

# GIS 面目标间拓扑关系的形式化模型

邓 敏<sup>1</sup>, 刘文宝<sup>2</sup>, 冯学智<sup>1</sup>

(1. 南京大学 城市与资源学系, 江苏 南京 210093; 2. 山东科技大学 地球信息科学与工程学院, 山东 泰安 271019)

## A Generic Model Describing Topological Relations among Area Objects in GIS

DENG Min<sup>1</sup>, LIU Wen-bao<sup>2</sup>, FENG Xue-zhi<sup>1</sup>

(1. Department of Urban and Resources Sciences, Nanjing University, Nanjing 210093, China; 2. Institute of Geosciences and Technology, Shandong University of Science and Technology, Tai'an 271019, China)

**Abstract:** The theory of spatial relations in GIS theory has been strongly demanded by spatial data modeling, spatial database query, spatial reasoning, cartographic generalization, and natural-language interface design among many others. However, there is no universal formal model that can be used to describe topological relations among area objects. This paper focuses on establishing a formal model to fill up the knowledge gaps. Our studies demonstrate that topological relations can be identified upon the changes of topological properties of spatial object sets and its components before and after their interactions. First, we propose a generalized model describing topological relations by using mapping transformations from relational algebraic. We found that the current existing models can be categorized as specific cases of our model. Subsequently, the model that we proposed here is a generic model in terms of representing area/area relations. In addition, the concepts of topological distance and topological complexity are defined within the model framework. Based on the concepts, we set up a conceptual model toward neighborhoods of topological relations which agrees with practical cases and can be applied to the real-world problems.

**Key words:** topological relations; formal description; topological distance; conceptual neighborhood; spatial reasoning

**摘 要:** 拓扑关系的描述和区分是建立在空间目标相互作用过程中目标集及其分量集合拓扑特性变化基础之上的。建立了 GIS 中拓扑关系形式化描述和区分的一种广义模型, 并与已有的形式化模型进行了比较分析, 结果发现现有的形式化方法和模型是广义模型的一些特例。在此基础上, 进一步提出了面目标间拓扑关系形式化描述的基本模型, 并根据定义的拓扑距离和拓扑复杂性概念, 建立了一个新的拓扑关系概念邻域图。

**关键词:** 拓扑关系; 形式化描述; 拓扑距离; 概念邻域; 空间推理

## 1 引 言

近 20 年来, 空间关系理论一直是国内外地理

信息及相关学科研究的重点。它主要用于空间数据建模、空间数据库查询、空间推理、制图综合、自然语言交互界面设计等方面<sup>[1]</sup>。通常, 空间关系

收稿日期: 2003-08-08; 修回日期: 2004-07-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40101022, 49801016); 教育部高校博士点基金资助项目(20010284011)

作者简介: 邓 敏(1974), 男, 江西临川人, 博士后, 主要研究方向为遥感与 GIS 空间数据质量。

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

分为拓扑关系、距离关系和方向关系<sup>[2]</sup>。针对面目标间的拓扑关系描述,已建立了一些形式化描述模型,如基于空间逻辑的 RCC 模型(region connection calculus)<sup>[2]</sup>,空间代数模型<sup>[3]</sup>,以及 4 交模型(4-intersection model)<sup>[4]</sup>和 9 交模型<sup>[5]</sup>。这些模型在一定的分类层次上具有相同的区分能力。例如,它们都能区分出简单面目标间的八种拓扑关系,即“相离”、“相接”、“相交”、“覆盖”、“包含”、“覆盖于”、“包含于”、“相等”关系。但不难发现,已有研究尚未在拓扑关系的形式化描述方法以及模型表达方面达成共识,局限于对各自提出模型进行分析和探讨。这种状况已影响了拓扑关系在 GIS 中的进一步应用和发展。

Clementini & Di Felice 从拓扑关系表达和计算效率方面对有关模型和方法进行了比较<sup>[6]</sup>。后来,Chen, *et al* 利用 Voronoi 区域取代 Egenhofer & Herring<sup>[5]</sup> 定义的目标外部,建立了 V9I 模型(Voronoi-based 9-intersection model)<sup>[7]</sup>。但是,这个模型仅在区分地理空间中邻近关系时具有一定的优势,并没有从纯拓扑的角度解决 9 交模型存在的不足。为此,本文首先提出 GIS 中拓扑关系形式化描述和区分的基本方法,然后建立一个新的 4 交差模型来描述面目标间拓扑关系,并对模型的合理性进行了详细的分析与比较。

2 拓扑关系形式化描述的基本方法

2.1 拓扑关系形式化描述的广义模型

对于两个给定的集合  $A$  和  $B$ ,其“关系”定义为笛卡儿积  $A \times B$  的一个子集,得到的结果是元素之间的有序对组合<sup>[8]</sup>。后来,这个概念也定义为  $A$  和  $B$  之间的集合运算。在 GIS 中,空间目标通常视为一个普通集合,两个目标间的拓扑关系可以通过比较目标集合及其分量集合在运算中的拓扑性质变化得以区分<sup>[10]</sup>。例如,基于点集拓扑的 4 交模型就是将空间目标分解为两个分离子集(边界和内部),然后通过组合两个目标子集在集合交算子下的运算结果而成,而空间代数模型则是通过组合两个目标集合在多个集合算子下(如:交、差、并等)运算的结果而形成的。因此,从集合论观点出发,可以将 GIS 中一个空间目标视为一个具有三个非空子集(即边界、内部和它本身)的集合。进而,空间目标间的拓扑关系可以通过这些子集间的关系对组合得以描述和区分,形式上为

$$\gamma(A,B)=\begin{bmatrix} A_1\vartheta_{11}B_1 & A_1\vartheta_{12}B_2 & A_1\vartheta_{13}B_3 \\ A_2\vartheta_{21}B_1 & A_2\vartheta_{22}B_2 & A_2\vartheta_{23}B_3 \\ A_3\vartheta_{31}B_1 & A_3\vartheta_{32}B_2 & A_3\vartheta_{33}B_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中,  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ )、 $B_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) 分别是集合  $A$ 、 $B$  的子集;  $\vartheta_{ij}$  为集合运算符,并( $\cup$ )、交( $\cap$ )、差( $\setminus$ )、反差( $\setminus$ )、对称差( $\Delta$ )等算子。于是,可以定义集合  $A$  和  $B$  间的关系  $\gamma(A,B)$  为它们子集关系的一个函数表达式,表达为

$$\gamma(A,B)=f(A_i\vartheta B_j)=f(A_1\vartheta_{11}B_1)\cup f(A_1\vartheta_{12}B_2)\cup \cdots \tag{2}$$

其中,  $\vartheta=\{\vartheta_{11},\vartheta_{12},\cdots\}$  为上述提到的各种算子的集合;  $f$  为集合运算的取值函数,它可以为二值函数(即空与非空),也可以为维数函数(即交集的最大维数)。因此,在 GIS 中两个目标集合间的拓扑关系可以利用式(2)表达,也就是说,区分不同的拓扑关系可以通过比较一组  $3 \times 3$  的矩阵得以实现。但是,式(1)或(2)不一定是描述拓扑关系的最小集,这主要是因为不同集合算子下的函数值之间可能存在一定的相关性,例如,当采用二值函数时,如果  $A \cap B \neq \phi$ ,那么就一定有  $A \cup B \neq \phi$ 。另外,拓扑关系是目标间一种特殊的定性关系,仅仅是上述关系的一个子集,而且 GIS 中的目标概念较数学上在抽象空间中定义的目标要简单的多。实际应用中有时甚至仅需对拓扑关系进行粗糙的描述或区分,因此不必选用所有的集合算子。故式(1)或(2)为两个目标集合间拓扑关系描述的广义模型。

2.2 模型的特例分析

在实际应用中,不同的应用层次对拓扑关系需要区分的程度是不一样的。在目前的一些商业化 GIS(如 ARC/INFO)空间查询语言中,使用较多的是八种拓扑关系,即在 4 交模型下对两个简单面目标拓扑关系的一种粗糙分类。若从模型构成上看,4 交模型是上述广义模型的一个特例,它是仅仅利用集合交算子(即边界和内部)分别对目标集的两个子集(即边界和内部)进行运算而构成的,即

$$\gamma(A,B)=\begin{bmatrix} A_1\cap B_1 & A_1\cap B_2 \\ A_2\cap B_1 & A_2\cap B_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中,  $A_1$  和  $A_2$  分别为目标  $A$  的内部和边界;相应地,  $B_1$  和  $B_2$  分别为  $B$  的内部和边界。如果函数  $f$  不是取值于  $\{\phi,\phi\}$ ,而是取交集的维数值,

那么式(1)则简化为 Clementini & Di Felice<sup>[6]</sup>提出的维数扩展模型。类似地,基于目标整体的方法建立的 RCC 模型也是式(1)的一个特例,即仅采用目标集合本身。可见,这些模型难以区分较多的拓扑细节。为此,Li, *et al* 提出了一个空间代数模型<sup>[3]</sup>,它由多个集合算子下的运算结果所构成。虽然这种模型能够区分出远远比 RCC 模型多的拓扑情形,但由于参与运算的集合是目标本身,没有纳入其子集之间的相关信息,故在一些拓扑关系描述和区分上仍无能为力<sup>[19]</sup>。

另外,Egenhofer & Herring 发展了一种 9 交模型<sup>[5]</sup>,它是在原有 4 交模型基础上纳入目标外部集合而构成的。然而,9 交模型在两个简单面/面目标拓扑关系区分上相比于 4 交模型并没有任何提高<sup>[7]</sup>。由于 9 交模型在构建上存在两个严重不足:① 基于内容不变量时目标集合的边界( $\partial$ )、内部( $^0$ )和外部( $^-$ )之间的交集存在线性相关性,例如, $A^0 \cap B^0$ 、 $A^0 \cap \partial B$  和  $A^0 \cap B^-$  不可能同时为空;② 目标的外部并不属于目标集合的子集。这在一定程度上影响了该模型的拓扑关系区分能力。针对第一个问题,Chen, *et al* 提出了用目标的 Voronoi 区域代替目标外部的 V9I 改进模型<sup>[7]</sup>。但与 9 交模型相比,V9I 模型仅仅在区分空间邻近关系时具有优势,而在拓扑关系的描述和区分上并没有很大改进,这主要与 Voronoi 区域的形成相关。当然,Voronoi 区域相对于目标外

部来说,容易操作和实现。

### 3 面目标间拓扑关系描述的形式化模型及分析

#### 3.1 4 交差模型

根据上述分析,我们建立一个新的 4 交差模型(4-Intersection-Difference model,简称 4ID),它是由两个面目标  $A$  的内部与  $B$  的内部之交集( $A^0 \cap B^0$ )、 $A$  的边界与  $B$  的边界之交集( $\partial A \cap \partial B$ )、 $A$  与  $B$  之差集( $A - B$ )以及  $B$  与  $A$  之差集( $B - A$ )四个部分构成的,形式化表达为

$$\gamma(A, B) = \begin{bmatrix} A^0 \cap B^0 & A - B \\ B - A & \partial A \cap \partial B \end{bmatrix} \tag{4}$$

或等价表达为一个四元组形式,即

$$\gamma(A, B) = [A^0 \cap B^0, A - B, B - A, \partial A \cap \partial B] \tag{5}$$

如果式(4)或(5)中各元素取值为空( $\phi$ )与非空( $\neg \phi$ )时,则有  $2^4 = 16$  种可能取值,即 4 交差模型能够区分 16 种拓扑情形。由于简单面目标几何构成的特殊性(如:连续的内部和外部),使得在一定分类层次上仅有 8 种拓扑关系具有物理意义。这些拓扑情形在 4 交差模型下都可明确区分,分别称之为“相离”(disjoint)、“相接”(meet)、“相交”(overlap)、“覆盖”(covers)、“包含”(contains)、“覆盖于”(coveredby)、“包含于”(inside)、“相等”(equal),如图 1。

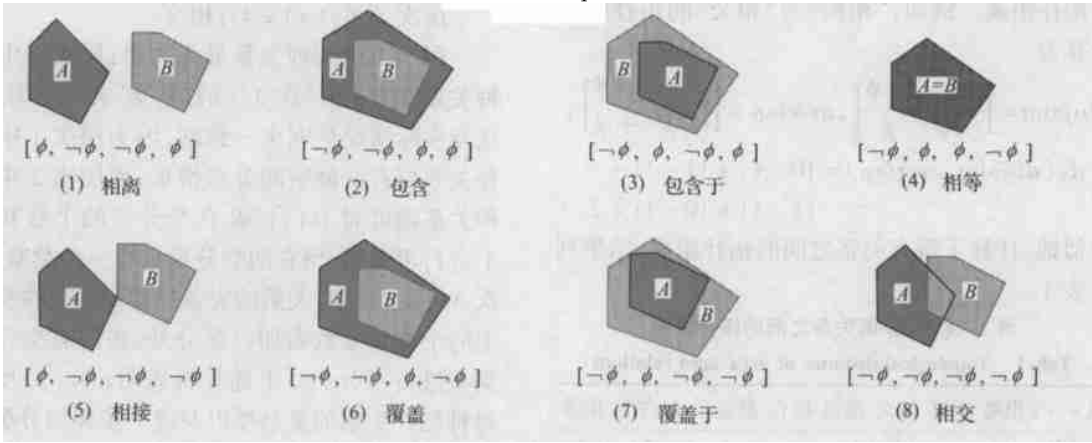


图 1 4 交差模型下的 8 型面/面关系

Fig. 1 Eight categories of area/area relations based on 4ID model

#### 3.2 拓扑距离

从图 2 中可见,空间目标间的拓扑关系随着目标位置的变化(包括大小、形状、旋转、平移等)而变化。如图 2(a),随着目标  $B$  的向下平移,拓

扑关系依次变化为“相接”、“相交”。由此可见,① 随着空间目标位置的变化,拓扑关系之间可以相互转化;② 拓扑关系的变化具有一定的顺序性。如图 2 中, $A$  和  $B$  之间关系从“相离”变化到

“相交”必须经过“相接”。亦即在目标变化过程中,存在某个时刻  $A$ 、 $B$  之间的拓扑关系为“相接”关系。这种变化顺序是空间推理的基础,同时也在一定程度上说明了拓扑关系之间存在关联性,并且不同的拓扑关系之间的关联性可能不同,如“相离”与“相接”间的关联性要比“相离”与“相交”间的关联性强。为此,在 4 交差模型的基础上,下面利用拓扑距离这一概念来度量拓扑关系之间的关联性,进而建立拓扑关系概念邻域。



图 2 拓扑关系变化的一种示例  
Fig. 2 An illustration of topological changes

设  $\alpha(*)$  是一个映射函数, 定义为

$$\alpha(*)=\begin{cases} 1, & * \neq \phi \\ 0, & * = \phi \end{cases} \quad (6)$$

进一步地, 定义拓扑距离函数  $d_T$  为

$$d_T(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{i=1}^4 |\alpha(*_1^i) - \alpha(*_2^i)| \quad (7)$$

其中  $\gamma_1, \gamma_2$  分别为两种拓扑关系; 而  $*_1^i, *_2^i (1 \leq i \leq 4)$  分别是  $\gamma_1, \gamma_2$  中的相对应元素。

利用式(7), 可计算图 1 中任意两种关系之间的拓扑距离。例如, “相离”与“相交”的拓扑距离计算为

$$disjoint = \begin{bmatrix} \phi & \lceil & \phi \\ \lceil & \phi & \phi \end{bmatrix}, \quad overlap = \begin{bmatrix} \lceil & \phi & \lceil & \phi \\ \lceil & \phi & \lceil & \phi \end{bmatrix},$$
$$d_T(disjoint, overlap) = |0-1| + |1-1| + |1-1| + |0-1| = 2$$

类似地, 计算了所有关系之间的拓扑距离, 结果列于表 1。

表 1 8 种面/面关系之间的拓扑距离

Tab. 1 Topological distance of area/area relations

$d(-, -)$	相离	相接	相交	覆盖	包含	覆盖于	包含于	相等
相离	0	1	2	3	2	3	2	4
相接	1	0	1	2	3	2	3	3
相交	2	1	0	1	2	1	2	2
覆盖	3	2	1	0	1	2	3	1
包含	2	3	2	1	0	3	2	2
覆盖于	3	2	1	2	3	0	1	1
包含于	2	3	2	3	2	1	0	2
相等	4	3	2	1	2	1	2	0

分析表 1 可以得出, 基于 4 交差模型定义的拓扑距离具有如下特性:

1.  $d_T(\gamma_1, \gamma_2) = d_T(\gamma_2, \gamma_1)$ , 即拓扑距离满足对称性;
2.  $0 \leq d_T(\gamma_1, \gamma_2) \leq 4$ , 即拓扑距离的有界非负性; 当且仅当  $\gamma_1 = \gamma_2$  才有  $d_T(\gamma_1, \gamma_2) = 0$  成立。
3.  $d_T(\gamma_1, \gamma_2) + d_T(\gamma_2, \gamma_3) \geq d_T(\gamma_1, \gamma_3)$ , 即拓扑距离的最短路径特性。

3.3 拓扑的复杂性

拓扑关系种类的多样性和复杂性在一定程度上是与 4 交差模型中非空元素的个数相对应的。由于交(或差)集为非空时, 如需再详细区分, 则比较非空集的维数、分离数等信息。例如, 当  $A$  与  $B$  为“相接”关系 ( $\partial A \cap \partial B \neq \phi$ ) 时, 它们的边界可以接触一次, 也可以接触  $n$  次, 但接触的次數不同, 拓扑关系也不相同。于是, 定义拓扑的复杂性为

$$C_T(\gamma) = \sum_{i=1}^4 \alpha(*^i) \quad (8)$$

式中,  $C_T(\gamma)$  为  $\gamma$  中非空元素的个数。根据式(8)则可以计算面目标间 8 种拓扑关系类型的复杂度, 并将其划分为三个层次, 分别为

- 层次 1 ( $C_T(\gamma) = 2$ ): 相离、包含、相等、包含于;
- 层次 2 ( $C_T(\gamma) = 3$ ): 相接、覆盖、覆盖于;
- 层次 3 ( $C_T(\gamma) = 4$ ): 相交。

层次 1 中四种关系最为简单; 层次 2 中的三种关系次之; 而层次 3 中的“相交”关系最为复杂。这与实际情况是完全一致的, 因为层次 1 中的每种关系仅有一种空间分布情形, 而层次 2 中的每种关系则可对  $\partial A \cap \partial B$  在交分量的个数和维数上进行再分类, 但它的交分量只有一种类型; 而层次 3 中的“相交”关系的完备描述则不仅在交分量上的个数和维数需加以区分外, 还需对交分量的类型进行再分类。上述分析表明,  $C_T(\gamma)$  反映了每种拓扑关系的复杂度以及进一步详细分类的相对深度。

3.4 拓扑关系的概念模型

从基于 4 交差模型定义的拓扑距离性质 2 可知, 任意两种不同拓扑关系之间的距离都大于或等于 1。距离越小, 在一定程度上表明两种拓扑关系越容易转换, 或者说两拓扑关系相似性程度大。于是, 定义拓扑距离为 1 的两种关系为概念

邻域关系,即满足条件

$$d_T(\gamma_1, \gamma_2)=1 \tag{9}$$

结合式(8)和(9),则可建立面目标间八种拓

扑关系的概念模型(如图 3),其中粗黑线“—”为邻域关系连接符,虚线连接符为具有相同复杂性的拓扑关系。

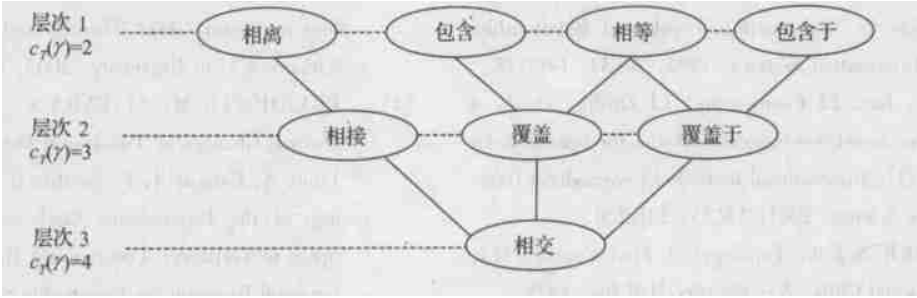


图 3 面目标间拓扑关系 概念模型

Fig. 3 A conceptual model toward neighborhood of area/ area relations

3.5 模型比较

下面分别与 Egenhofer *et al* 提出的 4 交模型<sup>[4]</sup>和 9 交模型<sup>[5]</sup>相比较。

在区分能力上,三个模型都能区分面目标的八种拓扑关系,在一定分类层次上它们也是面目标间拓扑关系的完备描述。在计算方法上,9 交模型需要计算 9 个元素,尤其是目标外部的纳入,使得在操作上具有一定的难度,而 4 交模型和 4 交差模型仅需计算 4 个元素。在拓扑关系概念邻域的表达上,Egenhofer & Al-Taha<sup>[11]</sup>基于 9 交模型建立了面目标间八种关系的概念邻域,但是,根据它们间的拓扑距离难以发现每类拓扑关系的概念邻域,不能体现拓扑关系的变化规律,从而不利于空间和时间域上拓扑关系推理。尤其是,在 4 交模型下利用 Egenhofer & Al-Taha<sup>[11]</sup>的分析方法并不能得到与上述一致的概念邻域关系图。而利用空间目标 Voronoi 区域建立的 V9I 模型并不是一种真正的拓扑关系形式化模型,因为 Voronoi 图是通过距离变换建立的。尽管 V9I 模型在区分空间邻近关系具有一定优势,但是空间邻近关系属于度量关系范畴,是一种与距离概念密切相关的空间关系。与此不同,本文提出的 4 交差模型及其概念模型在拓扑距离和拓扑复杂性描述方面能合理地反映实际中拓扑关系的分布多样性以及它们之间的变化特性。

4 结论与展望

拓扑关系是一种纯定性空间关系,与距离方向等度量概念无关。拓扑关系的描述和区分需要建立在空间目标的相互作用过程中目标集及其分

量集合拓扑特性的变化基础上。本文提出的 4 交差模型在构成上综合利用“差”、“反差”和“交”集合算子,并有效地表达了空间目标相互作用过程中集合拓扑性质的变化,一方面完备地区分了空间面目标间不同类型的拓扑关系,另一方面反映了拓扑关系的有序变化特性。因此,4 交差模型在分析和推理两目标间的空间关系方面具有一定的优势。尽管 4 交差模型也能够描述带有孔洞的面目标间的一些拓扑关系,但是,完备地描述这种复杂面目标的拓扑关系需要引入更多的拓扑不变量,这有待另文探讨。

参考文献:

[ 1 ] BURROUGH P A, MCDONNELL R A. Principles of Geographical Information Systems [ M]. Oxford: Oxford University Press 1998.

[ 2 ] COHN A G, GOTTS N M. The ‘ Egg-Yolk’ Representation of Regions with Indeterminate Boundaries [ A]. In: Burrough P A and Frank A U (ed), Proceedings of GISDATA-Specialist Meeting on Spatial Objects with Undetermined Boundaries [ C]. London: Taylor & Francis 1996 171-187.

[ 3 ] LI Zhi-lin, ZHAO Ren-liang, CHEN Jun. An Algebra Model for Spatial Relations [ A]. Proceedings of the 3RD ISPRS Workshop on Dynamic and Multi-dimensional GIS [ C], Bangkok: [ s. n. ], 2001, 170-177.

[ 4 ] EGENHOFER M, FRANZOSA R. Point-Set Topological Spatial Relations [ J]. International Journal of Geographical Information Systems, 1991, 5 ( 2 ): 161-174.

[ 5 ] EGENHOFER M, HERRING J. Categorizing Binary Topological Relationships between Regions, Lines

and Points in Geographic Databases [ R] . Oronoi: Technical report, Department of Surveying Engineering, University of Maine, Oronoi, ME, 1991.

[ 6] CLEMENTINI E, DI FELICE P. A Comparison of Methods for Representing Topological Relationships [ J] . Information Systems, 1995, 20(3): 149-178.

[ 7] CHEN Jun, LI Cheng-ming, LI Zhi-lin, *et al.* A Voronoi-based 9-intersection Model for Spatial Relations [ J] . International Journal of Geographical Information Science, 2001, 15(3): 201-220.

[ 8] MUNKRES J R. Topology: A First Course [ M] . Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc, 1975.

[ 9] CLEMENTINI E, DI FELICE P, OOSTEROM, P. A Small Set for Formal Topological Relationships Suitable for End-User Interaction [ A] . In: David Abel, Beng Chin Ooi (ed), Advances in Spatial Databases [ C] , New York: Springer-Verlag, 1993, 277-295.

[ 10] DENG Min. Extended Models on Topological Relations in Vector GIS: Theories and Methods [ D] . Wuhan: Wuhan University, 2003. (In Chinese)

[ 11] EGENHOFER M, AL-TAHA K. Reasoning about Gradual Changes of Topological Relationships [ A] . Frank A, Campari I, Formentini U (ed.), Proceedings of the International Conference GIS - from Space to Territory: Theories and Methods of Spatio-temporal Reasoning in Geographic Space [ C] , Pisa, Italy: Springer-Verlag, 1992, 196-219.

《测绘学报》论文获中国科协优秀学术论文表彰

[ 本刊讯] 第二届中国科协期刊优秀学术论文评选活动于 2004 年 3 月开始至 12 月结束。根据科协学发[ 2004] 021 号“第二届中国科协期刊优秀学术论文评选活动的通知”精神,《测绘学报》编辑部组织推荐——《全国天文大地网与空间大地网联合平差》(《测绘学报》2000 年第 4 期,作者:魏子卿、黄维彬、杨捷中、杨德庚、汪舟平、陶文中)一文,经中国科协期刊优秀论文专家评审委员会评选,中国科协学术交流工作委员会审定,被评为 99 篇优秀学术论文之一,日前荣获中国科协表彰。

为了鼓励广大科技人员不断创新,发表高水平的学术论文,进一步提高办刊质量,加速我国科技期刊国际化,促进我国科学技术水平的不断提高。从 2003 年起,中国科协开展了“中国科协期刊优秀学术论文评选活动”,每年一届。在第一届活动中,本刊选送的《分布式广域差分 GPS 实时定位系统》一文,被评为 99 篇优秀学术论文之一,并在中国科协第六届四次全委会上获得了表彰。