

概率论 (H) 2023-2024 秋冬期末考试

图灵回忆卷

2024 年 1 月 13 日

一、(10 分)

1. E, F 是任意的非空事件. 证明: $P(E|E \cup F) \geq P(E|F)$.
2. 已知事件 A, B, C , 且 A, C 不相容. $P(AB) = 0.5, P(C) = 0.3$, 求 $P(AB|\bar{C})$.

二、(10 分) 某彩票店每天卖出的彩票数量服从参数为 λ 的 Poisson 分布. 对于每张彩票, 中奖的概率为 p , 且各张彩票中奖与否相互独立.

1. 求卖出 k 张中奖彩票的概率.
2. 已知卖出了 k 张中奖彩票, 求当天卖出 m 张彩票的概率.

三、(15 分) 已知

$$f(x, y) = c(1 + xy) \quad -1 < x, y < 1$$

1. 求常数 c 使得 $f(x, y)$ 是联合密度函数.
2. 求 $Y = \frac{1}{2}$ 条件下 X 的条件密度函数.
3. 求 $P\{X > Y\}$.
4. X^2, Y^2 是否独立?

四、(20 分) 已知 $X \sim N(0, 1)$. 对于任意给定的 x , 当 $X = x$ 时, $Y \sim N(x, 1)$.

1. 求 Y 的密度函数.
2. 求条件期望 $E(XY|X = x)$.
3. 求 X, Y 的相关系数.
4. 求常数 a 使得 $aX + Y$ 与 $aX - Y$ 相互独立.

五、(15 分) 记 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是一列独立且均服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布的随机变量. 记 $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. 求 $\text{Cov}(Y, Z)$.

Hint:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

六、(15 分) 掷 180 次均质骰子, 记事件 A : “掷到 6 的次数不超过 25”. 用正态分布近似计算 $P(A)$. 已知 $\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772, \Phi(3) = 0.9987$.

七、(15 分) 已知 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是一列独立同分布的非负随机变量, 期望为 1, 方差为 1. 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 证明

$$2(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$