華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§2.8 连续函数的性质

- 连续函数的运算
- 初等函数的连续性
- 有界闭区间上连续函数的性质
- 函数的一致连续性

定理（连续函数的四则运算）

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 点连续，则

- $\alpha f(x)+\beta g(x)$（α,β 为常数）在 a 点连续；
- $f(x)\cdot g(x)$ 在 a 点连续；
- 若 $g(a)\neq 0$，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 a 点连续.

定理（复合函数的连续性）

设函数 $g(x)$ 在 x_0 点连续, $f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 点连续,
则 $f \circ g(x)$ 在 x_0 点连续.

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

反函数的连续性

定理（反函数的连续性）

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增（减）且连续，值域为区间 J，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 J 上严格递增（减）且连续.

初等函数的连续性

- 基本初等函数（三角函数、指数函数、对数函数、幂函数、反三角函数）在其定义区间上是连续的. 这里定义区间指包含于定义域的区间.
- 初等函数由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合得到, 因此在其定义区间上仍然是连续的.
- 初等函数在定义域上未必连续.

  如：函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, 不包含任何区间. $f(x)$ 在定义域中任意点都不连续.

若 $f(x)$ 在点 a 连续，则

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

因此，计算函数趋于连续点 a 的极限只需计算 $f(a)$ 的值.

例

计算极限

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \cos(1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}.$$

定理（有界性定理）

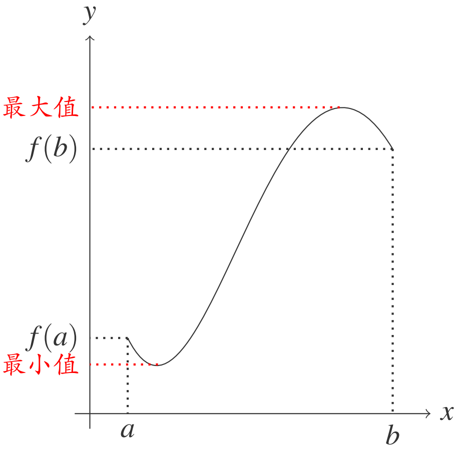
闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必定有界.

定理的条件闭区间和连续性都必不可少.

- $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上连续, 但无界.
- $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $[-1,1]$ 上不连续, 且无界.

定理（最值定理）

闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必定有最大值和最小值.



最值定理

定理的条件闭区间和连续性都必不可少.

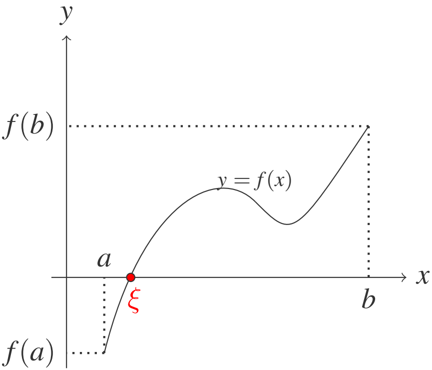
- $f(x)=x^2$ 在区间 $(0,1)$ 上连续, 但无最大最小值.
- $f(x)=\arctan x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 但不能取到最值.
- $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$

  在区间 $[0,2]$ 上不连续, 既没有最大值也没有最小值.

定理（零点存在定理）

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 若$f(a)\cdot f(b)<0$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(\xi)=0.$$



例

证明方程 $x2^x = 1$ 在 $(0,1)$ 至少有一个根.

例

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) < a, f(b) > b$,
证明: 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

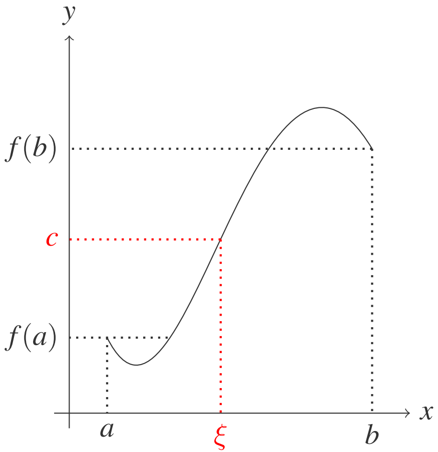
$$f(\xi) = \xi.$$

有界闭区间上连续函数的介值定理

定理（介值定理）

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数且 $f(a) \neq f(b)$. 则对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 间的任一数 c, 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使

$$f(\xi) = c.$$



介值定理的应用

推论

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，
则其值域 $f([a,b])$ 也是一个闭区间（可退化为一点）.

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\alpha,\beta>0$.
证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta}.$$

函数的连续性反映的是函数局部的性质.

讨论函数 $f(x)$ 在 a 的连续性与 a 的值密切相关.

设 $0 < a < 1$，函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 a 处连续.

$\forall 0 < \varepsilon < 1$，有 $\delta = \frac{1}{2}a^2\varepsilon$，当 $|x - a| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

- 若考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 的连续性, 则可取 $\delta = \frac{1}{8}\varepsilon$. 对于这一 δ, 无论 a 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 中如何变化, 只要 $|x - a| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. 因此找到了与 a 无关的 δ.
- 若考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 的连续性, 无法找到公共的 δ.

一致连续

定义（一致连续）

设函数 $f(x)$ 在区间 I（或开或闭或无穷）上有定义.

若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ (仅与 ε 有关),

使得 $\forall x_1, x_2\in I$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

一致连续与连续的区别

- 一致连续的定义中 x_1, x_2 都在区间 I 中变化,

  只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

  连续的定义中 a 是取定的, 只有 x 在变化,

  只要 $|x - a| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

- 一致连续的定义中 δ 由 ε 决定, 与 x_1 和 x_2 的具体位置无关.

  连续的定义中 δ 随所讨论的点 a 的不同而改变.

例

函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,\infty)$ 上一致连续.

定理

区间 I 上的一致连续函数必是区间 I 上的连续函数.

不一致连续

- 函数 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续.

  $\Leftrightarrow$

- $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0$，$\exists x_1, x_2 \in I$，

  使得 $|x_1 - x_2| < \delta$ 但 $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$.

  $\Leftrightarrow$

- $\exists \varepsilon_0 > 0$，$\exists \{x_n\}, \{x_n'\} \subset I$,

  使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_n') = 0$，但 $|f(x_n) - f(x_n')| \geqslant \varepsilon_0$.

不一致连续

例

函数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $(c, 1)$ $(c > 0)$ 上一致连续,
但在 $(0, 1)$ 上不一致连续.

有界闭区间上的一致连续函数

定理（Cantor 定理）

闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必定在区间 $[a,b]$ 上一致连续.

推论

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 连续且 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在,

则 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内一致连续.

华南理工大学
South China University of Technology

作业:

- 习题 2.8 (A)
  2. (3)
  3. (2) (6) (9)

  习题 2.8 (B)
  4.