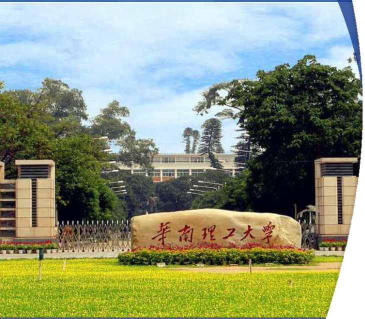

華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析 刘青青

§2.6 无穷小与无穷大

- 无穷小
- 无穷小的比较
- 无穷大

无穷小

定义（无穷小）

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是 $x \to a$ 时的无穷小.

例

- $x-2$ 是 $x\to 2$ 时的无穷小;
- $\sin x$ 是 $x \to 0$ 时的无穷小;
- $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小;
- $\dfrac{(-1)^n}{n}$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小.

无穷小

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

  则 $f(x)$ 为 $x \to a$ 时的无穷小.

- 无穷小描述的是"无限变小的量".
  无穷小量并不表达量的大小, 而是表达一种无限变小的趋势.

函数极限与无穷小

定理

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) - A \text{ 是} x \to a \text{ 时的无穷小.}$$

- 函数极限可以通过无穷小来定义.

当 $x\to 0$ 时, $x, x^2, \sin x, x\sin\frac{1}{x}$ 都是无穷小. 进一步观察下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\ \text{不存在.}$$

极限的不同, 反映了不同的无穷小趋向于零的快慢程度不同.

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $x \to a$ 时的无穷小
且在 a 的某个空心邻域上 $g(x) \neq 0$.

- 若 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
  则称 $x \to a$ 时，$f(x)$ 为比 $g(x)$ 高阶的无穷小，
  或称 $x \to a$ 时，$g(x)$ 为比 $f(x)$ 低阶的无穷小.
- 若 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$,
  则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷小, 记为
  $$f(x) \sim g(x), (x \to a).$$
- 若 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, 即 $f(x) \sim cg(x), (x \to a)$,
  则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同阶无穷小.

例

- $n \to \infty$ 时, $\frac{1}{n^2}$ 是比 $\frac{1}{n}$ 高阶的无穷小.
- $x \to 0$ 时, x 和 $\sin x$ 是等价无穷小.
- $x \to 0$ 时, $1 - \cos x$ 和 x^2 是同阶无穷小.

- 无穷小的比较仅仅比较两个无穷小量趋向于零的快慢，
  并非任意两个无穷小量都可比较.
- 对每个正实数 α, $(x-a)^{\alpha}$称为 $x\to a$ 时的基本无穷小.
  无穷小的比较通常以基本无穷小为标准，
  将其它的无穷小与基本无穷小进行比较.
- 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}}=c\neq 0$, 即 $f(x)\sim c(x-a)^{\alpha}, (x\to a)$,
  则称 $x\to a$ 时, $f(x)$ 是 $x-a$ 的 α 阶无穷小.

定义

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域有定义

且在此空心邻域上恒有 $g(x) \neq 0$.

- 若 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 我们记
$$f(x) = o(g(x)), (x \to a).$$
- 若存在 $M > 0$，使得在 a 的某个空心邻域上恒有
$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|,$$
我们记
$$f(x) = O(g(x)), (x \to a).$$

记号 o 和 O

- $f(x)$ 是 $x \to a$ 时的无穷小

$$\Leftrightarrow f(x) = o(1), (x \to a).$$

- $x \to a$ 时，$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小

$$\Leftrightarrow f(x) = o(g(x)), (x \to a).$$

- $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域有界

$$\Leftrightarrow f(x) = O(1), (x \to a).$$

这里的等号仅仅是一种符号，表示 $f(x)$ 具有相应的性质，并没有任何数值相等的含义.

无穷小的性质

- 无穷小量必然是有界量.

  若 $f(x) = o(1), (x \to a)$, 则 $f(x) = O(1), (x \to a)$.

- 有界量与无穷小的乘积是无穷小.

  若 $f(x) = O(1), (x \to a), g(x) = o(1), (x \to a)$,
  则 $f(x) \cdot g(x) = o(1), (x \to a)$.

- 无穷小的绝对值仍然是无穷小.

  若 $f(x) = o(1), (x \to a)$, 则 $|f(x)| = o(1), (x \to a)$.

无穷小的性质

- 被无穷小控制的量仍然是无穷小.

  设在 a 的某个空心领域上恒有 $|f(x)| \leqslant |g(x)|$.
  若 $g(x) = o(1), (x \to a)$, 则 $f(x) = o(1), (x \to a)$.

- 同一极限过程中, 有限多个无穷小的代数和仍是无穷小.

  若 $f(x) = o(1), (x \to a)$, $g(x) = o(1), (x \to a)$,
  则 $f(x) \pm g(x) = o(1), (x \to a)$.

例

求下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x},\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n},\qquad (3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x^2+1}.$$

o 的运算法则

定理

- $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x)), (x \to a)$.
- $\alpha \cdot o(g(x)) = o(g(x)), (x \to a)$.
- $o(\alpha g(x)) = o(g(x)), (x \to a), \quad \alpha \neq 0$.

等价无穷小

定理（等价无穷小）

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $x \to a$ 时的无穷小. 则

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = o(f(x)), (x \to a).$$

- 两个等价无穷小的差是比其中任何一个都高阶的无穷小.
- 一个无穷小 $f(x)$ 与比它高阶的无穷小之和是与 $f(x)$ 等价的无穷小.

$$f(x) + o(f(x)) \sim f(x), (x \to a).$$

例：

$$x + 2x^2 - x^3 \sim x, (x \to 0), \qquad \sqrt{x} - x \sim \sqrt{x}, (x \to 0).$$

等价无穷小

常用的等价无穷小:

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x, (x \to 0).$
- $x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x), (x \to 0).$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, (x \to 0).$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \to 0).$

等价无穷小替换

定理（等价无穷小替换）

设 $F(x), f(x), G(x), g(x)$ 都是 $x \to a$ 时的无穷小. 若

$$F(x) \sim f(x), (x \to a), \qquad G(x) \sim g(x), (x \to a).$$

且 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 则

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

两个无穷小之比的极限,

可以被分别与它们等价的无穷小之比的极限代替.

例

求下列极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{(e^{\sin x}-1)\tan x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin^2 x)-x}{\ln(e^{2x}-x^2)-2x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}.$$

例

求下列极限:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 2x+x^3}{1-\cos x}.$$

计算极限的过程中,

只能用等价无穷小替换待求极限的函数的某个乘积因子,

不能替换某个求和项.

无穷大

定义（无穷大）

若 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, 则称 $f(x)$ 为 $x \to a$ 时的无穷大.

例

- $\frac{1}{x}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大.
- $\tan x$ 是 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时的无穷大.
- $x^k, k = 1, 2, \ldots$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷大.

无穷大与无穷小的关系

定理

在同一极限过程中，

- 无穷大的倒数为无穷小；
- 恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

关于无穷大的讨论都可以归结为关于无穷小的讨论.

定义

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $x \to a$ 时的无穷大.

- 若 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
  则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷大.
- 若 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$,
  则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同阶的无穷大.
- 若 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$,
  则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是等价的无穷大.

例

试确定 k 值，使 $f(x)=2x+5x^3-x^6$ 在 $x\to\infty$ 时为 x^k 的同阶无穷大.

作业:

- 习题 2.6 (A)
  4. (2).

  习题 2.6 (B)
  1. (1) (2).
  2. (2) (4).
  3. (2).