

2023-2024数学分析辅学第一次授课

1 实数完备性定理

1.0

1. 给出概念、定理的名字可以使用数学语言准确叙述。
2. 掌握基本的定理证明链（详细参考1.4.1 1.4.2）：
 - 确界原理 \rightarrow 单调有界定理 \rightarrow 致密性定理 \rightarrow Cauchy准则
 - 单调有界定理 \rightarrow 闭区间套定理 \rightarrow 有限覆盖定理（聚点原理和Dedekind分割定理不要求）
 - 确界原理 \rightarrow 各个定理
3. 期末考试会在这几个定理里出叙述题和证明题；小测会考各个定理的数学叙述细节。

1.1 概念叙述

1. 有界，无界

数列有界： $\forall n > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \text{使} |x_n| < M \text{恒成立}$

数列无界： $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n > 0, \text{使} |x_n| > M$

错误(?)： $\exists n > 0, \forall M \in \mathbb{R}, \text{使} x_n > M$

数学语言的否定：转换全称量词和存在量词，注意量词顺序，改变符号

2. 最大数，最小数

$$\max\{S\} = a \iff a \in S \text{ 且 } \forall x \in S, a \geq x$$

$$\min\{S\} = b \iff b \in S \text{ 且 } \forall x \in S, b \leq x$$

3. 上确界，下确界

$$M = \sup\{S\} \iff \forall x \in S, x \leq M \text{ 且 } \forall \epsilon > 0, \exists x' \in S \text{ 有 } x' > M - \epsilon$$

$$m = \inf\{S\} \iff \forall x \in S, x \geq m \text{ 且 } \forall \epsilon > 0, \exists x' \in S \text{ 有 } x' < m + \epsilon$$

1.2 定理叙述

1. 确界原理

非空有界子集必有上下确界

2. 单调有界定理

单调有界数列必收敛

3. 致密性定理

任何有界数列必有收敛子列

4. Cauchy准则

$$a_n \text{ 收敛} \iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N, \text{ 均有 } |a_m - a_n| < \epsilon$$

$$\iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, p > 0, \text{ 均有 } |a_{n+p} - a_n| < \epsilon$$

5. 区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足：

$$1. [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \dots$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$$

则存在唯一实数 ξ ，满足 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$

6. 有限覆盖定理

设 $[a, b]$ 是一个闭区间， $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $[a, b]$ 的任意一个开覆盖，

则必存在 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的一个子集构成 $[a, b]$ 的一个有限覆盖。

$$\iff \text{在 } \{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ 必有有限个开区间 } E_1, E_2, \dots, E_N \text{ 使 } [a, b] \subset \bigcup_{j=1}^N E_j$$

1.3 常用技巧

1. 证明集合相等的常用方法：相互包含

例题：确界的关系式

设 A, B 是两个由非数组成的任意数集，试证明 $\sup_{x \in A} \{x\} \cdot \sup_{y \in B} \{y\} = \sup_{x \in A, y \in B} \{xy\}$

2. 对于实数完备性定理的证明题，首先将给的条件和证明内容均翻译成数学语言（方便骗分），再观察条件和证明内容的联系。

1.4 例题&习题

1. 用确界原理证明单调有界原理、致密性定理、Cauchy准则、闭区间套定理、有限覆盖定理。
2. 用单调有界定理证明闭区间套定理，用闭区间套定理证明有限覆盖定理；用致密性定理证明Cauchy收敛准则。
3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上递增, $f(0) > 0, f(1) < 1$, 求证: $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = x_0^2$ (Hint:确界原理or区间套定理)
4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义且在每一点处函数的极限存在，求证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界 (Hint:有限覆盖)
5. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, $\forall \xi \in (a, b), \exists \delta > 0$, 当 $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap (a, b)$ 时, 有当 $x < \xi$ 时, $f(x) < f(\xi)$, 当 $x > \xi$ 时, $f(x) > f(\xi)$.请证明: $f(x)$ 在 (a, b) 内严格递增 (Hint:有限覆盖)

2 数列极限

2.0

1. 从小测的角度来说，概念，定理以及判断题是比较重要（搞脑子）的，当然也会有计算题
2. 期末考试可能会出1-2道求极限，1道非常简单的极限证明题（附在定理叙述上）
3. 计算也需要掌握，但是技巧性强的可以不掌握
4. 学好数列极限对函数极限和级数都很有帮助，而学好了函数极限就可以学好导数和积分，然后你就学会了数分1

2.1 概念叙述

1. 数列极限（ $\epsilon - N$ 语言）

$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |x_n - A| < \epsilon$ 称 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = A$

* : $|x_n - A| < f(\epsilon), f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 即可

2. 数列发散

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \epsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n_N > N, |x_n - A| \geq \epsilon_0$

3. 子列

$\{a_n\}$ 收敛 $\iff \{a_n\}$ 的任意子列都收敛于 A (请注意减弱命题)

4. 无穷小量和无穷大量

无穷小量 : $\lim_{x \rightarrow \infty} = 0$

无穷大量 : $\forall M > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n| > M$

2.2 定理叙述

1. Stolz定理

常用于计算形式需要洛必达的极限

2. Cauchy收敛准则、等价形式及否定

a_n 收敛 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N$, 均有 $|a_m - a_n| < \epsilon$

$\iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, p > 0$, 均有 $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$

否定形式 : a_n 发散 $\iff \exists \epsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_0 > N, p > 0, |x_{n_0+p} - x_{n_0}| \geq \epsilon_0$

2.3 常用技巧

1. 一些关系链:

a. $n \rightarrow \infty$ 时

$\log \log n \ll \log n \ll n^a \ll b^n \ll n! \ll n^n \quad (a, b > 0)$

b. $x \rightarrow 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$\sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^b - 1}{b} \quad (a > 0, b \neq 0)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

2. 证明数列极限存在:

a. 定义 ($\epsilon - N$ 方法)

技巧: 放大法(常用)/分步法/构造形式类似的项/拟合法(技巧性较强)

b. Cauchy准则: 不需要知道极限值

c. Cauchy准则的推论: 常用于判断数项级数是否收敛($a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$)

d. 单调有界原理: 不动点, 递推式考虑

e. 极限的运算性质: 本身存在极限 有限项运算

2. 证明数列极限不存在:

a. Cauchy命题的否定形式

b. 子列不收敛或收敛于不同的数

3. 求数列(函数)极限:

a. 极限的运算性质

一些重要极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

b. Stolz定理

c. 夹逼定理

d. 等价代换与初等变形

e. 递推形式的极限: 单调有界原理+证明/压缩映像(略难)/Stolz公式的应用

f. Taylor/L'Hospital/积分定义/数项级数/级数的连续性...:

很重要, 但这是后事了

2.4 例题&习题

1. 判断下列关于子列的命题

a. 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 若在任一子列 $\{a_{n_k}\}$ 中均存在收敛子列 $\{a_{n_{k_r}}\}$, 则 $\{a_n\}$ 必收敛

- b. $\{a_n\}$ 单调递增, $\{a_{n_k}\}$ 为其中一个子列, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- c. $\{a_{2k}\}\{a_{2p+1}\}\{a_{2023t+2024}\}$ 均收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛
- d. $\{a_{2k}\}\{a_{2t+1}\}\{a_{6p+5}\}$ 均收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛

2. 判断下列关于无穷小量的命题

- a. 无穷多个无穷小量之和是无穷小量
- b. 无穷多个无穷小量之积是无穷小量
- c. 无穷小量与有界量之积为无穷小量

3. 判断下列关于数列极限的命题

- a. 数列 a_n 收敛 $\iff \forall p \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$
- b. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \iff \forall k \in \mathbb{N}, \exists N > 0, \forall n > N, |x_n - A| < \frac{1}{k}$
- c. a_n 收敛 $\iff \exists N > 0, \forall \epsilon > 0, \forall m, n > N$, 均有 $|a_m - a_n| < \epsilon$

4. 重要的二级结论:

$$Cauchy \text{ 定理: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = A$$

5. $x_n = \sum_{i=1}^n \sin(\frac{2i-1}{n^2}a)$, pf: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (Hint: 拟合法)

6. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

- a. $x_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$
- b. $x_n = (\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2})^n$
- c. $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$
- d. $x_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}$
- e. $x_n = \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$

7. (2019(?)年数分期末)

对于数列 $x_0 = a, 0 < a < \frac{\pi}{2}, x_n = \sin x_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$.

pf: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$