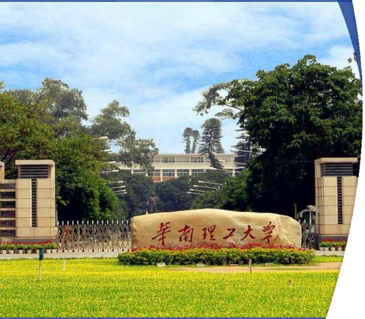
華南理工大學
South China University of Technology



工科数学分析

刘青青

§4.4 换元积分法

- 第一换元积分法
- 第二换元积分法
- 定积分换元法

定理（第一积分换元法）

设函数 $f(x)$ 有原函数, $\varphi(x)$ 可导, 则

$$\int (f\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_{u=\varphi(x)}.$$

- 第一积分换元法的本质是一阶微分形式的不变性

$$(f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = f(u)\mathrm{d}u.$$

第一积分换元法

- 第一积分换元法的本质是一阶微分形式的不变性

$$(f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = f(u)\mathrm{d}u.$$

- 运用第一积分换元法的关键在于凑微分.

第一积分换元法

- 第一积分换元法的本质是一阶微分形式的不变性

$$(f\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = f(u)\mathrm{d}u.$$

- 运用第一积分换元法的关键在于凑微分.
  - 欲求不定积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$;
  - 找到合适的 $\varphi(x)$, 将 $g(x)$ 写为 $g(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$;
  - 运用第一积分换元法;
  - 计算 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$;
  - 计算复合函数 $F(\varphi(x)) + C$ 得到 $\int g(x)\mathrm{d}x$.

例

求定积分

$$\int e^x \cos(e^x)\mathrm{d}x, \qquad \int \tan x \,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

常用的凑微分

$$x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}x^2, \qquad e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(e^x),$$

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln|x|), \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}(\sqrt{x}),$$

$$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x), \qquad \sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x),$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x, \qquad \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cot x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arcsin x), \qquad \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arctan x).$$

看到等式左边能想到右边.

例

设 m, n 为非负整数，求不定积分

$$\int \sin^{2m+1} x \cos^n x \, \mathrm{d}x \text{ 和 } \int \sin^m x \cos^{2n+1} x \, \mathrm{d}x.$$

定理（第二积分换元法）

设 $\psi(t)$ 在某区间上可导且导数不变号. 若函数 $f\circ\psi(t)\cdot\psi'(t)$ 有原函数 $G(t)$, 则 $f(x)$ 有原函数 $G(\psi^{-1}(x))$, 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f\circ\psi(t)\cdot\psi'(t)\mathrm{d}t\bigg|_{t=\psi^{-1}(x)}.$$

- 第二积分换元法一般步骤:
  - 做换元 $x=\psi(t)$;
  - 对积分变量 t, 求积分 $G(t)=\int f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\mathrm{d}t$;
  - 求出反函数 $t=\psi^{-1}(x)$ 代入得 $\int f(x)\mathrm{d}x=G(\psi^{-1}(x))+C$.

第二积分换元法

- 第二积分换元法一般步骤:
  - 做换元 $x = \psi(t)$;
  - 对积分变量 t, 求积分 $G(t) = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \mathrm{d}t$;
  - 求出反函数 $t = \psi^{-1}(x)$ 代入得 $\int f(x) \mathrm{d}x = G(\psi^{-1}(x)) + C$.
- 做换元 $x = \psi(t)$ 时, 要求 $\psi'(t)$ 不变号 (即 $\psi(t)$ 单调), 因此需指明 t 的取值区间.

- 第二积分换元法一般步骤:
  - 做换元 $x=\psi(t)$;
  - 对积分变量 t, 求积分 $G(t)=\int f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\mathrm{d}t$;
  - 求出反函数 $t=\psi^{-1}(x)$ 代入得 $\int f(x)\mathrm{d}x=G(\psi^{-1}(x))+C$.
- 做换元 $x=\psi(t)$ 时, 要求 $\psi'(t)$ 不变号 (即 $\psi(t)$ 单调),
  因此需指明 t 的取值区间.
- 做换元 $x=\psi(t)$ 时,
  不仅要将 $f(x)$ 中的全部 x 都替换为 $\psi(t)$,
  还需将 $\mathrm{d}x$ 替换为 $\psi'(t)\mathrm{d}t$.

例

求不定积分

$$(1)\int \frac{1}{(2x+3)^2}\mathrm{d}x, \qquad (2)\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x, \quad a\text{为非零常数}.$$

例

求不定积分

$$(1)\int\frac{1}{(2x+3)^2}\mathrm{d}x,\qquad (2)\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x,\quad a\text{为非零常数.}$$

例

设 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, a,b 为常数且 $a\neq 0$, 求 $\int f(ax+b)\mathrm{d}x$.

做线性变换 $x=at+b$, $a\neq 0$ 时, 总满足第二换元法的条件.

例

求不定积分

$$(1)\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad (2)\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x.$$

三角代换常用于被积函数中含有$\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2\pm a^2}$等因子时.

常用三角代换

- 被积函数含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$,

$$x = a\sin t \text{ 或 } x = a\cos t.$$

常用三角代换

- 被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$,
$$x=a\sin t \text{ 或} x=a\cos t.$$
- 被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$,
$$x=a\tan t \text{ 或} x=a\cot t \text{ 或} x=a\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

常用三角代换

- 被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$,
$$x=a\sin t \text{ 或 } x=a\cos t.$$
- 被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$,
$$x=a\tan t \text{ 或 } x=a\cot t \text{ 或 } x=a\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$
- 被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$,
$$x=a\sec t \text{ 或 } x=a\csc t \text{ 或 } x=a\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}.$$

例

求不定积分

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

例

求不定积分

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

- 利用三角代换计算积分时，通常在代换之后需对被积函数进行化简.

第二积分换元法

例

求不定积分

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

- 利用三角代换计算积分时，通常在代换之后需对被积函数进行化简.
- 三角代换后的化简非常繁琐，有时可根据题目的特点选用其它方式计算积分.

例

求不定积分

$$(1)\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad (2)\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x,\quad (3)\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x.$$

例

求不定积分

$$(1)\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad (2)\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x,\quad (3)\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x.$$

- 被积函数中有根号时, 通常需进行适当的换元去掉根号.

例

求不定积分

$$(1)\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad (2)\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x,\quad (3)\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x.$$

- 被积函数中有根号时，通常需进行适当的换元去掉根号.
- 当 $\sqrt[k]{x},\ldots,\sqrt[l]{x}$ 等不同次数的根号同时出现在被积函数中时，可取换元 $x=t^n$ 其中 n 为 $k,\ldots,l$ 的最小公倍数.

例

求不定积分

$$\int \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x.$$

例

求不定积分

$$\int \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x.$$

被积函数含有 e^x 时, 常用换元 $t = e^x$.

例

求不定积分

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x.$$

例

求不定积分

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x.$$

换元$x=\frac{1}{t}$常用于解决如下形式的积分

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^4}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x.$$

例

分别用下列换元求不定积分

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$$

- $x = 2\sin t$.
- $\sqrt{4-x^2} = t$.

求同一个不定积分可以通过不同的换元来实现,
不同的换元计算量有很大的差异.

定积分的换元法

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $\varphi(t)$ 满足:

- $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数;
- $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$ 且 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$.

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

定积分的换元法

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $\varphi(t)$ 满足：

- $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数；
- $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$ 且 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$.

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注意：换元一定要相应地换积分限!!!

例

计算定积分

$$(1)\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x,\qquad (2)\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x,\qquad (3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x.$$

做换元 $x=\varphi(t)$ 后，关于 x 的定积分转化为关于 t 的定积分.

若求得关于 t 的原函数，不必通过 $t=\varphi^{-1}(x)$ 转化为关于 x 的函数，

可直接代入 t 的积分限计算.

例

设函数

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0,\\ e^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

求定积分

$$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x.$$

例

设函数

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0,\\ e^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

求定积分

$$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x.$$

计算定积分时, 若函数分段有不同的表达式,
可用区间可加性分别在每个小区间上计算定积分再求和.

例

计算定积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

定积分换元时, 一定要满足定理条件:

$\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 有连续的导数.

对称区间上的定积分

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 则

- $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}(f(x)+f(-x))\mathrm{d}x.$
- 若 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的偶函数, 则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

- 若 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的奇函数, 则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

例

计算定积分

$$(1)\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x(1+\sin 2x)\mathrm{d}x,\qquad (2)\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

例

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

并由此计算

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

周期函数的积分

设连续函数 $f(x)$ 有周期 T, 则对任意常数 a 有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

即, 周期函数在任何长度为一个周期的区间上的积分都相等.

周期函数的积分

设连续函数 $f(x)$ 有周期 T, 则对任意常数 a 有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

即, 周期函数在任何长度为一个周期的区间上的积分都相等.

推论

设连续函数 $f(x)$ 有周期 T, 则对任意常数 a 和正整数 n, 有

$$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 4.4 (A)
  2. (1) (6) (8) (9)
  4. (1) (4) (6) (9)

  习题 4.4 (B)
  1. (4) (11)

華南理工大學 South China University of Technology

作业:

- 习题 4.4 (A)

  3. (8) (11) (14)

  习题 4.4 (B)

  2. (5) (6) (7)

  6.