



华南理工大学

South China University of Technology



工科数学分析

刘青青

§4.3 不定积分

- ▶ 不定积分的概念与性质
- ▶ 基本积分表



原函数

- ▶ 由 Newton-Leibniz 公式,
若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且其一个原函数为 $F(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

- ▶ 计算积分的关键在于寻找 $f(x)$ 的原函数.



原函数

- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则对任意常数 C ,

$$F(x) + C$$

也是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数.

定理

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则 $f(x)$ 在区间 I 上的任一原函数都可表示为

$$F(x) + C,$$

其中 C 为一个常数.



原函数

- ▶ 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则 $f(x)$ 在区间 I 的全体原函数是

$$\{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\}.$$

- ▶ **注意: 此处的区间特别重要.**

对于函数在不是区间的集合上的原函数, 上述结论不成立.

例: 对于 $f(x) = 2x, x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$,

$$F(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty),$$

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, -1), \\ x^2 + 1, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

都是 $f(x)$ 的原函数, 但它们之差并非常数.



不定积分

定义 (不定积分)

设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的某个原函数, 则函数族

$$\{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\}$$

称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

- 在写不定积分时, 不能漏写 $+C$, 这里 C 表示任意的常数.



不定积分

例

- ▶ 求不定积分

$$\int x^5 dx \text{ 和 } \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

- ▶ 求曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(2, 6)$ 且满足 $f'(x) = 2x$.

在需要确定某一个具体的原函数时, 根据实际问题确定常数 C .



不定积分的性质

微分运算与积分运算互逆

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x).$$

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = F(x) + C.$$



不定积分的性质

不定积分的线性性

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx,$$

其中 λ 为常数.



基本积分表

$$\blacktriangleright \int \lambda dx = \lambda x + C,$$

$$\blacktriangleright \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C,$$

其中 $\alpha \neq -1$,

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$$

其中 $|x| \neq 0$,

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C,$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$$

$$\blacktriangleright \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\blacktriangleright \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C,$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$

$$\blacktriangleright \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\blacktriangleright \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\blacktriangleright \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$\blacktriangleright \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

加下划线的公式必须牢记!!!



不定积分

有些函数的不定积分是存在的, 但写不出显示表达.

例

函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的原函数

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

不是初等函数.



不定积分

例

求下列不定积分：

$$\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} dx,$$

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{x} - 3\sin x \right) dx,$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx,$$

$$\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx.$$



不定积分

例

求不定积分：

$$\int e^{|x|} dx.$$



华南理工大学

South China University of Technology

作业:

- 习题 4.3 (A)
 - 2. (10) (16) (22) (28)
 - 3. (3) (5)
- 习题 4.3 (B)
 - 1. (2) (9)
 - 2. (7) (8)

