華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§4.2 微积分基本定理

- Newton-Lebniz 公式
- 变上限的定积分
- 原函数存在定理

微积分基本定理（Newton-Leibniz 公式）

设函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续在 (a,b) 内可导,
且 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. 则

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

- 用微分符号 $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x$, Newton-Leibniz 公式可写为

$$\int_a^b \mathrm{d}F(x) = F(b) - F(a).$$

Newton-Leibniz 公式

- Newton-Leibniz 公式揭示了:

  若 $[a,b]$ 连续函数 $f(x)$ 恰为 $F(x)$ 的导函数, 则

  $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

  即, 积分的计算可以转化为简单的函数值计算.
- $a > b$ 时, Newton-Leibniz 公式仍成立.

例

求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x$.

例

设 $F(x) = x\ln x - x$, 验证 $F'(x) = \ln x$, 并计算 $\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x$.

例

求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

原函数

定义（原函数）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 若函数 $F(x)$ 在 (a,b) 可导且

$$F'(x) = f(x)$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

- 一个函数的原函数不唯一.
  若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,
  则对任意常数 C, $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.
- $f(x)$ 的定积分计算的关键在于寻找 $f(x)$ 的任意原函数.

原函数

问题:

给定 $f(x)$, 是否一定有原函数 $F(x)$?

哪些函数有原函数?

变上限的定积分

设函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

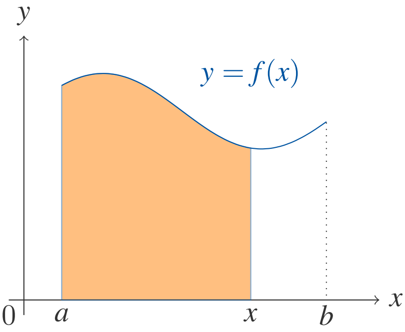
则 $\forall x \in (a,b]$,

函数 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上可积

可定义函数

$$F(x) = \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

函数 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的变上限积分函数.



定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

原函数存在性定理

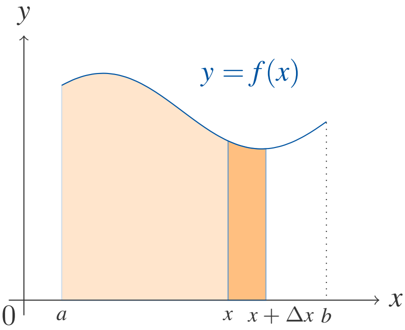
原函数存在性定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，
则变上限的积分函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

在 (a,b) 上可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x), x \in (a,b).$$



原函数

- 原函数存在性定理说明
  区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 都有至少一个原函数，
  即变上限的积分函数

$$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x.$$

- 变上限的积分函数给出了 $f(x)$ 的原函数的一种构造方式.
  但 $f(x)$ 的原函数并不一定要通过变上限的积分函数来构造.
  只要找到 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$, $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的原函数.

原函数存在性定理

推论

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 则 $\forall x\in(a,b)$ 有

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = -f(x)$.
- 若 $u(x)$ 在 (a,b) 可导且值域包含于 $[a,b]$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t = u'(x)\cdot f(u(x)).$$

- 若 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都在 (a,b) 可导且值域包含于 $[a,b]$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t = u'(x)\cdot f(u(x)) - v'(x)\cdot f(v(x)).$$

例

求下列函数的导数

$$f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=\int_{x^2}^{b}\cos(t^2)\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=\int_{x^4}^{x^5}\cos(t^2)\mathrm{d}t.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 求下列函数的导数

$$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t,$$

$$h(x)=\int_0^{\frac{x}{3}} (e^{3t}-x)f(3t)\mathrm{d}t.$$

- 注意分清积分变量和作为积分变动上限的变量;
- 积分变量不允许出现在积分限中.

原函数存在性定理

例

求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t}{x}.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续且 $f(x)>0$. 证明：函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

原函数存在性定理

例

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续且满足

$$\int_0^{x^2(x+1)} f(t)\mathrm{d}t = x.$$

求 $f(2)$.

例

已知曲线 $y=f(x)$ 过 $(0,0)$ 点且在 $(0,0)$ 处的切线与曲线 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(0,0)$ 处的切线相同.

写出切线方程并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 4.2 (A)
  2.
  6.
  7.(1) (2)

  习题 4.2 (B)
  1.
  3.