因此，$\Phi\left(\frac{0.05n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\geqslant 0.975$，由 $\Phi(1.96)=0.975$ 知 $\frac{0.05n}{\sqrt{np(1-p)}}\geqslant 1.96$，即 $n\geqslant 39.2^2 p(1-p)$．由于

$$p(1-p)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-p\right)^2\leqslant\frac{1}{4}，有 39.2^2 p(1-p)\leqslant 39.2^2\times\frac{1}{4}=384.16，所以 n\geqslant$$

384.16，即 n 至少取 385 才能满足要求．

六、习题详解

5.1　假设 X 和 Y 为随机变量，且满足 $E[X]=-2, E[Y]=2, \mathrm{Var}[X]=1, \mathrm{Var}[Y]=9$，$X$ 与 Y 的相关系数 $r(X,Y)=-0.5$．试由切比雪夫不等式确定满足不等式 $P\{|X+Y|\geqslant 6\}\leqslant c$ 的最小正数 c 之值．

解　因为

$$\begin{aligned}
E[X+Y]&=E[X]+E[Y]=-2+2=0,\\
\mathrm{Var}[X+Y]&=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2\mathrm{cov}(X,Y)\\
&=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2r(X,Y)\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}\\
&=1+9+2\times(-0.5)\times\sqrt{1}\times\sqrt{9}=7,
\end{aligned}$$

由切比雪夫不等式 $P(|(X+Y)-E[X+Y]|\geqslant 6)\leqslant\frac{\mathrm{Var}[X+Y]}{6^2}$，有

$$P(|X+Y|\geqslant 6)\leqslant\frac{7}{6^2}=\frac{7}{36},$$

得 $c=\frac{7}{36}$．

5.2　设 X_1, X_2 为随机变量且 $E[X_i]=0, \mathrm{Var}[X_i]=1(i=1,2)$．证明：对任意的 $\lambda>0$，有 $P\{X_1^2+X_2^2\geqslant 2\lambda\}\leqslant\frac{1}{\lambda}$．

证明　不妨设 (X_1,X_2) 为二维连续型随机变量，其密度函数为 f_{X_1,X_2}，由于

$$E[X_1^2+X_2^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f_{X_1,X_2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}
P(X_1^2+X_2^2\geqslant 2\lambda)&=\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 2\lambda}f_{X_1,X_2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 2\lambda}\frac{x^2+y^2}{2\lambda}f_{X_1,X_2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+y^2}{2\lambda}f_{X_1,X_2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2\lambda}E[X_1^2+X_2^2]=\frac{1}{2\lambda}E[X_1^2]+\frac{1}{2\lambda}E[X_2^2]\\
&=\frac{1}{2\lambda}\{\mathrm{Var}[X_1]+(E[X_1])^2\}+\frac{1}{2\lambda}\{\mathrm{Var}[X_2]+(E[X_2])^2\}\\
&=\frac{1}{2\lambda}(1+0)+\frac{1}{2\lambda}(1+0)=\frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

5.3　在一枚均匀正四面体的四个面上分别画上 1,2,3,4 个点．现将该四面体重复投掷，$X_i(i=1,2,3,\cdots)$为第 i 次投掷向下一面的点数．试求：当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛的极限．

解　已知 $X_i(i=1,2,3,\cdots)$的分布列为

X_i	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E[X_i^2]=\sum_{k=1}^{4}k^2\cdot P(X_i=k)=\sum_{k=1}^{4}k^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{2},\ i=1,2,3,\cdots.$$

可见，$X_1^2,X_2^2,X_3^2,\cdots$是独立同分布的随机序列，且有相同的数学期望$\frac{15}{2}$，满足辛钦大数定律，因此，对任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{15}{2}\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$，即$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛的极限为$\frac{15}{2}$．

5.4　设$\{X_n\}$是独立的随机变量序列，且假设

$$P\{X_n=\sqrt{\ln n}\}=P\{X_n=-\sqrt{\ln n}\}=0.5,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

问：$\{X_n\}$是否服从大数定律？

解　$E[X_i]=\sqrt{\ln i}\times0.5+(-\sqrt{\ln i})\times0.5=0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X_i]&=E[X_i^2]-(E[X_i])^2\\&=(\sqrt{\ln i})^2\times0.5+(-\sqrt{\ln i})^2\times0.5-0^2=\ln i,\quad i=1,2,3,\cdots,\end{aligned}$$

则

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[X_i]\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln i,\quad n=1,2,3,\cdots.\end{aligned}$$

利用切比雪夫不等式：对任意 $\varepsilon>0$，由

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]}{\varepsilon^2},$$

得

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-0\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln i}{\varepsilon^2}\leqslant\frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln n}{\varepsilon^2}=\frac{\ln n}{n\varepsilon^2},$$

从而有

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n\varepsilon^2} = 0,$$

得

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0 .$$

即随机变量序列$\{X_n\}$服从大数定律．

5.5　设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，且假设$E[X_n]=2$，$\mathrm{Var}[X_n]=6$，证明：$\dfrac{X_1^2+X_2X_3+X_4^2+X_5X_6+\cdots+X_{3n-2}^2+X_{3n-1}X_{3n}}{n}\xrightarrow{P}a$，$n\to+\infty$，并确定常数$a$之值．

解　令$Y_k=X_{3k-2}^2+X_{3k-1}X_{3k}$，$k=1,2,3,\cdots$，因为$\{X_k\}$是独立同分布的随机变量序列，所以$\{Y_k\}$也是独立同分布的随机变量序列，且

$$\begin{aligned}E[Y_k] &= E[X_{3k-2}^2+X_{3k-1}X_{3k}] = E[X_{3k-2}^2]+E[X_{3k-1}X_{3k}]\\ &= \mathrm{Var}[X_{3k-2}]+(E[X_{3k-2}])^2+E[X_{3k-1}]E[X_{3k}]\\ &= 6+2^2+2\times 2=14,\ k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

可见，序列$\{Y_k\}$满足辛钦大数定律的条件，根据辛钦大数定律，得

$$\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}\xrightarrow{P}14,\quad n\to+\infty$$

即

$$\frac{X_1^2+X_2X_3+X_4^2+X_5X_6+\cdots+X_{3n-2}^2+X_{3n-1}X_{3n}}{n}\xrightarrow{P}14,\quad n\to+\infty$$

所以$a=14$.

5.6　设随机变量$X\sim B(100,0.8)$，试用棣莫弗－拉普拉斯定理求$P\{80\leqslant X<100\}$的近似值．

解　由$X\sim B(100,0.8)$知$E[X]=100\times 0.8=80$，$\mathrm{Var}[X]=100\times 0.8\times 0.2=16$．根据棣莫弗－拉普拉斯定理近似计算，有

$$\begin{aligned}P(80\leqslant X<100) &= P(80\leqslant X\leqslant 99)\approx \Phi\left(\frac{99-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}\right)-\Phi\left(\frac{80-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{99-80}{\sqrt{16}}\right)-\Phi\left(\frac{80-80}{\sqrt{16}}\right)=\Phi(4.75)-\Phi(0)\approx 1-0.5=0.5.\end{aligned}$$

值得注意的是，上述计算是近似计算．若对二项分布的概率直接计算，则

$$P(80\leqslant X<100)=\sum_{k=80}^{99}\binom{100}{k}\times 0.8^k(1-0.8)^{100-k}=0.5595$$

若用修正公式近似计算，有

$$\begin{aligned}P(80\leqslant X<100) &= P(80\leqslant X\leqslant 99)\\ &\approx \Phi\left(\frac{99+0.5-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}\right)-\Phi\left(\frac{80-0.5-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{99.5-80}{\sqrt{16}}\right)-\Phi\left(\frac{79.5-80}{\sqrt{16}}\right)=\Phi(4.875)-\Phi(-0.125)\\ &= \Phi(4.875)-1+\Phi(0.125)\approx 0.5497 .\end{aligned}$$

可见,与概率值 0.5595 相比,用修正近似公式的结果 0.5497 比前面近似计算的结果 0.5 精确.

5.7　一仪器同时收到 50 个信号 $X_k, k=1,2,\cdots,50$,设 $X_1, X_2, \cdots, X_{50}$ 相互独立,且都服从区间[0,9]上的均匀分布,试求 $P\left(\sum_{k=1}^{50} X_k > 250\right)$ 的近似值.

解　由 $X_k \sim U(0,9), k=1,2,\cdots,50$,有

$$E[X_k]=\frac{9}{2},\ \mathrm{Var}[X_k]=\frac{1}{12}(9-0)^2=\frac{27}{4}.$$

根据林德伯格-莱维定理近似计算,有

$$P\left(\sum_{k=1}^{50} X_k > 250\right)=1-P\left(\sum_{k=1}^{50} X_k \leqslant 250\right)$$
$$\approx 1-\Phi\left(\frac{250-50\times\frac{9}{2}}{\sqrt{50\times\frac{27}{4}}}\right)$$
$$=1-\Phi(1.36)=1-0.913=0.087.$$

5.8　一个复杂的系统由 n 个相互独立起作用的部件所组成,每个部件损坏的概率为 0.10. 为了使整个系统正常运行,至少需要 80% 或 80% 以上的部件正常工作. 问: n 至少为多大才能使整个系统正常工作的概率不小于 95%?

解　将 n 个部件编号:$1,2,\cdots,n$,记

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{若第 } i \text{ 个部件正常工作}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $X_i \sim B(1,0.9)$,且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

依题意,要求

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant 0.8\right) \geqslant 0.95,$$

即要求满足 $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant 0.8n\right) \geqslant 0.95$.

根据棣莫弗-拉普拉斯定理近似计算,有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant 0.8n\right) \approx 1-\Phi\left(\frac{0.8n-n\times 0.9}{\sqrt{n\times 0.9\times 0.1}}\right)=1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right).$$

由 $\Phi(1.65)=0.95$,应有 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geqslant 1.65$,即 $n \geqslant (3\times 1.65)^2=24.5025$,取 $n=25$.

5.9　某大卖场某种商品价格波动为随机变量,设第 k 天(较前一天)的价格变化为 $X_k, k=1,2,\cdots,n$. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布,都服从$[-0.15, 0.15]$上的均匀分布. 令 $Y_n=Y_0+\sum_{i=1}^{n} X_i$ 表示第 n 天的价格,而现在价格 $Y_0=50$. 用中心极限定理估计概率

$P(48\leqslant Y_{60}\leqslant 52)$之值．

解 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量序列，它们的数学期望 μ 和方差 σ^2 为

$$\mu=\frac{-0.15+0.15}{2}=0,\quad \sigma^2=\frac{1}{12}[0.15-(-0.15)]^2=0.0075.$$

根据林德伯格－莱维定理近似计算，有

$$\begin{aligned}P(48\leqslant Y_{60}\leqslant 52)&=P\left(48\leqslant Y_0+\sum_{k=1}^{60}X_k\leqslant 52\right)=P\left(48-50\leqslant \sum_{k=1}^{60}X_k\leqslant 52-50\right)\\&\approx\Phi\left(\frac{2-60\mu}{\sqrt{60\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{-2-60\mu}{\sqrt{60\sigma^2}}\right)\\&=\Phi(2.98)-\Phi(-2.98)=2\Phi(2.98)-1\\&=2\times 0.99856-1=0.9971.\end{aligned}$$

5.10 设某汽车销售点每天出售的汽车数量服从参数为 $\lambda=2$ 的泊松分布，若 200 天都销售汽车，且每天出售的汽车数是相互独立的，求 200 天售出 380 辆以上汽车的概率．

解 设 200 天中等 i 天出售的汽车数量为 X_i，$i=1,2,\cdots,200$，则由题意知，

$$X_i\sim \mathrm{Pois}(2),\ i=1,2,\cdots,200,\quad \mu=E[X_i]=2,\quad \sigma^2=\mathrm{Var}[X_i]=2,$$

200 天售出汽车的数量为 $\sum\limits_{i=1}^{200}X_i$，则

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{i=1}^{200}X_i>380\right)&=1-P\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\leqslant 380\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{380-200\mu}{\sqrt{200\sigma^2}}\right)\\&=1-\Phi\left(\frac{380-200\times 2}{\sqrt{200\times 2}}\right)=1-\Phi(-1)=\Phi(1)=0.8413.\end{aligned}$$

5.11 假设某洗衣店为第 i 个顾客服务的时间 X_i 服从区间[5,53]（单位：min）上的均匀分布，且对每个顾客是相互独立的．试问：当 $n\to+\infty$ 时，n 次服务时间的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 以概率 1 收敛于何值？

解 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，它们的数学期望 μ 为

$$\mu=E[X_k]=\frac{5+53}{2}=29,\quad k=1,2,3,\cdots$$

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 满足柯尔莫哥洛夫强大数定律，从而有

$$P\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-29)=0\right)=1,$$

即

$$P\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=29\right)=1.$$

当 $n\to+\infty$ 时，n 次服务时间的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ 以概率 1 收敛于数值 29．