華南理工大學
South China University of Technology

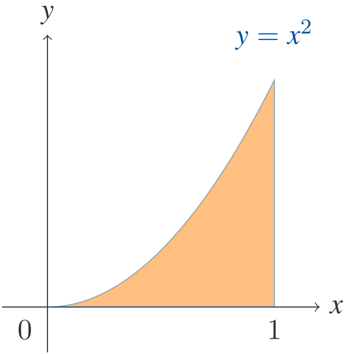
工科数学分析

刘青青

§4.1 定积分的概念与性质

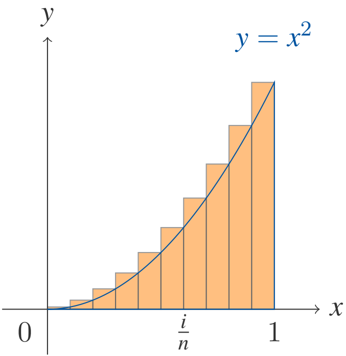
- 定积分概念的引入
- 定积分的定义
- 可积函数类
- 定积分的性质

定积分概念的引入



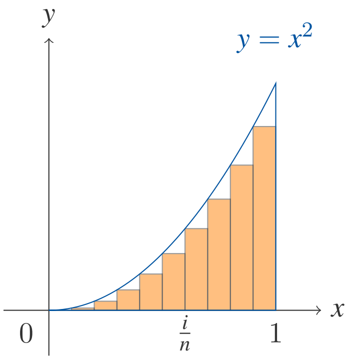
问题:

如何计算抛物线 $y = x^2$ 与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围区域的面积?



- 将区间 $[0,1]$ 做 n 等分;
- 在区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 上,
  用宽为 $\frac{1}{n}$,
  高为 $\frac{i^2}{n^2}$ 的矩形面积
  近似小曲边梯形面积;
- 近似面积为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$



- 在区间 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 上，
  用宽为 $\frac{1}{n}$，
  高为 $\frac{(i-1)^2}{n^2}$ 的矩形面积
  近似小曲边梯形面积；
- 近似面积为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

- 所求曲边梯形的面积 A 满足

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leqslant A \leqslant \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

- 令 $n \to +\infty$, 得

$$A = \frac{1}{3}.$$

分割

- 分割:
  区间 $[a,b]$ 的一个分割就是在其中插入有限个点而得到的有限多个小区间:
  $$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$
- $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ 表示分割中第 i 个小区间的长度.
- 分割的宽度:
  分割中最长的小区间的长度
  $$\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}.$$

Riemann 和:

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上定义.

- 取 $[a,b]$ 的分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.
- 取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i], i=1,\ldots,n$.

和数

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

称为函数 $f(x)$ 相对于分割 P 的一个 Riemman 和.

定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上定义.

- 任取区间 $[a,b]$ 的分割$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
- 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

若分割的宽度 $\lambda(P) \to 0$ 时, Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

总有与分割 P 和点 ξ_i 选取无关的极限 I,

则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

极限 I 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

定积分的定义 $(\varepsilon - \lambda)$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上定义且 I 为常数.

若 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\lambda > 0$, 使得

- 对任取的宽度 $\lambda(P) < \lambda$ 的分割
$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$
- 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$,

都有
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon,$$

则称 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分.

注意:

极限

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

不可简单的理解为某个函数的极限.

- Riemann 和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$
  既依赖于分割的取法, 也依赖于点 ξ_i 的取法,
  并不是分割的宽度 $\lambda(P)$ 的函数.
- 这是一种新的极限过程 (分割宽度趋于 0).
- 要求极限值即与分割的选取无关,
  也与分割中的点 ξ_i 的选取无关.

定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- 积分符号仅是求和符号的变形:
  积分就是连续指标的求和，求和就是离散指标的积分.
- $f(x)$ 称为被积函数;
- a 称为积分下限;
- b 称为积分上限;
- x 称为积分变量;
- 定积分仅由被积函数和积分上下限决定，
  与用什么符号表示积分变量无关

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

定积分的几何意义

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示:

$x-y$ 平面上介于:

- x 轴
- 曲线 $y=f(x)$
- 直线 $x=a$
- 直线 $x=b$

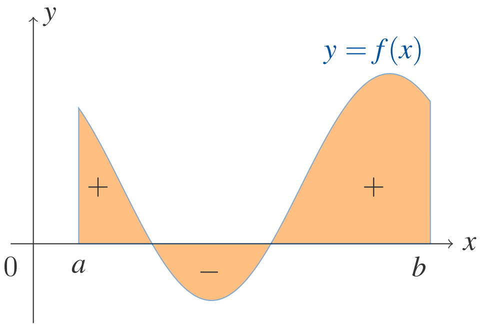
之间的各部分图形

面积的代数和,

其中,

x 轴上方的面积取正号,

x 轴下方的面积取负号.



定积分的定义

例

计算定积分

$$(1)\ \int_a^b 1\mathrm{d}x, \qquad (2)\ \int_a^b x\mathrm{d}x, \qquad (3)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

可积函数类

定理（连续函数的可积性）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上
有界、只有有限个间断点且间断点都是第一类的,
则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理（Lebesgue 定理）

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

可积函数的性质

定理

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

定积分的基本性质

关于积分符号的约定:

- 当 $a=b$ 时, 约定
$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$
- 当 $a>b$ 时, 若函数 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 可积, 则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

定理（定积分的线性性）

- 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，
  则 $f(x) \pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且
  $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$
- 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，c 为常数，
  则 $c \cdot f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且
  $$\int_a^b c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定积分的基本性质：区间可加性

定理（定积分的区间可加性）

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积且 $a<c<b$
则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积, 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理（定积分的保序性）

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积且 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(x)\geqslant 0$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

推论

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(x)\geqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定积分的基本性质：保序性

推论

- 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

- 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且在 $[a,b]$ 上的最大最小值分别为 M 和 m，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

例（Cauchy-Schwarz 不等式）

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x.$$

例

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin nx \sin^n x\mathrm{d}x = 0.$$

积分中值定理（一般形式）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，
$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积且不变号.
则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

积分中值定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}.$$

存在 $\xi \in [a,b]$，使得

以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积	$=$	同底高为 $f(\xi)$ 的矩形面积

例

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0.$$

例

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导, 且

$$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

证明: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

积分的基本性质

定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant 0$.

若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $\forall x \in [a,b], f(x) = 0$.

推论

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant g(x)$.

- 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, 则 $\forall x \in [a,b], f(x) = g(x)$.
- 若 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) > g(x_0)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

South China University of Technology

作业:

- 习题 4.1 (A)
  3.
  5. (2)

  习题 4.1 (B)
  2. (2) (3)