



粒子滤波部分主要参考材料

Optimal State Estimation	15
Optimal Estimation of Dynamic Systems	4.10
Theory and Implementation of Particle Filters University of Ottawa	
非线性滤波理论与目标跟踪应用 占荣辉、张军等 国防工业出版社	7.1~7.4
A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking,	
IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING	



1. 贝叶斯估计

1) 贝叶斯定理及其应用

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$$

贝叶斯定理阐述了条件概率密度的计算思想，而条件概率密度是我们依据给定信息进行推理、判断、估计的重要的方法。贝叶斯定理应用非常广泛，例如贝叶斯估计、贝叶斯学习、贝叶斯网络、贝叶斯分类、贝叶斯推断等。

2) 贝叶斯定理与估计相关的应用

状态估计问题是利用观测 \mathbf{Z} 及噪声 \mathbf{W} 、 \mathbf{V} 的统计特性，在状态方程的基础上对状态 \mathbf{X} 估计，实质上也是一种条件概率密度的应用问题。

极大似然、极大验后（最大后验）估计就是建立在条件概率基础上的估计准则，如果条件概率密度的计算使用贝叶斯公式，就可称之为贝叶斯估计。通常情况下贝叶斯估计是针对验后而言的。



1. 贝叶斯估计

3) 贝叶斯估计 Bayesian Estimation

贝叶斯估计有不同的形式，Optimal Estimation of Dynamic Systems 给出了贝叶斯状态估计、最小风险估计两种应用。

① 贝叶斯状态估计（贝叶斯滤波）

$$X_{k+1} = f(X_k, U_k, W_k)$$

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

贝叶斯状态估计的目的是实现对系统状态的准确估计，其最典型的应用就是极大验后（后验）估计的贝叶斯计算实现。

贝叶斯状态估计能有效处理噪声的作用吗？

$$p(X|Z) = \frac{p(Z|X)p(X)}{p(Z)}$$

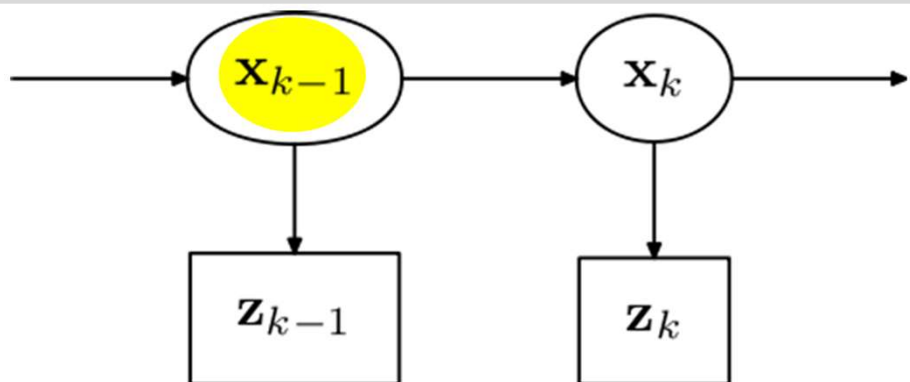
包含有过程噪声W的作用

包含有观测噪声V的作用





1. 贝叶斯估计



$$p(z_k | x_k, x_{k-1}, \dots, x_0) = p(z_k | x_k)$$

$$p(x_k | x_{k-1}, \dots, x_0) = p(x_k | x_{k-1})$$

$$p(x_0, \dots, x_k, z_0, \dots, z_k) = p(x_0) \prod_{i=1}^k p(z_i | x_i) p(x_i | x_{i-1})$$

$$p(x_k | z_{1:k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | z_{1:k-1}) dx_{k-1}$$

Chapman-Kolmogorov equation

\mathbf{Z}_k 未知下预测PDF

$$p[x(k) | z_{1:k}] = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} = \alpha p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1})$$

\mathbf{Z}_k 已知修正

$$p(z_k | z_{k-1}) = \int p(z_k | x_k) p(x_k | z_{k-1}) dx_k$$

与 x_k 取值无关

$$\begin{aligned} p[x_k | z_{1:k}] &= \frac{p[x_k, z_{1:k}]}{p(z_{1:k})} \\ &= \frac{p(x_k, z_k | z_{1:k-1}) p(z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1}) p(z_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(z_k | x_k, z_{1:k-1}) p(x_k | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} \end{aligned}$$

形式上不是贝叶斯公式

利用贝叶斯公式可以得到相同的结果





1. 贝叶斯估计

3) 贝叶斯估计 Bayesian Estimation

② 最小风险估计

目标是评价代价函数 $c(X^*|X)$ ，即估计值为 X^* ，而真实值为 X 的代价，由于 X 未知，确切的代价函数无法评估，通常假设 X 服从某验后概率的分布，其目标函数为

$$J_{MR}(X^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(X^* | X) p(X | Z) dX$$

利用贝叶斯公式，风险函数可以写为

$$J_{MR}(X^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(X^* | X) p(X | Z) dX = \int_{-\infty}^{+\infty} c(X^* | X) \frac{p(Z | X) p(X)}{p(Z)} dX$$

4) 其他相关概念

贝叶斯推断 Bayesian Inference，重点在于获得验后概率密度，而不是对状态值的估计。



2. 粒子滤波的问题的提出

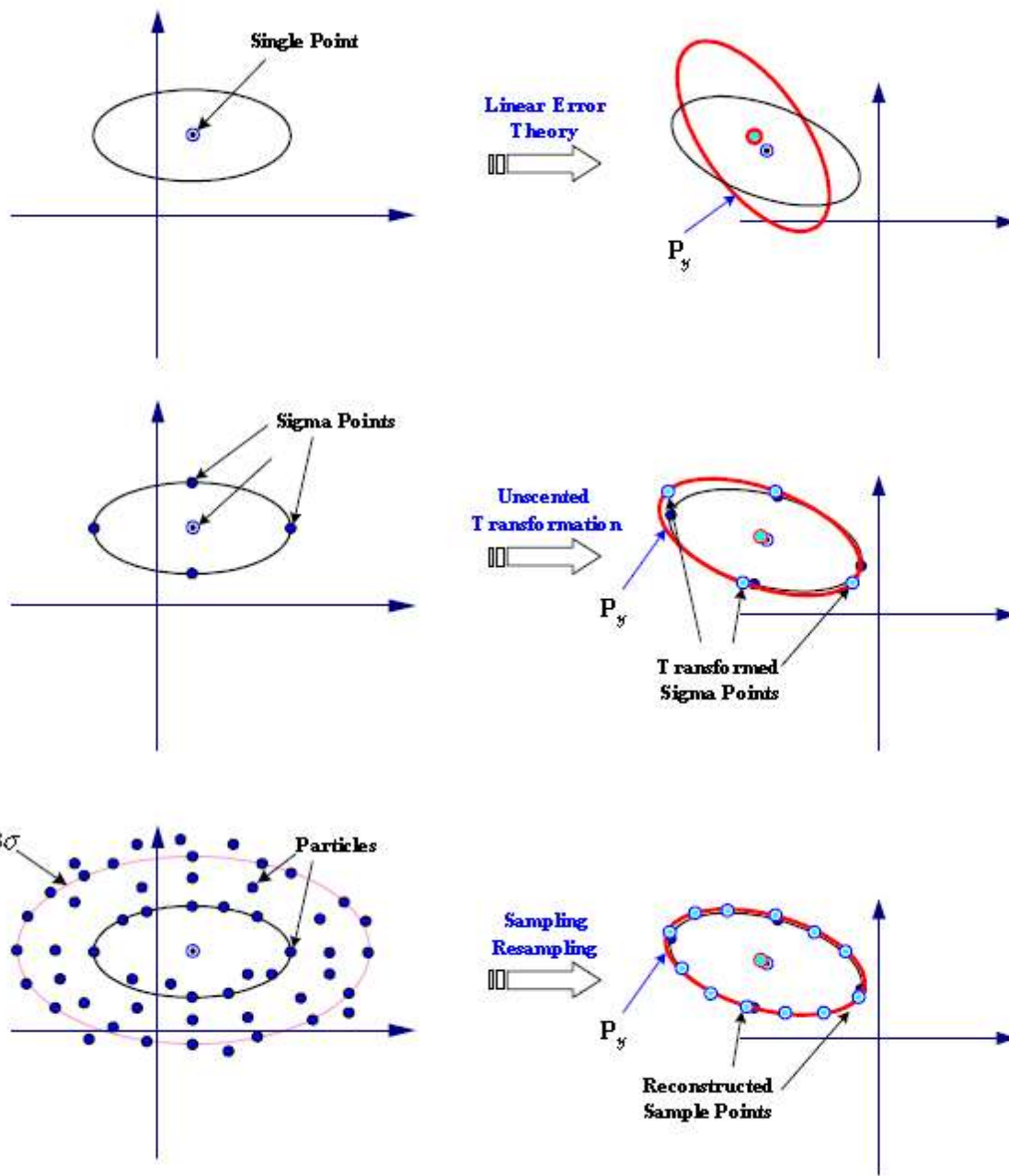
1) 粒子滤波的思想

The particle filter is a statistical, **brute-force** approach to estimation that often works well for problems that are difficult for the conventional Kalman filter (i.e., **systems that are highly nonlinear**).

粒子滤波的其他名称

sequential importance sampling
bootstrap filtering
the condensation algorithm
interacting particle approximations
Monte Carlo filtering
sequential Monte Carlo (SMC) filtering

注意粒子滤波与**UKF**
中采样的区别





2. 粒子滤波问题的引出

2) 粒子滤波的数学描述

以离散非线性系统为例

$$X_{k+1} = f(X_k, U_k, W_k)$$

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

极大验后估计是将概率密度最大情况下对应的状态作为最优估计解，如果有足够的样本，可以通过模拟数学期望的方式获得状态最优估计。

假设在k时刻有N个状态样本，则可以对k+1时刻状态进行一步预测

$$\hat{X}_{k+1|k}^{(i)} = f(X_k^{(i)}, U_k, W_k)$$

k+1时刻状态最优估计解的数学期望为

$$E[X_{k+1|k+1} | Z_{1:k+1}] = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{k+1|k} p(X_{k+1} | Z_{1:k+1}) dX_{k+1} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{X}_{k+1|k}^{(i)}$$

如果积分公式可以准确地利用离散样本计算，则可以实现粒子滤波，其实现的方法是蒙特卡洛法。



3. 蒙特卡洛法的基本原理

1) 蒙特卡洛法解决的典型问题

自变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的分布特性已知，求 y 的分布特性。

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

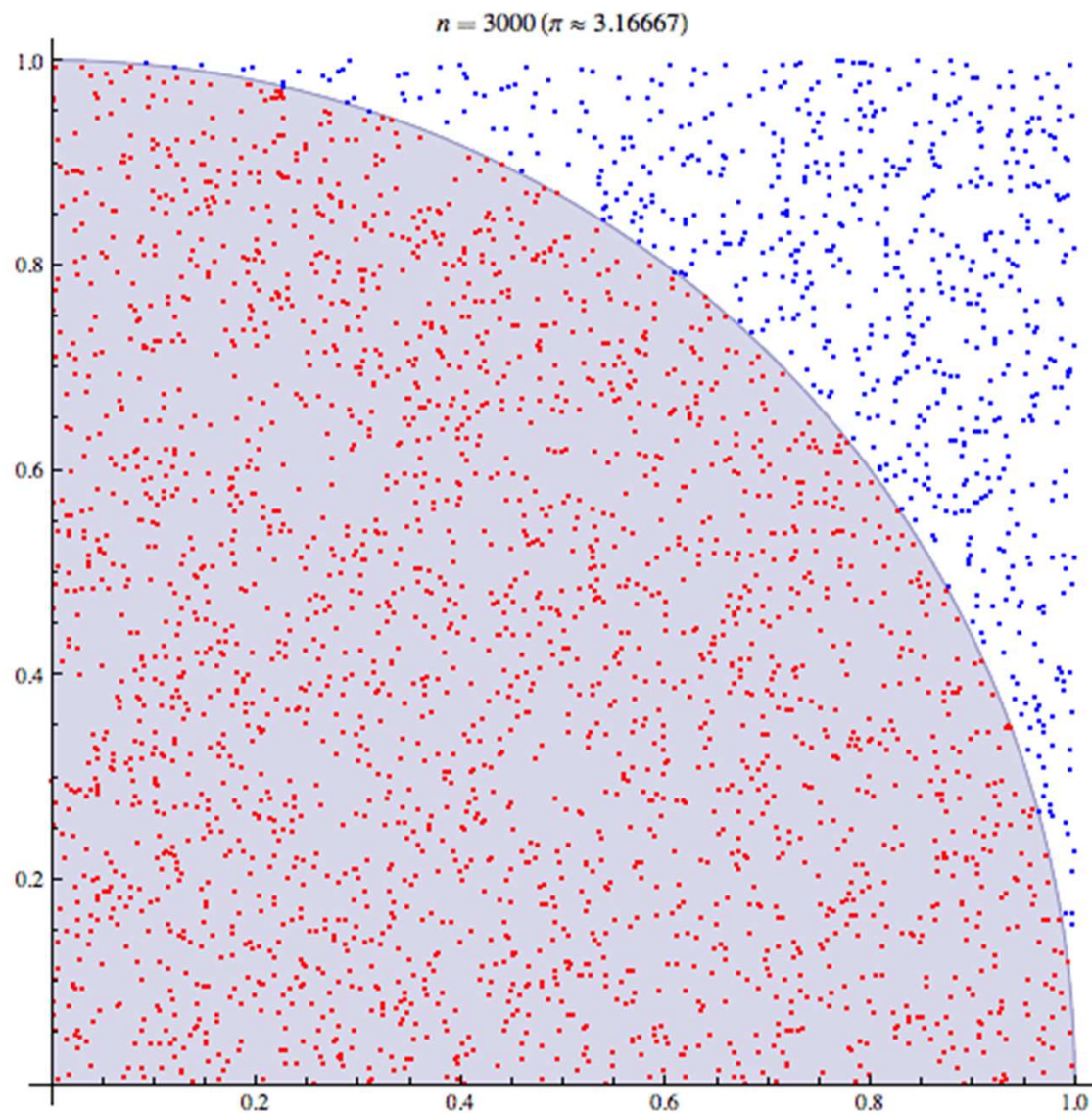
Monte Carlo methods 有多种形式，但关键实现方式如下：

- 确定输入的可能值域范围
- 在输入变量值域范围内按照其概率密度进行随机抽样
- 按照给定的函数进行输出计算
- 对输出结果进行统计



3. 蒙特卡洛法的基本原理

1) 蒙特卡洛法解决的典型问题





3. 蒙特卡洛法的基本原理

2) 蒙特卡洛法解决的基本原理

$$y_k = g(x_k) + V_k$$

$$E[g(x_k)] = \int g(x_k) p(x_k) dx_k$$

完备采样

如果使用 N 个 \mathbf{x} 的样本，是否能够获得 $g(\mathbf{x}_k)$ 的近似数学期望？

$$E[g(x_k)] \approx \bar{y}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_k^{(i)})$$

什么情况下会合理？



如果按照 $p(\mathbf{x}_k)$ 对 $\mathbf{x}_k^{(i)}$ 进行采样，那么 $g(\mathbf{x}_k^{(i)})$ 的出现已经包含了 $\mathbf{x}_k^{(i)}$ 的 $p(\mathbf{x}_k)$ 的概率信息，因此无需再对 $g(\mathbf{x}_k^{(i)})$ 进行概率密度加权。

同理

$$Var(y_k) \approx \frac{\sum_{i=1}^N [g(x_k^{(i)}) - \bar{y}_k][g(x_k^{(i)}) - \bar{y}_k]^T}{N}$$



3. 蒙特卡洛法的基本原理

2) 蒙特卡洛法解决的基本原理

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

已知各自变量的**PDF**为

$$\begin{array}{l} x_1 \text{-----} p_1 \\ x_2 \text{-----} p_2 \\ \vdots \\ x_n \text{-----} p_n \end{array}$$

按照各分量**PDF**随机产生样本

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$E[y] \approx \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{m}$$

$$Var(y) \approx \frac{\sum_{i=1}^m \left[f(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) - \bar{y} \right] \left[f(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) - \bar{y} \right]^T}{m}$$



3. 蒙特卡洛法的基本原理

3) $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ 未知情况下的实现方法(重要性采样原理)

$$E[g(\mathbf{x}_k)] = \int g(\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k$$



$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ 未知无法采样

$$E[g(\mathbf{x}_k)] = \int g(\mathbf{x}_k) \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})} q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k$$

$$= \int g(\mathbf{x}_k) w_k q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k$$



按照 $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ 进行采样

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_k^{(i)}) w_k^{(i)}$$

定义

$\mathbf{y}_{1:k}$ — 测量序列 $y_1 \sim y_k$

Importance Sampling, **IS**

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$$

Importance density function, **IDF**

W中依然包含 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$, 需要进一步处理以便实施。





3. 蒙特卡洛法的基本原理

3) $p(x_k|y_{1:k})$ 未知情况下的实现方法(重要性采样原理)

$$E[g(x_k)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_k^{(i)})$$

依照 $p(x_k|y_k)$ 对 $x_k^{(i)}$ 进行采样，真实的分布特性。

完备采样

$$E[g(x_k)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_k^{(i)}) w_k^{(i)}$$

依照 $q(x_k|y_k)$ 对 $x_k^{(i)}$ 进行采样，非真实分布特性。

重要性采样



不同E的理解

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$$

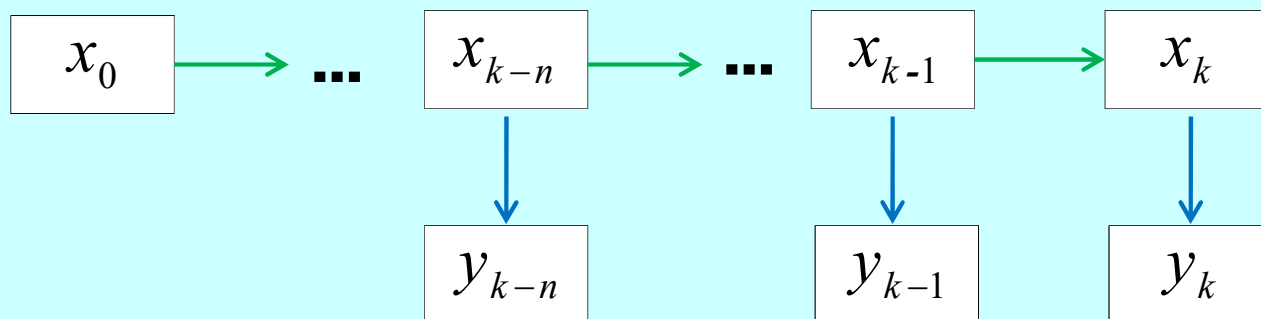
$$E[g(x_k)] = \int g(x_k) p(x_k) dx_k$$



$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$$

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$$

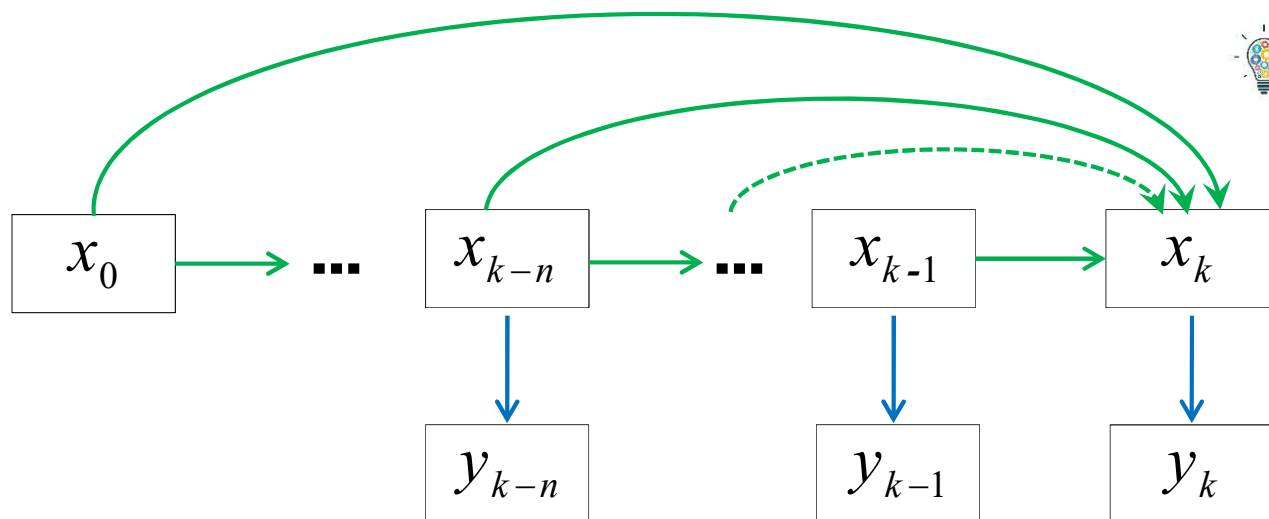
$$E[g(\mathbf{x}_k)] = \int g(\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k$$



$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \dots, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$$

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$$

$$E[g(\mathbf{x}_{0:k})] = \int g(\mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}$$





4. 重要性采样

1) 重要性采样的方式

按概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ 采样是特殊的蒙特卡洛采样方式
更一般的形式是从完整的 $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ 中进行采样。

$$E[g(\mathbf{x}_{0:k})] = \int g(\mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}$$

$$E[g(\mathbf{x}_{0:k})] = \int g(\mathbf{x}_{0:k}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})} q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}$$

$q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ 容易获得
重要性概率密度函数

$$= \int g(\mathbf{x}_{0:k}) \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k})}{p(\mathbf{y}_{1:k}) q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})} q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}$$

$$w_k = \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})} = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}$$

重要性权重

$$= \int g(\mathbf{x}_{0:k}) \frac{w_k}{p(\mathbf{y}_{1:k})} q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k} = \frac{\int g(\mathbf{x}_{0:k}) w_k q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}}{p(\mathbf{y}_{1:k})}$$



提出 $p(\mathbf{y}_{1:k})$



4. 重要性采样

2) 重要性权重的归一化

$$E[g(\mathbf{x}_{0:k})] = \frac{\int g(\mathbf{x}_{0:k}) w_k q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}}{p(\mathbf{y}_{1:k})}$$

$$w_k = \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}$$

$$p(\mathbf{y}_{1:k}) = \int p(\mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{x}_{0:k}) d\mathbf{x}_{0:k}$$

$$= \int \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})} q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}$$

$$= \int w_k q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}$$

$$\bar{w}_k^{(i)} = \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w_k^{(i)}}$$

$$E[g(\mathbf{x}_{0:k})] = \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_k^{(i)}) \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w_k^{(i)}} = \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_k^{(i)}) \bar{w}_k^{(i)}$$

$$E[g(\mathbf{x}_{0:k})] = \frac{\int g(\mathbf{x}_{0:k}) w_k q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}}{\int w_k q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k}}$$

按照 $q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ 选择 $\mathbf{x}_{0:k}$ 的样本

$$w_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)} | \mathbf{y}_{1:k})}$$



$$E[g(\mathbf{x}_{0:k})] \approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) w_k^{(i)}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_k^{(i)}}$$

归一化
处理w



5. 序贯重要性采样(SIS)

1) 序贯重要性采样的处理思想

$$E[g(\mathbf{x}_{0:k})] = \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) \bar{w}_k^{(i)}$$

$$\bar{w}_k^{(i)} = \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w_k^{(i)}}$$

$$w_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) p(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)} | \mathbf{y}_{1:k})} = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)} | \mathbf{y}_{1:k})}$$

如果 $w_k^{(i)}$ 能够实现递推计算，可有效简化处理过程。

当重要性概率密度函数具有递推关系时

Sequential Importance Sampling
SIS

$$q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) = q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) q(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})$$

$w_k^{(i)}$ 可以获得递推解算形式，因此称为序贯重要性采样。



5. 序贯重要性采样(SIS)

2) 重要性权重的计算方法

$$p(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{1:k-1})$$

$$= p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})$$

$$= p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})$$

$$= p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$



$$q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) = q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) q(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k})$$

$$= q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) q(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})$$

$$w_k = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})} = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) q(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})} = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})} w_{k-1}$$



5. 序贯重要性采样(SIS)

3) 重要性密度函数的分析

$$w_k = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})} w_{k-1}$$

马尔科夫过程 无后效性 or 无记忆性

A discrete-time Markov chain is a sequence of random variables X_1, X_2, X_3, \dots with the Markov property, namely that the probability of moving to **the next state depends only on the present state** and not on the previous states

$$\Pr(X_k = x | X_{k-1} = x_{k-1}, X_{k-2} = x_{k-2}, \dots, X_0 = x_0) = \Pr(X_k = x | X_{k-1} = x_{k-1})$$

如果 $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) = q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$, 可以简化计算, 通常粒子滤波都做此假设。

$$w_k = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)} w_{k-1} \xrightarrow{\text{每一个粒子 } i} w_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k)} w_{k-1}^{(i)}$$



5. 序贯重要性采样(SIS)

4) 最优重要性密度函数的选择

$$w_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k)} w_{k-1}^{(i)}$$

重要性密度函数选择依据

重要性密度函数最优值选择的依据是能够最小化重要性权值方差，抑制估计结果过早收敛到非最优解上。

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k)$$

常规重要性密度函数选择 (**Bootstrap Filter, BF**)

$$w_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k)} w_{k-1}^{(i)}$$



$$w_k^{(i)} \propto p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) w_{k-1}^{(i)}$$

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$$



5. 序贯重要性采样(SIS)

$$w_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k)} w_{k-1}^{(i)}$$



$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$$

$$w_k^{(i)} = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) w_{k-1}^{(i)}$$

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)})$$



$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{y}_k \sim (h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, k), R_k)$$

$$\mathbf{y}_k^{(i)} = h(\mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}, k)$$

预测观测

$$\mathbf{y}_k$$

实际观测

归一化处理权重

$$\bar{w}_k^{(i)} = \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w_k^{(i)}}$$



依据蒙特卡洛法思想，得到滤波解

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = E(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k) \approx \sum_{i=1}^N \bar{w}_k^{(i)} \mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}$$

$$P_{k|k} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{w}_k^{(i)} (\mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T$$

6. 重采样及粗糙化

1) 重采样的思想 Resampling

序贯重要采样不能避免粒子退化(**Degeneracy**)问题, 经若干次递推后, 除少数粒子外, 大部分粒子权重小到可以忽略。

重采样的思想: 消除权值较小的粒子, 对权值较大的粒子进行多份复制。
重采样后每个粒子的权重相等。



$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\bar{w}_k^{(i)})^2}$$

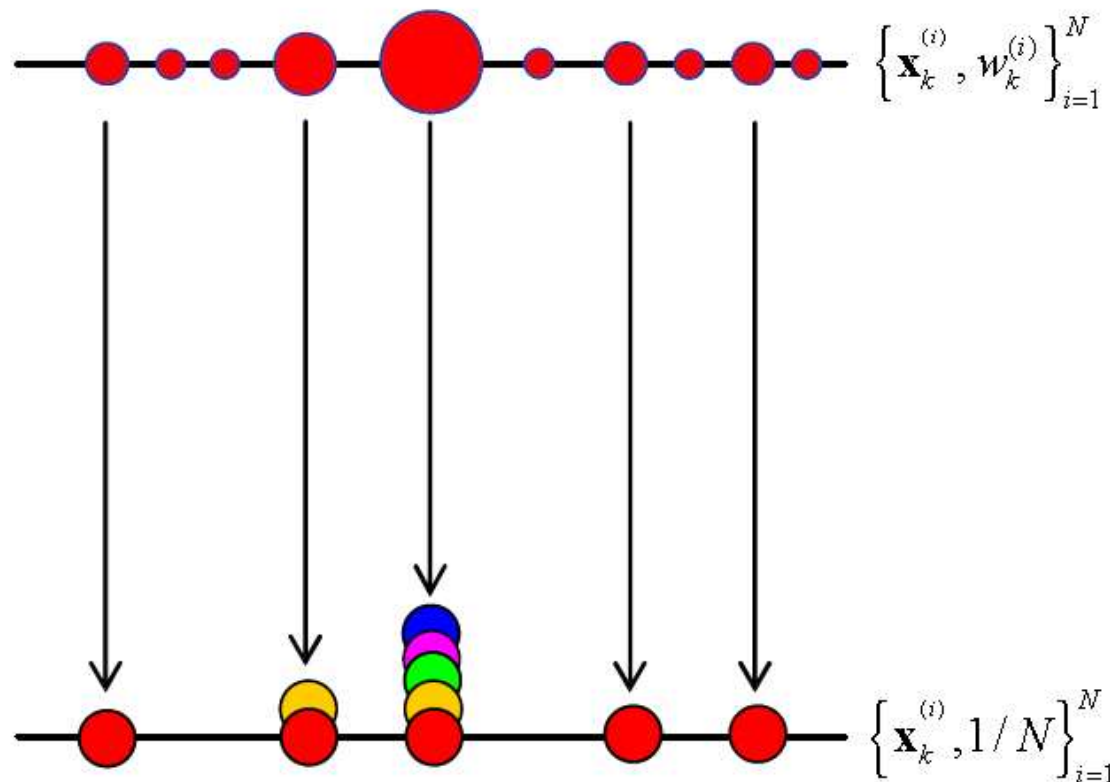
有效采样数量



$$\hat{N}_{eff} \begin{cases} \approx 1 & \text{严重退化} \\ \approx N & \text{权重相同} \end{cases}$$

$$\hat{N}_{eff} \leq N_{threshold}$$

进行重采样
阈值可取为 $2N/3$

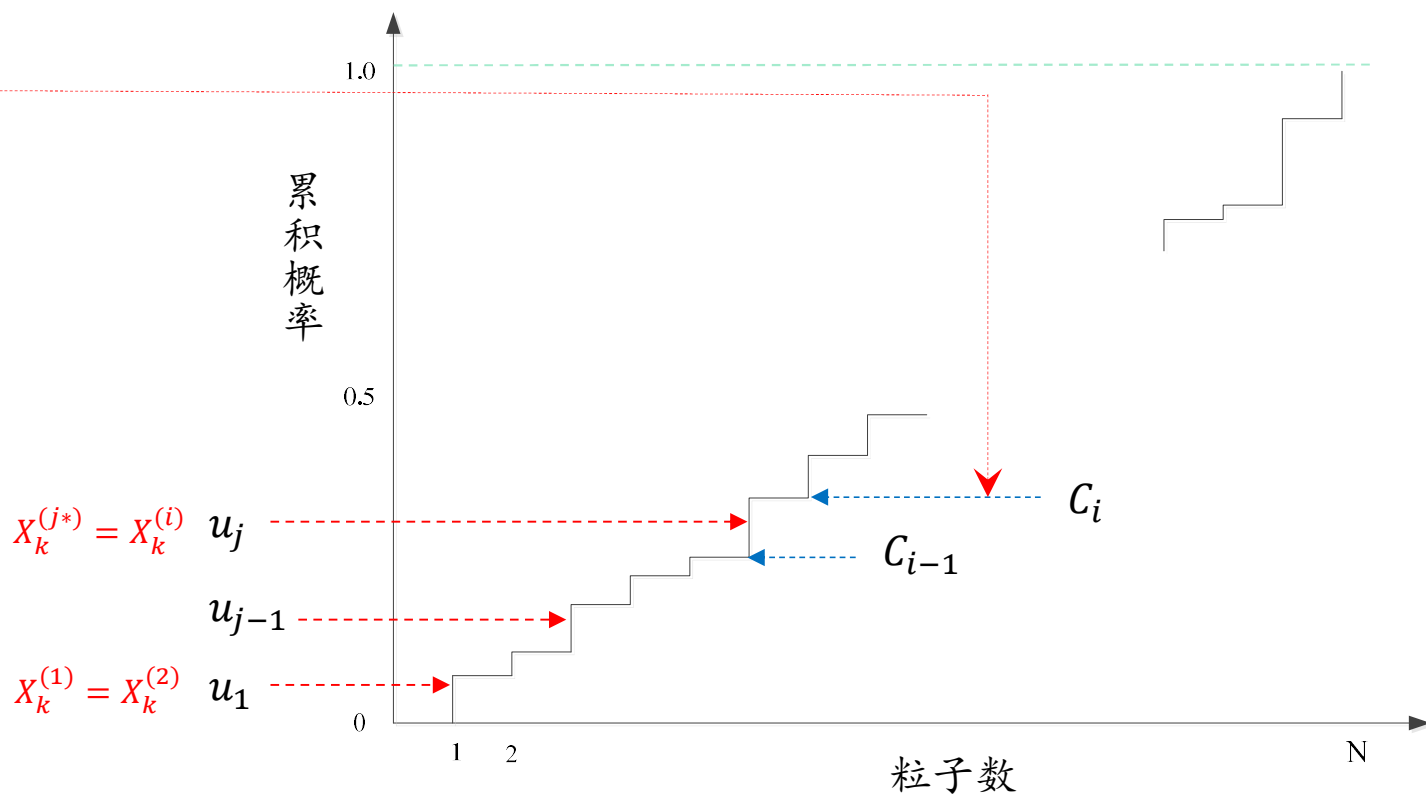




6. 重采样及粗糙化

2) 重采样的实现

```
C1=0  
For i=2:N  
    Ci=Ci-1+wk(i)  
End For  
Start at the bottom of the CDF: i=1  
Draw a starting point: u1~[0,1/N]  
For j=1:N  
    uj = u1 + (j - 1)/N  
    While uj > Ci  
        i=i+1  
    End While  
    Xk(j*) = Xk(i)  
    Xk(j) = Xk(i)  
    wk(j) = 1/N  
End For
```



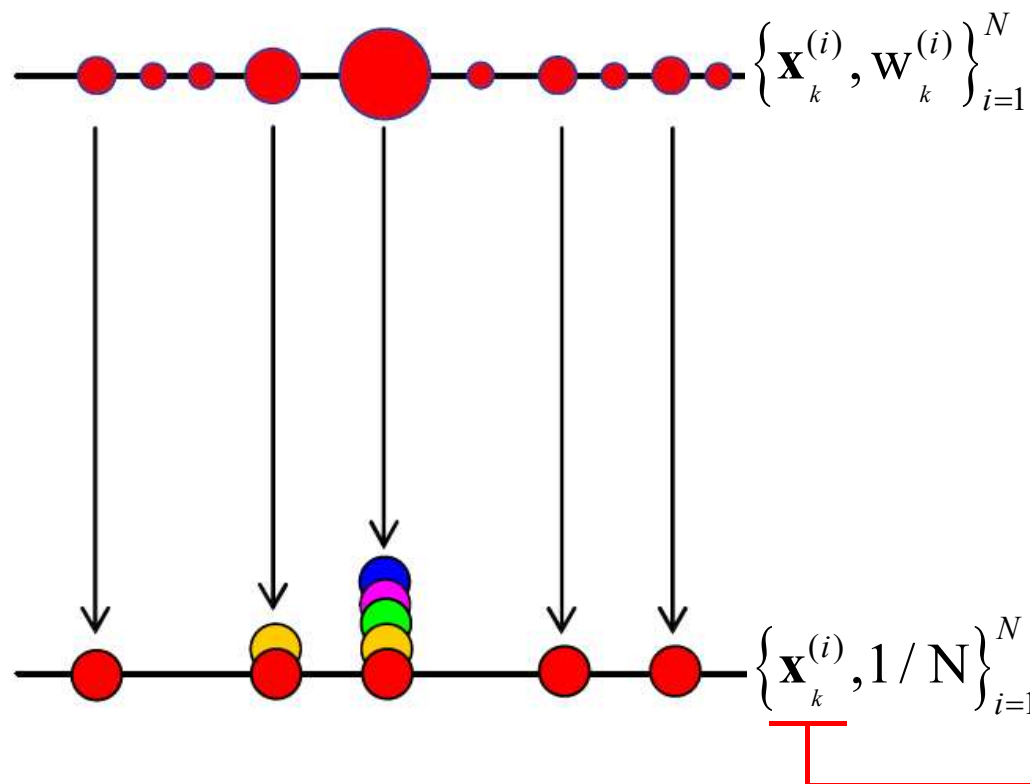
这里给出的仅是重采样方案中的一种



6. 重采样及粗糙化

3) 粗糙化 (Roughening)

为避免粒子退化，重采样后对每一个粒子增加随机噪声。



$$\mathbf{x}_k^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(i)} + \Delta \mathbf{x}_k^{(i)}$$

$$\Delta \mathbf{x}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k^{(i)}(1) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_k^{(i)}(m) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_k^{(i)}(n) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{x}_k^{(i)}(m) \sim \left(0, \underbrace{KM(m)}_{\substack{\text{调节} \\ \text{常数} \\ \text{e.g. 0.2}}} \underbrace{N^{-1/n}}_{\substack{\text{样本数} \\ \text{总维数}}} \right)$$

$$M(m) = \max \left| \mathbf{x}_k^{(i)}(m) - \mathbf{x}_k^{(j)}(m) \right| \quad (m = 1, \dots, n)$$

样本第 **m** 维的最大差值

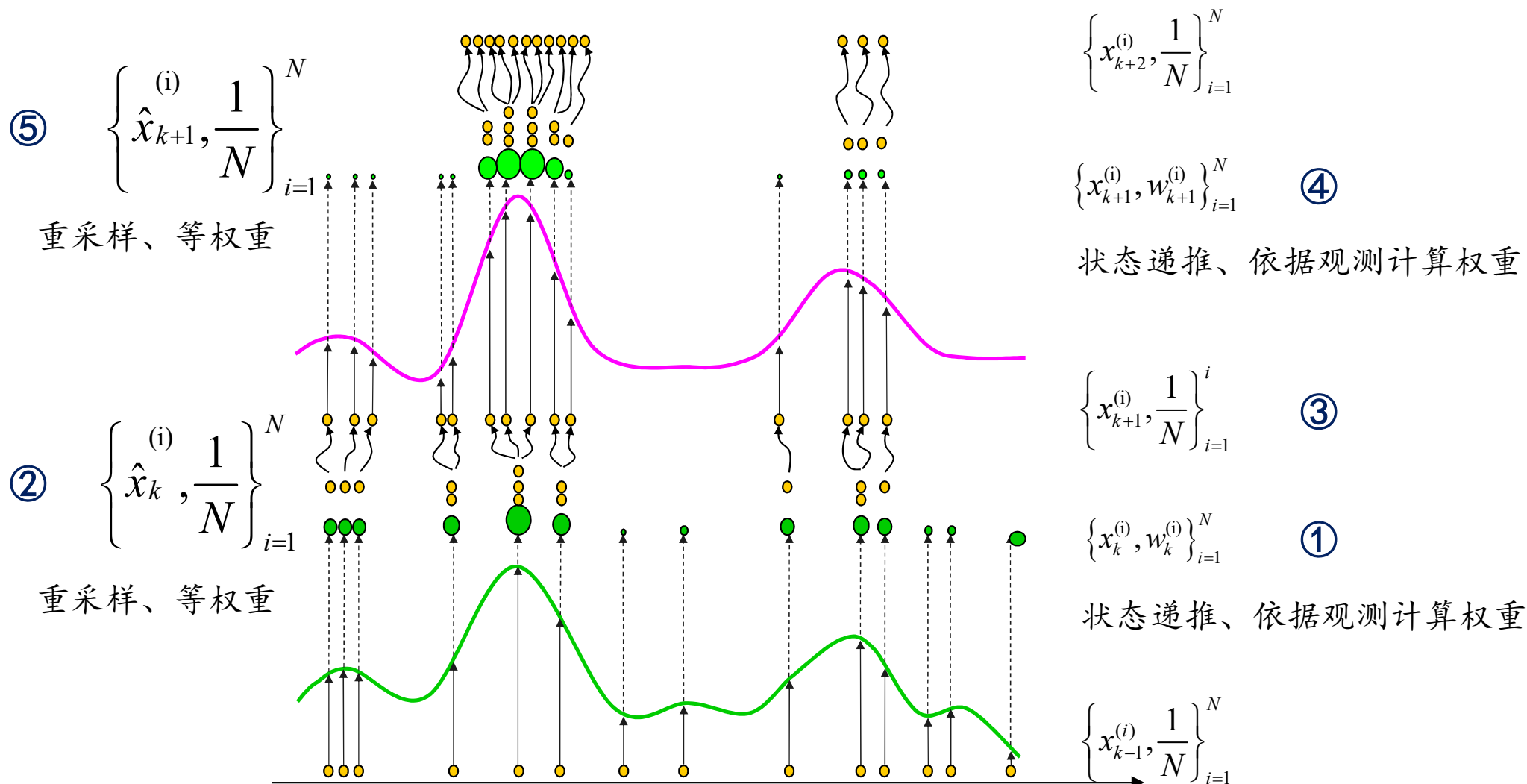




6. 重采样及粗糙化

4) 重采样实现的过程

$$w_k^{(i)} = p(y_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) w_{k-1}^{(i)}$$





7. 粒子滤波的基本过程

非重采样方式

重采样方式 **BF**

预测

$$x_{k|k-1}^{(i)} = f(x_{k-1}^{(i)})$$

$$y_{k|k-1}^{(i)} = g(x_{k|k-1}^{(i)})$$

似然PDF

$$p(y_k | x_{k|k-1}^{(i)}), [y_{k|k-1}^{(i)} - y_k] \sim N(0, R)$$

权重计算

$$w_k^{(i)} = p(y_k | x_k^{(i)}) w_{k-1}^{(i)}$$

权重归一

$$\bar{w}_k^{(i)} = \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w_k^{(i)}}$$

滤波输出

$$\hat{x}_{k|k} = E(x_k | y_k) \approx \sum_{i=1}^N \bar{w}_k^{(i)} x_{k|k-1}^{(i)}$$

$$P_{k|k} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{w}_k^{(i)} (x_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k})(x_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k})^T$$

粒子更新

$$x_{k|k-1}^{(i)} = f(x_{k-1}^{(i)})$$

$$y_{k|k-1}^{(i)} = g(x_{k|k-1}^{(i)})$$

$$p(y_k | x_{k|k-1}^{(i)}), [y_{k|k-1}^{(i)} - y_k] \sim N(0, R)$$

$$w_k^{(i)} = p(y_k | x_k^{(i)}) w_{k-1}^{(i)}$$

$$\bar{w}_k^{(i)} = \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w_k^{(i)}}$$

$$\hat{x}_{k|k} = E(x_k | y_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} x_{k|k-1}^{(i)}$$

$$P_{k|k} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} (x_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k})(x_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k})^T$$

$$x_k^{(i)} \text{重采样, 粗糙化, } w_k^{(i)} = 1 / N$$



7. 粒子滤波的基本过程

MODEL

- **States:**

$$\mathbf{x}_k = [x_k, V_{xk}, y_k, V_{yk}]^T$$

- **Observations:** z_k

- **Noise**

$$\mathbf{u}_k \sim N(0, \sigma_u^2), v_k \sim N(0, \sigma_v^2)$$

- **State equation:**

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\mathbf{u}_k$$

- **Observation equation:**

$$z_k = \text{atan}(y_k / x_k) + v_k$$

ALGORITHM

- **Particle generation**

- Generate M random numbers $\mathbf{u}_k^{(m)} \sim N(0, \sigma_u^2)$
- Particle computation

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(m)} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(m)} + \mathbf{G}\mathbf{u}_k^{(m)}$$

- **Weight computation**

$$w_k^{*(m)} = N(z_k - \text{atan} \frac{y_k^{(m)}}{x_k^{(m)}}, \sigma_v^2)$$

- **Weight normalization**

- **Computation of the estimates**

- **Resampling & Roughening**

$$\left\{ \hat{\mathbf{x}}_k^{(m)}, \frac{1}{M} \right\}_{m=1}^M \sim \left\{ \mathbf{x}_k^{(m)}, w_k^{(m)} \right\}_{m=1}^M$$



7. 粒子滤波的基本过程

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{25x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + 8\cos[1.2(k-1)] + w_k$$

$$y_k = \frac{1}{20}x_{k-1}^2 + v_k$$

