

第六章 地理空间邻近关系

空间邻近（Spatial Neighbor）关系是一类重要的空间关系，它一般是指两个空间对象之间直接相邻的一种空间关系，在这两个空间目标之间不存在其它空间对象。任何空间建模系统必须含有邻近关系的识别，Delaunay 三角网和 Voronoi 图是表示空间邻近关系的两种较好的模型，也是可以用于区分多阶邻近等不同的空间相离关系。

第一节 空间邻近关系的定义与分类

一、空间邻近关系的定义

空间邻近关系是指两个空间目标之间的空间位置较为接近、并且其间不存在其它空间目标的情况下所保持的一种空间关系。从本质上来说，空间邻近关系是一种空间距离关系，但是，这种距离不是普通意义上的距离，而是一种定性距离。

对于定性距离的范围，从空间邻近的语义上看，这种距离的上界至少应该包含定性距离中的“很近”和“近”这两个等级，但是，必须结合具体应用。对于定性距离的下界，有两种不同的看法：其一，认为两个目标在空间上相接和相离关系都可以属于空间邻近关系（陈军，2002 年），如图 6-1 所示；其二，认为空间邻近关系只考虑相离的情况，而将两个相接目标的关系定义为邻接关系（LUO 等，2002 年）。

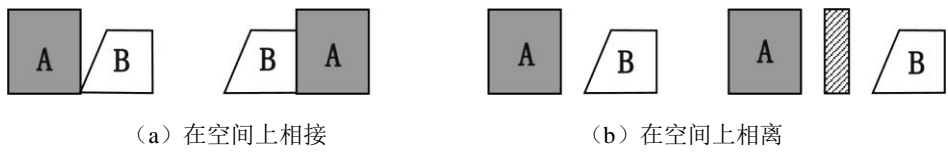


图 6-1 两类空间邻近关系

按照拓扑关系的分类，相接和相离是两种不同的拓扑关系，而拓扑关系是比距离关系表达更为概略的一种空间关系。空间邻近关系是一种定性距离关系，属于拓扑关系中的相离，是在拓扑关系表达的基础上对目标空间关系的更详细的划分。拓扑关系从较糙的粒度上分类，可以分为相交和相离两类关系，其中相交可以细分为相接、相交、相等、包含、覆盖等关系，这样，可以认为空间邻近是对相离关系的一种细分。因此，这里的空间邻近关系不包含相接的情形。

二、空间邻近关系的分类

空间邻近关系是对空间距离关系的一种定性描述，这种空间关系在普通的度量空间中不方便进行描述。目前大多通过对空间剖分来进行空间邻近关系的定义与操作，常用的剖分方法有 Voronoi 图和 Delaunay 三角网。

根据空间目标的 Voronoi 多边形是否邻接, 以及空间目标的类型, 可以定义空间目标的空间邻近关系 (李成名等, 1998 年), 分类如下:

- 1) 直接邻近: 如果两个空间目标的 Voronoi 多边形存在, 并且有邻接的边, 则称这两个目标的关系为直接邻近;
- 2) 侧向邻近: 如果两个空间目标中有一个是线状目标, 并且这两个目标的 Voronoi 多边形有邻接的边, 则称它们具有侧向邻近关系, 侧向邻近与直接邻近概念类似, 不过由于线目标具有方向性, 因此存在左侧向邻近与右侧向邻近的区别;
- 3) 最邻近: 如果两个空间目标之间的距离是所有目标之间距离最小的, 则称这两个空间目标是最邻近的;
- 4) 位置邻近: 如果被考察的空间中的一个点位于某一个空间目标的 Voronoi 多边形之中, 则称这个点和这个目标直接邻近。

除此之外, 还可以定义基于 Voronoi 距离的 k 阶邻近。设在给定的空间范围内从空间目标 A 运动到空间目标 B 所经过的最少的 Voronoi 区域个数为 k , 则称这两个目标之间的 Voronoi 距离为 k , 记为 $vd(A, B)$ 。显然, $vd(A, B) \geq 0$, 且当 $A=B$ 时, $vd(A, B)=0$ 。反之, 设 A, B 是空间目标集合中的任意两个目标, 并且 $vd(A, B)=k$, 则称 A, B 之间存在 k 阶邻近关系。当任意两个空间目标的 Voronoi 距离为 1 时, 这两个目标为直接邻近关系。

Delaunay 三角网是 Voronoi 图的对偶图。利用 Delaunay 三角网也可以定义空间邻近关系。艾廷华 (2000 年) 利用 Delaunay 三角网定义了不同空间目标之间的邻近区域, 以便区分不同类别的邻近关系, 这几种邻近区域如下:

- 1) 点-点邻近区域: 与某一个点 P 为顶点的所有 Delaunay 三角形所围成的区域;
- 2) 点-线邻近区域: 以点 P 为顶点, 且以点 P 与线 L 上顶点的连线为边的三角形围成的区域;
- 3) 点-面邻近区域: 以点 P 为顶点, 且以点 P 与面 A 边界的顶点的连线为边的三角形围成的区域;
- 4) 线-线邻近区域: Delaunay 三角网中三角形的一条边的端点分别位于线 L_1 和 L_2 上、并且有一条边在其中一条线上, 这样的三角形所围成的区域就是线-线邻近区域;
- 5) 线-面邻近区域: 以线 L 上的顶点和面 A 边界的顶点为三角形顶点, 并且有一条边在线 L 上或在面 A 边界上, 这样的三角形所围成的区域为线-面邻近区域;
- 6) 面-面邻近区域: 分别以两个面 A_1 和 A_2 的边界顶点为顶点的 Delaunay 三角形所围成的区域, 同样, 这些三角形必须有一条边在面 A_1 或 A_2 的边界上。

两个空间目标之间的空间邻近关系与这两个目标的几何特征和空间分布特征有关, 同时, 空间剖分方法对空间邻近关系的描述方法也有很大的影响。从空间目标的几何特征来看, 2 维平面上的空间邻近关系可以划分为: 点与点、点与线、点与面、线与面、线与线、面与面六种。从空间目标的分布特征来看, 空间邻近关系可以分为直接邻近关系和间接邻近关系, 或直接描述为 k 阶邻近关系。空间邻近关系可以进一步划分为全域性的空间邻近关系和局域性的空间邻近关系。空间邻近关系可以按如下步骤进行分类:

- 1) 区分直接邻近关系和间接邻近关系, 间接邻近关系可以从直接邻近关系推理得到, 往往需要给出邻近程度, 例如: k 阶邻近关系。若两个空间目标只存在间

接邻近关系,那么这两个目标的 Voronoi 图不可能相接,在 Delaunay 三角网中,这两个目标的边或顶点不会同时出现在同一个三角形上。

- 2) 若是直接邻近关系,则需要进一步确定空间目标的类型。如果三角形的一条边的两个顶点分别位于这两个空间目标上,则说明这两个空间目标在该局部范围内是直接邻近的,否则,在该局部范围内是不存在直接邻近关系。
- 3) 对于点状目标而言,若在该局部范围内存在直接邻近关系,则可以认为该点与另一个空间目标存在全域性空间邻近关系和局域性空间邻近关系。
- 4) 对于线状目标而言,若在该局部范围内存在直接邻近关系,则可以认为该线与另一个空间目标存在局域性空间邻近关系。邻近程度与该局部范围内线的长度有关。若整条线与另一个空间目标存在局域性空间邻近关系,那么,这两个空间目标之间存在全域性空间邻近关系。
- 5) 对于面状目标而言,只需要考虑它的边界,因此,空间邻近关系的判断方法与线状目标的判断方法相同。

第二节 Delaunay 三角网的建立

一、不规则三角网

数字地面模型是用来模拟地表形态的一种数学模型,它通常是在连续的地表获取一些离散的、相互独立的地形特征点,然后根据这些特征点生成不规则的面来对地表进行近似模拟。不规则三角网(Triangular Irregular Network, TIN)是建立数字地面模型的方法之一。不规则三角网就是将空间中离散的点按照一定的规则连接,并能覆盖整个区域,互不重叠的三角形网络。不规则三角网可以直接用 3 维形式来描述地表形态,也可以将这些离散点投影到平面上,生成平面 TIN。

对于一个离散的点集,根据不同的规则,可以得到不同的三角网。在这些不同的三角网中,我们希望得到最接近于实际情况的那一种。由于在建立 TIN 的过程中,除了这些样本点,我们不知道关于所要描述的空间区域的其它信息,因此人们一般根据直觉来确定最佳的三角网。例如,图 6-2 中的两个不规则三角网是由相同的离散点集生成,其中,数字表示各个点的高程值。从这些高程值可以知道,这些样本点描述了一条山脊的一部分。如果我们在这些点中插入一个点 p (如图 6-2),则点 p 在图 6-2 (a) 中和在图 6-2 (b) 中的高程值分别为 1015 和 17。尽管图 6-2 (b) 中的三角网有可能与实际情况更为相符(表示一条狭窄的山谷横穿这条山脊),但是我们还是认为图 6-2 (a) 中的三角网比图 6-2 (b) 中的三角网更为合理。我们之所以有这种直觉判断,主要是因为图 6-2 (a) 中用于确定 p 点高程值的两个点之间的距离小于图 6-2 (b) 中两个点之间的距离。换言之,图 6-2 (b) 中与 p 相关的两个三角形与图 6-2 (a) 中与 p 相关的两个三角形相比较,显得非常狭窄且长,角也更加尖锐。正是基于这种认识,我们认为在没有约束条件下构建 TIN 时,应该尽量使三角形的各边接近相等,或者说,三角形的最小角尽量最大化。Delaunay 三角网就是这样一种三角网。

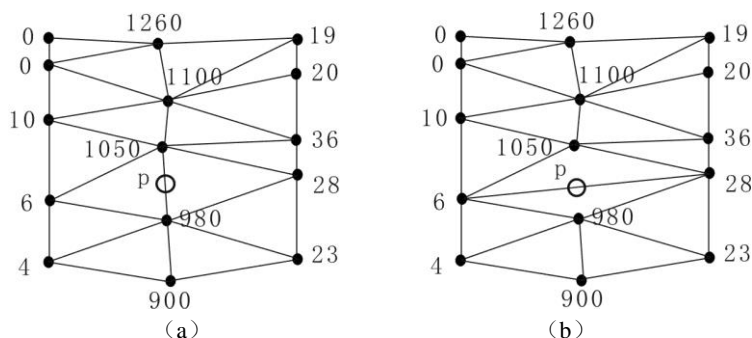


图 6-2 相同点集的不同 TIN

二、Delaunay 三角网

俄国数学家 Delaunay 已证明：在离散点集的所有三角形剖分中，必然存在且仅存在一种剖分，使得三角网中所有三角形的最小内角之和最大，因此，人们将这种三角剖分方法所得的三角网称为 Delaunay 三角网。

关于 Delaunay 三角网，还涉及其它一些概念，例如，形态比：指三角形的内切圆半径与外接圆半径之比。所有三角形的形态比的平均值称为平均形态比。Delaunay 三角网的平均形态比最大（闵卫东等，1994 年）。

1、Delaunay 三角网的性质

Delaunay 三角网与一般的三角网有明显的不同，它具有的特性如下：

(1) Circle 准则：也称空圆特性，即任意一个三角形的外接圆范围内不包含点集 P 中任何其它点，如果一个三角形的外接圆包含了其它的点，则此三角形不是 Delaunay 三角形，则重新建立三角形，直到满足 Circle 准则。如图 6-3 所示，图 6-3 (a) 中的三角形 abc 满足 Circle 准则，而图 6-3 (b) 中的三角形 abc 不满足这一准则，因此需要重新建立三角形，形成图 6-3 (c) 中的三角形 abd 和 bcd ，这两个三角形满足 Circle 准则。

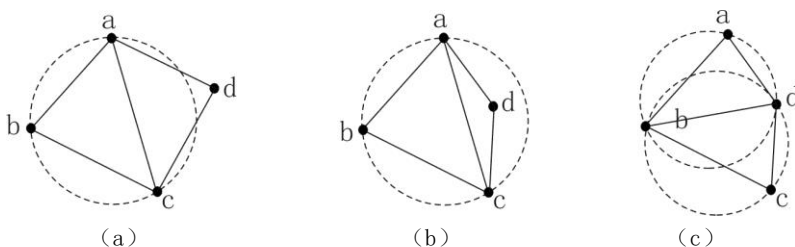


图 6-3 Delaunay 三角形的 Circle 准则

(2) 最大最小角特性：三角形的最小内角尽量最大，即三角形应尽量接近等边三角形，这个特性事实上与 Circle 准则是等价的，在实际应用中，是通过该规则控制所有三角形的最小角之和最大化。在图 6-3 (c) 中的两个三角形的最小内角比图 6-3 (b) 中两个三

角形的最小内角要大。

(3) 唯一性：对于确定的点集（无四点共圆），Delaunay 三角网是唯一的。但是，如果存在四点共圆，则 Delaunay 三角网不是唯一的。在图 6-4 中，a、b、c、d 四点共圆，则图 6-4 (b) 和图 6-4 (c) 的两种构网方法都能够保证最大最小角特性，因此，这两对三角形都是 Delaunay 三角形。当然，也可以取二个三角形的最小角之和最小的一个三角网，使 Delaunay 三角形具有唯一性。

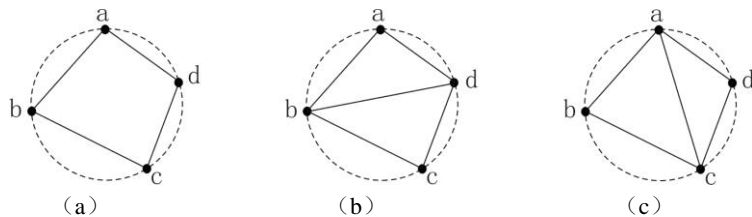


图 6-4 四点共圆时的 Delaunay 三角形

2、约束 Delaunay 三角网

约束 Delaunay 三角网是普通 Delaunay 三角网的扩展，就是在生成普通 Delaunay 三角网的离散点中有部分点之间存在某种约束关系，例如，实际地物中的公路、桥梁、地理边界、山脊线、河岸、湖岸等。约束 Delaunay 三角网不是严格意义上的 Delaunay 三角网，因为这些强行嵌入的约束边破坏了 Delaunay 三角网的构网规则。这种带有约束条件的 Delaunay 三角网对于描述地形特征及地表现象具有重要的意义。约束 Delaunay 三角网具有以下性质（刘学军、龚健雅，2001 年）：

- 1) 约束线段必须作为一个约束 Delaunay 三角形的一条边；
- 2) 如果约束 Delaunay 三角网中的一个三角形 t 的外接圆中含有除 t 的顶点之外的离散点，则 t 的三条边中必存在约束边；
- 3) 如果三角形 t 的三条边都不存在约束关系，则三角形 t 一定满足空圆特性和最大最小角特性。

3、Delaunay 三角网的生成

根据实现过程，可以把生成 Delaunay 三角网的各种算法分类为：逐点插入法、三角网生长法、分治算法和凸壳算法等几类。

1) 逐点插入法

Lawson（1977 年）最先提出了逐点插入法构建 Delaunay 三角网的算法思想。此后，Lee 和 Schachter（1980 年），Bowyer（1981 年），Watson（1981 年），Floriani 和 Puppo（1992 年）等人对此法进行了改进和完善。逐点插入法的基本步骤是：

- a) 定义一个包含所有数据点的初始多边形，这个初始多边形可以是矩形，也可以是三角形（一般称为超三角形 Supper-Triangle），还可以是这个点集的凸壳，如图 6-5 所示。
- b) 在初始多边形中任选一个点 a，建立初始三角网（如图 6-6（a）所示），然后按照

以下的步骤迭代计算，直到所有的数据点都被处理。

第一步：插入一个数据点 P ，在三角网中找出包含点 P 的三角形，把点 P 与此三角形的三个顶点相连，生成三个新的三角形（如图 6-6（b）所示）；

第二步：用 Lawson 提出的局部最优方法优化三角网。Lawson（1977 年）提出的局部优化过程 LOP（Local Optimization Procedure）是生成 Delaunay 三角网的关键步骤。这种局部优化过程就是运用 Delaunay 三角网的空圆特性，对有公共边的两个三角形组成的四边形进行判断，如果一个三角形的外接圆包含第四个顶点，则将这个四边形的对角线交换。如图 6-7 所示，在 $\triangle ABC$ 中插入点 P ，得到 $\triangle ABP$ 、 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BCP$ ，形成新的局部三角网。但是，这里的三角网不是最优的，因为 $\triangle ABP$ 、 $\triangle ACP$ 的外接圆中分别含有另外一个点 M 和 N ，不满足 Circle 特性，因此将四边形 $AMBP$ 和四边形 $ANCP$ 的对角线交换，得到新的三角网，如图 6-7（b）所示，此时的局部三角网满足 Circle 特性。

c) 数据处理完毕，得到 Delaunay 三角网，如图 6-6（c）所示。

可以看出，逐点插入算法就是先在包含所有数据点的一个多边形中建立一个初始三角网，然后将其余的点逐一加入，用 LOP 算法确保其成为 Delaunay 三角网，各种实现方法的差别在于初始多边形的不同以及建立初始三角网方法的不同，如 Macedonio 和 Pareschi（1991 年）使用凸壳作为初始多边形来生成初始三角网。

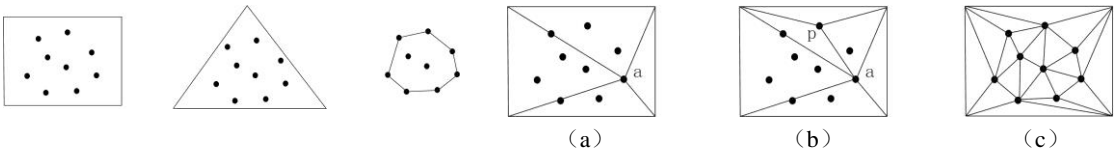


图 6-5 初始多边形

图 6-6 逐点插入法生成 Delaunay 三角网

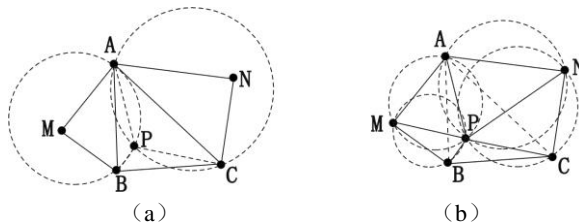


图 6-7 Delaunay 三角网局部优化

2) 三角网生长法

三角网生长算法的基本思路是：首先找出点集中相距最短的两个点，连接这两个点成为一个 Delaunay 三角形的一条边；然后按照 Delaunay 三角网的判断法则，找出包含此边的 Delaunay 三角形的另一个顶点，形成初始三角形；从初始三角形的两条新边开始，构建新的 Delaunay 三角形；依次处理所有新生成的边，直至所有的点都被处理。由于新生成的 Delaunay 三角形以几何数量增加，因此这种方法也称为“爆炸法”。三角网生长法的基本步骤是：

a) 生成初始三角形：以任一点为起始点，找出与起始点最近的点，连接这两点作为初始 Delaunay 三角形的一条边，按照 Delaunay 三角网的判别法则（即基本性质），找出与此边中点的连线最近、位于其右侧，且不与此两点共线的点，构成 Delaunay 三角网的第三点。

b) 扩展三角形：首先进行变量与数组设计，设计两个计数变量 K 和 L ， K 记录已经扩展的三角形数， L 记录已经形成的三角形数。在第一个三角形形成后， $K = 1$ 且 $L = 1$ 。还需要设置三个数组 $t_1[]$ 、 $t_2[]$ 、 $t_3[]$ ，用于存放生成的每个三角形的顶点编号。首先从 K 号三角形的第一条边 $t_1[k] t_2[k]$ 向外扩展。然后，寻找可能的扩展点，以 $t_1[k] t_2[k]$ 所在的直线为边界，将平面剖分为两个半平面，可能的扩展点应该在不包含 $t_3[k]$ 的那个半平面中（如图 6-8 所示）。若 P 是可能的扩展点。再利用余弦定理 $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$ （其中， a 和 b 是扩展点 P 分别与边 $t_1[k] t_2[k]$ 的顶点的连线长度， c 是边 $t_1[k] t_2[k]$ 的长度）找出张角 C 最大的点，这个点就是所求的扩展点。将该点作为扩展三角形的第三个顶点存入 $t_3[L]$ 中。新三角形形成后，令 $L = L + 1$ 。随之，检验新扩展的三角形的 3 条边是否有一条边已经被形成的三角形使用过两次，如果是，则此新三角形无效，此时，令 $L = L - 1$ ；如果不是，则新形成的三角形有效。在找扩展点前，也要进行此项检验，提高速度。采用同样的方法，可以完成第 K 号三角形的第 2 和第 3 条边的扩展。

c) 在完成了第 K 号三角形的扩展后，令 $K = K + 1$ ，转下一个三角形，继续扩展。当 $K = L$ 时，该三角网构建完成。

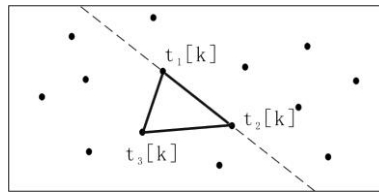


图 6-8 扩展点的直线判别法

3) 分治算法

Shamos 和 Hoery（1975 年）提出了分治（Divide-and-conquer）算法，用于建立离散点的 Voronoi 图。Lewis 和 Robinson（1978 年）将分治算法的思想应用于 Delaunay 三角网的生成。此后，Lee 和 Schachter（1980 年），Dwyer（1987 年）等又改进和完善了这种方法。分治算法的基本思想是：把点集划分到足够小，使问题简化，易于生成三角网，然后把子集中的三角网合并，生成最终的三角网，用 LOP 算法来保证其成为 Delaunay 三角网。不同的实现方法的区别在于点集的划分方法、子三角网生成法及合并方法的不同。分治算法的基本步骤如下：

- 把点集 P 按照一定的方式分成子集，例如：以横坐标为主、纵坐标为辅 $(x_i, y_i) < (x_{i+1}, y_{i+1})$ ，按升序排列，然后递归地执行以下步骤：
- 把点集分成点数近似相等的两个子集 P_L 和 P_R ；
- 在 P_L 和 P_R 中生成三角网，同时，用 Lawson 提出的局部优化算法 LOP 优化所生成的三角网，使之成为 Delaunay 三角网；
- 计算 P_L 和 P_R 的凸壳，并找出连接这两个凸壳的外围凸壳线，例如：两个凸壳的

底线和顶线（图 6-9）；

- e) 合并两个三角网，例如：由底线至顶线合并 P_L 和 P_R 中的两个三角网。

Delaunay 三角形的合并是分治算法的关键步骤。Lee 和 Schachter（1980 年）提出的算法中将其分两步进行：首先找出连接包含子三角网的两个凸壳的底线和顶线，然后由底到顶合并两个子三角网，所涉及的步骤如下：

- 寻找底线和顶线。
- 合并子三角网：子三角网的合并从 H_L 和 H_R 的底线开始，在两个子三角网 T_L 和 T_R 中寻找与底线 LR 组成的 Delaunay 三角形的第三个点 $L1$ 和 $R1$ ，选择其中外接圆半径较小的一个点插入到最终的三角网中，同时以新生成的、连接两个子三角网的边作为新的底线，逐步上推到顶线，完成合并，如图 6-10 所示。

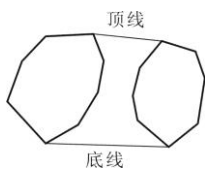


图 6-9 两个凸壳的底线和顶线

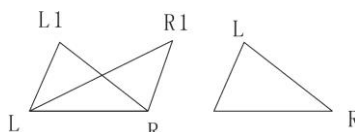


图 6-10 子三角网的合并

4) 凸壳算法

凸壳（Convex hull）是包含二维平面上点集的最小凸多边形，对于一个离散点集，凸壳必定是该点集形成的 Delaunay 三角网的外部边界，这也是凸壳算法的理论基础。凸壳算法主要分两个步骤：生成凸壳和 Delaunay 三角网的生成。

凸壳的生成：生成凸壳有不同的算法，这里介绍的是 Larkin 改进和完善的凸壳生成算法。算法如下：

- 建立初始凸壳：将平面点集中各点的横坐标 x 和纵坐标 y 的值进行比较，分别找出 x 、 y 最大和最小的点（或者 $x+y$ 和 $x-y$ 的最大和最小值点），这些点一定在点集的凸壳上，将这些点连接，形成初始凸壳。并将这些点按照逆时针方向存储在链表中。
- 修改凸壳：任取初始凸壳的一边，计算位于此边右侧的各个点到这条边的距离，求出最大距离。如果存在这样的点，或者最大距离为 0，则将这个点插入到链表中，并位于这条边的两个顶点之间；否则，不插入。重复此过程，直到对链表中的每一条边都判断一次。
- 凸壳生成：统计每一次没有插入点的操作次数，如果等于链表中顶点的总数，则终止判断，生成凸壳。生成过程如图 6-11 所示。

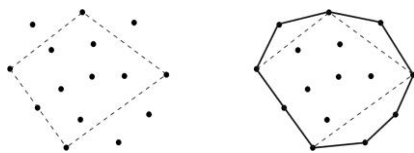


图 6-11 凸壳的生成

基于凸壳生成 Delaunay 三角网：“沿边推进算法”是基于凸壳生成 Delaunay 三角网的重要方法，其过程如下：

- a) 从凸壳链表中任取一条边 e ，作为新生成三角形的起始边，利用空圆特性，从点集中寻找第三点，与边 e 构成 Delaunay 三角形。依次以凸壳的边作为初始边，生成第一层 Delaunay 三角形。
- b) 以第一层三角形的边为起始边，生成第二层 Delaunay 三角形。
- c) 继续这种构网过程，直到构网完成。其中，要求每一条新边至少完成两次构网（凸壳边使用一次）。

4、约束 Delaunay 三角网的生成

建立约束 Delaunay 三角网的算法很多，主要的几种算法是：约束图法、分割-合并算法、加密算法、Shell 三角化算法和两步法等（刘学军、龚健雅，2001 年）。在这些方法中，两步法是应用较多的一种方法，即首先对约束数据集建立非约束 Delaunay 三角网（初始三角网），然后引入约束线段，对三角网进行调整。在初始 Delaunay 三角网的生成过程中，可以不区分约束点和非约束点，也就是说，将离散点集和约束边的特征点作为生成初始 Delaunay 三角网的点集；也可以对这两类点进行区分，即先不管约束边，只生成离散点集的 Delaunay 三角网，然后插入约束边。这里介绍两种常见的两步法。

1) 对角线交换循环算法

对角线交换循环算法的基本原理为：首先建立所有约束点和非约束点的初始 Delaunay 三角网；然后检验约束边所经过的所有三角形，这些三角形组成的集合称为这条约束边的影响区域，与约束边相交的三角形的边称为对角线；从约束边的顶点出发，按照一定的规则交换对角线，最终使两个顶点可视。该循环算法的基本过程如下（王家耀，2001 年）：

（1）不考虑约束条件，建立约束点和非约束点的初始 Delaunay 三角网；

（2）检验并记录每一条约束边的影响区域及其区域内的所有对角线（假设该集合为 D ）。假设约束边的一个起点为 $FirstP$ （给定一个初始值），约束边的另一个顶点为 $LastP$ ， $OfirstP = FirstP$ ；

（3）从起点 $FirstP$ 开始，从 D 中查询与该约束边相交的边 e （该边是与 $FirstP$ 最近的对角线，但不能是以 $FirstP$ 为一个端点的对角线，这可以通过影响区域的三角网的拓扑关系来判断），检验该边的相邻三角形的对点 $OpptP$ 是否为目标点（约束边的另一个顶点） $LastP$ 。若 $OpptP$ 是目标点，则判断 D 是否为空，如果 D 不为空， $FirstP = OfirstP$ ，并转（7），说明需要重新循环，从原始起点开始扫描；如果为空，直接转（7）。若 $OpptP$ 不是目标点，直接转（7）。

（4）分别计算 e 的两个端点 e_1 和 e_2 与起点 $FirstP$ 、对点 $OpptP$ 所构成的三角形 $FirstP-e_1-OpptP$ 和 $FirstP-e_2-OpptP$ 的面积（ $FirstP$ 与 $OpptP$ 的连线的方向确定后，三个顶点的排列顺序在两个三角形中就被确定了，三角形三个顶点按照逆时针方向排列面积为正，否则面积为负）。面积的正负说明了在两个端点 e_1 和 e_2 处图形是否向里凹，若计算出的这两个面积是一正一负，则转（7）；设 e_1 在 $FirstP$ 到 $OpptP$ 连线的左边，若都为正，说明在端点 e_1 处图形向里凹，则转（5）；若都为负，说明在端点 e_2 处图形向里凹，则转（6）；

(5) 将 e_1 赋值给 $FirstP$, $FirstP$ 的位置发生了变化, 以便找到下一条与约束边相交的边, 转 (3);

(6) 将 e_2 赋值给 $FirstP$, 理由同上, 转 (3);

(7) 对角线交换, 修改影响区域内相应的三角网拓扑结构; 并判断该交换后的对角线是否与约束边相交, 若是, 则修改集合 D , 增加这条对角线, 否则, 在集合 D 中删除原来的对角线。若集合 D 不为空, 转 (3)。

(8) 结束。其生成过程示意图如图 6-12 所示。

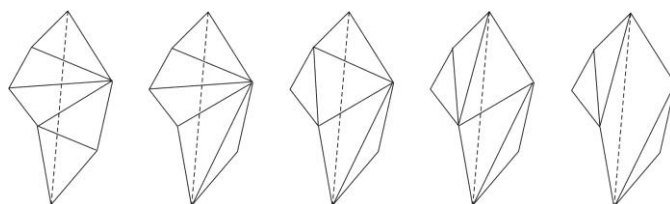


图 6-12 对角线交换循环算法 (王家耀, 2001 年)

2) 约束边插入法

约束边插入法是 **Vigo** (1977 年) 提出的一种算法, 这种方法与“对角线交换循环算法”的区别是: 不需要交换对角线, 直接删除与约束边相交的 **Delaunay** 边, 然后插入约束边, 此边将其影响域分成两个多边形, 再根据 **Circle** 准则对这两个多边形进行重新三角化。与对角线交换循环算法比较, 这种方法的优点为: 影响域为凹多边形时, 对这种算法没有影响; 同时, 也可以处理有重复顶点的情形。图 6-13 说明了将一条边插入一个约束 **Delaunay** 三角网的过程。

约束边插入法的算法如下:

(1) 从约束 **Delaunay** 三角网中除去被约束边 ab 所截的三角形 t_1, \dots, t_k , 形成一个不含这些三角形的区域;

(2) 增加边 ab 到这个区域中;

(3) 对边 ab 的上区域和下区域重新建立三角网。

那么, 如何得到被 ab 所截的那些三角形? 可以先找到一个三角形, 它包含了顶点 a 并被线段 ab 所截。在三角网中, 可以很容易确定包含一个点的三角形的位置。从一个顶点 a 出发, 能够以顶点 a 为中心按顺时针方向依次寻找三角形, 直到最后得到被线段 ab 所截的三角形 t_1 , 其过程见图 6-14。

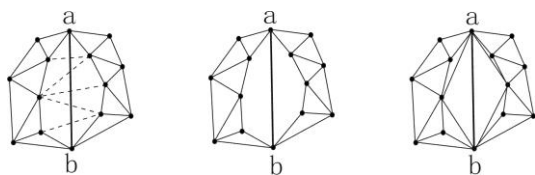


图 6-13 将一条边插入一个 CDT 的过程

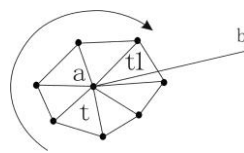


图 6-14 确定被线段 ab 所截的三角形

如果找到了三角形 t_1 ，就容易找到被 ab 所截的其余三角形 t_2, \dots, t_k 。这个搜索过程同时也将三角形集合 $\{t_j, j = 1, \dots, k\}$ 的顶点分成两个集合，一个集合是在边 ab 的上面（或左边）的顶点集合 $\{s_j, j = 1, \dots, n\}$ ，顶点集合 $\{a, s_1, \dots, s_n, b\}$ 在边 ab 的上部围成一个多边形，称为上部伪多边形（Upper pseudo-polygon），记为 P_U ；同样方法可得到下部伪多边形（Lower pseudo-polygon），记为 P_L 。

严格说来，区域 P_U 和 P_L 有可能不是一个常规的多边形，其中可能包含伪节点，因此称为伪多边形。图 6-15 表示了包含伪节点的上部伪多边形。这种伪节点的存在不会使伪多边形的重新构网变得更复杂，只需要在建立新生成的三角形和已经存在的三角网之间的链接时，考虑该因素即可。

使用一种递归的算法，可以在伪多边形 P_U 和 P_L 的内部分别重新建立三角网。首先，伪多边形 P_U 的所有三角网必须强行嵌入一个以 ab 为边的三角形，也就是说，是一个确定的三角形，顶点分别为 a 、 b 和 c ，这里， $c = s_t, 1 \leq t \leq n$ 。当这个三角网需要 Delaunay 化时，必须对三角形 $T(a, b, c)$ 使用空圆条件，也就是说，除了三个顶点 a, b, c 之外，它的外接圆不包含 P_U 的任何其他顶点（如图 6-16 所示）。建立 P_U 内部三角网的递归算法源于下面的性质：

- (1) 找到顶点 $c = s_t$ ，使得三角形 $T(a, b, c)$ 的外接圆不包含 P_U 的任何其它顶点；
- (2) 三角形 $T(a, b, c)$ 将 P_U 分成两个子区域 $P_E = \{a, s_1, \dots, s_t\}$ 和 $P_D = \{s_t, \dots, s_n, b\}$ ；
- (3) 递归地将这种算法应用于区域 P_E 和 P_D ，相应的边分别为 ac 和 cb 。

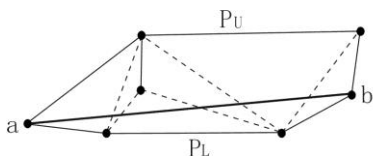


图 6-15

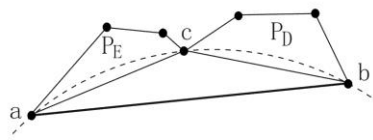


图 6-16

5 基于等高线建立约束 Delaunay 三角网 (CDT)

等高线是传统地图制图中一种表达地面高程与地形特征的方法，是对离散采样点经过内插、光滑处理后得到的一组不相交的封闭曲线。尽管等高线可以很方便地表示地面的起伏情况，但是，这种表达方式直观性较差，而用 TIN 构建的三角网可以形象地描述地形特征，因此有必要研究根据等高线生成 TIN 的算法。根据等高线建立 CDT，必须进行预处理，避免建立的 CDT 与实际情况不符，如在谷区、峰区、鞍部和大弯曲处出现“平三角形”（即同一条等高线上的三个点形成的三角形）的情形（图 6-17）。对数据进行预处理主要包括以下几个方面：

- (1) 使等高线上的点分布均匀化，就是在取点过密的地方删除一些点，而在点太稀疏的地方插入一些点，这样便于建立均匀的三角网。
- (2) 加入地形特征点，消除平三角形。因为产生平三角形的原因就是在这些区域缺少应有的地形特征点，通过获取产生平三角形区域的中轴线的方法来得到地形特征点，同时可以获取这些特征点的高程值。

这样，根据等高线建立 TIN 的步骤主要为：

- 1) 将等高线离散化，得到生成 TIN 的点集；
- 2) 进行数据预处理；
- 3) 对所有的点建立 Delaunay 三角网
- 4) 以等高线和地性线为约束建立 CDT，此时的 CDT 中已经消除了平三角形，如图 6-18 所示。

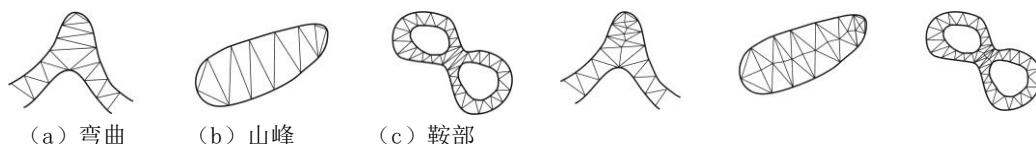


图 6-17 平三角形的形成图

6-18 消除了平三角形的 TIN

第三节 Voronoi 图的建立

一、Voronoi 图的定义与性质

Voronoi 图首先由俄国数学家 Voronoi 于 1908 年提出，并在 1911 年被荷兰气象学家 Thiessen 应用于气象观测中，因此 Voronoi 图又称为泰森多边形(Thiessen polygon)。Voronoi 图是由空间实体集唯一确定的，是其本身所具有的属性，具有很多优越的特性，是解决空间邻近问题的一种重要工具。

1、基本 Voronoi 图定义

设 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} (n \geq 3)$ 是欧氏平面上的一个离散的点集， p 为平面上的任意一点， $d(p, p_i)$ 表示点 p 和 p_i ($p_i \in P$ ，且 $i = 1, 2, \dots, n$) 之间的欧氏距离。定义所有到 p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的距离最小的点 p 的集合为

$$V(p_i) = \{p \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j \neq i, j = 1, \dots, n\}$$

该集合为 p_i 的 Voronoi 区域(或多边形)。最后得到的多边形集合 $V(P) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$ 为点集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 的 Voronoi 图，其中， p_i 为生成元， P 为生成元集合。

2、广义 Voronoi 图定义

基本 Voronoi 图是在欧氏平面中以离散的点作为生成元，并且各生成元的重要性相同，根据欧氏距离得到的一种空间分割。也可以在一般度量空间中将空间实体(包括点、线、面、体)作为生成元，赋给各生成元不同加权值，用一般的距离度量 d 代替欧氏距离，这样生成的 Voronoi 图是广义 Voronoi 图。其定义如下：

设 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 是度量空间中 n 个实体组成的集合， g 为这个空间中的任意一点(或者栅格)， $d(g, g_i)$ 表示点(或栅格) g 和实体 g_i ($g_i \in G$ ，且 $i = 1, 2, \dots, n$) 之间的距离度量，且 g_i 实体具有权 k_i 。定义所有到 g_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的加权距离度量最小的

点（或栅格） g 的集合为

$$V(g_i) = \{p \mid k_i d(p, p_i) \leq k_j d(p, p_j), j \neq i, j = 1, \dots, n\}$$

该集合为 g_i 的 Voronoi 多面体。最后得到的集合 $V(P) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$ 为 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 的 Voronoi 图。

3、平面 Voronoi 图的性质

平面 Voronoi 图所具有的重要性质如下：

- (1) 除了边界以外，相邻的两个 Voronoi 多边形的交集为空集，并且所有的 Voronoi 多边形的并集为二维平面 R^2 ；
- (2) Voronoi 图与 Delaunay 三角网对偶；
- (3) Voronoi 图具有局域动态性，即增加和删除一个生成元只影响相邻的空间生长点，而不影响整个空间分割；
- (4) Voronoi 图的边和节点数随着生长元的个数 n 成线性比例增加；
- (5) 如果点 p 在多边形 $V(p_i)$ 中，则 p 到生成元 p_i 的距离最小；
- (6) 两个相邻 Voronoi 多边形的公共边上任一点到这两个多边形的生成元距离相等；
- (7) 一个 Voronoi 多边形的生成点到各边的距离一般不相等；
- (8) Voronoi 多边形的顶点到邻近的生成元的距离相等，即与这个顶点有关的几个 Voronoi 多边形的生成元共圆，称这个圆为最大空圆。

二、Voronoi 图的矢量生成方法

1、Voronoi 多边形的边和节点

在欧氏平面上，生成元可以是点、线和面。而线和面都是由直线段组成，因此只需讨论点与点生成元、点与直线段生成元、直线段与直线段生成元之间的边。

- (1) 两个点之间的 Voronoi 边为一条直线 E_1 ，这条直线垂直于这两点的连线（图 6-19(a)）；
- (2) 直线段一个端点与该直线段内部的 Voronoi 边是过该点并垂直于此线段的直线 E_2 （图 6-19(b)）；
- (3) 一个点与一条直线段的内部形成的 Voronoi 边是以该点为焦点、以该直线段为准线的抛物线的一段 E_3 （图 6-19(c)）；
- (4) 两条直线段内部点之间的 Voronoi 边是一条直线段 E_4 （图 6-19(d)）。

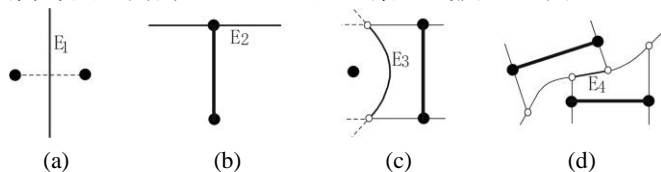


图 6-19 Voronoi 多边形边的生成

2、对偶生成法

对偶生成法是指先生成 Delaunay 三角网，再根据 Voronoi 图与 Delaunay 三角网的对

对偶性质，作每一个三角形三条边的中垂线，这些中垂线的一部分形成的以每一个三角形顶点为中点的多边形网络即为生成的 Voronoi 图。生成过程如图 6-20 所示。

对偶生成法主要用于生成元都是点元的情形。如果生成元是线和面的 Delaunay 三角网，情形要复杂得多，在理论和方法上还需要做更多的研究工作。

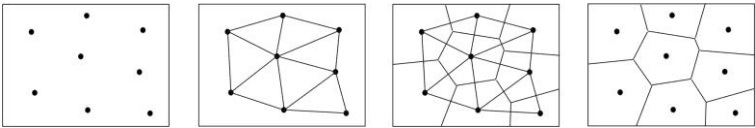


图 6-20 对偶生成法生成 Voronoi 图

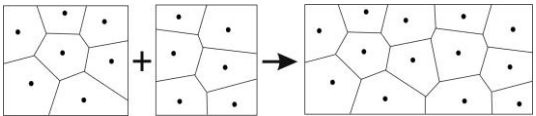
3、增量生成法

增量法生成 Voronoi 图的基本概念是：假设平面上原来有 n 个点（生成元）已经生成了 Voronoi 图，如果增加一个生成元 P_{n+1} ，可以生成有 $n+1$ 个生成元的新 Voronoi 图。这种方法的理论基础是 Voronoi 图的局域动态性，即只需要改变与第 $n+1$ 个点相关的生成元的 Voronoi 多边形，而其余的多边形不变。增量生成法的基本步骤如下：

- 1) 从原来的 n 个生成元中，搜索与新的生成元 P_{n+1} 最近的生成元 P_k ；
- 2) 从线段 $P_{n+1}P_k$ 的垂直平分线开始，找垂直平分线与 Voronoi 多边形 $V(k)$ 的交点 1 和 2；
- 3) 根据交点确定与 P_{n+1} 邻近的另外两个 Voronoi 多边形 $V(1)$ 和 $V(2)$ ，这两个多边形的生成元分别为 P_1 和 P_2 。作线段 $P_{n+1}P_2$ 的垂直平分线，继续找该垂直平分线与相应 Voronoi 多边形的交点，并判断交点是否和 P_{n+1} 一样在交点 1 和 2 的连线的同侧。设 $i=2$ 。
- 4) 从交点 i 一侧开始，找到边上有该新交点的新的 Voronoi 多边形 $V(i)$ ， $i=i+1$ ，生成元为 P_i ，作线段 $P_{n+1}P_i$ 的垂直平分线，同样，可以得到一个符合条件的新交点 $i=i+1$ 。
- 5) 若该交点 i 不与交点 1 重合，转 4)。否则，停止运算，得到这些垂直平分线围成的多边形即为生成元 P_{n+1} 的 Voronoi 多边形。生成过程如图 6-21 所示。

4、分治算法

分治算法是指把生成元集合分成若干个子集，这些子集的并集必须为生成元点集，且这些子集相互的交集为空集。先对这些子集生成子 Voronoi 图，然后把这些子图合并，修正相互影响部分的 Voronoi 多边形，从而得到所有生成元点集的 Voronoi 图。其过程见图 6-22。



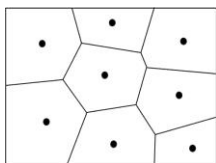


图 6-21 增量生成法

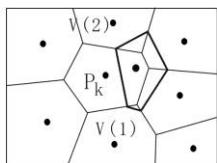


图 6-22 分治算法法生成 Voronoi 图

三、Voronoi 图栅格生成方法

距离变换是将一个含有空间目标的二值图像转换为一个距离图像，其中的每一个像元的值是該像元到最近的空间目标的距离，因此栅格空间中的 Voronoi 图可以根据距离变换生成。

1、栅格距离定义

常用的栅格距离有街区距离、棋盘距离、斜面距离、领域距离等。在栅格空间中，每一个像元都有 8 个邻接的像元，东西南北 4 个正方向上的邻接像元一般称为 4 邻元，而东南、东北、西南和西北 4 个对角线方向上的邻接像元一般称为 8 邻元。

图 6-23 给出了街区距离、棋盘距离等 5 种栅格距离。采用街区距离时，移动方向为上下左右（即 4 邻元）。设以像元(3, 3)为起点，其距离为 0。当从(3, 3)走到(3, 4)时，距离为 1；而从(3, 3)走到(4, 4)时，距离为 2（图 6-23 (a)）。

如果用棋盘距离，移动方向为上下左右、左上、左下、右上、右下（即 8 邻元），此时从(3, 3)走到(3, 4)和(4, 4)的距离都为 1（图 6-23 (b)）。

从图 6-23 中也可以发现，对于街区距离和棋盘距离来说，距离越长，与欧氏距离的差距越大。为了减小这种差距，可以用八角形距离（图 6-23 (c)）、斜面 3-4（图 6-23 (d)）和斜面 2-3（图 6-23 (e)）等距离（陈军，2002 年）。

4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	2	3
4	3	2	3	4

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

2	1	1	1	2
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2

8	7	6	7	8
7	4	3	4	7
6	3	0	3	6
7	4	3	4	7
8	7	6	7	8

6	5	4	5	6
5	3	2	3	5
4	2	0	2	4
5	3	2	3	5
6	5	4	5	6

(a) 街区距离

(b) 棋盘距离

(c) 八角形距离

(d) 斜面 3-4

(e) 斜面 2-3

图 6-23 栅格距离

2、距离变换

确定了栅格距离，就可以计算每一个像元到所有生成元的距离，即进行距离变换。有多少生成元，对于每一个像元，就有多少个不同的距离值，这里，取距离最小值。这样，就可以从每一个生长点出发，进行扩张，直到像元值没有变化为止。

根据像元值，可以得到离散空间的距离等值线，其中每一点的距离值是到所有空间目标的距离中最小的一个。随后，以每一个目标为中心，连接距离值最大的像元，得到与中心目标对应的影响范围，从而得到整个栅格 Voronoi 图。

距离变换实质上是确定距每一个生成元最远的等距离线，即相对距离。其过程也可以

看成是从每一个生成元出发，进行扩展或者膨胀，故可以用数学形态学中的膨胀算子表示。

膨胀和腐蚀是数学形态学中的两类基本算子，分别用符号 \oplus 和 \ominus 表示。设 A 是原始影像， B 是所选的结构元，则膨胀和腐蚀分别表示为：

$$\text{膨胀: } A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b \quad \text{腐蚀: } A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_b$$

一般而言，原始影像和结构元（模板）是影响膨胀和腐蚀变换的两个因素。但是，对于生成 Voronoi 图来说，生成元的原始影像固定不变的，所以影响膨胀和腐蚀结果的主要因素是结构元的模板大小（如 3×3 ）、形状（如矩形）和起点（如位于模板的中心）等。图 6-24 给出了几种常用的结构元（陈军，2002 年）。

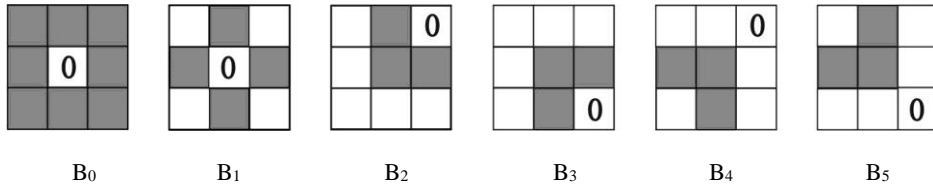


图 6-24 常用 3×3 结构元

利用数学形态学，可以将街区距离和棋盘距离变换表示为（陈军，2002 年）：

$$\text{街区距离: } Y_n = Y_{n-1} \oplus B_1, \quad Y_0 = X \oplus B_1$$

$$\text{棋盘距离: } Y_n = Y_{n-1} \oplus B_0, \quad Y_0 = X \oplus B_0$$

3、以多类型空间目标为生长元的 Voronoi 图

如果要生成栅格空间中多种空间目标的 Voronoi 图，首先必须定义栅格空间中任意一点距这些生长元的距离。设 X_1 和 X_2 是二维空间中的两个点，其坐标分别是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，其间的距离为：

$$D_p = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

设空间中有 n 个空间目标 P_1, P_2, \dots, P_n ，目标 P_i 的 Voronoi 多边形可定义为：

$$V(P_i) = \{x \mid D_p(x, P_i) < D_p(x, P_j), j = 1, \dots, n, j \neq i\}$$

$$\text{边界为: } B(P_i) = \{x \mid D_p(x, P_i) = D_p(x, P_j), j = 1, \dots, n, j \neq i\}$$

其中， $D_p(x, P_i)$ 表示任意点 x 到目标 P_i 的最短距离，因此，该 Voronoi 图为：

$$VD(P) = \left\{ \bigcup_{k=1}^n V(P_k) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^n B(P_k) \right\}$$

四、顾及障碍物的 Voronoi 图

前面已讨论了用欧氏距离构造矢量空间的 Voronoi 图，即用两点之间的直线距离作为判定条件。但是，在实际应用中，可能会在考察的空间中存在一些障碍物，这样，在生成 Voronoi 图时就不能直接用两点之间的欧氏距离，而应该考虑障碍物的存在，采用“最短路径”。Aurenhammer（1988 年）提出了一种局部修正算法，用于将普通 Voronoi 图根据线状障碍物修正成可视最短路径 Voronoi 图，这种生成方法没有给出具体适用的算法，并且要求障碍物的端点必须为生长点，因此适用性不广，陈军（2002 年）在此基础上建立了一套更完善的算法。

第四节 地理空间邻近关系的推理

一、基于 Delaunay 三角网的地理空间邻近关系表达

Delaunay 三角网是根据空间目标的特征点对空间进行的一种剖分，其中，每一个三角形都尽量保持等边的特性。Delaunay 是一个连通图，每一个点都是连通的，Delaunay 三角形的每一条边都隐含着两个顶点之间的邻近关系。因此，可以在 Delaunay 三角网中对空间邻近关系进行描述。

定义 1: 设 P_1, P_2 是 Delaunay 三角网 T 中的两个离散点，如果这两个点是一个 Delaunay 三角形的两个顶点，则称这两个点的关系是邻近关系，记为 $\langle P_1, Neighbor, P_2 \rangle$ 。

其中， t_i 表示任意一个 Delaunay 三角形， v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} 表示这个三角形的三个顶点。

定义 2: 设 P_1, P_2 是 Delaunay 三角网 T 中的两个离散点，如果这两个点最少经过 k 个 Delaunay 三角形的边才连通，则称这两个点之间的 Delaunay 距离为 k ，记为 $d_{Del}(P_1, P_2) = k$ 。称这两个点之间的关系为 k 阶邻近关系，记为 $\langle P_1, Neighbor(k), P_2 \rangle$ 。

定义 3: 设 O_1, O_2 为约束 Delaunay 三角网 T 中的两个目标，如果这两个目标之间的最小 Delaunay 距离为 k ，则称这两个目标之间的关系为 k 阶邻近关系，记为 $\langle O_1, Neighbor(k), O_2 \rangle$ 。

当 $k=1$ 时，两个目标就具有直接空间邻近关系。

这里，需要说明的是：描述空间邻近关系的三角网是约束性 Delaunay 三角网，为了使该三角网尽量接近 Delaunay 三角网，可以在约束边上增加必要的点（McAllister M. 和 Snoeyink J., 2000 年）。之所以使用 Delaunay 三角网来描述空间邻近关系，是因为 Delaunay 三角网与 Voronoi 图有对偶关系，同时，从 Delaunay 三角网上既可以了解空间目标之间的全域性空间邻近关系，也可以了解局域性空间邻近关系。

二、基于 Delaunay 三角网的地理空间邻近关系推理

1、邻近关系推理

Delaunay 三角网可以方便地描述空间目标之间的邻近关系，利用这种描述方法，还可以进行空间邻近关系的推理。在 Delaunay 三角网中，点目标事实上就是某个 Delaunay 三

角形的顶点。虽然点目标之间邻近关系的推理比较简单，但它是复杂目标之间邻近关系推理的基础。根据邻近关系的定义，两个邻近目标是拓扑相离的，因此我们假定在推理过程中所涉及的空间目标相互之间的拓扑关系也是相离的。

在空间推理中，如果已知目标 O_1 、 O_2 、 O_3 之间存在同类的二元关系 R_1 和 R_2 ，即 $\langle O_1, R_1, O_2 \rangle$ 且 $\langle O_2, R_2, O_3 \rangle$ ，则一般情况下可以推出 O_1 与 O_3 之间的关系 R_3 ，称关系 R_3 为关系 R_1 和 R_2 的组合关系。

在 Delaunay 三角网中，设 P_1 、 P_2 、 P_3 是 3 个点目标，并且，这 3 个点位于 3 个不同的位置，因为若有点重叠，问题就非常简单了。已知其中的两对点之间的空间邻近关系分别为 $\langle P_1, Neighbor(k_1), P_2 \rangle$ 、 $\langle P_2, Neighbor(k_2), P_3 \rangle$ ，需要推理出点目标 P_1 与点目标 P_3 之间的空间邻近关系。

由于 P_1 、 P_2 、 P_3 可以是一个 Delaunay 三角形的三个顶点，所以 P_1 和 P_3 可能是 1 阶邻近关系；同时，如果 P_1 和 P_3 分别位于点 P_2 的两侧，则它们的最远 Delaunay 距离为 $k_1 + k_2$ 。也就是说，点目标 P_1 与点目标 P_3 之间的空间邻近关系的阶数在 $[1, k_1 + k_2]$ 的范围内，推理公式如下：

$$\begin{aligned} &\langle P_1, Neighbor(k_1), P_2 \rangle \oplus \langle P_2, Neighbor(k_2), P_3 \rangle \Rightarrow \\ &\langle P_1, Neighbor(1), P_3 \rangle \vee \langle P_1, Neighbor(2), P_3 \rangle \vee \dots \vee \langle P_1, Neighbor(k_1 + k_2), P_3 \rangle \end{aligned}$$

对于线状目标和面状目标而言，在 Delaunay 三角网中，它们的顶点之间就存在空间邻近关系，这种空间邻近关系可以用 Delaunay 距离来度量。面状目标 A 的多边形顶点之间最大的 Delaunay 距离可以定义为：

$$d(A) = \text{Max}\{d_{\text{Del}}(P_i, P_j) \mid P_i, P_j \in \text{Vertex}(A)\}$$

其中， $\text{Vertex}()$ 表示多边形的顶点。对于线目标 L ，同样可以定义其最大的 Delaunay 距离为：

$$d(L) = \text{Max}\{d_{\text{Del}}(P_i, P_j) \mid P_i, P_j \in \text{Vertex}(L)\}$$

对于点状目标而言， $d(P)=0$ 。

为了简化问题的描述，这里假设面状目标不包含“空洞”，因为在 Delaunay 三角网中面状目标的“空洞”是一个独立的区域，可以单独考虑。同时，也可以定义：在同一个空间目标上的顶点的空间邻近阶数为 0。

现在的问题是：已知空间目标 O_1 与 O_2 之间的空间邻近关系、 O_2 和 O_3 之间的空间邻近关系，要推理出 O_1 与 O_3 之间的空间邻近关系。这里的空间邻近关系用它们之间的最小 Delaunay 距离表示。前面已介绍了点状目标之间的空间邻近关系推理，若这些空间目标有一个是非点状目标，则这个问题就比较复杂了。因为线状目标和面状目标在空间上有沿展性，在空间邻近关系推理上具有较强的不确定性。但是， O_1 与 O_3 之间空间邻近关系的阶数的可能范围是可以确定的，其最小值为 1，其最大值与 O_1 、 O_2 和 O_3 空间分布情况有关，也就是说，与位于 O_1 与 O_3 之间的空间目标的复杂程度有关，若 O_2 位于 O_1 和 O_3 之间，则 O_1 和 O_3 就相距最远，所以取 O_2 的最大 Delaunay 距离作为“参考目标”， $k_0 = d(O_2)$ ，那么，这种空间邻近关系推理规则为：

$$\langle O_1, Neighbor(k_1), O_2 \rangle \oplus \langle O_2, Neighbor(k_2), O_3 \rangle \Rightarrow$$

$$\langle O_1, Neighbor(1), O_3 \rangle \vee \langle O_1, Neighbor(2), O_3 \rangle \vee \dots \vee \langle O_1, Neighbor(k_1 + k_2 + k_o), O_3 \rangle$$

2、空间邻近关系的邻近程度计算

在大多数情况下，我们关心的是两个空间目标之间是否直接邻近，也就是说，这两个目标是否是 1 阶邻近的；如果这两个目标是 1 阶邻近的。如图 6-25 所示，有两条线在一个 CDT 网上，都是 1 阶邻近，但是邻近程度明显不同。

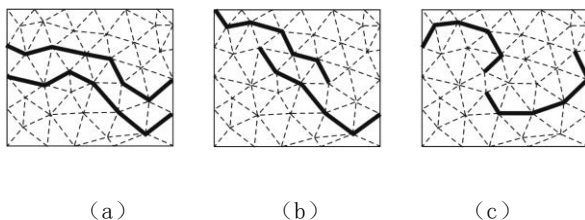


图 6-25 空间目标不同的邻近方式

空间邻近关系的邻近程度 D_N 可以区分为：“强邻近”（图 6-25 (a)）、“一般邻近”（图 6-25 (b)）、“弱邻近”（图 6-25 (c)），也可以利用 Delaunay 三角网对其进行具体量算，用定量的方法来确定两个空间目标的邻近程度。这种定量计算的主要思想就是：将两个空间目标之间直接邻近部分的大小与这两个目标（或某个参考目标）的大小进行比较，从而确定其总体邻近程度。

两个空间目标之间直接邻近部分可以这两个目标的 1 阶邻近区域的交集描述，这个交集的限制条件是：三角形中至少有两顶点分别在这两个目标上。对于线状目标而言，在两个目标的 1 阶邻近区域的交集上必定有一部分三角形的边是线状目标中的直线段，对于面状目标而言，可以只考虑其边界，也就是说，与线状目标等同，对于点状目标而言，在两个目标的 1 阶邻近区域的交集上必定有该点。

在 Delaunay 三角网中，面状目标 A ，可以用其 Delaunay 周长 $S_{Del}(A)$ 来描述其所关联三角形的多少，目标 A 的 Delaunay 周长是指其边界所穿过的 Delaunay 三角形的边数；线状目标 L ，可以用其 Delaunay 长度 $S_{Del}(L)$ 来描述其所关联三角形的数量，目标 L 的 Delaunay 长度是指该折线在 Delaunay 三角网中所经历的 Delaunay 三角形的边数；对于点状目标而言，因为其只占三角形的一个顶点，无长度。这里还有一个假设条件是：所有三角形中的约束边的长度基本相等，否则就只能使用约束边的长度，而不是边数。

一个空间目标 O_1 相对另一个空间目标 O_2 的 1 阶邻近部分的 Delaunay 长度，可以记为 $S_{Del}(O_1, O_2)$ ，其大小为目标 O_1 在 1 阶邻近区域交集中所经过的 Delaunay 三角形的边数，其中， O_2 为参考目标， O_1 为源目标。显然， $S_{Del}(O_1, O_2)$ 与 $S_{Del}(O_2, O_1)$ 不一定相等。同时，也会出现，虽然存在 1 阶邻近区域交集，但是，目标 O_1 或 O_2 在 1 阶邻近区域交集中所经

过的 Delaunay 三角形的边数为 0，如图 6-25 (c) 所示，为了区别完全不邻近，可以假设该边数为 1/100，或者为三角形上最小约束边长度的 1/100。两个空间目标之间的邻近程度的定义如下：

(1) 若源目标为点，如果一个点 P 与一个空间目标 O 是 1 阶邻近的，则它们是“强邻近”关系，邻近程度为 $D_N(P, O) = 1$ ，说明该点与参考目标是全域性空间邻近。

(2) 若源目标为线或面，目标 O_1 相对于目标 O_2 的邻近程度为：

$$D_N(O_1, O_2) = \frac{S_{Del}(O_1, O_2)}{S_{Del}(O_1)}$$

目标 O_2 相对于目标 O_1 的邻近程度为：

$$D_N(O_2, O_1) = \frac{S_{Del}(O_2, O_1)}{S_{Del}(O_2)}$$

(3) 目标 O_1 与目标 O_2 的总邻近程度为：

$$TD_N(O_1, O_2) = \frac{S_{Del}(O_1, O_2) + S_{Del}(O_2, O_1)}{S_{Del}(O_1) + S_{Del}(O_2)}$$

同样道理，可以直接使用空间目标的长度来表示 $S_{Del}(O_1, O_2)$ 、 $S_{Del}(O_2, O_1)$ 、 $S_{Del}(O_2)$ 与 $S_{Del}(O_1)$ ，用于计算邻近程度，当然，点的长度为 0，面的长度就是边界的长度。当目标 O_1 或 O_2 在 1 阶邻近区域交集中所经过的 Delaunay 三角形的边数为 0，如图 6-25 (c) 所示，可以假设该长度为 O_1 和 O_2 中长度最短的直线段的长度的 1/100。

两个空间目标之间的邻近程度取值范围为 [0, 1]，如果两个目标中其中一个目标的所有组成成分与另一个目标均为 1 阶邻近，则其邻近程度为 1，是全域性空间邻近，如图 6-25 (a)；如果不存在 1 阶邻近点，则邻近程度为 0。

三、基于 Voronoi 图的地理空间邻近关系推理

Delaunay 三角网和 Voronoi 图都可以用来描述和推理空间邻近关系，但是它们又有所区别：Delaunay 三角网反映的是生成该三角网的离散点之间的邻近关系，而 Voronoi 图强调的则是生成元的影响区域，更多的是用来进行邻近空间目标的查询。基于 Voronoi 图的空间邻近关系推理与前面所介绍的基于 Delaunay 三角网空间邻近关系推理相类似，可以把 Voronoi 图理解为多边形，利用多边形之间的拓扑关系来推理空间邻近关系，而多边形拓扑关系的推理在前面的章节中已有讨论。

第五节 基于空间邻近关系的城市影响空间的划分

地表上的任何一个城市都不可能孤立存在，为了保障生产、生活的正常进行，城市之间、城市与区域之间总是不断地进行着物质、能量、人员和信息的交换，我们把这些交换

称为空间相互作用。正是这种相互作用，才把空间上彼此分离的城市结合为具有一定结构和功能的有机整体，进而构成一个区域内的城镇体系（许学强、周一星、宁越敏，1997 年）。

一、康弗斯断裂点模型的缺陷

城市断裂点理论作为城市地理学的一个重要理论已被广泛用来确定城市的空间影响范围和城市经济区的划分，康弗斯（Converse P. D., 1949 年）发展了赖利模型，提出了断裂点（Breaking point）概念，两个城市间的分界点（即断裂点）可以表示为：

$$d_A = D_{AB} / (1 + \sqrt{P_B / P_A}), \text{ 或 } d_B = D_{AB} / (1 + \sqrt{P_A / P_B})$$

其中， d_A 、 d_B 分别为断裂点到两个城市的距离； D_{AB} 为两个城市之间的直线距离， P_B 、 P_A 分别为两个城市的人口。在实际应用中，断裂点理论有很大的局限性：

1)、计算公式中以城市人口表示城市的规模和吸引力，但是城市的吸引力应体现为其综合实力。为此，需选取反映城市综合实力的指标体系予以定量、综合分析和评价。我们建议用中心性强度值表示每个城市的吸引力。

2)、当一个区域内城市点很多时，容易出现三点共线或者四点共圆的情况，无法构建 Delaunay 三角网，断裂点的自动标注也无法完成。

3)、仅计算了相邻两个城市的一个断裂点，而两城市间的吸引范围的界限是一条线。因此，在具体划分影响范围时就出现了多种方法，具有很大的任意性。例如，过断裂点作垂线方法对整个区域进行分割就容易出现多解的情况（郑纯辉，1999 年）；用平滑曲线连接相邻断裂点方法形成的图形具有很大的任意性（张伟、顾朝林，2000 年；周一星，1992 年）。

二、扩展断裂点模型

假设在一个匀质平面区域内有若干个城市，如果每个城市的影响力（或者吸引力）相同，那么断裂点必定是相邻两个城市连线的中点，每个城市的影响范围必然是一个常规 Voronoi 多边形。

在一般情况下，每个城市的影响力是不同的，或者说，每个城市的中心性强度大小不同，每个城市按照自己影响力的大小（即空间目标的权重）为速度向周围扩张，最终形成各自的影响范围，应该说是顺理成章的。这也是加权 Voronoi 图生成的基本思想。

通过对断裂点公式的深入研究，我们可以得出如下三个重要推论，这也形成了对断裂点理论进行扩展的基础。

推论 1：两个相邻城市之间的欧氏距离等于断裂点到两个城市的欧氏距离之和。

$$d_A + d_B = D_{AB}$$

推论 2：断裂点到相邻两个城市的距离与这两个城市中心性强度值的平方根成正比。

$$d_A / d_B = \sqrt{P_A / P_B}$$

推论 3: 在匀质平面区域中, 以各个城市点为发生元, 其影响力扩张的速度与相邻两个城市的中心性强度值的平方根成正比。

$$a_1 / a_2 = \sqrt{p_A} / \sqrt{p_B}$$

依据以上推论, 可以对断裂点理论进行扩展并描述为: 在匀质平面区域内, 如果两个城市点的权重相同, 那么其影响范围的分界线是这两个城市点连线的垂直平分线; 如果它们的权重不同, 那么其影响范围的分界线是一个圆弧。平面内所有城市点的影响范围依据不同的条件分别构成了常规 Voronoi 图或加权 Voronoi 图, 并且每个城市点的权重分别等于其中心性强度值的平方根。

设平面区域内有两个城市点 A (x_1, y_1) 和 B (x_2, y_2), 其中心性强度值分别为 P_A 和 P_B , A, B 影响范围分界线上的任一点的坐标为 P (x, y)。那么,

$$\begin{aligned} d_A &= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \\ d_B &= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \\ \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}} &= \frac{\sqrt{P_A}}{\sqrt{P_B}} \end{aligned}$$

当 $P_A = P_B$ 时, A 和 B 的影响范围的分界线就是它们之间连线的垂直平分线。当 $P_A \neq P_B$ 时,

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{P_B x_1 - P_A x_2}{P_B - P_A} \right)^2 + \left(y - \frac{P_B y_1 - P_A y_2}{P_B - P_A} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{P_A P_B} ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)}{P_B - P_A} \right)^2 \\ \left(x - \frac{P_B x_1 - P_A x_2}{P_B - P_A} \right)^2 + \left(y - \frac{P_B y_1 - P_A y_2}{P_B - P_A} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{P_A P_B}}{P_B - P_A} D_{AB} \right)^2 \end{aligned}$$

这是一个圆的方程, 也就是说, 当两个城市 A 和 B 的中心性强度值不同时, 其影响范围的分界线是一个圆 (或圆弧), 圆心为 $\left(\frac{P_B x_1 - P_A x_2}{P_B - P_A}, \frac{P_B y_1 - P_A y_2}{P_B - P_A} \right)$, 并且在 AB 或其

延长线上, 半径为 $\left| \frac{\sqrt{P_A P_B}}{P_B - P_A} \right| D_{AB}$ 。可以验证, 经典断裂点理论计算的断裂点 P_0 也在这个

圆弧上, 是这个圆弧与 AB 的交点。这表明, 两个城市的影响范围的分界线是唯一的, 要么是直线, 要么是圆弧。

三、城市影响空间的划分方法

城市空间影响范围的划分是构建城市等级，进行城市体系规划的一项基础工作。传统方法主要基于城市空间相互作用理论，断裂点模型的应用最为广泛。为了数据处理的方便，同时不失一般性，我们选取河南省的 17 个地级中心城市为研究对象，划分其影响空间。

为了确定城市的空间影响范围，评价城市的综合实力是一个重要环节。目前，评价城市的指标体系较多，但主要指标大致相同。在综合分析的基础上，经过筛选，选取反映城市综合实力的 4 类 16 个指标。采用 1999 年河南省统计年鉴的统计数据，运用主成份分析方法，对河南省 17 个地级城市（地级行政中心）的综合实力进行评定（郭庆胜、闫卫阳、李圣权，2003 年）。主成份按照特征值大于 1，贡献率大于 88% 选取。选取的五个主成份的累计贡献率是：49.484%、62.187%、72.421%、81.129%、88.244%。计算所得的城市排序结果和相应的中心性强度值是：郑州（10.00）、洛阳（7.44）、南阳（4.85）、安阳（4.29）、新乡（4.00）、平顶山（3.69）、焦作（3.62）、濮阳（3.58）、漯河（3.55）、三门峡（3.55）、开封（3.30）、许昌（3.21）、商丘（3.06）、信阳（2.95）、驻马店（2.46）、鹤壁（2.10）、周口（1.00）。

利用 Delaunay 三角网与康弗斯断裂点模型相结合的方法可以对城市空间影响范围进行划分。其基本思路是：首先构造城市点集的 Delaunay 三角网；然后根据计算所得的每个城市的中心性强度值，计算每个断裂点的位置，并在 Delaunay 三角网的每条边上自动标注；最后，过每个断裂点作相应三角网边的垂线，对整个区域进行分割。图形生成的步骤是：第一，构造城市点集的 Delaunay 三角网，并在形成的每个三角形的每一条边上自动标注断裂点。第二，过每个断裂点作相应三角形边的垂线，对整个区域进行分割，此时往往会形成若干个小的三角形区域。因此，必须考虑三角区域的归属情况。为了体现城市断裂点理论，保证相邻两个城市相互作用的平衡点的位置不变，同时也考虑到中心性强度大的城市在区域发展中的特殊作用，我们将三角区域归属到三个相邻中心城市的中心性强度值较大的一个，这是比较符合实际的。这种方法能够体现传统的断裂点理论，保证城市空间相互作用的重要特征点（即断裂点）的位置不变。同时，也考虑到在地理分析中，中心城市的空间影响范围并不要求十分精确，而是一条模糊的界线。因此，用该方法划分中心城市的空间影响范围是实用的。存在的问题是：当城市点集出现三点共线或者四个点共圆时，图形生成就比较困难。图 6-26 是基于经典断裂点与 Delaunay 三角网划分的城市影响空间，左图为经典断裂点。

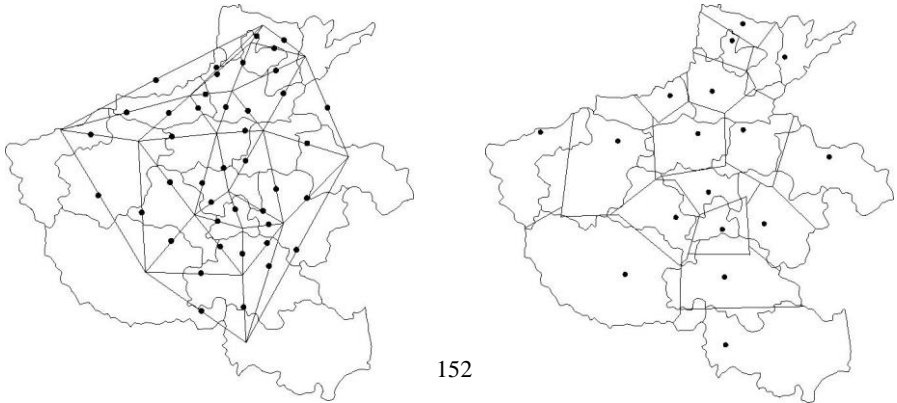
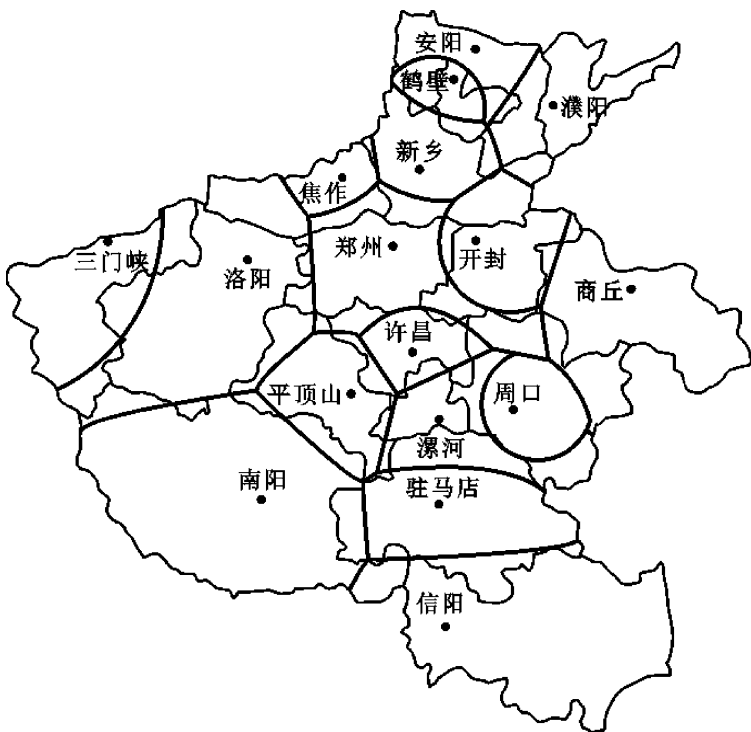


图 6-26 基于三角网划分城市影响空间

为了使生成的城市空间影响范围既能体现城市相互作用理论，又能保证在理论上的科学性和严密性。可以考虑将加权 Voronoi 图与扩展断裂点模型相结合来划分城市影响空间。根据加权 Voronoi 图的性质和几何特征可知，相邻两个城市的吸引范围的界线是一条弧段，而断裂点仅是这条弧段上的一个特殊点，断裂点的概念应该用“断裂弧”来代替更为科学合理。基于城市点集的加权 Voronoi 图可以明确城市的空间影响范围，从而克服了任意性



和盲目性。图 6-27 为河南省 17 个中心城市的加权 Voronoi 图。

图 6-27 中心城市的加权 Voronoi 图

四、扩展断裂点模型所产生的空间关系

Voronoi 图可以很好地描述空间邻近关系，鉴于维扩展法的优点，可以将 Voronoi 图和维扩展法有机地结合起来（王丽萍、潘云鹤、邱飞岳，1997 年）。为了描述这里所提到的考虑空间相互作用后的空间关系（简称为第二类空间关系，闫卫阳，2004），我们可以给出基于加权 Voronoi 图的维扩展 9 交叉模型（Weighted Voronoi 9-intersection Model，简称 WV9I）。设 A、B 分别为空间目标； ∂A 、 ∂B 分别为 A、B 的边界； A^0 、 B^0 分别为 A、B 的内部； A^{wv} 和 B^{wv} 分别为 A、B 的加权 Voronoi 区域。A、B 之间的第二类空间关系可用矩阵形式描述为：

$$WV9I = \begin{pmatrix} f(\partial A, \partial B) & f(\partial A, B^0) & f(\partial A, B^{wv}) \\ f(A^0, \partial B) & f(A^0, B^0) & f(A^0, B^{wv}) \\ f(A^{wv}, \partial B) & f(A^{wv}, B^0) & f(A^{wv}, B^{wv}) \end{pmatrix}$$

其中, $f(A, B)$ 为空间目标 A、B 的映射函数, 这里只简单地定义:

$$f(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{如果两个空间目标或者其 WV 区域没有公共部分;} \\ 1 & \text{如果两个目标或者其 WV 区域的要素完全相同;} \\ 0D & \text{如果两个目标或者其 WV 区域相交部分是点;} \\ 1D & \text{如果两个目标或者其 WV 区域相交部分是线;} \\ 2D & \text{如果两个目标或者其 WV 区域相交部分是面;} \end{cases}$$

对于线、面及复杂空间目标的第二类空间关系, 需要构建全形态的加权 Voronoi 图来进行分析。分别依据扩展断裂点模型和经典断裂点模型所表达的城市空间影响范围是不同的, 也就是说, 其 Voronoi 区域不同, 从而其空间邻近关系就发生了变化, 如图 6-28 所示, 从该图可以看出, 在扩展断裂点模型中, 某些断裂点的特性发生了变化。

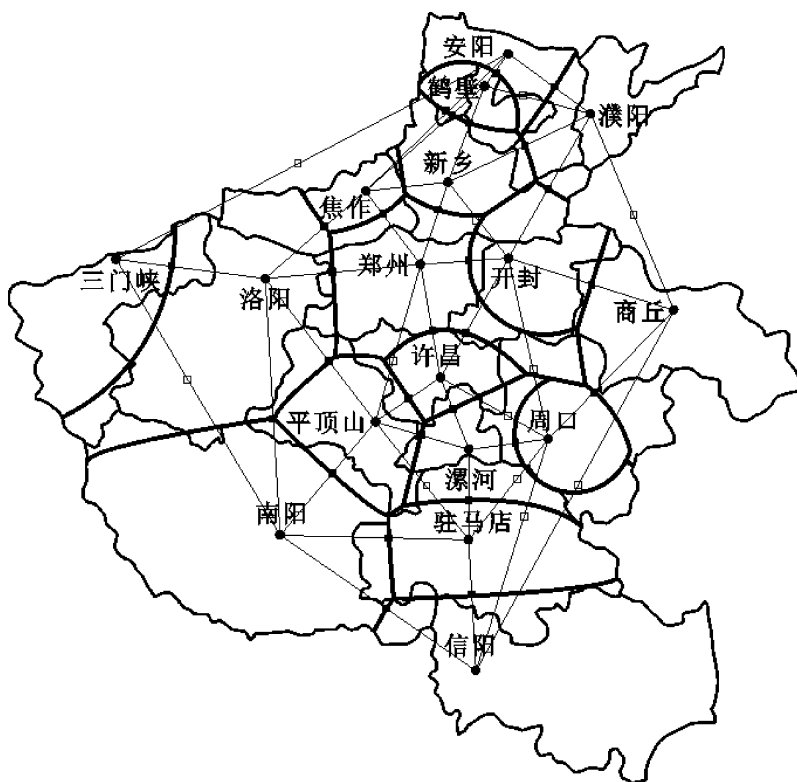


图 6-28 城市之间的实断裂点与虚断裂点 (图中■表示实断裂点, □表示虚断裂点)

以开封和周口为例，在康弗斯断裂点模型中，其断裂点就是两个城市的分界点。而在扩展断裂点模型中，该点落在郑州的影响区内，成为形式上的断裂点。这是由于郑州的中心性强度远远大于这两个城市的中心特征强度，康弗斯断裂点模型中所确认的属于它们的影响范围被郑州这个实力更为强大的城市所占据。还存在另外一种情况，在空间上不是邻近的城市，由于一个城市的影响力特别大，绕过中间城市而发生联系，成为经济意义或者其他意义上(如资源互补，贸易往来等)的临近城市，郑州和商丘两个城市就是如此。通过Delaunay三角网可以看出，在地理空间上，商丘与开封是直接邻近的，与郑州并不直接邻近，但是由于郑州作为省会城市，不仅经济实力强大，而且科技、教育、交通、贸易等各方面都占据优势，因此在扩展断裂点模型中，两个城市的影响区是直接邻接的。这在现实中确实存在，是合理的。从这个意义上讲，扩展断裂点模型所表达的客观世界更为真实，也更为科学。

断裂点特性的改变，引发我们思考城市之间的空间邻近关系的变化。可以看出，经典断裂点模型遵从的是第一类空间关系（简称为基本空间关系，闫卫阳，2004），即主要考虑城市的几何特性，虽然也考虑了城市实力的大小，但是仍未摆脱这种关系描述的束缚，认为城市只要在空间上直接邻近，其影响区域也是直接邻近的。而扩展断裂点模型全面考虑了城市的综合实力，采用科学的影响范围划分方法，使得城市之间的空间邻近关系从直观上得以明确表达，体现了完整意义上的第二类空间关系（闫卫阳，2004）。

我们把在空间上的两个城市之间确实存在的断裂点称为“实断裂点”，所有实断裂点的集合构成连续弧段。把虽然在空间上直接邻近，但由于周围其它城市或其他因素（如自然障碍、人为障碍等）的影响，在经典断裂点模型中存在而在客观上不存在的断裂点称为“虚断裂点”。这两类断裂点的出现导致城市之间第一类空间关系向第二类空间关系的转变。