现代控制理论

王陈亮

北京航空航天大学
自动化科学与电气工程学院

4.1.1 问题描述

考虑如下严反馈非线性系统：

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_i = x_{i+1} + \theta^T \varphi_i(\bar{x}_i), i = 1, \cdots, n-1 \\
&\dot{x}_n = \theta^T \varphi_n(x) + b\eta(x)N(u) \\
&y = x_1
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

其中$x = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$为可测状态，$y \in \mathbb{R}$为系统输出，$u \in \mathbb{R}$为控制输入，$\bar{x}_i = [x_1, \cdots, x_i]^T$，$\varphi_i(\bar{x}_i) \in \mathbb{R}^r$、$\varphi_n(x) \in \mathbb{R}^r$和$\eta(x) \in \mathbb{R}$为已知光滑函数，$b \in \mathbb{R}$和$\theta \in \mathbb{R}^r$为未知常数，$N(u)$为死区非线性。

4.1 含死区非线性系统控制

$N(u)$的表达式为：

$$N(u)=\begin{cases} a_r(u-\xi_r), \text{if } u \geq \xi_r \\ 0, \text{if } -\xi_l < u < \xi_r \\ a_l(u+\xi_l), \text{if } u \leq -\xi_l \end{cases} \tag{4.1.2}$$

其中a_r， a_l， ξ_r和ξ_l为未知大于0的常数。

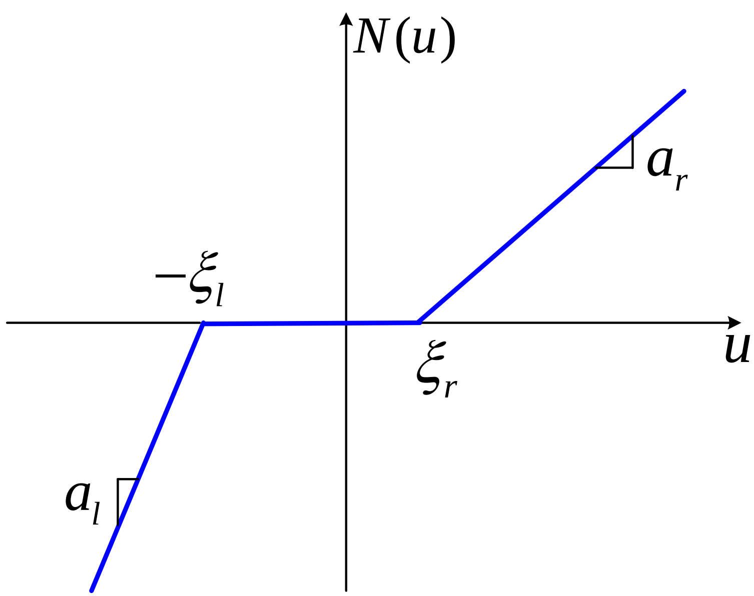

图4.1 非线性死区

4.1 含死区非线性系统控制

定义

$$a(t)=\begin{cases}a_r, \text{if } u(t)>0\\ a_l, \text{if } u(t)\le 0\end{cases}, \xi(t)=\begin{cases}-a_r\xi_r, \text{if } u(t)\ge \xi_r\\ -a(t)u(t), \text{if } -\xi_l<u(t)<\xi_r\\ a_l\xi_l, \text{if } u(t)\le -\xi_l\end{cases} \quad (4.1.3)$$

则$N(u)$可改写为

$$N(u(t))=a(t)u(t)+\xi(t) \quad (4.1.4)$$

4.1 含死区非线性系统控制

□ 控制目的

在全状态可测的条件下，设计控制信号u，使得

- 闭环系统内所有信号有界；
- 被控对象输出$y(t)$跟踪给定的期望轨迹$y_d(t)$。

□ 假设

- 假设1：$b\eta(x) \neq 0$，且b的符号已知。
- 假设2：$y_d(t)$及其前n阶导数已知且有界。

□ 引理4.1：对任意标量$\epsilon > 0$和$z \in \mathbb{R}$，以下关系式成立：

$$0 \le |z| - \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + \epsilon^2}} < \epsilon$$

4.1.2 控制器设计

第1步：根据式(4.1.1)，跟踪误差$z_1 = y - y_d$的导数可表示为

$$\dot{z}_1 = x_2 + \theta^T \omega_1 - \dot{y}_d \tag{4.1.5}$$

其中$\omega_1 = \varphi_1(x_1)$。定义第1个准Lyapunov函数：

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \tag{4.1.6}$$

其中$\tilde{\theta} := \hat{\theta} - \theta$，$\hat{\theta}$为$\theta$的估计，正定对称矩阵$\Gamma \in \mathbb{R}^{r \times r}$为设计参数。微分$V_1$有

$$\dot{V}_1 = z_1(x_2 + \theta^T \omega_1 - \dot{y}_d) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \tag{4.1.7}$$

定义

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \tag{4.1.8}$$

其中α_1为第1个待设计的镇定函数。

然后有

$$\dot{V}_1 = z_1(z_2 + \alpha_1 + \theta^T\omega_1 - \dot{y}_d) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} \tag{4.1.9}$$

选取

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T\omega_1 + \dot{y}_d \tag{4.1.10}$$

其中$c_1 > 0$为设计参数。于是有

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \Gamma\omega_1 z_1\right) \tag{4.1.11}$$

针对$\hat{\theta}$，定义第1个调节函数

$$\tau_1 = \Gamma\omega_1 z_1 \tag{4.1.12}$$

然后可得

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1\right) \tag{4.1.13}$$

4.1 含死区非线性系统控制

第2步：注意到α_1是$(x_1, y_d, \dot{y}_d, \hat{\theta})$的光滑函数, $z_2 = x_2 - \alpha_1$的导数可表示为

$$\dot{z}_2 = x_3 + \theta^T \omega_2 + \beta_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \tag{4.1.14}$$

其中$\omega_2 = \varphi_2(\bar{x}_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1(x_1)$，$\beta_2 = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d} \dot{y}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_d} \ddot{y}_d$。

选取第2个准Lyapunov函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \tag{4.1.15}$$

可以证明

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 + z_2 \left(z_1 + x_3 + \theta^T \omega_2 + \beta_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1 \right) \tag{4.1.16}$$

定义

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \tag{4.1.17}$$

其中α_2为第2个待设计的镇定函数。

将式(4.1.17)代入式(4.1.16)并用$\hat{\theta}-\tilde{\theta}$替代$\theta$，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 + z_2\left(z_1 + z_3 + \alpha_2 + \hat{\theta}^T\omega_2 + \beta_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right) \\ &\quad + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1 - \Gamma\omega_2 z_2\right)\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

选取

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 - \hat{\theta}^T\omega_2 - \beta_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\tau_2 \tag{4.1.19}$$

$$\tau_2 = \tau_1 + \Gamma\omega_2 z_2 \tag{4.1.20}$$

其中$c_2>0$为设计参数。则有

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + z_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\left(\tau_2 - \dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_2\right) \tag{4.1.21}$$

4.1 含死区非线性系统控制

第i步$(3 \le i \le n-1)$：注意到α_{i-1}是$\left(\bar{x}_{i-1}, y_d, \dot{y}_d, \cdots, y_d^{(i-1)}, \hat{\theta}\right)$的光滑函数，$z_i = x_i - \alpha_{i-1}$的导数可表示为

$$\dot{z}_i = x_{i+1} + \theta^T \omega_i + \beta_i - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \tag{4.1.22}$$

其中$\omega_i = \varphi_i(\bar{x}_i) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \varphi_k(\bar{x}_k)$，$\beta_i = -\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(k+1)}$。选取

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 \tag{4.1.23}$$

其中V_{i-1} 的导数满足

$$\dot{V}_{i-1} = -\sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + z_{i-1} z_i + \sum_{k=2}^{i-1} z_k \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \left(\tau_{i-1} - \dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1}\right) \tag{4.1.24}$$

根据式(4.1.22)-(4.1.24)可以证明

$$\dot{V}_i = -\sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + z_i\left(z_{i-1} + x_{i+1} + \theta^T\omega_i + \beta_i - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right) + \sum_{k=2}^{i-1} z_k \frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_{i-1} - \dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1}\right) \quad (4.1.25)$$

定义

$$z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i \quad (4.1.26)$$

其中α_i为第i个待设计的镇定函数。

4.1 含死区非线性系统控制

将式(4.1.26)代入式(4.1.25)并用$\hat{\theta}-\tilde{\theta}$替代$\theta$，有

$$\dot{V}_i=-\sum_{k=1}^{i-1}c_k z_k^2+z_i\left(z_{i-1}+z_{i+1}+\alpha_i+\hat{\theta}^T\omega_i+\beta_i-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right)$$
$$+\sum_{k=2}^{i-1}z_k\frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_{i-1}-\dot{\hat{\theta}}\right)+\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}-\tau_{i-1}-\Gamma\omega_i z_i\right) \quad (4.1.27)$$

令

$$\alpha_i=-c_i z_i-z_{i-1}-\hat{\theta}^T\omega_i-\beta_i+\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\tau_i+\sum_{k=2}^{i-1}z_k\frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial\hat{\theta}}\Gamma\omega_i \quad (4.1.28)$$

$$\tau_i=\tau_{i-1}+\Gamma\omega_i z_i \quad (4.1.29)$$

其中$c_i>0$为设计参数。则有

$$\dot{V}_i=-\sum_{k=1}^{i}c_k z_k^2+z_i z_{i+1}+\sum_{k=2}^{i}z_k\frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_i-\dot{\hat{\theta}}\right)+\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}-\tau_i\right) \quad (4.1.30)$$

4.1 含死区非线性系统控制

第n步：注意到α_{n-1}是$\left(\bar{x}_{n-1}, y_d, \dot{y}_d, \cdots, y_d^{(n-1)}, \hat{\theta}\right)$的光滑函数，并利用式(4.1.1)和(4.1.4)， $z_n = x_n - \alpha_{n-1}$的导数可表示为

$$\dot{z}_n = ba(t)\eta(x)u + b\xi(t)\eta(x) + \theta^T\omega_n + \beta_n - \frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \tag{4.1.31}$$

其中 $\omega_n = \varphi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_k}\varphi_k(\bar{x}_k)$， $\beta_n = -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_k}x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y_d^{(k)}}y_d^{(k+1)}$。

由式(4.1.3)知$a(t) \geq \min\{a_r, a_l\}$，$\xi(t)$有界。定义

$$l = \min\{|b|a_r, |b|a_l\}, p = \frac{1}{l}, \delta = p\sup_{t\geq 0}|b\xi(t)| \tag{4.1.32}$$

并令$\tilde{p} = \hat{p} - p$，$\tilde{\delta} = \hat{\delta} - \delta$，其中$\hat{p}$和$\hat{\delta}$分别是$p$和$\delta$的估计。引入一光滑有界恒正的辅助信号$\epsilon(t) = \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}$，其中$\sigma_1$>0和$\sigma_2$>0为设计参数。

利用式(4.1.32)可以证明:

$$z_n b\xi(t)\eta(x) \leq l\delta|z_n\eta(x)| \leq l\hat{\delta}|z_n\eta(x)| - l\tilde{\delta}|z_n\eta(x)| \tag{4.1.33}$$

从而利用引理4.1可得:

$$l\hat{\delta}|z_n\eta(x)| \leq lz_n\varpi + l\epsilon(t) \tag{4.1.34}$$

其中

$$\varpi = \frac{z_n\hat{\delta}^2\eta^2(x)}{\sqrt{z_n^2\hat{\delta}^2\eta^2(x) + \epsilon^2(t)}} \tag{4.1.35}$$

选取最后一个准Lyapunov函数

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{l}{2\gamma_1}\tilde{p}^2 + \frac{l}{2\gamma_2}\tilde{\delta}^2 \tag{4.1.36}$$

其中$\gamma_1 > 0$和$\gamma_2 > 0$为设计参数。

可以证明：

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_n = & -\sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n\left(z_{n-1} + ba(t)\eta(x)u + b\xi(t)\eta(x) + \theta^T\omega_n + \beta_n - \frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right) \\
& + \sum_{k=2}^{n-1} z_k \frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_{n-1} - \dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_{n-1}\right) + \frac{l}{\gamma_1}\tilde{p}\dot{\hat{p}} + \frac{l}{\gamma_2}\tilde{\delta}\dot{\hat{\delta}} \\
\le & -\sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n\left(z_{n-1} + ba(t)\eta(x)u + l\varpi + \hat{\theta}^T\omega_n + \beta_n - \frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right) \\
& + \sum_{k=2}^{n-1} z_k \frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_{n-1} - \dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_n\right) + \frac{l}{\gamma_1}\tilde{p}\dot{\hat{p}} + \frac{l}{\gamma_2}\tilde{\delta}\left(\dot{\hat{\delta}} - \gamma_2|z_n\eta(x)|\right) + l\epsilon(t) \\
\le & -\sum_{k=1}^{n} c_k z_k^2 + z_n ba(t)\eta(x)u + lz_n\varpi + z_n\bar{u} + \sum_{k=2}^{n} z_k \frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_n - \dot{\hat{\theta}}\right) \\
& + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_n\right) + \frac{l}{\gamma_1}\tilde{p}\dot{\hat{p}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\delta}\left(\dot{\hat{\delta}} - \gamma_2|z_n\eta(x)|\right) + l\epsilon(t)
\end{aligned}
\tag{4.1.37}
$$

4.1 含死区非线性系统控制

其中

$$\tau_n = \tau_{n-1} + \Gamma \omega_n z_n \tag{4.1.38}$$

$$\bar{u} = c_n z_n + z_{n-1} + \hat{\theta}^T \omega_n + \beta_n - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_n - \sum_{k=2}^{n-1} z_k \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \omega_n \tag{4.1.39}$$

令

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau_n, \quad \dot{\hat{\delta}} = \gamma_2 |z_n \eta(x)| \tag{4.1.40}$$

选取控制律

$$u = -\frac{\mathrm{sign}(b)}{\eta(x)} \left(\frac{z_n \hat{p}^2 \bar{u}^2}{\sqrt{z_n^2 \hat{p}^2 \bar{u}^2 + \epsilon^2(t)}} + \varpi \right) \tag{4.1.41}$$

其中$\hat{p}$对应的自适应律为

$$\dot{\hat{p}} = \gamma_1 |z_n \bar{u}| \tag{4.1.42}$$

利用引理4.1，式(4.1.32)和式(4.1.41)可以证明：

$$
\begin{aligned}
z_n b a(t)\eta(x)u &= -|b|a(t)\left(\frac{z_n^2\hat{p}^2\bar{u}^2}{\sqrt{z_n^2\hat{p}^2\bar{u}^2+\epsilon^2(t)}}+z_n\varpi\right)\\
&\le -\frac{l z_n^2\hat{p}^2\bar{u}^2}{\sqrt{z_n^2\hat{p}^2\bar{u}^2+\epsilon^2(t)}}-l z_n\varpi\\
&\le l\epsilon(t)-l\hat{p}|z_n\bar{u}|-l z_n\varpi
\end{aligned}
\tag{4.1.43}
$$

将式(4.1.40)，(4.1.42)和(4.1.43)代入式(4.1.37)并注意$l\tilde{p}-l\hat{p}=-lp=-1$，可得

$$
\dot{V}_n \le -\sum_{k=1}^{n} c_k z_k^2 + 2l\epsilon(t) \tag{4.1.44}
$$

4.1.3 稳定性分析

定理4.1：考虑由被控对象(4.1.1)、控制律(4.1.41)和自适应律(4.1.40)及(4.1.42)组成的闭环系统。假定假设1-2成立，则闭环系统内所有信号全局一致有界且$\lim_{t\to+\infty}[y(t)-y_d(t)]=0$。

4.1 含死区非线性系统控制

证明：对式(4.1.44)两端积分可得

$$V_n(t) - V_n(0) \le -\sum_{k=1}^{n}\int_0^t c_k z_k^2(\tau)d\tau + h \qquad (4.1.45)$$

其中 $h = 2l\int_0^{+\infty}\epsilon(\tau)d\tau$ 为有限常量。由式(4.1.45)可知 V_n，$z_1,\cdots,z_n$，$\hat{\theta}$，$\hat{p}$和$\hat{\delta}$有界。由z_1的有界性、假设2和式(4.1.1)、(4.1.5)可知，$y = x_1$有界。注意α_1是$\left(x_1, y_d, \dot{y}_d, \hat{\theta}\right)$的光滑函数，因此$\alpha_1$有界，进而$x_2 = \alpha_1 + z_2$有界。以此类推可以证明，$\alpha_{k-1}$和$x_k(k = 2,\cdots,n)$有界。

在得到$x_1, \cdots, x_n$的有界性之后，可知式(4.1.39)中$\bar{u}$有界。根据(4.1.35)，有$|\varpi| < \left|\hat{\delta}\eta(x)\right|$，于是$\varpi$有界。根据式(4.1.41)，有$|u| < \frac{1}{|\eta(x)|}|\hat{p}\bar{u}|$，因此控制信号$u$有界。然后可以总结出闭环系统内所有信号全局一致有界。此外，由式(4.1.45)可知，$z_1(t) \in L_2$；由式(4.1.5)可知$\dot{z}_1(t) \in L_\infty$。利用Barbalat引理，有$\lim_{t\to+\infty} z_1(t) = 0$，即$\lim_{t\to+\infty}[y(t) - y_d(t)] = 0$，证毕。