華南理工大學
South China University of Technology

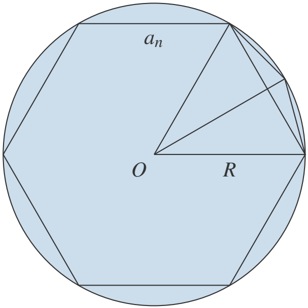
工科数学分析

刘青青

§2.1 函数的极限

- 极限概念的引入
- 自变量趋于有限值时函数的极限
- 单侧极限
- 自变量绝对值无限增大时函数的极限
- 函数值趋于无穷

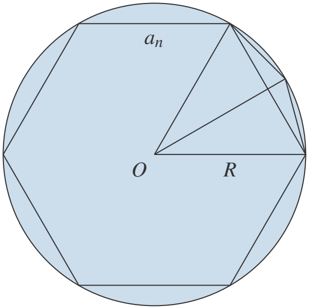
极限概念的引入



刘徽《九章算术注》之割圆术:

"割之弥细, 所失之弥少. 割之又割, 以至不可割, 则与圆周合体, 而无所失矣."

极限概念的引入

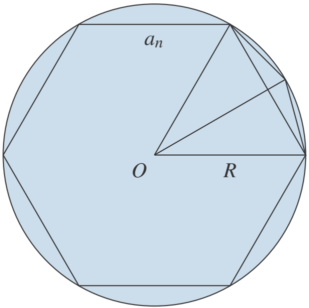


刘徽《九章算术注》之割圆术:

"割之弥细, 所失之弥少. 割之又割, 以至不可割, 则与圆周合体, 而无所失矣."

从圆的内接正 6 边形出发, 每次将边加倍, 用正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积(或周长)近似圆的面积(或周长).

极限概念的引入



边数	面积
$6\times 2^0=6$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$6\times 2^1=12$	3
$6\times 2^2=24$	3.1
$6\times 2^3=48$	3.13
$6\times 2^4=96$	3.14
$6\times 2^5=192$	3.141
$\vdots$	$\vdots$
$6\times 2^9=3072$	3.1416

例

求曲线 $y = x^2$ 在点 $P(1,1)$ 处的切线的斜率.

- 在曲线上靠近点 $P(1,1)$ 处取一点 $Q(x,x^2)$,
  用割线的斜率近似切线的斜率.

x	PQ 斜率
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	PQ 斜率
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

- 随着点 Q 向 P 靠近, 割线 PQ 的斜率向 2（固定的数）靠近.

直观的极限概念

直观的极限概念

设 $f(x)$ 是一个函数,
若自变量 x 靠近一个固定的点 a 时,
函数值 $f(x)$ 无限靠近一个固定的数 A,
则 A 是函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限.

直观的极限概念

设 $f(x)$ 是一个函数,
若自变量 x 靠近一个固定的点 a 时,
函数值 $f(x)$ 无限靠近一个固定的数 A,
则 A 是函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限.

问题:

直观的极限概念

直观的极限概念

设 $f(x)$ 是一个函数,
若自变量 x 靠近一个固定的点 a 时,
函数值 $f(x)$ 无限靠近一个固定的数 A,
则 A 是函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限.

问题:

- 怎样才是无限靠近?

直观的极限概念

设 $f(x)$ 是一个函数,
若自变量 x 靠近一个固定的点 a 时,
函数值 $f(x)$ 无限靠近一个固定的数 A,
则 A 是函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限.

问题:

- 怎样才是无限靠近?
- 能否用逻辑的语言描述无限靠近?

直观的极限概念

- **无限靠近:**

  想靠多近就可以靠多近.

直观的极限概念

- 无限靠近:

  想靠多近就可以靠多近.

- 直观的极限概念:

直观的极限概念

- 无限靠近:

  想靠多近就可以靠多近.

- 直观的极限概念:
  - 在 x 靠近 a 的过程中, $f(x)$ 无限靠近 A.

直观的极限概念

- 无限靠近:

  想靠多近就可以靠多近.

- 直观的极限概念:
  - 在 x 靠近 a 的过程中, $f(x)$ 无限靠近 A.
  - 无论希望 $f(x)$ 和 A 靠近到什么程度,

    都可以在 x 靠近 a 的过程中实现.

例：x 趋于 0 时, $f(x) = x^2$ 的极限.

直观的极限概念

例：x 趋于 0 时，$f(x) = x^2$ 的极限.

- 直观感受：

  x 趋于 0 时，$f(x) = x^2$ 无限靠近 $A = 0$.

直观的极限概念

问题:

当 x 趋于 0 时, $f(x)=x^2$ 是不是无限靠近 $A=0$ 呢?

直观的极限概念

问题:

当 x 趋于 0 时, $f(x) = x^2$ 是不是无限靠近 $A = 0$ 呢?

- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 1$?
  Easy: 只需 $|x| < 1$, 即 x 和 0 的距离小于 1.

问题:

当 x 趋于 0 时, $f(x) = x^2$ 是不是无限靠近 $A = 0$ 呢?

- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 1$?

  Easy: 只需 $|x| < 1$, 即 x 和 0 的距离小于 1.

- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 0.01$?

  Easy: 只需 $|x| < 0.1$, 即 x 和 0 的距离小于 0.1.

直观的极限概念

问题:

当 x 趋于 0 时, $f(x) = x^2$ 是不是无限靠近 $A = 0$ 呢?

- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 1$?

  Easy: 只需 $|x| < 1$, 即 x 和 0 的距离小于 1.
- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 0.01$?

  Easy: 只需 $|x| < 0.1$, 即 x 和 0 的距离小于 0.1.
- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 0.000001$?

  ……

直观的极限概念

问题:

当 x 趋于 0 时, $f(x) = x^2$ 是不是无限靠近 $A = 0$ 呢?

- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 1$?
  Easy: 只需 $|x| < 1$, 即 x 和 0 的距离小于 1.
- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 0.01$?
  Easy: 只需 $|x| < 0.1$, 即 x 和 0 的距离小于 0.1.
- 能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < 0.000001$?
  ......
- Crazy Idea:
  用 ε 表示一个任意的正数,
  能否让它们的距离 $|f(x) - A| = |x^2 - 0| < \varepsilon$?
  只需要 $|x| < \sqrt{\varepsilon}$.

极限的逻辑定义

- 极限的严格定义由 Weierstrass 在 1841-1856 年间给出。

极限的逻辑定义

- 极限的严格定义由 Weierstrass 在 1841-1856 年间给出。

极限的定义（$\varepsilon-\delta$）

设函数 $f(x)$ 在 a 的一个空心邻域内有定义。若

- $\forall\varepsilon>0$,
- $\exists\delta>0$, 使得
- 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

则称 A 是函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限, 表示为

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0,$
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

ε 的理解:

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall\varepsilon > 0,$
- $\exists\delta > 0,$ 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

ε 的理解：

- ε 控制 $f(x)$ 与 A 的距离（靠近程度）；

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0,$
- $\exists \delta > 0,$ 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

ε 的理解：

- ε 控制 $f(x)$ 与 A 的距离（靠近程度）；
- ε 的任意性：$f(x)$ 与 A 无限靠近.

δ 的理解:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

δ 的理解:

- δ 控制

  为了 $f(x)$ 与 A 的距离小于 ε,

  自变量 x 允许的变化范围;

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

δ 的理解:

- δ 控制

  为了 $f(x)$ 与 A 的距离小于 ε,

  自变量 x 允许的变化范围;

- δ 的存在性:

  $f(x)$ 与 A 靠近到 ε 的程度能实现,

  只需自变量满足条件 $0 < |x - a| < \delta$.

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

δ 的理解:

- δ 控制
  为了 $f(x)$ 与 A 的距离小于 ε,
  自变量 x 允许的变化范围;
- δ 的存在性:
  $f(x)$ 与 A 靠近到 ε 的程度能实现,
  只需自变量满足条件 $0 < |x-a| < \delta$.
- δ 与 ε 有关。

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$0 < |x-a|$ 的理解:

- $0 < |x-a|$ 表示 $x \neq a$;

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$0 < |x-a|$ 的理解:

- $0 < |x-a|$ 表示 $x \neq a$;
- $f(x)$ 在 $x \to a$ 时的极限
  仅依赖于 $f(x)$ 在 a 附近的性态;

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$0 < |x-a|$ 的理解:

- $0 < |x-a|$ 表示 $x \neq a$;
- $f(x)$ 在 $x \to a$ 时的极限
  仅依赖于 $f(x)$ 在 a 附近的性态;
- $f(x)$ 在 $x \to a$ 时
  是否有极限、
  极限是多少都与
  f 在 a 点的取值无关;

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$0 < |x-a|$ 的理解:

- $0 < |x-a|$ 表示 $x \neq a$;
- $f(x)$ 在 $x \to a$ 时的极限
  仅依赖于 $f(x)$ 在 a 附近的性态;
- $f(x)$ 在 $x \to a$ 时
  是否有极限、
  极限是多少都与
  f 在 a 点的取值无关;
- $f(x)$ 在 $x \to a$ 时有极限
  不要求 $f(x)$ 在 a 有定义.

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

- 无论所希望的 $f(x)$ 与 A 靠近的程度 ε 是多少;

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

- 无论所希望的 $f(x)$ 与 A 靠近的程度 ε 是多少;
- 都能找到 δ;

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta > 0$, 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

- 无论所希望的 $f(x)$ 与 A 靠近的程度 ε 是多少；
- 都能找到 δ;
- 只要把自变量 x 控制在 $0 < |x-a| < \delta$ 的范围，

极限逻辑定义的理解

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

- $\forall\varepsilon > 0,$
- $\exists\delta > 0,$ 使得
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,
- 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

- 无论所希望的 $f(x)$ 与 A 靠近的程度 ε 是多少;
- 都能找到 δ;
- 只要把自变量 x 控制在 $0 < |x-a| < \delta$ 的范围,
- $f(x)$ 与 A 靠近到比 ε 更近的程度就可以实现。

证明函数的极限

例

利用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

证明:

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\exists \delta = \sqrt{\varepsilon}$,
- 当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 有

$$|x^2 - 0| < \delta^2 = \varepsilon.$$

- 因此, 由极限的定义,

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

分析:

- $\forall \varepsilon > 0$, 目标是

$$|x^2 - 0| < \varepsilon.$$

- 这一不等式在

$$|x| < \sqrt{\varepsilon}$$

时成立.

证明函数的极限

利用定义证明极限的一般方法:

证明函数的极限

利用定义证明极限的一般方法:

- 从不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 出发;

利用定义证明极限的一般方法:

- 从不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发;
- 找合适的 δ 使得
  点 a 空心 δ 邻域 $\{x:0<|x-a|<\delta\}$ 包含于
  不等式的解集中.

证明函数的极限

利用定义证明极限的一般方法:

- 从不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 出发;
- 找合适的 δ 使得
  点 a 空心 δ 邻域 $\{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ 包含于
  不等式的解集中.
- 本质上是“解”不等式的问题.

例

证明：$\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$.

例

证明： $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$.

分析：

- $\forall \varepsilon > 0$, 考虑不等式

$$\left|\sin x - \sin a\right| < \varepsilon.$$

例

证明：$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

分析：

- $\forall\varepsilon>0$, 考虑不等式

$$\left|\sin x-\sin a\right|<\varepsilon.$$

- 直接解不等式困难，可先将不等式左侧适当放大

$$\left|\sin x-\sin a\right|=2\left|\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant|x-a|.$$

例

证明：$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

分析：

- $\forall\varepsilon>0$, 考虑不等式
$$\left|\sin x-\sin a\right|<\varepsilon.$$
- 直接解不等式困难，可先将不等式左侧适当放大
$$\left|\sin x-\sin a\right|=2\left|\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant |x-a|.$$
- 满足不等式 $|x-a|<\varepsilon$ 的 x 一定满足 $\left|\sin x-\sin a\right|<\varepsilon$.

例

证明：$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a.$

证明：

- $\forall\varepsilon>0,$
- 存在 $\delta=\varepsilon$,当 $0<|x-a|<\varepsilon$ 时，

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant|x-a|<\varepsilon.$$

- 因此，由极限的定义知：$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a.$

证明函数极限的常用策略:

证明函数的极限：常用策略

证明函数极限的常用策略:

- 利用定义证明函数极限的核心是:
  通过求解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 去寻找 δ.

证明函数极限的常用策略:

- 利用定义证明函数极限的**核心是:**
  通过求解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 去寻找 δ.
- 直接求解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 通常非常困难,
  我们的**目标不是完全地求解不等式,**
  而仅仅是找到不等式解集中点 a 的一个空心邻域.
- 通常可采用如下**策略:**
  把 $|f(x)-A|$ 适当放大

$$|f(x)-A| \leqslant \varphi(|x-a|)$$

  使得 $\varphi(|x-a|)<\varepsilon$ 容易求解.

证明函数极限的常用策略:

- 利用定义证明函数极限的**核心是:**
  通过求解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 去寻找 δ.
- 直接求解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 通常非常困难,
  我们的**目标不是完全地求解不等式,**
  而仅仅是找到不等式解集中点 a 的一个空心邻域.
- 通常可采用如下**策略:**
  把 $|f(x)-A|$ 适当放大
  $$|f(x)-A| \leqslant \varphi(|x-a|)$$
  使得 $\varphi(|x-a|)<\varepsilon$ 容易求解.
- **理论依据:**
  不等式 $\varphi(|x-a|)<\varepsilon$ 的解一定是 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的解.

例

利用极限的定义证明

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}.$$

例

利用极限的定义证明

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}.$$

Tips:

在通过不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 寻找 δ 时,

可以先限制 x 在 $|x-a|<\delta_0$ 的范围,

进而在此附加条件下去寻找证明极限所需的 δ.

利用定义证明极限

例

设 $a>0$，证明
$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}.$$

例

设 $a>0$，证明
$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}.$$

Tips：分子或分母有理化是数学分析中常用的技巧.

关于极限定义中的 ε

例

设函数 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域有定义.

下列说法哪些与 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 等价?

- $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < 2\varepsilon$.
- $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \frac{1}{\varepsilon}$.
- $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon^2$.
- $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon + 1$.

例

设函数 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域有定义.

下列说法哪些与 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 等价?

- $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < 2\varepsilon$.
- $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \frac{1}{\varepsilon}$.
- $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon^2$.
- $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon + 1$.

在极限的定义中，ε 是任意正实数，我们强调的是 ε 的任意小.

因此，$2\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon^2, \frac{\varepsilon}{3}$ 等都可表示一个任意小的正数，但 $\varepsilon + 1$ 不能.

极限的几何意义

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ 有如下几何涵义:

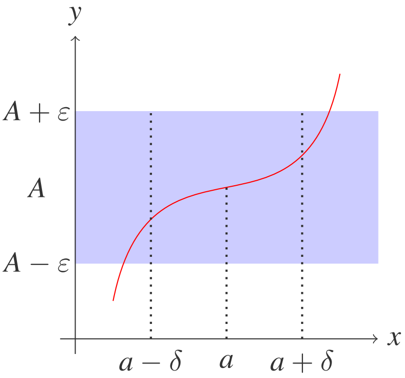
对于 $y = A$ 的任意带状邻域

$$\{(x,y) | A-\varepsilon < y < A+\varepsilon\}.$$

必有 x 的空心邻域

$$\{x | 0 < |x-a| < \delta\}$$

使得 $f(x)$ 在此空心邻域内的图像完全落入带状区域.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A$ 的定义

若 $\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall \delta > 0, \exists x_\delta$ 满足 $0 < |x_\delta - a| < \delta$ 但是

$$|f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0,$$

则称 A 不是函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限.

$\lim_{x\to a} f(x) \neq A$ 的定义

若 $\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall \delta > 0, \exists x_\delta$ 满足 $0 < |x_\delta - a| < \delta$ 但是

$$|f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0,$$

则称 A 不是函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限.

例

证明：$\lim_{x\to 2} 3x \neq 5.$

- 利用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明函数的极限必须事先知道极限值 A.

极限的直观理解和 $\varepsilon-\delta$ 定义

- 利用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明函数的极限必须事先知道极限值 A.
- 极限值 A 通常是通过直观猜测得到, 再通过 $\varepsilon-\delta$ 定义证明.

极限的直观理解和 $\varepsilon-\delta$ 定义

- 利用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明函数的极限必须事先知道极限值 A.
- 极限值 A 通常是通过直观猜测得到, 再通过 $\varepsilon-\delta$ 定义证明.
- $\varepsilon-\delta$ 定义无法用于直接计算极限.

单侧极限

- 左极限:

  设 $f(x)$ 在 a 的某个左邻域内有定义.

  $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得$-\delta<x-a<0$时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,

  则称 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的左极限为 A, 记为

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A.$$

单侧极限

- 左极限:

  设 $f(x)$ 在 a 的某个左邻域内有定义.

  $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得$-\delta < x - a < 0$时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,

  则称 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的左极限为 A, 记为

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A.$$

- 右极限:

  设 $f(x)$ 在 a 的某个右邻域内有定义.

  $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得$0 < x - a < \delta$时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,

  则称 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的右极限为 A, 记为

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

例

证明：

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1.$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1.$

定理

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 都存在且

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

定理

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 都存在且

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

此性质常用于判断分段函数当 x 趋近于分段点时的极限.

例

设

$$f(x)=\begin{cases} a^x, & x<0, \\ bx+c, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 3-x, & x>1, \end{cases}$$

试确定 b,c 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 都存在，并求极限值.

自变量趋向于无穷的过程

- $x \to +\infty$： x 无限增大

自变量趋向于无穷的过程

- $x \to +\infty$：x 无限增大
- $x \to -\infty$：$-x$ 无限增大

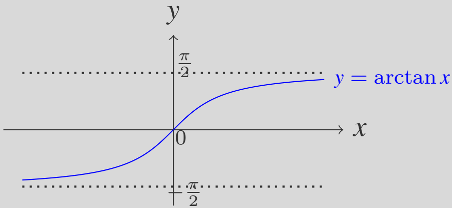
自变量趋向于无穷的过程

- $x \to +\infty$：x 无限增大
- $x \to -\infty$：$-x$ 无限增大
- $x \to \infty$：$|x|$ 无限增大

自变量趋向于无穷的过程

- $x \to +\infty$: x 无限增大
- $x \to -\infty$: $-x$ 无限增大
- $x \to \infty$: $|x|$ 无限增大

例



$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

极限的定义 ($\varepsilon - X$)

定义 ($\varepsilon - X$)

设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义, A 为一个常数.

若 $\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限, 记为

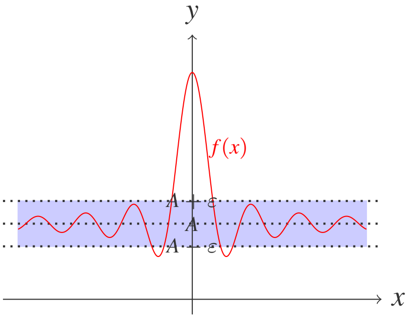
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 有如下几何涵义:

对于 $y = A$ 的任意带状邻域

$$\{(x, y) | A - \varepsilon < y < A + \varepsilon\}.$$

函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时（左右两端）的图像完全落入带状区域。



$x \to \pm\infty$ 时的极限

- 若 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

$x \to \pm\infty$ 时的极限

- 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.
- 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

$x \to \pm\infty$ 时的极限

- 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.
- 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 当且仅当

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

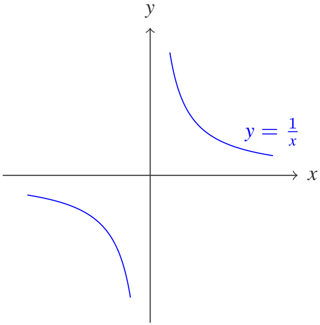
$x \to \infty$ 时的函数极限

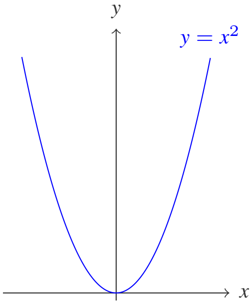
例

- 证明 $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$
- 证明 $\lim_{x\to\infty} \sin x \neq 0.$

函数值趋于无穷的情形

某些函数 $f(x)$ 当 $x \to a$ 或 $x \to \infty$ 时无限增大。





当 $x \to 0$ 时，$\frac{1}{|x|}$ 无限增大。

当 $x \to \infty$ 时，x^2 无限增大。

定义

设 $f(x)$ 在 a 的某个邻域有定义.

若 $\forall G > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x)| > G,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时无穷大, 记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

无穷大

- 类似地，可以定义
  - 正无穷大：$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
  - 负无穷大：$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

无穷大

- 类似地，可以定义
  - 正无穷大：$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
  - 负无穷大：$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
- 对于其他极限过程, 包括：

$$x \to a^-, \quad x \to a^+, \quad x \to \infty, \quad x \to +\infty, \quad x \to -\infty.$$

也有相应的无穷大、正无穷大和负无穷大.

- 无穷大不是变量，不是很大的数，
  是函数极限过程的一种表现形式.

无穷大

- 无穷大不是变量，不是很大的数，
  是函数极限过程的一种表现形式.
- 不能将 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 认为极限存在.

无穷大

- 无穷大不是变量，不是很大的数，
  是函数极限过程的一种表现形式.
- 不能将 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 认为极限存在.
- 无穷大与无界函数的区别：
  无穷大一定是无界函数，
  但是无界函数未必是某个极限过程的无穷大.

例

- $f(x) = x\sin x$ 是无界函数, 但不是 $x \to \infty$ 时的无穷大.
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

例

下列说法错误的是?

- A. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.
- B. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.
- C. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.
- D. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

作业:

- 9 月 26 日

  习题 2.1 (A)

  5.

  6.

  7.(1)(3).

  10.

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 09 月 27 日

  习题 2.1 (A)

  1. (1) (4).
  3. (2) (5).

  习题 2.1(B)

  2. (2)(5).
  5.