浙江大学 2023-2024 学年
线性代数荣誉课辅学讲义

2023-2024 学年线性代数 I/II（H）辅学授课
吴一航 yhwu_is@zju.edu.cn

2023 年 7 月 3 日

目录

第一章 预备知识 **1**

1.1 等价类 1

1.2 高斯消元法 1

1.3 基本代数结构 1

第二章 线性空间 **3**

2.1 线性空间的定义 3

2.2 线性子空间 3

2.3 线性扩张 3

2.4 复数与线性空间 4

第三章 有限维线性空间 **7**

3.1 线性相关性 7

3.2 基与维数 7

第四章 线性空间的运算 **9**

4.1 线性空间的交、并、和 9

4.2 线性空间的直和 9

4.3 维数公式 9

4.4 线性空间的积 9

第五章 线性映射 **11**

5.1 线性映射的定义 11

5.2 线性映射的确定 11

5.3 线性映射的像与核 11

5.4 线性映射的矩阵表示 11

第六章 线性映射基本定理 **13**
6.1 线性映射的秩 13
6.2 线性映射基本定理 13
6.3 像与核的进一步讨论 13
6.4 可逆与同构 13

第七章 商空间与对偶 **15**

第八章 矩阵基本运算 **17**
8.1 矩阵基本运算 17
8.2 矩阵转置 17
8.3 初等矩阵 17
8.4 矩阵的逆 17
8.5 矩阵的逆的求解 17

第九章 矩阵运算进阶 **19**
9.1 特殊矩阵 19
9.2 分块矩阵 19
9.3 矩阵的幂 19

第十章 矩阵的秩 **21**
10.1 矩阵的秩 21
10.2 相抵标准形 21
10.3 秩不等式 21

第十一章 行列式（I） **23**
11.1 行列式的几种定义 23
11.2 行列式的基本运算 23
11.3 伴随矩阵 23
11.4 Cramer 法则 23
11.5 行列式的秩 23

第十二章 行列式计算进阶 **25**

第十三章 朝花夕拾 **27**
13.1 线性方程组解的一般理论 27
13.2 理论应用 27
13.3 线性方程组拓展题型 27

第十四章 多项式 **29**
14.1 多项式的定义 29
14.2 带余除法 29
14.3 代数学基本定理 29

第十五章 不变子空间 **31**
15.1 不变子空间的定义 31
15.2 特征值与特征多项式 31
15.3 特征向量与特征子空间 31

第十六章 相似标准形 **33**
16.1 上三角矩阵 33
16.2 对角矩阵 33
16.3 分块对角矩阵 33

第十七章 多项式的进一步讨论 **35**
17.1 特征多项式与极小多项式 35
17.2 哈密顿-凯莱定理 35
17.3 多项式与标准形 35

第十八章 若当标准形 **37**
18.1 若当标准形的存在 37
18.2 若当标准形的求法 37
18.3 若当标准形的应用 37

第十九章 内积空间 **39**
19.1 内积和范数 39
19.2 标准正交基 39
19.3 正交补 39

第二十章 内积空间上的算子（I） **41**
20.1 正交矩阵和酉矩阵 41
20.2 正定矩阵 41

第二十一章 内积空间上的算子（II） **43**
21.1 自伴算子和正规算子 43
21.2 谱定理 43

第二十二章 极分解与奇异值分解 **45**

第二十三章 实空间上的算子 **47**

第二十四章 行列式（II） **49**

第二十五章 线性代数与解析几何基础 **51**

第二十六章 二次型 **53**

26.1 双线性函数 . . . 53
26.2 二次型的标准形 . . . 53
26.3 惯性定理 . . . 53

第二十七章 线性代数与多元微积分 **55**

27.1 向量函数的导数 . . . 55
27.2 行列式的导数 . . . 55
27.3 雅可比行列式 . . . 55

第 1 讲　预备知识

1.1　等价类

1.2　高斯消元法

1.3　基本代数结构

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 2 讲　线性空间

2.1　线性空间的定义

2.2　线性子空间

我们首先看线性子空间的定义:

定义 2.1 设 W 是线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的非空子集，如果 W 对 V 中的运算也构成域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，则称 W 是 V 的线性子空间（简称子空间）.

请一定注意定义中的非空子集，建议验证子空间时先验证非空。接下来是验证子空间的一般方法:

定理 2.1 线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的非空子集 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 $V(\mathbf{F})$ 的线性运算封闭.

这表明只要子空间中的元素满足对原空间的加法和数乘运算封闭即可。

注意线性空间有两个子空间称为平凡子空间，即仅含零元的子集 $\{0\}$ 和其自身 V。其它子空间称为非平凡子空间。

例 2.1（1）说明 $\mathbf{R}[x]_2$ 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 的子空间;

（2）判断 $W_1 = \{(x, y, z) \mid \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = z\}, W_2 = \{(x, , y, z) \mid x + y + z = 1, x - y + z = 1\}$ 是否为 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

第二小问表明过原点的直线/平面构成三维空间的子空间，不过原点的无法保持线性性。

2.3　线性扩张

接下来我们讨论线性扩张及其性质，我们首先来看线性组合和线性表示的概念:

定义 2.2 设 $V(\mathbf{F})$ 是一个线性空间，$\alpha_i \in V, \lambda_i \in \mathbf{F}(i=1,2,\cdots,m)$，则向量 $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$ 称为向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 在域 $\mathbf{F}$ 的线性组合，或说 α 在域 $\mathbf{F}$ 上可用向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 线性表示.

基于此，我们给出线性扩张的定义：

定义 2.3 设 S 是线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的非空子集，我们称

$$L(S) = \{\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k\alpha_k \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{F}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in S, k \in \mathbf{N}^*\}$$

为 S 的线性扩张，即 S 中所有有限子集在域 $\mathbf{F}$ 上的一切线性组合组成的 $V(\mathbf{F})$ 的子集.

下面的定理告诉我们可以通过线性扩张构造子空间：

定理 2.2 线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的非空子集 S 的线性扩张 $L(S)$ 是 V 中包含 S 的最小子空间.

这一定理的证明首先证明线性扩张是子空间，这是容易的，然后说明最小只需要说明 $L(S)$ 是 V 中包含 S 的任意子空间的子集即可。

最后我们再说明有限维线性空间和无限维线性空间的定义，本课程研究的内容都在有限维线性空间：

定义 2.4 $V(\mathbf{F})$ 称为有限维线性空间，如果 V 中存在一个有限子集 S 使得 $L(S) = V$，反之称为无限维线性空间.

例 2.2 证明：$\mathbf{R}[x]_3$ 是有限维线性空间，$\mathbf{R}[x]$ 是无限维线性空间.

2.4 复数与线性空间

内容总结

习题

1520 年以来，全世界只有 85 个机构存活至今，其中 50 家是大学。大学依靠梦想、希望生存下去——这就是大学的历史。

——美国哥伦比亚大学校长 L · C · 柏林格

A 组

1. 检验下列集合对指定的加法和数乘运算是否构成实数域上的线性空间.

   （1）有理数集 $\mathbf{Q}$ 对普通的数的加法和乘法；

   （2）集合 $\mathbf{R}^2$ 对通常的向量加法和如下定义的数量乘法：$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, y)$；

（3）$\mathbf{R}_{+}^{n}$（即 n 元正实数向量）对如下定义的加法和数乘运算：

$$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n),$$

$$\lambda \cdot (a_1, \cdots, a_n) = (a_1^{\lambda}, \cdots, a_n^{\lambda}).$$

（4）请继续完成教材 P86 第二章习题第一题 9-11 小问关于函数的加法数乘定义线性空间的问题.

2. 请完成教材 P86-86 第二章习题第三题的全部小问. 第 5 小问平常问题较多，实际上就是要判断满足一定条件的多项式是否构成子空间.

B 组

1. 设 V 是一个线性空间，W 是 V 的子集，证明：W 是 V 的子空间 $\iff L(W) = W$.

2. 回答以下两个问题：

（1）设 $\mathbf{R}^+$ 是所有正实数组成的集合，加法和数乘定义如下：$\forall a, b \in \mathbf{R}^+, k \in \mathbf{R}, a \oplus b = ab, k \odot a = a^k$，$\mathbf{R}^+$ 关于这一加法和数乘构成一个实线性空间，求 $\mathbf{R}^+$ 的一组基；

（2）设 V 是一个 n 维实线性空间，证明：存在 V 中的一个由可列无穷多个向量组成的向量组 $\{\alpha_i \mid i \in \mathbf{Z}^+\}$，使得其中任意 n 个向量组成的向量组都是 V 的一组基.

C 组

1. 设 E 是域 F 的一个子域.

（1）证明：F 关于自身的加法和乘法构成一个 E 上的向量空间，并举一例；

（2）举例说明：$E(E \neq F)$ 不是 F 上的线性空间；

（3）证明：若 V 是 F 上的一个线性空间，则 V 也是 E 上的一个线性空间.

第 3 讲　有限维线性空间

3.1　线性相关性

3.2　基与维数

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 4 讲　线性空间的运算

4.1　线性空间的交、并、和

4.2　线性空间的直和

4.3　维数公式

4.4　线性空间的积

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 5 讲　线性映射

5.1　线性映射的定义

5.2　线性映射的确定

5.3　线性映射的像与核

5.4　线性映射的矩阵表示

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第6讲　线性映射基本定理

6.1　线性映射的秩

6.2　线性映射基本定理

6.3　像与核的进一步讨论

6.4　可逆与同构

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 7 讲　商空间与对偶

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 8 讲　矩阵基本运算

8.1　矩阵基本运算

8.2　矩阵转置

8.3　初等矩阵

8.4　矩阵的逆

8.5　矩阵的逆的求解

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 9 讲　矩阵运算进阶

9.1　特殊矩阵

9.2　分块矩阵

9.3　矩阵的幂

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 10 讲　矩阵的秩

10.1　矩阵的秩

10.2　相抵标准形

10.3　秩不等式

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 11 讲　行列式（I）

11.1　行列式的几种定义

11.2　行列式的基本运算

11.3　伴随矩阵

11.4　Cramer 法则

11.5　行列式的秩

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 12 讲　行列式计算进阶

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 13 讲　朝花夕拾

13.1　线性方程组解的一般理论

13.2　理论应用

13.3　线性方程组拓展题型

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 14 讲　多项式

14.1　多项式的定义

14.2　带余除法

14.3　代数学基本定理

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 15 讲　不变子空间

15.1　不变子空间的定义

15.2　特征值与特征多项式

15.3　特征向量与特征子空间

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 16 讲　相似标准形

16.1　上三角矩阵

16.2　对角矩阵

16.3　分块对角矩阵

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第17讲　多项式的进一步讨论

17.1　特征多项式与极小多项式

17.2　哈密顿-凯莱定理

17.3　多项式与标准形

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第18讲　若当标准形

18.1　若当标准形的存在

18.2　若当标准形的求法

18.3　若当标准形的应用

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 19 讲　内积空间

19.1　内积和范数

19.2　标准正交基

19.3　正交补

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 20 讲　内积空间上的算子（I）

20.1　正交矩阵和酉矩阵

20.2　正定矩阵

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 21 讲　内积空间上的算子（II）

21.1　自伴算子和正规算子

21.2　谱定理

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 22 讲　极分解与奇异值分解

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 23 讲　实空间上的算子

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 24 讲　行列式（II）

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 25 讲　线性代数与解析几何基础

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 26 讲　二次型

26.1　双线性函数

26.2　二次型的标准形

26.3　惯性定理

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.

第 27 讲　线性代数与多元微积分

27.1　向量函数的导数

27.2　行列式的导数

27.3　雅可比行列式

内容总结

习题

A 组

1.

B 组

1.

C 组

1.