華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§3.5 微分中值定理

- 极值与 Fermat 定理
- Rolle 定理
- Lagrange 中值定理
- Cauchy 中值定理
- L'Hôspital 法则

极值

定义（极值）

- 若在 x_0 的某个邻域内恒有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，
  则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，
  称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点.

极值

定义（极值）

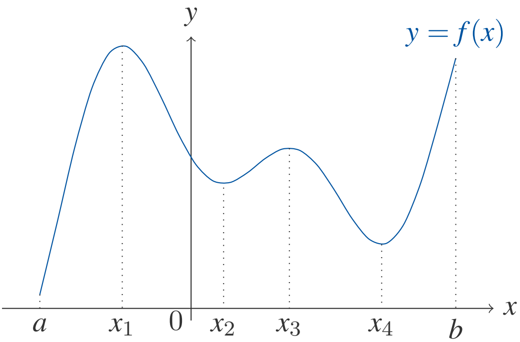
- 若在 x_0 的某个邻域内恒有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，
  则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，
  称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点.
- 若在 x_0 的某个邻域内恒有 $f(x) \geqslant f(x_0)$，
  则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值，
  称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点.

极值

极值未必是最值.

函数的极值是一个局部的概念, 它只是一点附近的最值.

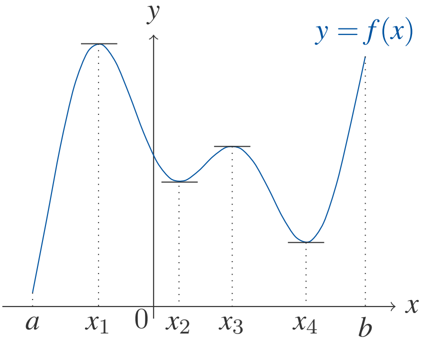
一个函数在一个区间上可能出现许多极值点.



Fermat 定理

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 有定义且 $x_0 \in (a,b)$. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导且 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则

$$f'(x_0) = 0.$$



Fermat 定理

- Fermat 定理中 $x_0 \in (a, b)$ 的条件很重要:
  x_0 必须是 $f(x)$ 的某个定义区间的内点.
  例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2)$ 定义, 在 $x = 1$ 处可导,
  $x = 1$ 是函数的最大值点, 但是 $f'(1) = -1$.
- 若 $f(x)$ 在某区间边界点 x_0 处取到极值, $f'(x_0) = 0$ 未必成立.
- $f'(x_0) = 0$ 仅是 $f(x_0)$ 是极值的必要条件, 不是充分条件.
  例: $f(x) = x^3$ 在 $(-1, 1)$ 有定义, 在 $x = 0$ 可导,
  $f'(0) = 0$, 但 0 既不是极大值点也不是极小值点.

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数. 其最值点必是下列之一:

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数. 其最值点必是下列之一:

- 临界点: $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点。

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数. 其最值点必是下列之一:

- 临界点: $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点。
  其中使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点（稳定点）.

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数. 其最值点必是下列之一:

- 临界点: $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点。
  其中使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点（稳定点）.
- 区间的端点 a 和 b.

闭区间上连续函数的最值

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数. 其最值点必是下列之一:

- 临界点: $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点。
  其中使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点（稳定点）.
- 区间的端点 a 和 b.

求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大最小值,
只需找出上述所有点, 然后比较函数在这些点处的取值大小.

特别地,

- 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导,
  则 $f(x)$ 的最值点必为驻点或区间的端点 a 和 b.

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数. 其最值点必是下列之一:

- 临界点: $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点。
  其中使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点(稳定点).
- 区间的端点 a 和 b.

求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大最小值,
只需找出上述所有点, 然后比较函数在这些点处的取值大小.

特别地,

- 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导,
  则 $f(x)$ 的最值点必为驻点或区间的端点 a 和 b.
- 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调, 则最值在区间端点处达到.

例

求函数 $f(x) = x^p + (1-x)^p$ 在区间 $[0,1]$ 上的最值 $(p \geqslant 1)$.

Rolle 定理

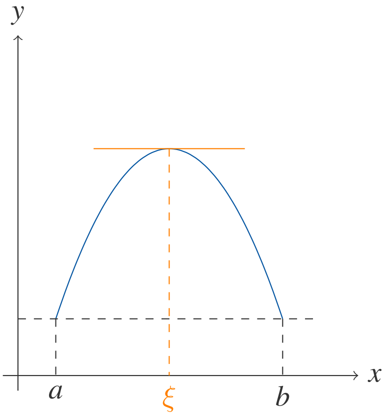
Rolle 定理

若函数 $f(x)$ 满足:

- 在闭区间 $[a,b]$ 连续;
- 在开区间 (a,b) 可导;
- $f(a)=f(b)$.

则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=0.$$



- $f(x)$ 在 (a,b) 可导的条件至关重要.

  例：$f(x)=|x|$ 在 $[-1,1]$ 连续且 $f(-1)=f(1)$,

  但并不存在使 $f'(x)=0$ 的点.

- $f(x)$ 在 (a,b) 可导的条件至关重要.
  例: $f(x)=|x|$ 在 $[-1,1]$ 连续且 $f(-1)=f(1)$,
  但并不存在使 $f'(x)=0$ 的点.
- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $f(a)=f(b)$ 的条件可略微放宽:
  设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可导,
  $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在且相等,
  则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

例

- 证明：方程 $x^3+2x+1=0$ 在 $(-1,0)$ 内只有一个根.
- 设常数 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ 满足条件

$$c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0.$$

证明：方程 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内有一个根.

例

设 $0<a<b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=b, f(b)=a$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

应用 Rolle 定理的关键在于构造合适的辅助函数.

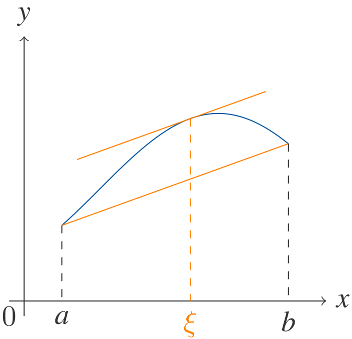
Lagrange 中值定理

若函数 $f(x)$ 满足:

- 在闭区间 $[a,b]$ 连续;
- 在开区间 (a,b) 可导.

则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Lagrange 中值定理

- Lagrange 公式可写成如下形式,

$$
\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= f'(\xi)(b-a), && \text{某个}\,\xi \in (a,b),\\
f(x+\Delta x)-f(x) &= f'(\xi)\Delta x, && \text{某个}\,\xi \in (x,x+\Delta x),\\
f(x+\Delta x)-f(x) &= f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, && \text{某个}\,\theta \in (0,1).
\end{aligned}
$$

Lagrange 中值定理

- Lagrange 公式可写成如下形式，

$$
\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= f'(\xi)(b-a), && \text{某个}\ \xi\in(a,b),\\
f(x+\Delta x)-f(x) &= f'(\xi)\Delta x, && \text{某个}\ \xi\in(x,x+\Delta x),\\
f(x+\Delta x)-f(x) &= f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, && \text{某个}\ \theta\in(0,1).
\end{aligned}
$$

- Lagrange 定理的证明中辅助函数的构造方式不唯一.

$$F(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

$$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Lagrange 中值定理

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 表示函数在区间 $[a,b]$ 的平均变化率.

Lagrange 中值定理

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 表示函数在区间 $[a,b]$ 的平均变化率.
- Lagrange 中值定理刻画了函数的平均变化率和瞬时变化率之间的关系.

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 表示函数在区间 $[a,b]$ 的平均变化率.
- Lagrange 中值定理刻画了函数的平均变化率和瞬时变化率之间的关系.
- 当 $f(a)=f(b)$ 时, Lagrange 中值定理退化为 Rolle 定理.

Lagrange 中值定理

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 表示函数在区间 $[a,b]$ 的平均变化率.
- Lagrange 中值定理刻画了函数的平均变化率和瞬时变化率之间的关系.
- 当 $f(a)=f(b)$ 时, Lagrange 中值定理退化为 Rolle 定理.
- Lagrange 中值定理常用于与函数和导数相关的不等式, 特别是利用导数研究函数.

Lagrange 中值定理

例

证明下列不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad (x > 0),$$

$$|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a|, \quad (a < b),$$

$$|\arctan b - \arctan a| \leqslant |b - a|, \quad (a < b),$$

$$e^x > ex, \quad (x > 1).$$

Lagrange 中值定理

推论

若函数 $f(x)$ 满足:

- 在闭区间 $[a,b]$ 连续;
- 在开区间 (a,b) 可导;
- $f'(x)=0, x\in(a,b)$.

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一常数.

推论

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足:

- 在闭区间 $[a,b]$ 连续;
- 在开区间 (a,b) 可导;
- $f'(x)=g'(x), x\in(a,b)$.

则 $f(x)=g(x)+C, x\in[a,b]$,

其中 C 是一常数.

例

- 证明：当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 时，恒有
$$3\arccos x - \arccos\left(3x - 4x^3\right) = \pi.$$
- 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上可导，且 $f'(x) = \lambda f(x), \lambda \neq 0$. 证明：$f(x) = Ce^{\lambda x}$, C 为常数.

Lagrange 中值定理

定理

设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 连续,
导数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内除 x_0 的点都存在.
若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 则

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0).$$

连续函数的导函数没有可去间断点.

Cauchy 中值定理

Cauchy 中值定理

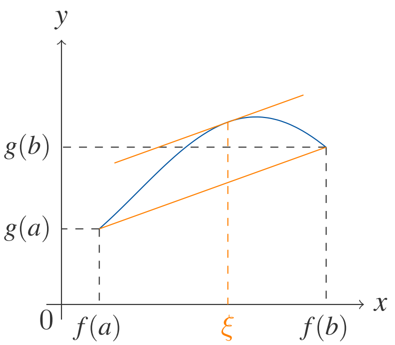
若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足:

- 在闭区间 $[a,b]$ 连续;
- 在开区间 (a,b) 可导且

$$f'(x) \neq 0.$$

则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}.$$



例

- 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b], a>0$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$
- 证明: 存在 $\xi\in(1,e)$ 使得
$$\sin 1=\cos\ln\xi.$$

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

设函数 $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域内非零.

- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
  则称极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型不定式.

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

设函数 $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域内非零.

- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
  则称极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型不定式.
- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,
  则称极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

设函数 $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域内非零.

- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$,

  则称极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型不定式.

- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$,

  则称极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

对于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限的计算,

- 不能直接用极限的运算法则.

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

设函数 $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域内非零.

- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
  则称极限 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型不定式.
- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,
  则称极限 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

对于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限的计算,

- 不能直接用极限的运算法则.
- 若对函数化简后可以用运算法则, 则化简后计算.

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

设函数 $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域内非零.

- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

  则称极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型不定式.
- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,

  则称极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

对于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限的计算,

- 不能直接用极限的运算法则.
- 若对函数化简后可以用运算法则, 则化简后计算.
- 若化简后仍为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式, 则需 L'Hôspital 法则.

L'Hôspital 法则

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
  (或 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;)
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的某个空心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

L'Hôspital 法则

- L'Hôspital 法则对于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ 的情形也成立.

L'Hôspital 法则

- L'Hôspital 法则对于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ 的情形也成立.
- L'Hôspital 法则对于其他极限过程

$$\lim_{x\to a^-},\ \lim_{x\to a^+},\ \lim_{x\to\infty},\ \lim_{x\to+\infty},\ \lim_{x\to-\infty}$$

也成立.

- L'Hôspital 法则对于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ 的情形也成立.
- L'Hôspital 法则对于其他极限过程

$$\lim_{x\to a^-},\ \lim_{x\to a^+},\ \lim_{x\to\infty},\ \lim_{x\to+\infty},\ \lim_{x\to-\infty}$$

  也成立.
- 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式,
  且仍满足 L'Hôspital 法则的条件, 则可多次应用法则.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots.$$

例

计算下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{1-\cos x},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}},\quad (\alpha>0),$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}},\quad (\alpha>0,\lambda>0).$$

例

计算下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{1-\cos x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha},\quad(\alpha>0),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\lambda x}},\quad(\alpha>0,\lambda>0).$$

对任意 $\alpha>0$ 和 $\lambda>0$, 都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\lambda x}}=0.$$

当 $x\to+\infty$ 时,

- x^α 是比 $\ln x$ 更高阶的无穷大;
- $e^{\lambda x}$ 是比 x^α 更高阶的无穷大.

当 x 充分大时,

$$\ln x<x^\alpha<e^{\lambda x}.$$

使用 L'Hospital 法则的注意事项

- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为 ∞ 时,
  无法判断 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的存在性.
- 例: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$ 为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式, 极限值 1.

  分子分母求导后的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}$ 不存在.

使用 L'Hôspital 法则的注意事项

- 应用法则前, 应先进行化简.

使用 L'Hôspital 法则的注意事项

- 应用法则前, 应先进行化简.
- 应用法则前, 必须验证所求极限是$\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式.

使用 L'Hôspital 法则的注意事项

- 应用法则前，应先进行化简.
- 应用法则前，必须验证所求极限是$\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式.
- 只要条件满足，可多次应用法则，但每次应用法则前先化简.

使用 L'Hôspital 法则的注意事项

- 应用法则前, 应先进行化简.
- 应用法则前, 必须验证所求极限是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式.
- 只要条件满足, 可多次应用法则, 但每次应用法则前先化简.
- 求极限时应结合使用等价无穷小替换等其他方法.

例

若 $f'(x_0)$ 存在，求

$$\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}.$$

例（杜波塔托夫）

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2})'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\cdots.\end{aligned}$$

L'Hôspital 法则的条件总成立, 但用 L'Hôspital 法则无法求得极限值.

例

计算下列极限

$$(1)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln ax,\ (a,\alpha>0).$$ $0\cdot\infty$型

$$(2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x).$$ $\infty-\infty$型

$$(3)\ \lim_{x\to 0^+} x^{x}.$$ 0^0型

$$(4)\ \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$ ∞^0型

$$(5)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}.$$ 1^{∞}型

求形如 $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ 等不定式的极限时,

先化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式, 再运用 L'Hôspital 法则.

例

求下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}},\ 其中 a_i>0, i=1,\ldots,n.$$

$$(2)\ \lim_{x\to0}\frac{x(\cos x+2)(e^{2x}-1)^2\arcsin x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}-1\right)\ln(1+8x)}.$$

L'Hôspital 法则

- 数列极限不能直接用 L'Hôspital 法则.
- 设数列 $a_n = f(n)$, 其中 $f(x)$ 是某个函数.
  若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$. (归结原则)

例

求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

華南理工大學
South China University of Technology

作业:

- 习题 3.5(A)
  3. (5)
  6. (1)
  10. (2)
  13.

  习题 3.5(B)
  1. (3)
  9.

South China University of Technology

作业:

- 习题 3.5(A)
  14. (2) (4)
  15. (2) (5) (6) (7)
  16. (2)

  习题 3.5(B)
  12.
  14.