华南理工大学期末考试

2021-2022-2学期《工科数学分析（二）》(B) 答案

一、叙述定义和定理（共5 小题, 每小题2 分, 共10 分）

1. 二元函数的方向导数.

如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\vec{l}\right)-f(P_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在, 则将这个极限值称为函数在点P_0 沿方向$\vec{l}$ 的方向导数. 记为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(P_0)\quad 或\quad \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{P_0}.$$

$\cdots\cdots$ (2 分)

2. 斯托克斯公式.

设Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ是以Γ 边界的分片光滑的有向闭曲面, Γ 的正向与Σ 的侧符合右手规则, 函数$P(x,y,z),Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在包含曲面Σ在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数, 则有公式

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz&=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\\&=\iint_\Sigma\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS\end{aligned}$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是Σ 指定一侧的法向量方向余弦. $\cdots\cdots$ (2 分)

3 . 绝对收敛级数.

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$也收敛,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛. $\cdots\cdots$ (2 分)

4. 4 . 函数项级数的一致收敛.

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x),(n=1,2,\cdots)$ 在I 上一致收敛到$S(x)$, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在I 上一致收敛到$S(x)$, 即$\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+$, 使得当$n>N(\varepsilon)$ 时, $\forall x\in I$ 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon$$

成立, 则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在I 上一致收敛到$S(x)$. $\cdots\cdots$ (2 分)

5. n阶线性齐次常微分方程$L[y]=0$ 的基础解系.

如果函数$y_1(x),y_2(x),\cdots y_n(x)$ 是n 阶齐次线性方程

$$L[y]=y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=0$$

的n 个线性无关的解, 那么, 此方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),$$

其中$C_1, C_2, \cdots C_n$ 为任意常数. 线性无关的$y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 称为方程$L[y]=0$ 的基础解系. ······ (2 分)

二、 计算题(共4 小题，每小题10 分，共40 分)

1. 设$z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, 而$u=\mathrm{e}^{x+y^2}, v=x^2+y$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$ 和$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2ue^{x+y^2}+4vx}{u^2+v^2}=\frac{2e^{2x+2y^2}+4x^3+4xy}{e^{2x+2y^2}+x^4+2x^2y+y^2}$$

······ (5 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(8ye^{2x+2y^2}+4x)(e^{2x+2y^2}+x^4+2x^2y+y^2)-(2e^{2x+2y^2}+4x^3+4xy)(4ye^{2x+2y^2}+2x^2+2y)}{(e^{2x+2y^2}+x^4+2x^2y+y^2)^2}$$

······ (10 分)

2. 计算$\int_{-4}^{0} \mathrm{~d}x \int_0^{2x+8}(8-y)^{\frac{1}{3}} \mathrm{~d}y+\int_0^4 \mathrm{~d}x \int_0^{-2x+8}(8-y)^{\frac{1}{3}} \mathrm{~d}y$.

解:

$$\int_{-4}^{0} \mathrm{~d}x \int_0^{2x+8}(8-y)^{\frac{1}{3}} \mathrm{~d}y+\int_0^4 \mathrm{~d}x \int_0^{-2x+8}(8-y)^{\frac{1}{3}} \mathrm{~d}y=\int_0^8(8-y)^{\frac{1}{3}}dy\int_{\frac{y-8}{2}}^{\frac{8-y}{2}}dx=\int_0^8(8-y)^{\frac{4}{3}}dy=\frac{384}{7}.$$

······ (10 分)

3. 计算$\iint_{\Sigma}\left(z^2+x\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z-z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 为旋转抛物面$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ 介于平面$z=0$ 与$z=2$ 之间的部分的下侧.

解: $S: z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\{x, y,-1\}$, $\cos\gamma<0$. 则

$$\begin{aligned}
I&=\iint_S\left[\left(z^2+x\right)\cos\alpha-z\cos\gamma\right]dS\\
&=\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2+x\right]\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\cos\gamma\right\}\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}\\
&=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2+x\right]\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right\}dxdy\\
&=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2+x\right]\cdot(-x)-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right\}dxdy\\
&=\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(\rho^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\rho^2\right)\rho d\rho\\
&=8\pi
\end{aligned}$$

······ (10 分)

4. 计算$I=\int_C(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中$C$ 是曲线$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从z 轴正向往z 轴负向看C 的方向是顺时针的.

解: 平面$x-y+z=2$的法线方向是向下的, 其法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

······ (4分)

则根据Stokes公式,

$$I=\int_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S dS=-2\iint_D dxdy=-2\pi,$$

其中S是C围成的圆盘, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$. $\cdots\cdots$ (10分)

三、 解答题（共3 小题，每小题10 分，共30 分）。

1. 计算$\int_{(0,0)}^{(2,1)}(x^2+2xy-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\,\mathrm{d}y$

解: 设$P(x,y)=x^2+2xy-y^2, Q(x,y)=x^2-2xy-y^2$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\cdots\cdots$ (8分)

故积分与路径无关, 即有

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)}\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2xy-y^2\right)\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2dx+\int_0^1(4-4y-y^2)dy=4$$

$\cdots\cdots$ (10分)

2. 求级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$ 的收敛域, 并求和函数.

解: (1)求收敛区间.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n(n-1)}=1.$$

收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=1$ 时, 级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n-1)}$, 收敛.

当$x=-1$ 时, 级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$, 收敛.

故收敛域为$[-1,1]$.

$\cdots\cdots$ (5分)

(2) 求和函数$S(x)$.

设所求和函数为$S(x)$, 则

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^{n-2}=\frac{1}{1+x}.$$

故$S'(0)=0$,

$$S'(x)=\int_0^x S''(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x),\quad x\in(-1,1).$$

又$S(0)=0$, 故

$$S(x)=\int_0^x\ln(1+x)dx=(x+1)\ln(1+x)-x,\quad x\in(-1,1).$$

$\cdots\cdots$ (10分)

3. 求方程$y''+y'-2y=-2\sin x$ 的通解.

解: (1) 特征方程为

$$r^2+r-2=0,$$

解得特征根为

$$r_1=-2\quad r_2=1$$

故齐次方程$y''+y'-2y=0$ 的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

$\cdots\cdots$ (5分)

(2)设方程的一个特解为

$$y^* = A\sin x + B\cos x$$

代入方程, 比较系数得$A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{1}{5}$.

故方程通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x.$$

$\cdots\cdots$ (10分)

四、应用题（10 分）

在椭圆$x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线$2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

解: 设点(x, y)直线$2x + 3y - 6 = 0$的距离$d(x, y)$为

$$d(x, y) = \frac{|2x - 3y - 6|}{\sqrt{13}}.$$

令$f(x, y) = (2x - 3y - 6)^2$. 考虑$f(x, y)$在$x^2 + 4y^2 = 4$下的极值.

$\cdots\cdots$ (5分)

作Lagrange函数

$$L(x, y, \lambda) = (2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

由

$$L_x = 4(2x - 3y - 6) + 2\lambda x = 0,$$

$$L_y = 6(2x + 3y - 6) + 8y\lambda = 0,$$

$$L_\lambda = x^2 + 4y^2 - 4 = 0,$$

得最小值点为

$$x = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{3}{5}$$

$\cdots\cdots$ (10分)

五、证明题（10 分）。

证明$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在$(0, +\infty)$ 内一致收敛.

证明: 对$\forall x \in (0, +\infty)$, 我们有

$$e^{nx} > 1 + nx + \frac{1}{2}(nx)^2 > \frac{1}{2}(nx)^2.$$

因此,

$$\left|x^2 e^{-nx}\right| = \left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right| \leq \frac{2}{n^2}.$$

而数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 由M判别法, 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在$(0, +\infty)$ 一致收敛.

$\cdots\cdots$ (10分)