对于二、三重积分；第一类、第二类曲线、曲面积分，同样都会给出一条曲线或一个曲面的方程，为什么后者可以代入曲线、曲面方程而前者不可以？有何差异？

解答的关键在于：**积分变量到底是怎么跑遍待积区域的，其一：积分变量是哪个，其二：待积区域是什么**

下面回顾一下各类积分的原理以及实际意义

二重积分：

定义在xoy平面上的，物理意义是求体积或者面质量。不妨设体积函数或面积函数为F（x,y）

从微分出发，是在区域内，给定x，y，得到该点对应密度，取增量dx，dy，构成小矩形，密度看作不变，则小矩形质量为F（x0,y0）乘dxdy，然后让积分变量跑遍积分区域，跑遍区域，其能够跑遍的原理：

给定x0，截出平行y轴的直线（以与边界有两交点为例，多交点实际是多个两交点），则密度函数为 F（x0,y），在这条直线上对y进行定积分，上下限分别为交点对应曲线 x = g（y），x = h（y），被积函数为密度函数，得到线质量，再让x跑遍区域，积分意义为每条线质量的累加求和

在积分变量dx，dy跑遍xoy区域的时候，除了密度、高度函数（被积函数）外，是不存在一个方程使得每一点都可以代入的，原因在于那个只是边界曲线方程，但显然，无法化简被积表达式

三重积分：

同理，定义在Oxyz空间，物理意义是求物体质量，不妨记密度函数为F（x,y,z）

从微分出发，介绍两种取质量微元的方式：
方式一：给定z0，则截出平行xoy面的一平面Dxy，并且确定了一个面密度函数F（x，y，z0），则面质量由上述二重积分介绍的方法算出，随后让z跑遍积分区域，定积分的意义为多个面质量的累加求和

方式二：给定x y，则截出平行z轴的直线，并且确定了一个线密度函数F（x0，y0，z），则可以算出线质量，再让x，y跑遍积分区域，积分意义为多条线质量的累加求和。

同理，在积分变量dx，dy，dz跑遍Oxyz空间时，除了密度函数（被积函数）外，是不存在一个方程使得每一点都可以代入的，同样也只是边界曲面的方程，显然，无法化简被积表达式

介绍下面一类可以代入方程的积分，其均可以定义在Oxyz空间

第一类曲线积分：

物理意义：求线质量并且为**曲线质量**，上述两种积分在提到线质量时均为**直线质量**，故那时的弧长微分ds化为dx，dy

不妨设密度函数F（x，y，z），曲线方程G（x，y，z）=0

在积分变量ds跑遍待积曲线时，每一点除了满足密度函数外，还满足曲线方程，故可以代入曲线方程，对被积表达式进行化简

第一类曲面积分

物理意义：求面质量并且为曲面质量，故dS ＝投影域面积微元（dxdy） / 非投影域坐标轴夹角余弦

在积分变量dS跑遍待积曲面时，每一点除了满足密度函数外，还满足曲线方程，故同理可以代入曲面方程进行化简

一、二类积分，无论曲线还是曲面，差异都在于：前者为标量，后者为矢量

第一类积分的被积函数是**曲线/曲面本身的性质**（密度），积分变量为标量，共同刻画出某点性质（质量）

第二类积分的被积函数是**作用于曲线/曲面的一个向量、向量场**（流速场、磁场、电场），具有方向性，积分变量也为矢量，具有方向性。两者共同刻画出的是某点受到的作用，积分后得到做功、流量、磁通量、通过的电荷量。

第二类积分，积分变量同样也是跑遍了给定的曲线、曲面，而非平面（二重积分）、空间（三重积分）

第二类积分的积分变量的计算，可以化为方向矢量×模长，化为模长后与第一类积分方法相同。

曲线、曲面分别围成闭曲面、闭空间时：

也可以利用格林公式、高斯公式，第二类曲线->Green->二重积分；第二类曲面->Gauss->三重积分。