华工包打听

资料声明

关于资料

- 来源　由同学投稿，包打听有偿收集、整理
- 分享　资料无偿分享给同学使用

注意事项

资料不保证100%正确，仅供参考，切勿依赖
资料如有错误，请反馈给包打听微信
未经授权不能转作他用

华工新生答疑、校园指引、入学考试、感情树洞、华工黑市群、学习群、闲置群、校园资讯、校内通知、吃喝玩乐、兼职、家教、大学学车、考研、留学四六级(星球)等一站式服务。

·微信号——即时互动，丰富社群，校园生活资讯

·公众号——学习资料校园百事，学校通租

·包星球——吃喝玩乐兼职考研留学信息，应有尽有

·QQ口号—-百事打听！

包包微信　包打听公众号

最全能校园服务平台
校园大小事皆可打听

华南理工大学 2009 级新生入学数学试卷

2009.9.9 晚上

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1、91^{92} 除以 100 的余数是 <u>81</u>

2、函数 $f\left(x\right)=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ 的最大值为 $\underline{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$

3、设 $f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left[a^{2x}+2\left(ab\right)^{x}-b^{2X}+1\right]$（其中 $a>b>0$），则使的取值范围是 $\underline{x>\log_{\frac{a}{b}}\left(\sqrt{2}-1\right)}$

4、学校开设 9 门课程供学生选修，其中 A、B、C 三门由于上课时间相同，至多选一门，学校规定每位同学必须选修 4 门。问共有 <u>75</u> 种不同的选修方案（用数值作答）

5、如图（略），在 ΔABC 中，$AB=2, AC=1, \angle BAC=120, D$ 是边 BC 上的一点，且 $DC=2BD$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\underline{-\frac{8}{3}}$

6、设 z_1, z_2 都是复数，且 $\left|z_1\right|=3, \left|z_2\right|=5, \left|z_1+z_2\right|=7$，则 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ 的值是 $\underline{\pi}$

7、某公司用 60 万元资金计划投资甲、乙两个项目，按要求对项目甲的投资不少于对项目乙的 $\frac{2}{3}$ 倍，且对每个项目的投资不能低于 5 万元。对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润，对项目乙甲每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润，该公司规划投资后，在这两个项目上共可获得的最大利润为 <u>31.2</u> 万元

8、设一元二次方程 $x^2+bx+c=0$，其中系数 b, c 分别是将以匀称色子接连投掷两次先后出现的点数，则方程有重根的概率为 $\underline{\frac{1}{18}}$

9、已知六棱锥的高为 h，底面积是全面积 S 的四分之一，则 S 与 h 的函数关系式 $S\left(h\right)=\underline{\sqrt{3}h^2}$

10、设 AB 是抛物线 $y^2=x$ 上长为 2 的动弦，则线段 AB 中点 M 的轨迹方程是 $\underline{\left(x-y^2\right)\left(4y^2+1\right)=1}$

二、 解答题 （每题 10 分，共 60 分）

11、设函数 $f\left(x\right)=a\sin^2 x+2\cos x-a-2$ 的最大值为 m。试问：随 a 的变化，m 作怎样的变化？在以 a 为横坐标，m 为纵坐标的直觉坐标系中画出反映这种变化的图像

解 设 $\cos x=t$，则 $y=-at^2+2t-2\ \left(\left|t\right|\le 1\right)$

当 $a=0$ 时，$y=2t-2\ \left(\left|t\right|\le 1\right)$，则 $m=y_{\max}=2-2=0$

当 $a\ne 0$ 时，有 $y=-a\left(t-\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{1}{a}-2\ \left(\left|t\right|\le 1\right)$，则

当 $0<\dfrac{1}{a}\le 1$，即 $a>1,t=\dfrac{1}{a}$ 时，$m=y_{\max}=\dfrac{1}{a}-2$

当 $\dfrac{1}{a}>1$，即 $0<a<1,t=1$ 时，$m=y_{\max}=-a$

当 $a<0$，即 $0<a<1,t=1$ 时，$m=y_{\max}=-a$

故 $m=\begin{cases}-a,a<1\\ \dfrac{1}{a}-2,a\ge 1\end{cases}$ （图略）

12 解关于实数 x 的不等式 $\sqrt{2ax-a^2}>1-x$。其中 a 是大于零的常数。

解 同解不等式组为：$\begin{cases}1-x\ge 0\\ 2ax-a^2>\left(1-x\right)^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x<0\\ 2ax-a^2\ge 0\end{cases}$

因为 $a>0$，可化简为 $\begin{cases}x\le 1\\ x^2-2(a+1)x+a^2+1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1\\ x\ge \dfrac{a}{2}\end{cases}$

当 $0<a\le 2$ 时 $\begin{cases}x\le 1\\ a+1-\sqrt{2a}<x<a+1+\sqrt{2a}\end{cases}$ 或 $x>1$

当 $a>2$ 时 $\begin{cases}x\le 1\\ 1<1+\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)<x<a+1+\sqrt{2a}\end{cases}$ 或 $x\ge \dfrac{a}{2}$

综上所述，当 $0<a\le 2$ 时解集为 $\left\{x\left|x>a+1-\sqrt{2a}\right.\right\}$，当 $a>2$ 时解集为 $\left\{x\left|x\ge \dfrac{a}{2}\right.\right\}$

13 正方形 ABCD 的边长为 4，E、F 分别是的中点 AB、AD，作 GC 垂直于 ABCD 所在的平面，且 GC=2，求点到平面的距离。

解 如图所示（略），连接 EG、FG、EF、AC、BD，设 EF、BD 分别交 AC 于 H、O。

由题设可知：EF//BD, H 为 AO 的中点，BD//平面 EFG, 求 BD 与平面 EFG 的距离即可

$\because BD\perp AC,\therefore EF\perp HC$，又 $\because GC\perp ABCD$ 平面，$\therefore GC\perp EF$

可知$EF\perp HCG$平面，从而平面$EFG\perp HCG$平面，HG是两垂直平面的交线
作$OK\perp HG$交于点K，$OK\perp EFG$平面，OK的长即为所求的距离

由$\Delta HKO\sim\Delta HGC$可知：$OK=\dfrac{HO\cdot GC}{HG}=\dfrac{HO\cdot GC}{\sqrt{HC^2+GC^2}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{22}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$

14 已知直线$y=x+m$交曲线$x^2+2y^2+4y-1=0$于A,B两点，P是这直线上的点，且$\left|PA\right|\cdot\left|PB\right|=2$。求当$m$变化时，点$P$的轨迹方程，并指出它是什么图形。

解　由$\begin{cases}y=x+m\\x^2+2y^2+4y-1=0\end{cases}$消去$y$得方程$3x^2+4\left(m+1\right)x+2m^2+4m-1=0$

方程要有两个不等的实根，有判别式$\Delta>0$可得$\dfrac{-2-3\sqrt{2}}{2}<m=y-x<\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$

该方程的两根是点A、B的横坐标，设为x_A,x_B

设$P\left(x,y\right)$由已知条件，有$\left|x-x_A\right|\cdot\left|x-x_B\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|PA\right|\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|PB\right|=1$

即$\left|x^2-\left(x_A+x_B\right)x+x_Ax_B\right|=1$

利用韦达定理，上式可写为$\left|x^2+\dfrac{4}{3}\left(m+1\right)x+\dfrac{2m^2+4m-1}{3}\right|=1$

将$y=x+m$代入上式消去m，可得$\left|x^2+2y^2+4y-1\right|=3$

化简得$x^2+2y^2+4y-4=0$及$x^2+2y^2+4y+2=0$

即$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{\left(y+1\right)^2}{3}=1$及$x^2+2(y+1)^2=0$

从而，当m变化时，点P的轨迹为椭圆$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{\left(y+1\right)^2}{3}=1$在两直线$y-x=\dfrac{-2-3\sqrt{2}}{2},y-x=\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$之间的部分，及点$\left(0,-1\right)$。

5、设数列$\left\{x_n\right\}$满足$x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}\cdot x_n},\left(n=1,2,3,\cdots\right)$。

（1）求数列$\left\{x_n\right\}$的通项；（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解　由$\ln x_{n+2}=\dfrac{1}{2}\left(\ln x_{n+1}+\ln x_n\right)$，令$y_n=\ln x_n$，则有$y_{n+2}=\dfrac{1}{2}\left(y_{n+1}+y_n\right)$

将上式变形转化为一阶递推：$y_{n+2}-y_{n+1}=-\frac{1}{2}\left(y_{n+1}-y_n\right)$

依次有 $y_{n+2}-y_{n+1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(y_n-y_{n-1}\right)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(y_2-y_1\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2$

故 $y_{n+2}=y_{n+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2=\cdots=\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\ln 2=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\ln 2$

从而 $x_{n+2}=2^{\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}\ \left(n=1,2,3,\cdots\right)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2^{\frac{2}{3}}$

6、在 ΔABC 中，已知 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\cos^2\frac{B}{2}$。

证明：（1）$\tan\frac{A}{2},\tan\frac{\pi}{6},\tan\frac{C}{2}$ 成等比数列；（2）$\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}$ 成等比数列

证　（1）在 ΔABC 中，$B=\pi-A-C$，可得 $\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2}$

由已知条件得 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}$,

$\cos A+\cos C=4\sin^2\frac{B}{2}, 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\cos^2\frac{A+C}{2}$,

从而 $\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$，

即 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$，

$3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$，因此 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}=\tan^2\frac{\pi}{6}$

故，$\tan\frac{A}{2},\tan\frac{\pi}{6},\tan\frac{C}{2}$ 成等比数列；

（2）$\because \frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}$，$\therefore \cot\frac{B}{2}=\tan\frac{A+C}{2}=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{3}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$

$\cot\frac{B}{2}=\frac{3}{2}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$

因此 $\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}$ 成等比数列