# 数学分析（甲）II（H）2023-2024 春夏期末答案

图灵回忆卷

2025 年 6 月 10 日

**一、 (10 分)** 定义：设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 $\mathrm{U}(P_0)$ 上有定义，对 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in \mathrm{U}(P_0)$，若 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 可表示为 $A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$A, B$ 为仅与 $P_0$ 有关的常数，则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。

证明：$f(x,0)=0$，$f_x'(x,0)=0$，$f(0,y)=y\arctan\dfrac{1}{|y|}$，$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\arctan\dfrac{1}{|y|}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) = \Delta y \arctan\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \Delta y\arctan\dfrac{1}{\rho}.$

$$\begin{aligned}
\text{故}\quad &\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - f_x'(0,0)\Delta x - f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}\\
&=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta y(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2})}{\rho}\\
&=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\sin\theta}{\rho}\cdot\lim_{\rho\to 0}(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2})=0
\end{aligned}$$

从而 $\Delta z = f_x'(0,0)\Delta x + f_y'(0,0)\Delta y + o(\rho)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微。

**二、 (32 分)**

**1.** 设 $x=r\cos\theta\cos\varphi$，$y=r\cos\theta\sin\varphi$，$z=r\sin\theta$，则

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi\\ y_r & y_\theta & y_\varphi\\ z_r & z_\theta & z_\varphi\end{vmatrix} = -r^2\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
\text{故}\quad &\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cdot r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

**2.** $f(x)=\int_0^x \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$，$f'(x)=\sqrt{\sin x}$，

$$\begin{aligned}
\text{故}\quad & \int_L x\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\pi} x\cdot\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} x\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= 4(x\sin x - x\cos x+\sin x+\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.
\end{aligned}$$

**3.** $P(x,y)=e^x\sin y-y^2$，$Q(x,y)=e^x\cos y$，设 $A(0,0)$，$B(\pi,0)$，$L':L+\overline{BA}$ 为闭合曲线，围成闭区域 $D$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2y$

由格林公式

$$\oint_{L'} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=-\iint_D 2y\,\mathrm{d}\sigma=-\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}2y\,\mathrm{d}y=-\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$$

在 $AB$ 上 $P(x,y)=0$，$\mathrm{d}y=0$，故 $\oint_{AB} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$，故 $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=-\dfrac{\pi}{2}$.

**4.** 设 $x=r\cos\theta$，$y=\cos\theta$，$z=r$，$0\le r\le 1$

则 $\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r\sin\theta$，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & -r\cos\theta\end{vmatrix}=r$，从而为负向。

$$\begin{aligned}
\text{故}\quad & \iint_S y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\sin^2\theta\cdot(-r\sin\theta)+(r+1)r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{5}{6}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin\theta(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{5\pi}{3}=-\frac{5\pi}{3}.
\end{aligned}$$

**三、 (10 分)** $f(x-z,y-z)=0$，故 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1\cdot(1-\dfrac{\partial z}{\partial x})+f_2\cdot(-\dfrac{\partial z}{\partial x})=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_1\cdot(-\dfrac{\partial z}{\partial y})+f_2\cdot(1-\dfrac{\partial z}{\partial y})=0$，其中 $f_1,f_2$ 分别为 $f$ 两个分量的偏导数。

两式相加得：$(f_1+f_2)(1-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y})=0$，且由条件，$f_1+f_2\neq 0$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

**四、 (10 分)** 即求平面上一点 $(x,y,z)$，使得 $f(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ 取到最小值。

用拉格朗日乘数法，设 $F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}+\lambda(ax+by+cz+d)$，有 $F_x=\dfrac{x-x_0}{f(x,y,z)}+\lambda a$，$F_y=\dfrac{y-y_0}{f(x,y,z)}+\lambda b$，$F_z=\dfrac{z-z_0}{f(x,y,z)}+\lambda c$，$F_\lambda=ax+by+cz+d$。

令 $F_x=0$，$F_y=0$，$F_z=0$，$F_\lambda=0$，则有 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}:=t$，

故 $x=x_0+at$，$y=y_0+bt$，$z=z_0+ct$。
代入 $F_\lambda=0$ 得 $a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$，即 $t=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$。
故 $f(x,y,z)=\sqrt{(at)^2+(bt)^2+(ct)^2}=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 为所求距离。

五、 **(10 分)** Dirichlet 判别法：

(1) $\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I$ 上一致有界；

(2) $\forall x\in I$，$\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 单调；

(3) $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I$ 上一致收敛于 0.

满足这三点则有 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛。
证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx=\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}(\sin{(n+\dfrac{1}{2})x}-\sin\dfrac{x}{2})\le\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-1$. 故 $\sum\cos kx$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致有界。
$\{\dfrac{n}{n^2+1}\}=\{\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}\}$ 单调趋于 0，且对于以 $x$ 为变元的函数列来说相当于常函数列，故一致收敛于 0.
故由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n\cos kx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛。

六、 **(10 分)** $T=2l=2\Rightarrow l=1$，故

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1x^2\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\&=(\frac{1}{n\pi}x^2\sin n\pi x+\frac{2}{n^2\pi^2}x\cos n\pi x-\frac{2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x)|_0^1\\&=\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1x^2\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\\&=(\frac{-1}{n\pi}x^2\cos n\pi x+\frac{2}{n^2\pi^2}x\sin n\pi x+\frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi x)|_0^1\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1).\end{aligned}$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{6}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos n\pi x+(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\dfrac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1))\sin n\pi x)$，
在 $x=\pm1$ 时收敛于 $\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

七、 **(10 分)** Cauchy 收敛准则：对于常数项级数 $\sum x_k$，其收敛的充要条件为：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N$，使得对 $\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$。

证明：由条件，$\forall\varepsilon_1>0,\exists N_1,\forall n>N_1,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon_1$；

$\forall\varepsilon_2>0,\exists N_2,\forall n>N_2,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|b_{n+p+1}-b_{n+p}|+|b_{n+p}-b_{n+p-1}|+\cdots+|b_{n+2}-b_{n+1}|<\varepsilon_2$。

则不难知存在 $M>0$ 与 $N_3$，使得对 $\forall n>N_3$，有 $|b_n|<M$。

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$ 使得 $\varepsilon_1(M+\varepsilon_2)=\varepsilon$，取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则对 $\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}_+$，有：

$$
\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\\
\le\ &|b_{n+1}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})|+|(a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{n+p})(b_{n+2}-b_{n+1})|\\
&\quad+|(a_{n+3}+\cdots+a_{n+p})(b_{n+3}-b_{n+2})|+\cdots+|a_{n+p}(b_{n+p}-b_{n+p-1})|\\
<\ &\varepsilon_1(|b_{n+1}|+|b_{n+2}-b_{n+1}|+\cdots+|b_{n+p}-b_{n+p-1}|)\\
<\ &\varepsilon_1(M+\varepsilon_2)=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

由 Cauchy 收敛准则，$\sum a_nb_n$ 收敛。

八、 **(8 分)**

$$\frac{\mathrm{d}g_\theta}{\mathrm{d}t}=f_1\cos\theta+f_2\sin\theta=0,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2g_\theta}{\mathrm{d}t^2}&=f_{11}\cos^2\theta+2f_{12}\cos\theta\sin\theta+f_{22}\sin^2\theta\\
&=\frac{f_{11}+f_{22}}{2}+\frac{f_{11}-f_{22}}{2}\cos2\theta+f_{12}\sin2\theta>0.
\end{aligned}
$$

上式对 $\forall\theta\in[0,2\pi)$ 成立，故 $f_1=f_2=0$，且由辅助角公式，$\dfrac{f_{11}+f_{22}}{2}>\sqrt{(\dfrac{f_{11}-f_{22}}{2})^2+f_{12}^2}$

即 $f_{11}\cdot f_{22}-f_{12}^2=\begin{vmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{vmatrix}>0$，且代入 $\theta=0$ 到 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\theta}{\mathrm{d}t^2}$ 中，得 $f_{11}>0$，

利用 Hesse 矩阵的正定性，得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处有极小值。