座位号________

线

专业班级________

（密封线内不答题）封

学院________

学号

密

姓名________

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析（二）》A卷

2022-2023 学年第二学期

注意事项： 1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上；
3. 考试形式：闭卷；
4. 本试卷共 6 大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
得 分							

评阅教师请在试卷袋上评阅栏签名

得分

一、填空题：共 5 题，每题 2 分，共 10 分.

1. 微分方程 $y''+2y'+6y=0$ 的通解为 $e^{-x}(C_1\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x)$

2. 设函数 $u=2x^2+2y^2+3z^2$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=$ 14；

3. 设 Γ 为 $y^2=2x$ 上从原点到 $(2,2)$ 的一段，则第一类曲线积分 $\oint_\Gamma y\,ds=$ $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$；

4. 参数曲线 $\begin{cases} x=t-\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=2t, \end{cases}$ 在 $t=0$ 对应的点处的切线方程为 $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$；

5. 设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi<x\le 0, \\ 1+x, & 0<x\le\pi, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\frac{\pi}{2}$.

得分

二、选择题：共 5 题，每题 2 分，共 10 分.

1. 关于未知函数 y 的微分方程 $(y-\cos^2 x)dx + e^x dy = 0$ 是（ B ）

A. 可分离变量方程；　　B. 一阶线性非齐次方程；

C. 一阶线性齐次方程；　　D. 非线性方程.

2. 若二元函数 $f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)+3x-5y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$，则（ C ）

A. $df(0,0)=0$；　　B. $df(0,0)=3dx-5dy$；

C. $df(0,0)=-3dx+5dy$；　　D. $df(0,0)$ 不存在.

3. 设函数 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均可微，且 $\varphi_y(x,y)\neq 0$．若 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，则下列选项正确的是（ D ）

A. 若 $f_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y(x_0,y_0)=0$；　　B. 若 $f_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$；

C. 若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y(x_0,y_0)=0$；　　D. 若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$.

4. 函数 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒(Taylor)展开式正确的是（ B ）

A. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n, x\in(-1,1]$；　　B. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$；

C. $\ln(1+x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n, x\in[-1,1)$；　　D. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n, x\in[-1,1)$.

5. 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛的常数 p 的取值范围是（ B ）

A. $p\le 0$；　　B. $0<p\le 1$；

C. $0<p<1$；　　D. $p>1$.

三、计算题：共 3 题，每题 10 分，共 30 分.

得分

1. 设 $z=\frac{1}{x}f(x+y,x-y)+g(xy)$，其中函数 f 有二阶连续的偏导数，且 g 二阶可导，计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

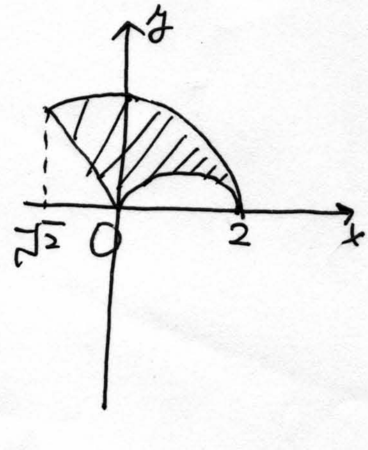
解：$z_x=\frac{1}{x}(f_1+f_2)-\frac{1}{x^2}f+yg'$

$z_{xy}=\frac{1}{x}\left[(f_{11}-f_{12})+(f_{21}-f_{22})\right]-\frac{1}{x^2}(f_1-f_2)+g'+xyg''$

$=\frac{1}{x}(f_{11}-f_{22})-\frac{1}{x^2}(f_1-f_2)+g'+xyg''$.

2. 计算累次积分 $\int_{-\sqrt{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy+\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$.

解：题目中二次积分的积分区域如右图.



利用极坐标变换，得

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{2}\rho^2d\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}d\varphi\int_0^2\rho^2d\rho$

$=2\pi-\frac{16}{9}$.

3. 计算锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=4x$ 截下的部分锥面面积.

解：因曲面方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

所以 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$.

于是 所求面积 $=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4x}\sqrt{2}\,dxdy=4\sqrt{2}\pi$

四、综合题：共 3 题，每题 10 分，共 30 分.

得分

1. 设Σ是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(z\ge 0)$的上侧，且a,b,c都是正实数。

计算第二类曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2-y\sin x)dydz+(y^2-z^2)dzdx+(z^2-x^2)dxdy$.

解：积分曲面不封闭，补充曲面 $\Sigma_1: z=0\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right)$，取向下.

则 Σ 和 Σ_1 形成取向外的封闭曲面，记它们所围成的区域为Ω.

因 $P=x^2-y\sin x$，$Q=y^2-z^2$，$R=z^2-x^2$ 具有一阶连续偏导数，

且 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x-y\cos x+2y+2z$.

現，由高斯公式：$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2-y\sin x)dydz+(y^2-z^2)dzdx+(z^2-x^2)dxdy$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2x-y\cos x+2y+2z)\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}2z\,dxdydz$$

$$=\frac{abc^2\pi}{2}.$$

又因为 $\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y\sin x)dydz+(y^2-z^2)dzdx+(z^2-x^2)dxdy$

$$=-\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}(-x^2)dxdy=\frac{a^3b}{4}\pi.$$

所以，原式 $=\frac{abc^2\pi}{2}-\frac{a^3b\pi}{4}$.

2. 计算曲线积分$\int\limits_{\Gamma}\frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$，其中曲线$\Gamma$是从点A(-1, 0)到点B(1, 0)的一条不经过原点的光滑曲线$y=f(x),-1\le x\le 1$.

解：令 $P=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{y-x}{x^2+y^2}$. 则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

因此，积分在不包含原点的单连通区域内与积分路径无关.

此时需要分两种情况讨论.

若 $f(0)>0$. 则取由点 A 经上半圆周 $L: x^2+y^2=1$ 到点 B 的路径.

得 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \int_L (x+y)dx-(x-y)dy$

令 $x=\cos t$，$y=\sin t$，有

$$上式 = \int_\pi^0 (\cos t+\sin t)(-\sin t)dt-(\cos t-\sin t)\cos t dt$$

$$= -\int_\pi^0 dt = \pi.$$

若 $f(0)<0$，则可取 A 经下半圆周 $L: x^2+y^2=1$ 到点 B 的路径。

此时，原式 $=-\pi$.

综上 $$\int_\Gamma \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \begin{cases} \pi & 当 f(0)>0, \\ -\pi & 当 f(0)<0. \end{cases}$$

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$. 且当 $x=\pm1$ 时，$\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)$ 发散，

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+1}$ 则

$$S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)x^{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+2}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{x}{(1-x^2)^2} \quad (-1<x<1).$$

得分

五、证明题：共 1 题，每题 10 分，共 10 分.

证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n!x^n}{x^2+n^n}$ 在区间 $[-2,2]$ 上一致收敛.

证明：对 $\forall x\in[-2,2]$，有

$$\left|\sin\frac{n!x^n}{x^2+n^n}\right| \le \left|\frac{n!x^n}{x^2+n^n}\right| < \frac{n!2^n}{n^n}.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,2^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!} = \frac{2}{e} < 1.$$

所以数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$ 收敛.

由 M-判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n!x^n}{x^2+n^n}$ 在 $[-2,2]$ 内一致收敛.

得分

六、应用题：共 1 题，每题 10 分，共 10 分.

制作一个体积为 2 的长方体盒子，利用拉格朗日乘数法求出长、宽和高分别为多少时才能使其表面积最小？

解：设此长方体长、宽、高分别为 x, y, z.

它们满足 $xyz = 2$. 下面求

$$S = 2(xy + yz + zx)$$ 的最小值.

作函数

$$\varphi(x, y, z) = S(x, y, z) + \lambda(xyz - 2).$$

由

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2(y+z) + \lambda yz = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2(z+x) + \lambda zx = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2(x+y) + \lambda xy = 0.$$

得 $x = y = z = \sqrt[3]{2}$.

此时表面积 S 最小.