个区间上有界, $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$. 则有绝对误差限

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

- 若进一步 $x, x_0 \in (a,b)$,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

例

- 用 e^x 在 0 点处的 4 阶 Taylor 多项式计算常数 e 的近似值并估计误差. （已知 n 和 x, 计算近似值并估计误差.）

例

- 用 e^x 在 0 点处的 4 阶 Taylor 多项式计算常数 e 的近似值并估计误差. (已知 n 和 x, 计算近似值并估计误差.)
- 计算 $\ln 1.1$ 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4}. (已知 x 和误差, 求 n 及近似值.)

例

- 用 e^x 在 0 点处的 4 阶 Taylor 多项式计算常数 e 的近似值并估计误差. (已知 n 和 x, 计算近似值并估计误差.)
- 计算 $\ln 1.1$ 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4}.
  (已知 x 和误差, 求 n 及近似值.)
- 现利用公式
  $$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$
  计算 $\sin x$ 的近似值, 要求误差不超过 0.001,
  x 的取值应限制在什么范围?
  (已知 n 和误差, 求 x 的范围.)

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 3.6 (A)

    2. (3)
    4.
    6. (3) (6)

  习题 3.6 (B)

    1.
    3. (2)
    4.