華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§4.8 定积分在几何上的应用

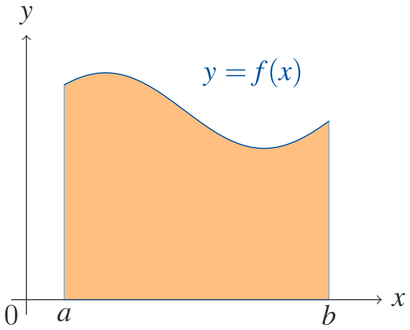
- 微元法
- 平面图形的面积
- 空间立体的体积
- 平面曲线的弧长和曲率
- 旋转体的侧面积

- 面积可表示为积分

$$A := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- "面积 A 是一些
  高度为 $f(x)$ 宽度为 $\mathrm{d}x$
  的小矩形面积的叠加."

- 小矩形的面积 $f(x)\mathrm{d}x$
  称为面积微元,
  是一无穷小变化量.



微元法

当实际问题中需要计算的某个量可以看做“无穷多个无穷小求和”时，可以用定积分来计算，这就是微元法.

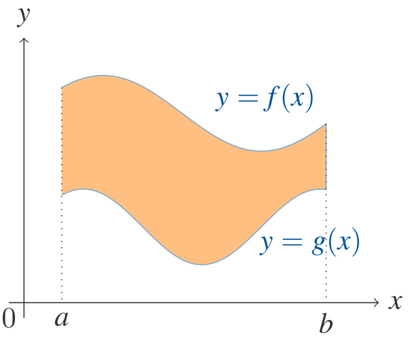
微元法一般步骤:

- 明确微元:
  将要求的整体看成无穷小量的叠加;
- 微元数学化:
  选取合适的变量 x 和适当的函数 $f(x)$, 将微元表示成 $f(x)\mathrm{d}x$;
- 计算积分:
  应注意变量 x 的变化范围.

直角坐标系中图形的面积

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续且 $f(x) \geqslant g(x), x \in [a,b]$，
求曲线 $y=f(x), y=g(x)$ 与直线 $x=a, x=b$ 围成的区域的面积.

- 微元:
  平行于 y 轴的直线将图形
  分割成的小区域, 近似矩形.
- 微元数学化:
  横坐标 x 处,
  宽为 $\mathrm{d}x$ 的小矩形面积
  $$\mathrm{d}A = (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$
- 所求面积
  $$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$

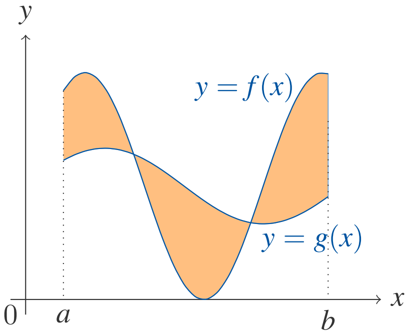


直角坐标系中图形的面积

设 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上两条连续曲线

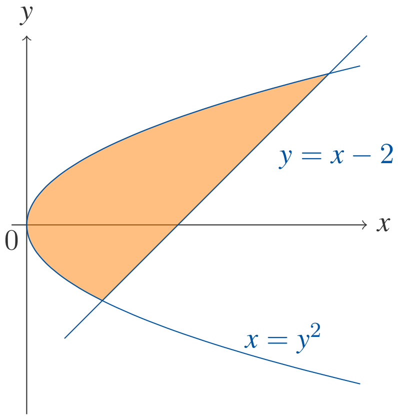
求两条曲线与直线 $x = a, x = b$ 围成的区域的面积。

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x.$$



例

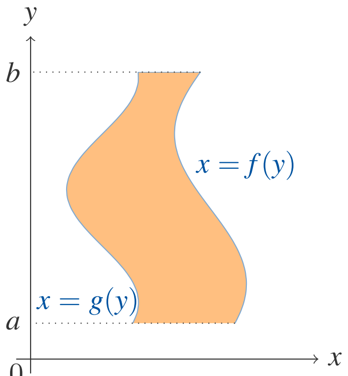
求抛物线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 所围图形的面积。



直角坐标系中图形的面积

设函数 $f(y)$ 和 $g(y)$ 在区间 $[a,b]$ 连续且 $f(y) \geqslant g(y), y \in [a,b]$,
求曲线 $x = f(y), x = g(y)$ 与直线 $y = a, y = b$ 围成的区域的面积.

- 微元:
  平行于 x 轴的直线将图形
  分割成的小区域, 近似矩形.
- 微元数学化:
  纵坐标 y 处,
  宽为 $\mathrm{d}y$ 的小矩形面积
  $$\mathrm{d}A = (f(y) - g(y))\mathrm{d}y.$$
- 所求面积
  $$A = \int_a^b (f(y) - g(y))\mathrm{d}y.$$



直角坐标系中图形的面积

设曲线由参数方程给出,

$$\begin{cases} x = u(t), \\ y = v(t), \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数.

求曲线与 x 轴围成的区域的面积.

- 微元:

  用平行于 y 轴的直线将区域分割成若干小区域, 近似小矩形.

- 微元数学化:

  横坐标 x 处, 宽为 $\mathrm{d}x$ 的小矩形面积

  $$\mathrm{d}A = y\mathrm{d}x = v(t)u'(t)\mathrm{d}t.$$

- 所求面积

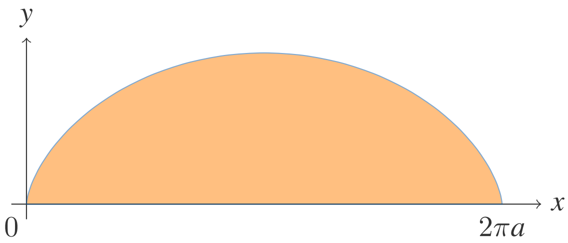
  $$A = \int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

例

求旋轮线

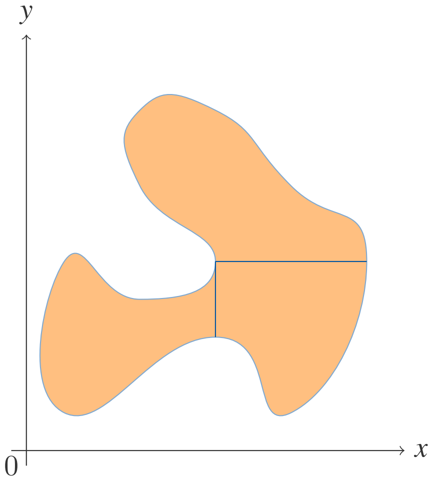
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

与 x 轴所围的图形面积.



直角坐标系中图形的面积

复杂区域面积的计算,
用若干直线段将其分
割成一些简单区域,
使每个区域的边界都
可以用若干函数表示,
再分别计算面积.



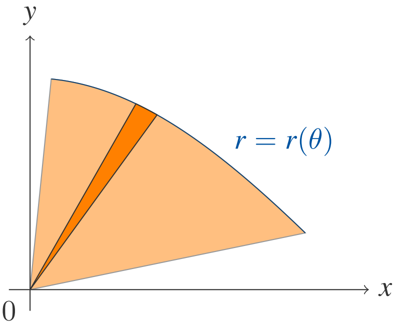
求极坐标方程 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ 给出的平面曲线和射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围图形的面积 A.

- 微元:
  用过原点的射线将区域分割成若干小区域, 近似扇形.
- 微元数学化:
  θ 变化到 $\theta + \mathrm{d}\theta$ 时,
  圆心角 $\mathrm{d}\theta$ 的小扇形面积

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}(r(\theta))^2 \mathrm{d}\theta.$$

- 所求面积

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r(\theta))^2 \mathrm{d}\theta.$$

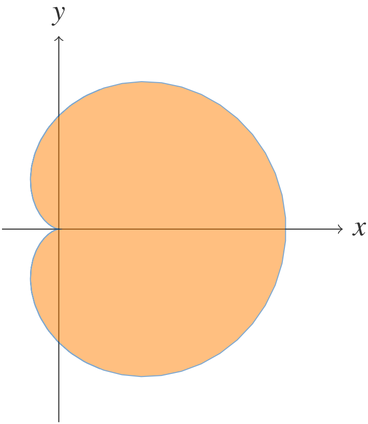


例

求心形线

$$r(\theta) = a(1 + \cos\theta), a > 0$$

所围成图形的面积.



例

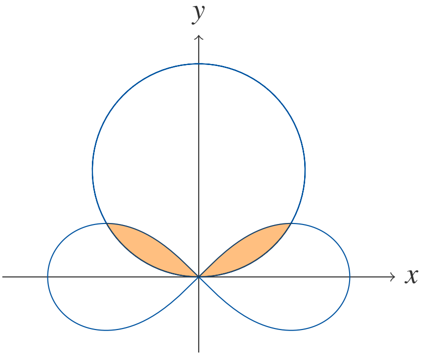
求由圆

$$r = \sqrt{2}\sin\theta$$

和双纽线

$$r^2 = \cos 2\theta$$

所围成图形的面积.

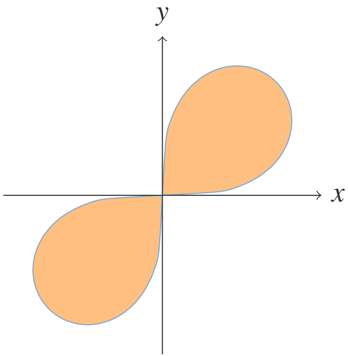


例

求曲线

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = xy$$

所围图形的面积.



问题:

设 $y=f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$ 是一条连续曲线.

它与直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成一曲边梯形.

如何求此曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得立体的体积?

旋转体体积：圆盘法

分割：

用垂直于 x 轴（旋转轴）的截面将旋转体分割成若干薄片.

旋转体体积: 圆盘法

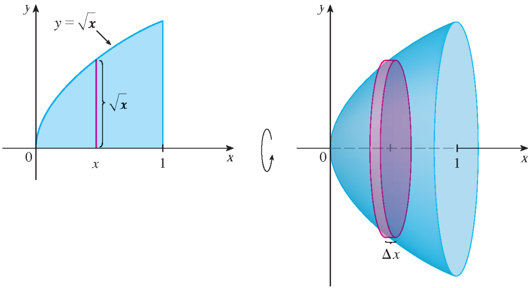
体积微元: 每个薄片的体积.

每个薄片是宽为 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的曲边梯形绕 x 轴旋转得到的旋转体.

近似为半径为 $f(x)$, 厚度为 $\mathrm{d}x$ 的圆盘.

体积微元:

$$\mathrm{d}V = \pi(f(x))^2\mathrm{d}x.$$



(a) (b)

旋转体体积: 圆盘法

- 对体积微元

$$\mathrm{d}V = \pi(f(x))^2\mathrm{d}x$$

积分，得旋转体体积

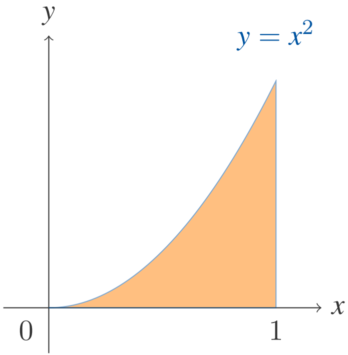
$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\mathrm{d}x.$$

旋转体体积: 圆盘法

例

记曲线 $y=x^2, x\in[0,1]$ 与 x 轴和直线 $x=1$ 围成的图形为 G.

- 求图形 G 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积.
- 求图形 G 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积.



旋转体体积: 圆盘法

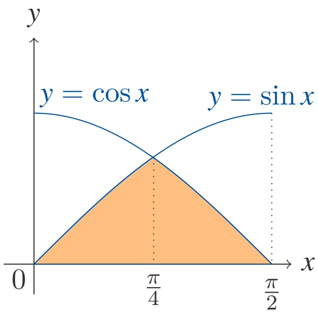
例

求由曲线

$$y = \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

和 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.



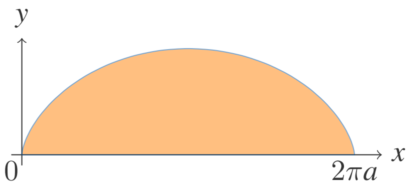
旋转体体积: 圆盘法

例

求摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi]$$

和 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

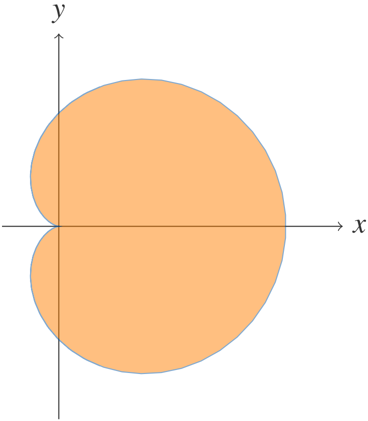


例

求极坐标方程为

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

的心形线绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

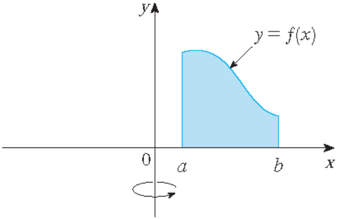


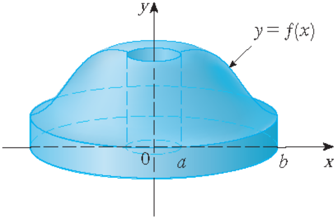
问题：

设 $y=f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$ 是一条连续曲线.

它与直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成一曲边梯形.

如何求此曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得立体的体积?

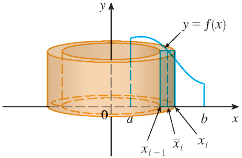


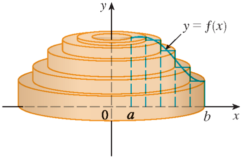


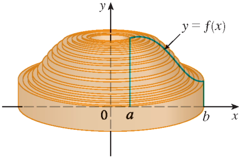
旋转体体积：柱壳法

分割：

用以 x 轴（旋转轴）为轴的同心圆柱面将旋转体分割成若干柱壳.



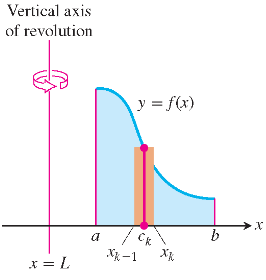




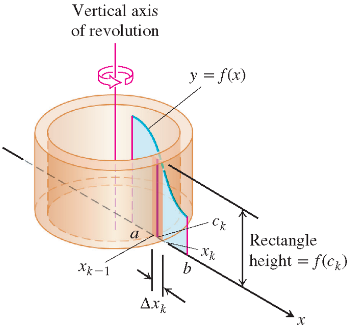
旋转体体积：柱壳法

体积微元：每个柱壳的体积.

每个柱壳是宽为 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的曲边梯形绕 y 轴旋转得到的旋转体.



(a)



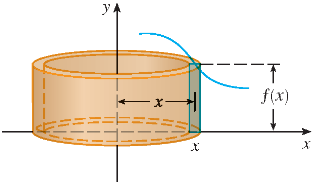
(b)

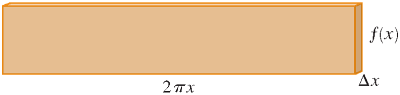
体积微元:

每个柱壳近似为半径为 x, 高为 $f(x)$, 厚度为 $\mathrm{d}x$ 的一个圆柱壳.

体积微元:

$$\mathrm{d}V = 2\pi x \cdot f(x)\mathrm{d}x.$$





- 对体积微元

$$\mathrm{d}V = 2\pi x \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

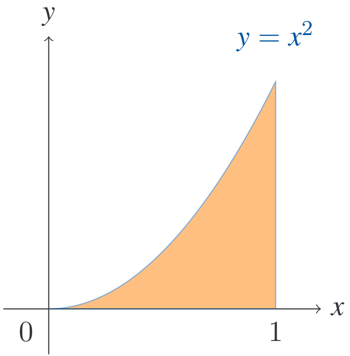
积分, 得旋转体体积

$$V = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x)\mathrm{d}x.$$

旋转体体积: 柱壳法

例

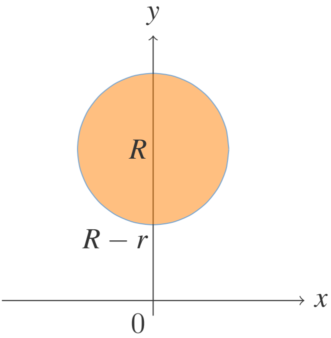
求曲线 $y=x^2, x\in[0,1]$ 与 x 轴和直线 $x=1$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积.



旋转体体积: 柱壳法

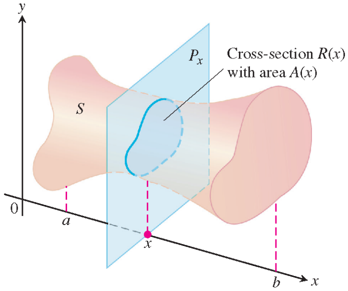
例

求半径为 r 的圆绕同平面内距离圆心 $R > r$ 的一条直线旋转成的实心圆环的体积.



平行截面面积已知的立体体积

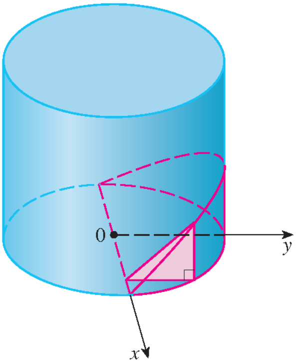
- 若一个立体不是旋转体.
  如何求体积?
- 用平行平面将立体分割为薄片.
  如：用垂直于 x 轴的平面做分割.
- 薄片体积近似为柱体体积,
  柱体厚度 $\mathrm{d}x$.
- 若截面面积 $A(x)$, 体积微元为
  $$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x.$$
- 积分可得立体体积.



平行截面面积已知的立体体积

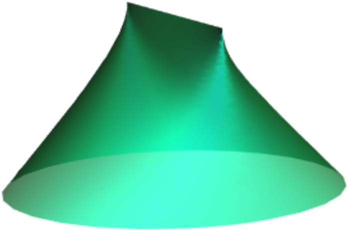
例

一平面经过半径为 R 的圆柱体底面圆心并与底面交角为 α. 求此平面截圆柱体所得立体的体积.



例

求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底面直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.



光滑曲线的弧长

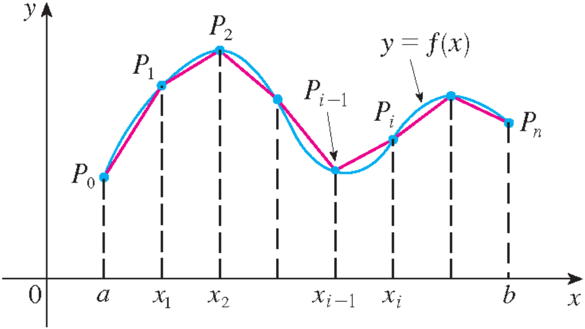
- 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数,
  则称曲线 $y=f(x)$ 为光滑曲线.
- 问题:
  给定光滑曲线 $y=f(x), x\in[a,b]$,
  如何求曲线的弧长?

光滑曲线的弧长

- **分割:**

  将曲线分成 n 段 (通过对区间 $[a,b]$ 的分割实现)

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



光滑曲线的弧长

- 近似:

  每小段用直线段的长度近似曲线段的长度

  $$\Delta s_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

  由 Lagrange 中值定理, 有 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使

  $$y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

  因此,

  $$\Delta s_i \approx \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

- 求和取极限

  曲线段 $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$ 的弧长为

  $$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

弧长微元:

- 光滑显示曲线 $y=f(x)$ 的弧长微元为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

- 弧长微元一般可写为

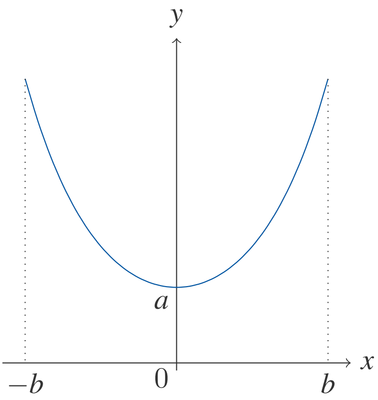
$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}.$$

例

求悬链线

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

在 $x = -b$ 和 $x = b$ 之间一段的长度.



平面曲线的弧长

- 若平面曲线由参数方程给出

$$\begin{cases} x = u(t), \\ y = v(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有一阶连续的导数.

- 此时, 弧长微元可写为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

- 弧长为

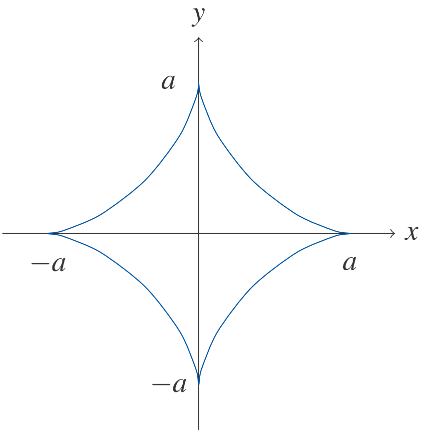
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

例

求星形线

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi],$$

的长度.



- 若平面曲线由极坐标方程 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ 给出.
- 该曲线有直角坐标参数方程给出

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \qquad \theta \in [\alpha, \beta].$$

- 此时, 弧长微元可写为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta.$$

- 弧长为

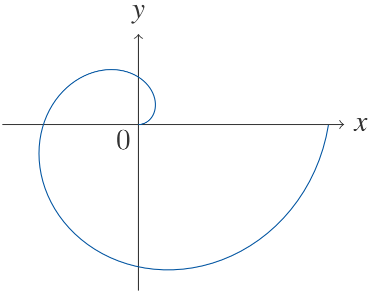
$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta.$$

例

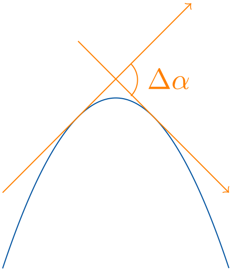
求阿基米德螺线

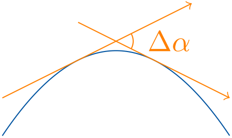
$$r = a\theta, \theta \in [0, 2\pi].$$

的一段弧长 (其中 $a > 0$).



平面曲线的曲率





曲线的弯曲程度可通过切线转角来刻画.

切线的转角越大曲线弯曲程度越大.

曲率的定义

- 曲率: 单位弧长内切线转角的极限.
- 记 α 为切线倾角, 即切线与 x 轴正向的夹角.
- 曲线在一点 M 的曲率为

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|_M .$$

- 曲率半径: $\rho = \frac{1}{K}$.

曲率的计算

- 若 $f(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的倾角为
$$\alpha = \arctan f'(x).$$
- $\mathrm{d}\alpha = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$
- 弧长微元为 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$
- 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的曲率为
$$K = \frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

曲率的计算

- 若曲线由参数方程给出

$$\begin{cases} x = u(t), \\ y = v(t), \end{cases}$$

其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 二阶可导.

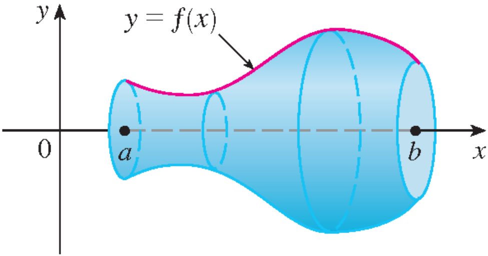
- 曲线在点 $(u(t), v(v))$ 的曲率为

$$K = \frac{|u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)|}{|(u'(t))^2 + (v'(t))^2|^{\frac{3}{2}}}.$$

问题:

设 $y = f(x) \geqslant 0, x \in [a, b]$ 是一段连续曲线.

如何求此曲线绕 x 轴旋转一周所得曲面的面积?



旋转体的侧面积

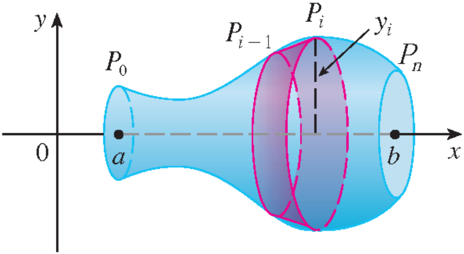
分割:

用垂直于

x 轴（旋转轴）

的截面将旋转体

分割成若干薄片.



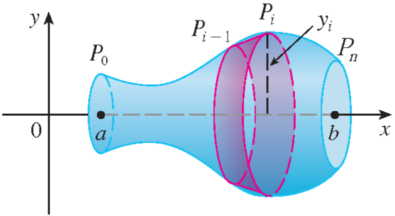
旋转体的侧面积

面积微元:

每个薄片的侧面积.

每个薄片的侧面
由曲线上弧长为 $\mathrm{d}s$ 的弧
绕 x 轴旋转一周得到

近似为半径为 $f(x)$,
宽度为 $\mathrm{d}s$ 的圆环带.



面积微元:

$$\mathrm{d}S = 2\pi f(x)\mathrm{d}s = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

- 对面积微元

$$dS = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

积分，得旋转体侧面积

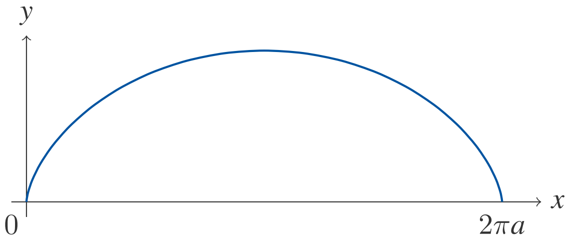
$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

例

求曲线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

绕直线 $y = 2a$ 旋转一周所得旋转体的侧面积.



作业:

- 习题 4.8 (A)
  - 1. (4) (5)
  - 3.
  - 4.

作业:

- 习题 4.8 (A)

  6.

  7.

  习题 4.8 (B)

  6. (2)