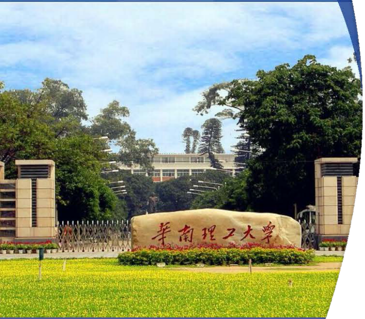
South China University of Technology



工科数学分析

刘青青

§2.3 极限的运算法则

- 极限的四则运算
- 复合函数的极限
- 渐近线

用 lim 表示下列极限过程中的任意一种：

$$\lim_{x\to a},\quad \lim_{x\to a^-},\quad \lim_{x\to a^+},\quad \lim_{x\to\infty},\quad \lim_{x\to+\infty},\quad \lim_{x\to-\infty}.$$

定理（函数极限的四则运算）

设 f 和 g 是两个函数且$\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则

- $\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.
- $\lim f(x)g(x) = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$.
- 若还满足 $\lim g(x)\neq 0$，则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

推论

设 $\lim f(x)$ 存在，则

- $\lim[Cf(x)] = C\lim f(x)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$，$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$.

函数极限的四则运算法则

运用极限的四则运算，要注意以下条件：

- 参加运算的是有限个函数；
- 参加运算的每个函数的极限都存在；
- 在分母上的极限必须非零；
- 极限是无穷的情形不适用四则运算法则.

当极限的四则运算条件不满足时,

- 可先对待求极限的函数进行化简,
  若化简后的函数适用四则运算法则,
  仍可用四则运算法则求极限.
- 特别地, 对于 $x \to a$ 的极限过程,
  可在假设 x 在 a 的空心邻域取值的条件下对函数进行化简.
- 其它极限过程也可相应地限制 x 的取值范围后进行化简.

例

求 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$.

例

若 $\lim f(x)$ 存在, 但 $\lim g(x)$ 不存在, $\lim(f(x)+g(x))$ 是否存在?

例（有理函数的极限）

设 m, n 为正整数, $a_m \neq 0, b_n \neq 0$, 证明:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & m = n, \\ 0, & m < n, \\ \infty, & m > n. \end{cases}$$

例

求下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right),$$

$$(2)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right).$$

例

设函数

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{(x-a)(x-1)}$$

满足:

- (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$,
- (2) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在且不为零.

求 a,b.

定理（数列极限的四则运算）

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个数列，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，则

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- 若 $b_n \neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

例

$$求 \lim_{n\to\infty} \frac{5^n + (-2)^n}{5^{n+1} + 4^{n+1}}.$$

例

$$求 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$$

复合函数的极限

定理

设 $\lim_{u\to u_0} f(u)$ 和 $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 存在且

$$u_0 = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

若在 x_0 附近有 $g(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x) = \lim_{u\to u_0} f(u).$$

条件 “在 x_0 附近 $g(x) \neq u_0$” 在多数情况下都满足,

条件不满足时, 复合函数求极限的法则未必成立.

例

设

$$f(u) = \begin{cases} 1, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, \text{ 且} p, q \text{ 互质}, \\ 0, & x = 0 \text{ 或} x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad \text{(Riemann 函数)}$$

则 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = 1$, 但 $\lim\limits_{x \to 0} f \circ g(x)$ 不存在.

例

求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \log_a \tan\frac{x}{2}$.

渐近线

- 垂直渐近线

  若有 a 使得

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty,\ \text{或}\ \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$$

  则称 $x=a$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线.

- 水平渐近线

  若

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=A,\ \text{或}\ \lim_{x\to -\infty} f(x)=A,$$

  则称 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐进线。

渐近线

- 斜渐进线

  若有常数 a 和 b, $a \neq 0$, 使得

  $$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \text{ 或 } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0,$$

  则称 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐进线的求法:

- 寻找使得函数值趋于无穷大的点 a.
- 应注意 $f(x)$ 没有定义的孤立点,
  特别是 $f(x)$ 是分式时分母的零点.

渐近线的求法

曲线 $y=f(x)$ 的水平或斜渐近线的求法:

- 计算
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 和 } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}.$$
- 若两个极限都不存在,
则曲线 $y=f(x)$ 即没有水平渐近线, 也没有斜渐近线.
- 若 $a:=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 且
$$b:=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$
也存在，则曲线 $y=f(x)$ 有渐近线 $y=ax+b$.
其中, $a=0$ 时为水平渐近线, $a\neq 0$ 时为斜渐近线.
- 若 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 可类似求水平渐近线和斜渐近线.

例

- 求 $y = \frac{1}{x-1}$ 的水平渐近线和垂直渐近线.
- 求曲线 $y = \sqrt{1+x^2}$ 的渐近线.
- 求 a, b 使得

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

華南理工大學
South China University of Technology

作业：

- 习题 2.3 (A)
  2.(5) (8)
  3.(3) (4)
  4.(1) (3)

华南理工大学

South China University of Technology

作业:

- 习题 2.3 (A)
  1. (3) 不对的给出反例
  8. (2)

  习题 2.3 (B)
  4.