第三章：随机向量及其分布

随机向量的概念引入

有时候仅仅用一个随机变量去描述某个样本点 ω 的信息是不够的，此时就需要引入随机向量. 观察下面的随机试验：

1. 讨论成人的身材，考虑每个人（ω）的身高（$X_1(\omega)$）和体重（$X_2(\omega)$），.
2. 研究每个家庭的支出情况，考察每个家庭（ω）衣（$X_1(\omega)$）食（$X_2(\omega)$）住（$X_3(\omega)$）行（$X_4(\omega)$）几个方面.

当一个随机试验的结果是由多个随机变量共同描述的时候，我们可以用一个向量（数组）来记录随机试验的结果，这就是随机向量.

随机向量的概念

定义 3.1.1

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，则称向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为随机向量或者 n 维随机变量.

随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是同一个基本事件空间 Ω 到 n 维实数空间的一个映射：

$$\Omega \ni \omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n,$$

即随机向量的每个分量都是一个随机变量.

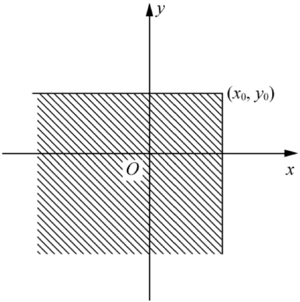
二维随机向量

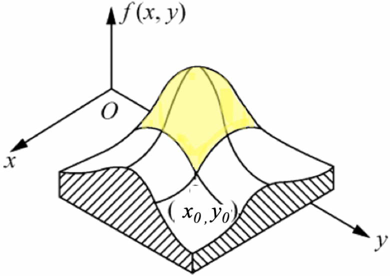
二维随机向量

若 X 和 Y 都是随机变量，则由 X、Y 组成的一个整体 $\xi=(X,Y)$ 称为二维随机向量。对于任意实数 x,y，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\},\quad (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

为 $\xi=(X,Y)$ 的联合分布函数。


y
(x_0, y_0)
O
x


$f(x, y)$
O
x
(x_0, y_0)
y

二维随机向量联合分布函数 I

联合分布函数的性质如下：

1. $F(x,y)$ 是变量 x,y 的不减函数，即:
   对于任意固定的 y，当 $x_1 < x_2$ 时，

   $$F(x_1,y) \le F(x_2,y);$$

   对于任意固定的 x，当 $y_1 < y_2$ 时，

   $$F(x,y_1) \le F(x,y_2).$$

2. $0 \le F(x,y) \le 1, \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty).$

3. 对于固定的 y，有：$F(-\infty,y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0.$
   对于固定的 x，有：$F(x,-\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0.$
   同时 $F(-\infty,-\infty) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$, $F(+\infty,+\infty) = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1.$

二维随机向量联合分布函数 II

4. $F(x,y)$ 分别关于 x,y 右连续
5. $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} =$
   $F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1)$.

二维随机向量边缘分布函数

边缘函数

二维随机向量 (X, Y) 作为一个整体，有联合分布函数 $F(x, y)$，其分量 X 与 Y 都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，分别称为 X 的边缘分布函数和 Y 的边缘分布函数：

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y)$$

注：联合分布可唯一确定边缘分布，边缘分布不能确定联合分布

3.2 二维离散型随机向量

二维离散型随机向量

如果二维随机向量$\xi = (X, Y)$的每个分量都是离散型随机变量，则称$\xi = (X, Y)$是二维离散型随机向量。

- 二维离散型随机向量(X, Y)所有可能取的值也是有限或可列个

二维离散型随机向量联合分布列

设二维离散型随机向量 (X, Y) 的取值为(x_i, y_j)， $i, j = 1, 2, \cdots$，

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij},\ i, j = 1, 2, \cdots .$$

称上式为二维离散型随机向量(X, Y)的概率分布或联合分布列。

性质：

1. $p_{ij} \geq 0.$
2. $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1.$

二维离散型随机向量

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

Table: 二维离散随机向量的分布列

二维离散型随机向量

此时，(X, Y) 的联合分布函数为

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{x_i \le x, y_j \le y} p_{ij}$$

且对任意的 $a < b$， $c < d$，有

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = \sum_{a < x_i \le b, c < y_j \le d} p_{ij}$$

即 (X, Y) 的统计特性完全由概率分布 $\{p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots\}$ 确定.

二维离散型随机变量的边缘分布 I

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}=\sum_j p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}=\sum_j p_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}=\sum_i p_{i1}$	$p_{\cdot 2}=\sum_i p_{i2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$	$\cdots$	1

Table: 二维离散随机向量的分布列

二维离散型随机变量的边缘分布 II

注意上面的表格中的最右列和最下行，

$$
\begin{aligned}
p_{i\cdot} &= \sum_j p_{ij} = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \\
&= P\left(X = x_i, \bigcup_{j=1}^{+\infty}(Y = y_j)\right) = P(X = x_i), i = 1, 2, \cdots .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{\cdot j} &= \sum_i p_{ij} = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}(X = x_i), Y = y_j\right) = P(Y = y_j), j = 1, 2, \cdots .
\end{aligned}
$$

即 $\{p_{i\cdot}, i = 1, 2, \cdots\}$ 和 $\{p_{\cdot j}, j = 1, 2, \cdots\}$ 分别为 X 和 Y 的边缘分布.

课堂练习 I

1. 设 (X, Y) 的分布列为：

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
2	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$

   (1) 求 a 应满足的条件。
   (2) 求$F(1,2), F(2,1), F(4,3), F(2.5,1.5)$
   (3) 求X, Y边缘分布

2. 设二维随机向量(X_1, X_2)的分布
$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.25$，$P(X_i = 0) = 0.5$，且满足$P(X_1X_2 = 0) = 1$，求$(X_1, X_2)$的联合分布以及$P(X_1 = X_2)$.

课堂练习 II

3. 已知 10 件产品中有 3 件一等品，5 件二等品，2 件三等品. 现从中任取 4 件，求其中一等品件数 X 与二等品件数 Y 的联合分布.

4. (三项分布) 设随机试验只有 A，B，C 三个结果，各结果出现的概率分别为 p，q，$1-p-q$. 现将该随机试验独立地做 n 次，记 X 和 Y 分别为 n 次试验中 A 和 B 发生的次数，试求 (X,Y) 的联合分布和边缘分布.

课堂练习：三项分布

解：X和Y的取值只可能是0，1，2，$\cdots$，n，并且$X+Y\le n$，由于试验是独立的，按独立试验概型计算联合分布

$$P(X=i,Y=j)=\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^iq^j(1-p-q)^{n-i-j},$$

$0\le i+j\le n$. 记$p_{ij}=P(X=i,Y=j)$，那么，

$$P(X=i)=\textstyle\sum_{j=0}^{n-i}p_{ij}=b(i;n,p),$$

$$P(Y=j)=\textstyle\sum_{i=0}^{n-j}p_{ij}=b(j;n,q).$$

因此，

$$X\sim B(n,p),\quad Y\sim B(n,q).$$

条件分布

在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率为：

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

将其推广到随机变量：设有两个随机变量 X 与 Y，在给定 Y 取某个或某些值的条件下，求 X 的概率分布，这个分布就是条件分布。

例子：考虑某大学的全体学生，求该校身高为$180cm$的学生中的体重的分布。

二维离散型随机向量的条件分布列

条件分布列

已知二维随机向量 (X, Y) 的分布列为

$$P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots .$$

在事件 $\{Y = b_j\}$ 发生的前提下 X 的分布列称为条件分布列，记为 $P(X = a_i \mid Y = b_j)$，$i = 1, 2, \cdots$.

注:
在事件 $\{Y = b_j\}$ 发生条件下 X 的条件分布列为

$$P(X = a_i \mid Y = b_j) = \frac{P(X = a_i, Y = b_j)}{P(Y = b_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i = 1, 2, \cdots .$$

在事件 $\{X = a_i\}$ 发生条件下 Y 的条件分布列为

$$P(Y = b_j \mid X = a_i) = \frac{P(X = a_i, Y = b_j)}{P(X = a_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, j = 1, 2, \cdots .$$

课堂练习

在一汽车工厂中，一辆汽车有两道工序是由机器人完成的：其一是紧固 3 只螺栓，其二是焊接两处焊点。以 X 表示由机器人紧固的螺栓紧固不良的数目，以 Y 表示由机器人焊接的不良焊点的数目。根据积累的资料知 (X, Y) 具有分布律，如下表所示。

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.840	0.060	0.010
1	0.030	0.010	0.005
2	0.020	0.008	0.004
3	0.010	0.002	0.001

1. 求在 $X = 1$ 的条件下，Y 的条件分布列；
2. 求在 $Y = 0$ 的条件下，X 的条件分布列。

3.3 二维连续型随机向量

二维连续型随机向量

对于二维随机向量 $\xi=(X,Y)$，若存在一个定义于全平面 $(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$ 的非负可积的二元函数 $f(x,y)$，D 为任意平面区域，都有

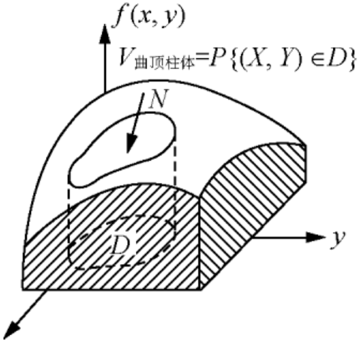
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

则称 $\xi=(X,Y)$ 为二维连续型随机向量，并称 $f(x,y)$ 为 ξ 的联合概率密度，简称联合密度。

二维连续型随机向量 II

密度函数 $f_{X,Y}(x,y)$ 满足下面几条性质

1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$
3. 对二维平面的任何区域 D 有
$$P((X,Y) \in D) = \int_D f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$


$f(x, y)$
$V_{曲顶柱体}=P\{(X, Y)\in D\}$
N
D
y

4. X 和 Y 的边缘分布密度函数分别为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

和

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

课堂练习

设随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, \quad 2<y<4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1. 确定常数 k。
2. 求 $P\{0<X<1, 2<Y<3\}$。
3. 求 $P\{X<1.5\}$。
4. 求 $P\{X+Y\leq 4\}$。
5. 求X,Y 边缘分布密度函数。

服从特定分布的二维随机向量

本章我们将学习以下两种特殊的二维连续型随机向量

1. 二维均匀分布
2. 二维正态分布

二维均匀分布

二维均匀分布

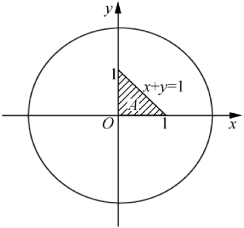
设 D 为二维平面上的一个有界区域，面积为 S_D，若随机向量 (X, Y) 的分布密度函数为

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_D}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则称 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布.

课堂练习

1. 设 (X, Y) 服从圆域 $x^2 + y^2 \le 4$ 上的均匀分布，计算 $P\{(X, Y) \in A\}$，这里 A 是图中阴影部分的区域。



2. 设 (X, Y) 服从区域 D（抛物线 $y = x^2$ 和直线 $y = x$ 所夹的区域）上的均匀分布，求其联合密度和边缘密度。

二维正态分布

若二维随机向量 (X, Y) 的分布密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ 的正态分布，记为 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.
其中， $\mu_1 \in \mathbb{R}$， $\mu_2 \in \mathbb{R}$， $\sigma_1 > 0$， $\sigma_2 > 0$， $-1 < \rho < 1$.

二维正态分布矩阵形式

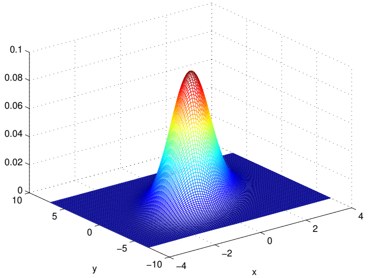
设 $\boldsymbol{\xi} = (X, Y)^T \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，其中：

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

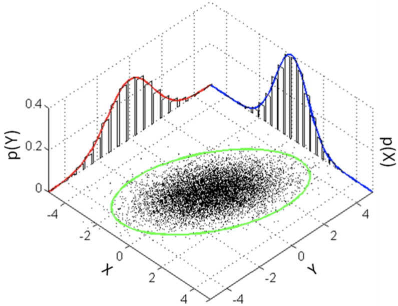
则其密度函数为：

$$f(X, Y) = f(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

函数图像



0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
10
5
0
−5
−10
y
−4
−2
0
2
4
x



p(Y)
0.4
0.2
0
p(X)
-4
-2
0
2
4
X
4
2
0
-2
-4
Y

二维正态分布的边缘分布

二维正态分布的边缘分布为一维正态分布，即

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

亦即 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

二维正态分布的边缘分布

注：

1. 不同的二维正态分布可能对应相同的边缘分布.
   - $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_1)$与$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_2)$在$\rho_1\neq\rho_2$时是不同的正态分布. 但是边缘分布均有$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.
2. 考虑二维随机向量，即使其边缘分布是一维正态分布，该随机向量可能不服从二维正态分布.
   - $$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y).$$

由(X,Y)的联合分布可唯一确定X和Y的边缘分布，但由X和Y的边缘分布无法确定(X,Y)的联合分布

设(X,Y)是随机向量，给定y，若对任意固定正数ε，$P(y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)>0$，且对任意实数$x$，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P(X\le x|y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P(X\le x, y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)}{P(y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)}$$

存在，则称此极限为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布函数，记为 $F_{X|Y}(x|y)$。
若存在 $f_{X|Y}(x|y)$，使得

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,du$$

则称 $f_{X|Y}(x|y)$ 为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件概率密度函数，简称条件概率密度。

二维连续型随机向量的条件密度函数* II

设随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，X 的边缘概率密度为 $f_X(x)$,Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$。若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，当 $f_Y(y)>0$ 时，有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

当 $f_X(x)>0$时，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)},\qquad \forall y\in\mathbb{R}.$$

二维正态分布的条件分布*

对于二维正态分布，X 在 $\{Y = y\}$ 下和 Y 在 $\{X = x\}$ 下的条件分布分别为

$$N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)\right),$$

和

$$N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right).$$

练习

1. 设 (X,Y) 服从单位圆上均匀分布，即其概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $f_{Y|X}(y|x)$和$P(Y>0|X=x)$。

2. 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值，当观察到 $X=x\ (\ 0<x<1\ )$ 时，数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机取值，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

3.1 随机向量的概念及其分布函数

- 独立性

随机变量的独立性

定义

设二维随机向量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$，其边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 与 Y 是相互独立的。

例如：一个人的身高和体重并不是独立的，但是一个人所学的专业（假设非体育、舞蹈等专业）和身高是独立的.

独立性

1. 若 (X,Y) 是二维离散型随机向量，对 (X,Y) 所有可能取值 (x_i,y_j) $(i=1,2,\dots;\ j=1,2,\dots)$，则 X 与 Y 是相互独立的条件可以写为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}\quad(i=1,2,\dots;j=1,2,\dots)$$

2. 若 (X,Y) 是二维连续型随机向量，其联合密度为 $f(x,y)$，其边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则 X 与 Y 是相互独立的条件可以写为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

课堂练习

1. 设随机变量 X, Y 独立，且

$$P(X=-1)=P(X=1)=P(Y=-1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}.$$

求 $P(X=Y)$.

2. 设 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 6xy^2, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试问：X 与 Y 是否相互独立?

二维正态分布独立性

设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$。$X$ 与 Y 独立的充要条件为 $\rho = 0$。

3.4 二维随机向量函数的分布

二维随机向量函数的分布

问题：根据 (X,Y) 的联合分布，如何求关于X,Y的函数 $g(X,Y)$ 的分布?

1. 对于二维离散型随机向量的情形，设 (X,Y) 的分布列为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

则 $Z=g(X,Y)$ 的分布列为

$$P(Z=z_k)=\sum_{g(x_i,y_j)=z_k} p_{ij},\quad k=1,2,\ldots.$$

二维随机向量函数的分布 II

特别地, $Z = X + Y$ 的分布列为

$$P(Z = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} p_{ij}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

- 若 X 和 Y 的取值为 $0, 1, 2, \cdots$，那么

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p_{i(k-i)},$$

- 若还有 X 与 Y 独立，那么

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} p_{i(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} p_{i\cdot} p_{\cdot(k-i)}$$

二维随机向量函数的分布 III

常见的结论：若 X 与 Y 相互独立，则

- 若 $X \sim B(n,p)$，$Y \sim B(m,p)$，则 $Z = X + Y \sim B(m+n,p)$.
- 若 $X \sim Pois(\lambda_1)$，$Y \sim Pois(\lambda_2)$，则 $Z = X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$.

二维随机向量函数的分布 IV

2. 对于二维连续型随机向量，记 (X, Y) 的联合分布密度函数为 $f_{X,Y}$，$D_z = \{(x, y) \mid g(x, y) \le z\}$，则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P((X, Y) \in D_z) = \iint_{D_z} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.$$

二维随机向量函数的分布 V

(1) $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(X + Y \le z) \\
&= \int_{x+y\le z} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{z-y} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

对分布函数 $F_Z(z)$ 关于 z 求导，得到 Z 的分布密度函数为

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\,\mathrm{d}y.
$$

二维随机向量函数的分布 VI

若 X, Y 相互独立，那么

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

即两个独立的随机变量和的分布密度函数为它们各自的分布密度函数的卷积.

常见的结论：
若X 与 Y 独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$， $Y \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$，那么
$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

二维随机向量函数的分布 VII

(2) 若随机变量 X, Y 相互独立, $U = max\{X, Y\}$ 及 $V = min\{X, Y\}$ 的分布函数:

$$F_U(u) = F_X(u)F_Y(u)$$

$$F_V(v) = 1 - [1 - F_X(v)][1 - F_Y(v)]$$

(3) 若随机变量 X, Y 相互独立, 则 $W = \frac{Y}{X}$ 的概率密度函数为

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(wx)\, dx.$$

练习

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量。它们都服从 $N(0,1)$ 分布，其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (-\infty < y < +\infty)$$

求和函数 $Z = X + Y$ 和 $W = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度。

3.1 随机向量的概念及其分布函数

- n维随机向量

n维随机向量联合分布函数

定义 3.1.2

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为其上的随机向量，它的联合分布函数定义为

$$\begin{aligned} & F_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ & = P(\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) \le x_1, X_2(\omega) \le x_2, \cdots, X_n(\omega) \le x_n) \\ & = P(\omega \in \Omega \,|\, \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i(\omega) \le x_i\}). \end{aligned}$$

n维随机向量联合分布的性质 I

1. 有界性
   $\forall\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
   $$0 \le F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le 1.$$
2. 右连续性
   $F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 关于每个变元 x_i 单调不减并且右连续，$i = 1, 2, \cdots, n$.
3. 随机变量的取值趋于无穷的情况
   $$lim_{x_i \to -\infty} = F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,\ \forall i = 1, 2, \cdots, n,$$
   $$lim_{x_1,\cdots,x_n \to +\infty} = F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1.$$

n维随机向量联合分布的性质 II

4 对于 n 维随机向量，对任意 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 和 $h_i > 0$，$i = 1, 2, \ldots, n$ 有

$$\Delta_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}^{(x_1+h_1,x_2+h_2,\ldots,x_n+h_n)} F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \geq 0.$$

- 连续型随机向量密度函数

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0.$$

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1\, du_2 \ldots du_n$$

柯尔莫哥洛夫存在性定理

若有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实函数 F 满足上述条件所有性质，那么就可以定义一个概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$和其上的随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使得 $\forall\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$F_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

n维随机向量边缘分布函数

边缘分布函数

定义 $X_i(=1,\cdots,n)$，的边缘分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$，那么

$$
\begin{aligned}
F_{X_i}(x_i) &= P(X_i \leq x_i) \\
&= P\left((X_1 \leq +\infty) \cap \cdots \cap (X_i \leq x_i) \cap \cdots \cap (X_n \leq +\infty)\right) \\
&= \lim_{x_j \to +\infty, j \neq i} F_{X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n).
\end{aligned}
$$

注：边缘分布反映的是随机向量每个分量单独的分布。

二维及高维边缘分布函数

1. 二维边缘分布函数：$\forall\ 1 \le i < j \le n$,

$$
\begin{aligned}
& F_{X_i,X_j}(x_i,x_j) = P(X_i \le x_i, X_j \le x_j) \\
&= P\Big((X_1 \le +\infty) \cap \cdots \cap (X_i \le x_i) \cap \cdots \cap (X_j \le x_j) \cap \cdots \cap (X_n \le +\infty)\Big) \\
&= \lim_{\substack{x_k \to +\infty \\ k \notin \{i,j\}}} F_{X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_j,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n).
\end{aligned}
$$

2. 高维边缘分布函数：$\forall\ 1 \le k \le n$，
设 $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset I = \{1, 2, \ldots, n\}$，则

$$
F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}) = \lim_{\substack{x_j \to +\infty \\ j \notin A}} F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\ldots,x_n).
$$

n维随机向量的独立性

定义 3.1.3

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为其上的随机向量，如果 $\forall\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

1. 离散型随机向量:$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充分必要条件是
$$\begin{aligned} &P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \cdots, X_n = a_n) \\ &= P(X_1 = a_1)P(X_2 = a_2)\cdots P(X_n = a_n). \end{aligned}$$

2. 连续型随机向量:$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充分必要条件是
$$\begin{aligned} &f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n). \end{aligned}$$

n维随机向量的分布

若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 则 $U = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_U(u) = F_{X_1}(u)F_{X_2}(u)\cdots F_{X_n}(u);$$

而 $V = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_V(v) = 1 - [1 - F_{X_1}(v)][1 - F_{X_2}(v)]\cdots[1 - F_{X_n}(v)].$$