计算几何

1、计算几何基础知识

2、凸包

3、旋转卡壳

4、半平面交

初中知识

点的表示

初中知识

用(x,y)表示点的位置

之后所有点的命名均用大写字母

向量

具有方向和长度的量，与位置无关。

用(x,y)来表示一个向量，意思是该向量等同于从原点(0,0)到点(x,y)的向量。

通常类似于以下表示： $\vec{a}$ $\overrightarrow{AB}$

$|\vec{a}|$表示向量$\vec{a}$的模长

点与向量的加减运算

点+向量=点

点-点=向量

向量+向量=向量

代码实现中点与向量均表示为struct vec{int x,y;}类型，通过重载运算符来实现其加减运算。

直线

在解析几何中，直线可以用解析式来表示，OI中也可以，但是计算时会涉及到许多细节。

在计算几何中，用直线上的一点和与一个与该直线方向相同的向量来表示这条直线。

```
struct line{vec p,v;}
```

关于角度与三角函数

角度：

采用弧度制

角的正负

向量的极角

atan2(y,x)

关于角度与三角函数

三角函数：

正弦函数sin

余弦函数cos

正切函数tan

反三角函数：

asin acos

pi=acos(-1)

向量的点积与叉积

$$\vec{a} = (x_1, y_1)$$

$$\vec{\mathrm{b}} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{a} \langle \vec{\mathrm{b}} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

$$\vec{a} \leftrightarrow \vec{\mathrm{b}} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

其中，θ指从向量a到向量b转过的夹角，有正负

向量的点积与叉积

$$\vec{a} \langle \vec{\mathrm{b}} = x_1x_2 + y_1y_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\vec{a} \leftrightarrow \vec{\mathrm{b}} = x_1y_2 - x_2y_1 = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

点积可用于判断夹角与直角的大小关系。
叉积可用于判断两个向量的顺逆时针关系，以及求解面积。

注意叉积运算有顺序性。

点到直线的距离

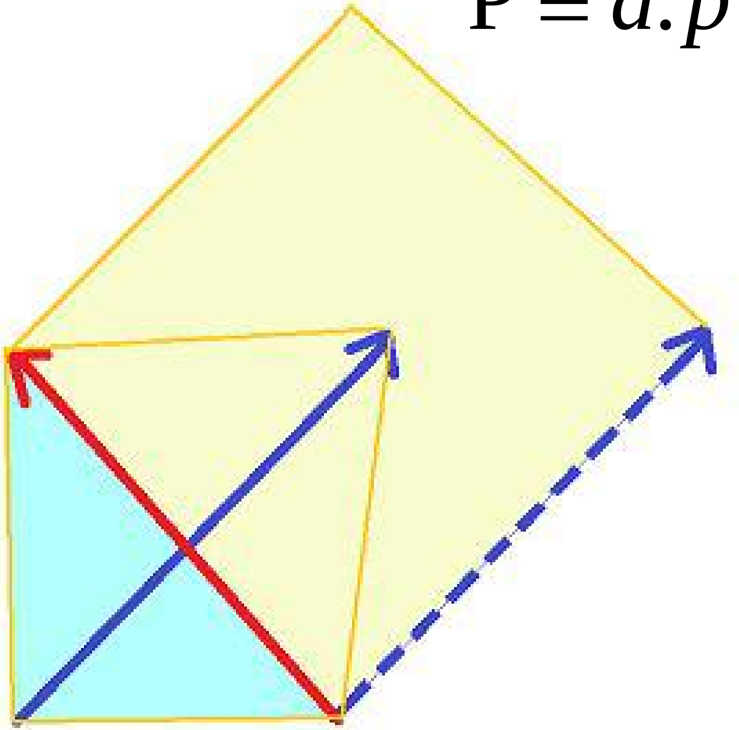
用面积法

$$d = \left| \frac{(P - L.p) \times L.v}{|L.v|} \right|$$

直线求交点

同样用面积法

$$P = a.p + \frac{b.v \leftrightarrow (b.p - a.p)}{b.v \leftrightarrow a.v} * a.v$$



多边形的表示

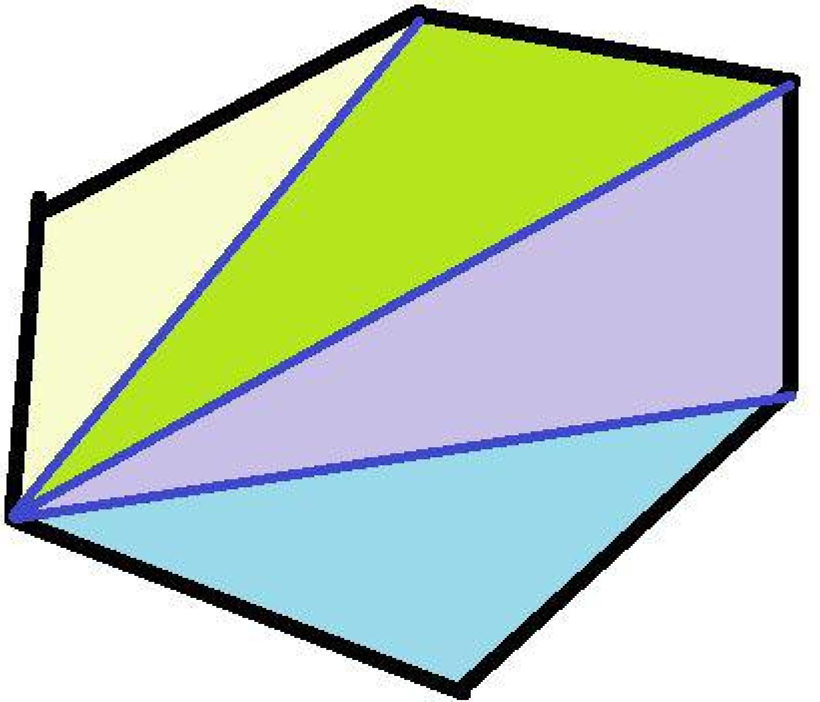
通常按逆时针排列所有点来表示一个多边形

简单多边形?

凸多边形?

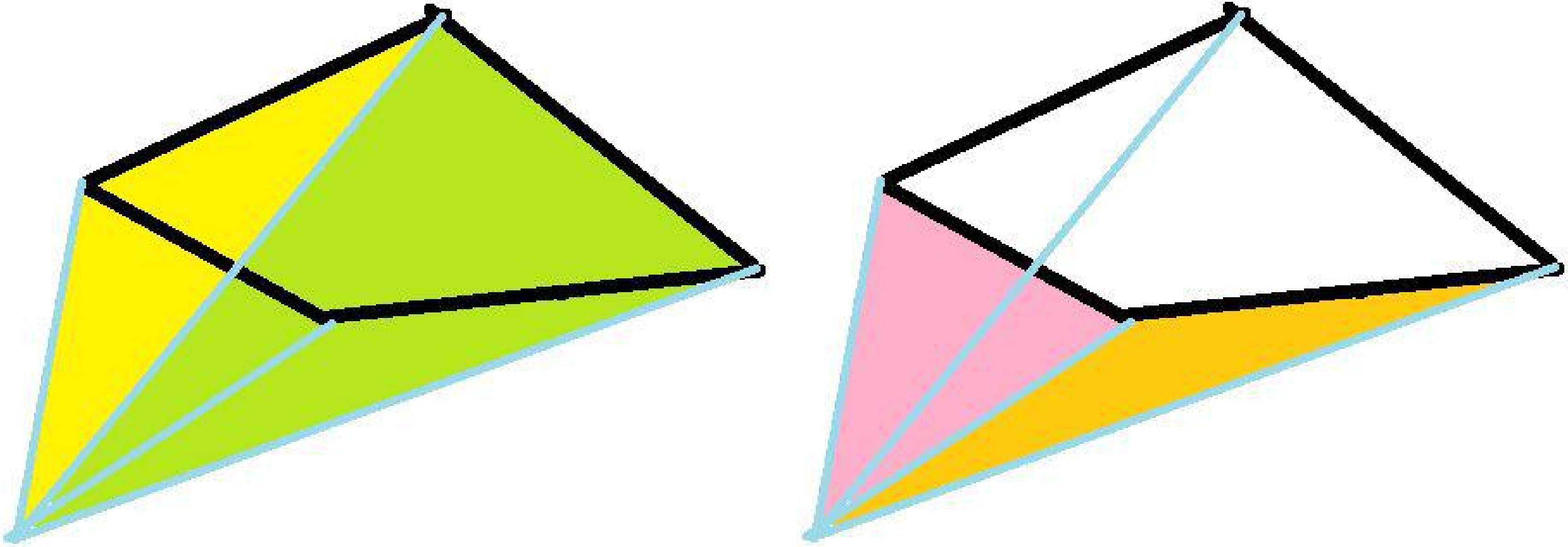
多边形求面积

法一：对多边形三角剖分，用叉积依次求面积。



多边形求面积

法二：任选平面内一点，每条边的两端对其作差求叉积，再求和。



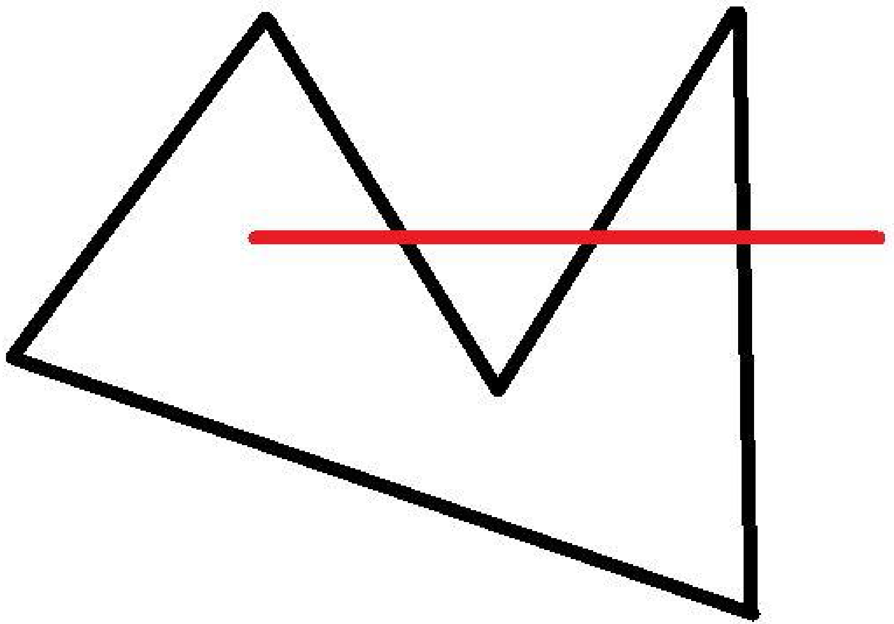
关于精度

所有有浮点数计算的算法通常要设立精度误差eps。若两个数字差值的绝对值小于eps，则判为相等。

eps通常设在 10^-7 ~ 10^-10 之间，不同题目的不同精度要求也会影响eps的选择。

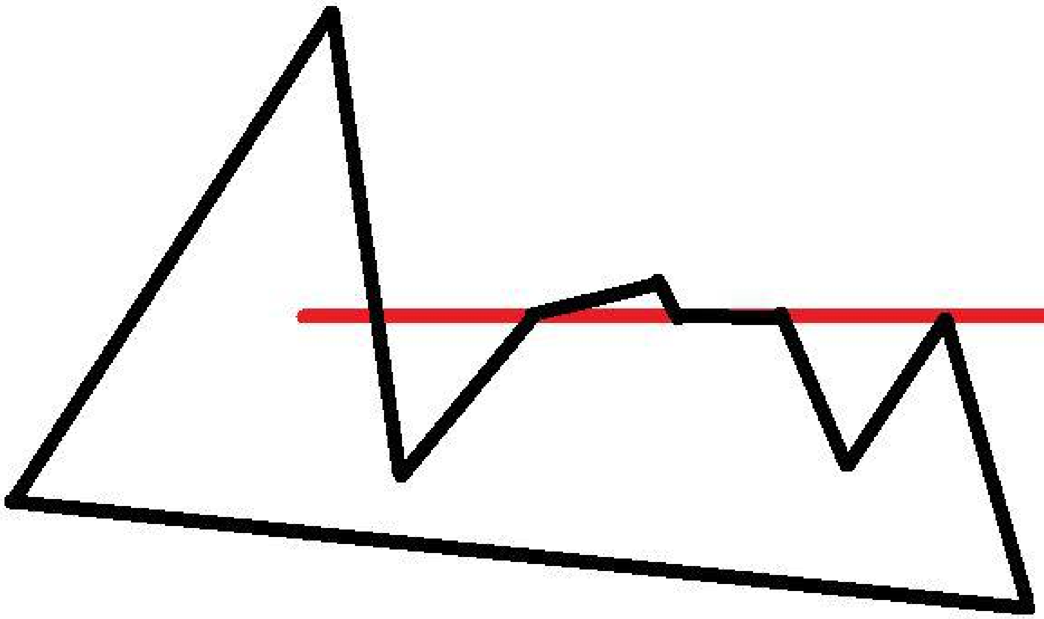
判断点是否在多边形内部

从待求点向任意方向引一条射线，通过该射线与多边形所有边的交点数目奇偶性判断该点是否在多边形内部。



判断点是否在多边形内部

细节：若交点为线段端点，当且仅当线段另一端在射线右侧时，计入该点。



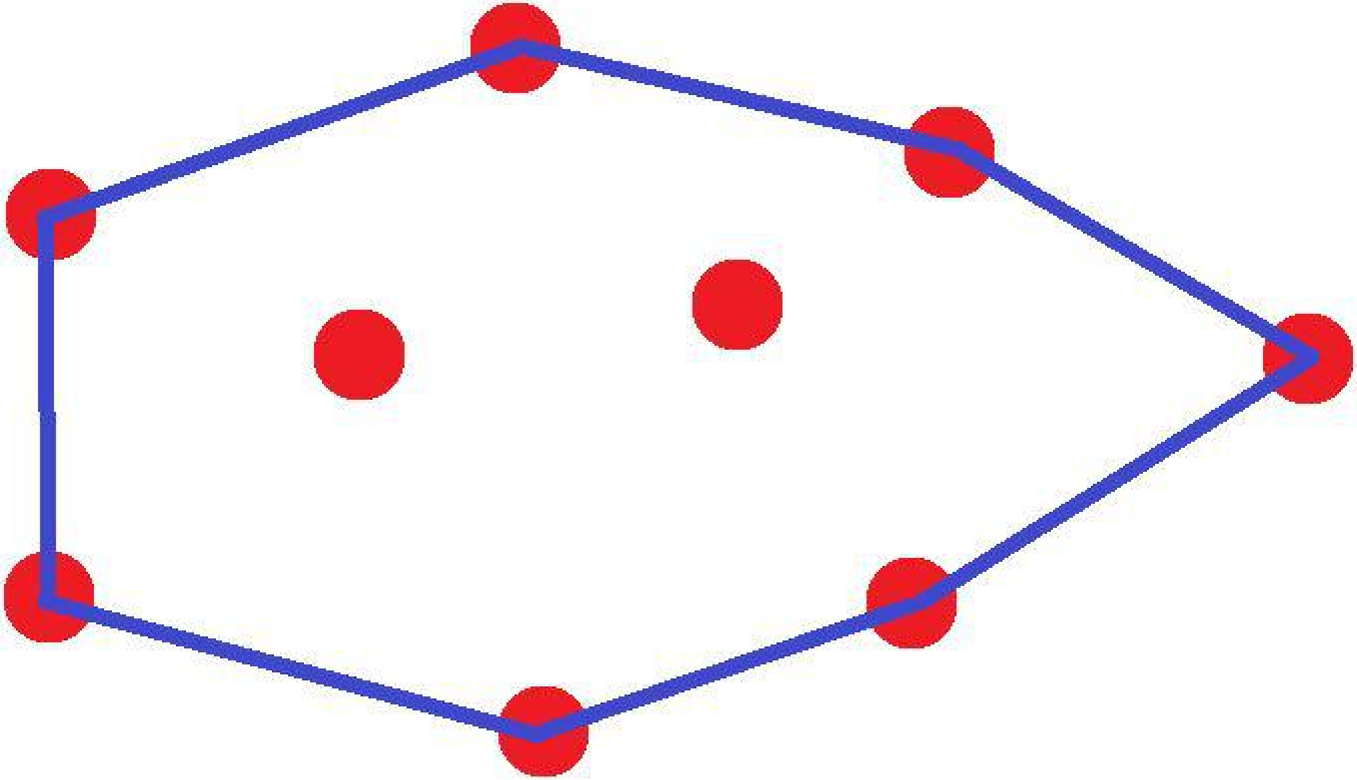
凸包

给出平面内n个点，求一个最小的包含所有点的凸多边形。该多边形称为凸包。

容易证明横坐标最小和最大的点一定在凸包上。

凸包上连接最左右两端的下半部分叫做下凸壳，上半部分叫做上凸壳。

凸包



凸包

首先对所有点按横坐标从小到大排序，横坐标相同的按纵坐标从小到大排序。

维护一个栈，从前往后扫，若加入这个点会使“路线”“向右拐”，那么一直弹出栈顶，直到“左拐”时，加入当前点。

这样就求出了下凸壳，同样的，从后往前扫，求出上凸壳，就求出了凸包。

O(n log n)，具体见代码

POJ1113 Wall

给出一个n个点的多边形城堡，要在多边形外建立围墙，要求围墙距离城堡的最小距离为L，给定多边形和L，求围墙的最小长度。

n<=50000

POJ1113 Wall

求出凸包，围墙的边一定平行于凸包，拐角处为圆弧。

Ans=凸包周长+2πL

SDOI2014 向量集

维护一个向量的集合，要求支持：

1、加入一个向量

2、给出一个向量，并在第 L 个到第 R 个加入的向量中选出一个，使其与该向量点积最大，求最大值。

强制在线

$n<=400000$

SDOI2014 向量集

设询问的向量为(X,Y)，集合中的为(x_i,y_i)

即求$z=Xx_i+Yy_i$最大

$$y_i=-\frac{X}{Y}x_i+\frac{z}{Y}$$

当Y为正数时，对$[L,R]$内的点求上凸壳

答案在可在上凸壳上三分得到

Y为负数时，同理在下凸壳上找答案

考虑如何维护区间凸壳

SDOI2014 向量集

用线段树维护凸壳

查询答案时在logn个凸壳上分别三分

线段树上一个节点仅在被填满时建立上下凸壳

O（$n\log^2 n$）

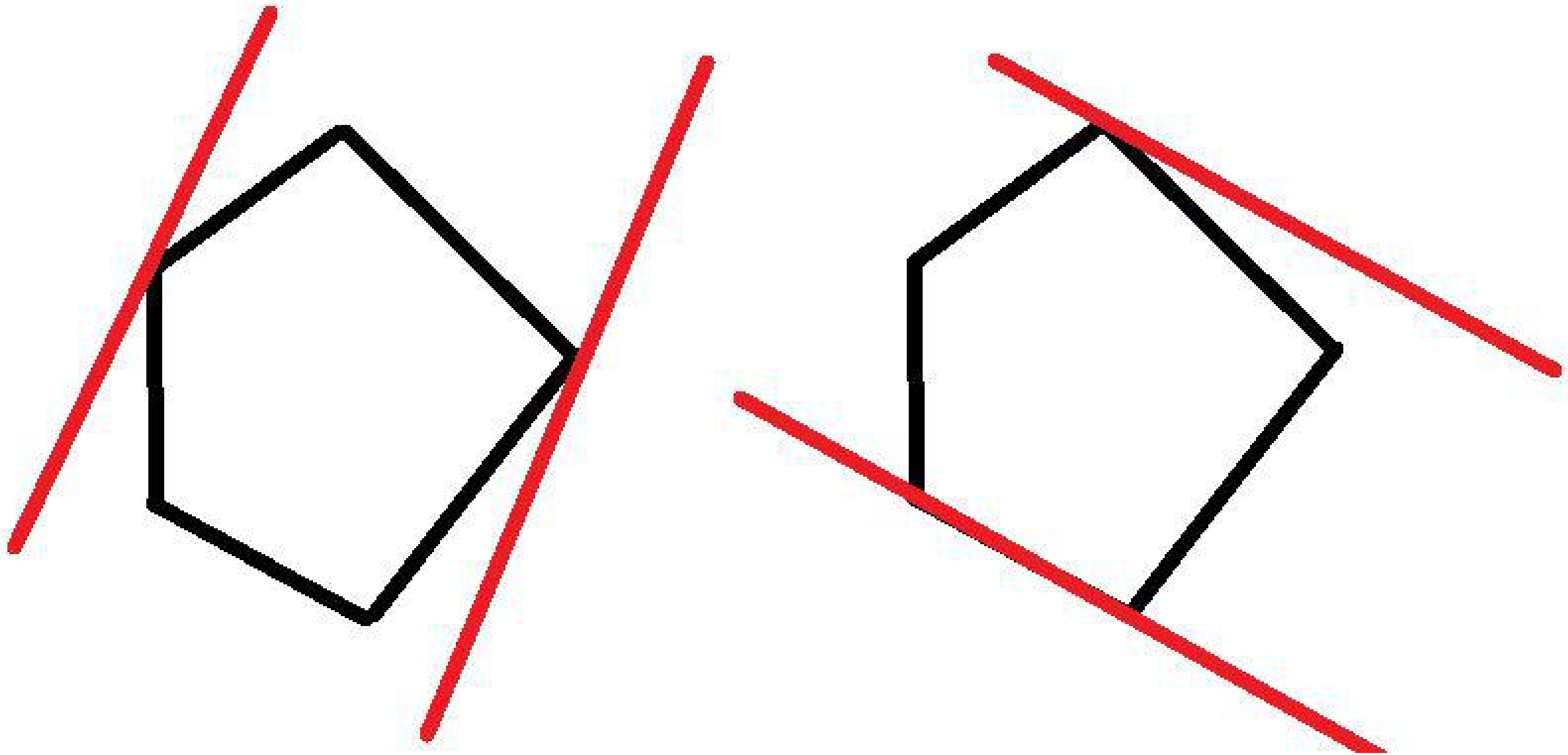
构建凸壳时可以使用凸包合并的技巧

旋转卡壳

用两条平行的直线去卡住一个凸多边形，所有能被卡住的点对称为对踵点，可以证明对踵点的对数是O(n)的。

旋转卡壳就是用来求出所有的对踵点。

旋转卡壳



旋转卡壳

容易发现，所有对踵点一定能在某条直线与一条边重合时找到，此时另一条直线经过与该边距离（点到直线距离）最大的点。

于是可以按顺序枚举所有的边，对每条边找距离其最远的点，容易看到该点的位置也是在凸包上单调移动的。这样就可以找到所有的对踵点。

O(n)

平面最远点对

给出平面内一组点，求最远点对。

最远点对一定是凸包上的对踵点。（证明?

旋转卡壳时每次计算从最远点到边两端的距离即可。

SCOI2007 最大土地面积

在平面土地上有n个点，你可以选择其中的任意四个点，将这片土地围起来，使这四个点围成的多边形面积最大。

$n<=2000$

SCOI2007 最大土地面积

这四个点一定在凸包上。（证明?

枚举四边形的对角线，接下来只要在对角线两侧找距离最远的点，像旋转卡壳一样做即可。

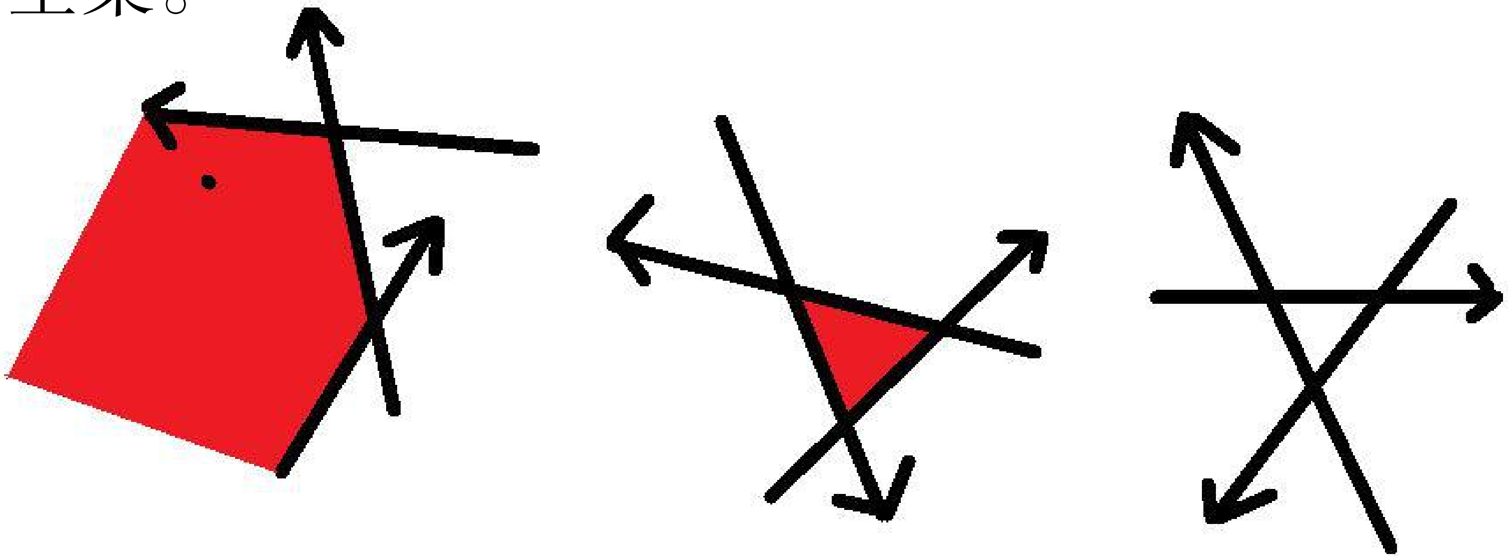
半平面

在平面坐标系中，一条直线会将整个平面分成两部分，这两部分称之为半平面。

在计算几何中，在点+向量表示平面的基础上，通常用该向量的左侧表示该半平面。

半平面交

许多半平面的交集称为半平面交，半平面交可以是一个无限大的区域，可以是一个凸多边形，也可以是一个空集。



半平面交

先将所有半平面按极角(atan2)排序，对于极角相同的，靠左的放在前面。

维护双端队列，每次插入一个新的半平面前，只要其与直线q[r]的交点在q[r-1]右侧，弹出q[r]；只要q[l]和q[l+1]的交点在该直线右侧，弹出q[l]；然后在右端加入该直线。

半平面交

这就完事了？

没有。

最后可能还有多余的直线。

只要q[l]和q[r]的交点在q[r-1]右侧，弹出q[r]；

若最后剩余直线数量小于3，则交空集。

最大内切圆

给出一个n个点的凸多边形，求它的最大内切圆半径。

$n<=100000$

最大内切圆

相当于是要在多边形内找一个点，使它到每条边的距离最小值最大。

二分答案，将每条边向内移动这些距离，判断半平面交是否为空集即可。

还有一些有用但是没讲到的有：

求多边形重心、辛普森积分、最小圆覆盖、扫描线、平面图转对偶图、平面图点定位、三维计算几何基础……

计算几何题通常思维难度并不高，难点仅在于实现（和运气）。