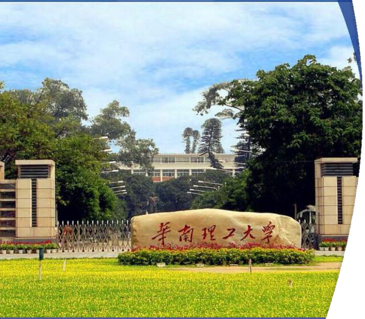

華南理工大學
South China University of Technology

工科数学分析

刘青青

§2.5 实数基本定理

- 确界原理
- 单调有界收敛定理
- 重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$
- 闭区间套定理
- 致密性定理
- Cauchy 收敛准则

确界原理

有上（下）界的数集必有上（下）确界.

单调有界收敛定理

- 单调增加且有上界的数列必有极限.
- 单调减小且有下界的数列必有极限.

例

判断下列数列的收敛性:

$$x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right),$$

$$x_n = \frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1},$$

$$x_n = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},$$

$$x_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

单调有界收敛定理

例

设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

例

设 $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\cdots + \sqrt{a}}}}$（$n$ 重根式），求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

重要极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

定理

数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 有极限, 记为

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

推论

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

例

求下列极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)^x.$$

闭区间套定理

设 $[a_n, b_n], n = 1, 2, \ldots$ 是一列（无穷多个）闭区间，满足条件：

- $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$，即 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，
- $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

则这一列闭区间有唯一的公共点 ξ，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}.$$

闭区间套定理

- 闭区间套定理中每个区间都是闭区间的条件非常重要.

  对于开区间列, 结论未必成立. 如:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\emptyset.$$

例

设 $0 < a < b$, 令 $a_1 = a, b_1 = b$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

定义（数列的子列）

在数列 $\{x_n\}$ 中依次任意抽出无穷多项

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \quad (\text{其中} n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots)$$

所构成的新数列 $\{x_{n_k}\}$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的一个子列.

- x_{n_k} 表示子列的第 k 项, 在原数列中是第 n_k 项.
- $k \leqslant n_k$.
- $n_i < n_j \Leftrightarrow i < j$.

收敛数列的子列

定理

若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛, 且

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

- 数列 $\{x_n\}$ 的某一子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛并不能确保原数列 $\{x_n\}$ 也收敛. 如 $\{(-1)^n\}$ 的偶子列收敛, 但其本身不收敛.
- 若数列 $\{x_n\}$有一个发散的子列 $\{x_{n_k}\}$, 则原数列 $\{x_n\}$ 发散.
- 若数列 $\{x_n\}$ 有两个收敛的子列, 但它们的极限不同, 则原数列 $\{x_n\}$ 发散.
- 若数列 $\{x_n\}$ 的奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和偶子列 $\{x_{2k}\}$ 都收敛, 且有相同的极限, 则原数列 $\{x_n\}$ 收敛.

Bolzano-Weierstrass 致密性定理

Bolzano-Weierstrass 致密性定理

每个有界数列都有收敛的子列.

定理

每个无界数列都有一个子列趋向于无穷.

Cauchy 收敛准则

定义

设 $\{x_n\}$ 是一个数列,

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当 $m, n > N$ 时, 恒有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 数列或基本列.

Cauchy 收敛准则

数列$\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列.

Cauchy 收敛准则

Cauchy 收敛准则（等价形式)

数列$\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当$n > N$ 时, $\forall p \in \mathbb{N}$, 恒有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$

Cauchy 收敛准则（否定形式)

数列$\{x_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n_0, p_0 > N$, 使得 $|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}| \geqslant \varepsilon_0.$

例

判断下列数列的收敛性:

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n},$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

作业:

- 习题 2.5 (A)
  2.
  3.

  习题 2.5 (B)
  2. (2).
  4.