北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

王磊

自动化科学与电气工程学院

第二章 线性映射与矩阵

- 预备知识
- 线性映射
- 矩阵与同构基与坐标
- 特征值与特征向量
- 酉变换与酉矩阵
- 应用：图的矩阵表示(自学)

定义2.1.1（映射）设V和W是两个非空集合，如果存在一个V到W的对应法则f，使得V中每一个元素x都有W中唯一的一个元素y与之对应，则称f是V到W的一个**映射**，记为$y = f(x)$. 元素$y \in W$称为元素$x \in V$在映射f下的**像**，称x为y的**原像**. 集合V称为映射f的**定义域**. 当V中元素改变时，x在映射f下的像的全体作为W的一个子集，称为映射f的**值域**，记为$R(f)$.

定义2.1.2（单射、满射与双射）设V和W是两个非空集合，f是V到W的一个映射.

- 若对任意$x_1, x_2 \in V$，当$x_1 \neq x_2$时有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f是V到W的**单映射**（简称**单射**）；若对任意$y \in W$都有一个元素$x \in V$使得$f(x) = y$（即$R(f) = W$），则称f是V到W的**满映射**（简称**满射**）；
- 若映射f既是单映射又是满映射，则称f是V到W的**一一映射**或**双映射**（简称**双射**）.

定义2.1.3（映射相等） 设f_1是集合V_1到集合W_1的一个映射, f_2是集合V_2到集合W_2的一个映射. 若$V_1 = V_2$, $W_1 = W_2$, 并且对任意$x \in V_1$有$f_1(x) = f_2(x)$, 则称**映射f_1和f_2相等**, 记为$f_1 = f_2$.

定义2.1.4（映射乘积） 设V_1, V_2和V_3是三个非空集合, 并设f_1是V_1到V_2的一个映射, f_2是V_2到V_3的一个映射. 由f_1和f_2确定的V_1到V_3的映射f_3: $x \to f_2(f_1(x))$, $x \in V_1$, 称为**映射f_1和f_2的乘积**, 记为$f_3 = f_2 \cdot f_1$, 或简写为$f_3 = f_2 f_1$.

定义2.1.5（可逆映射）设有映射$f_1: V \to W$, 若存在映射$f_2: W \to V$使得

$$f_2 \cdot f_1 = I_V, f_1 \cdot f_2 = I_W$$

式中, $I_V: x \to x, x \in V$为V上的恒等映射, I_W是W上的恒等映射. 我们称f_2为f_1的**逆映射**, 记为f_1^{-1}. 若映射f_1有逆映射, 则称f_1为**可逆映射**.

定理2.1.1 设映射$f: V \to W$是可逆的, 则f的逆映射f^{-1}是唯一的.

定理2.1.2 设映射$f: V \to W$是可逆映射的充分必要条件是f是双射.

定义2.1.6（变换） 设V是一个非空集合, V到自身的映射称为V的**变换**;V到自身的双射称为V的**一一变换**;若V是有限集, V的一一变换称为V的**置换**.

定义2.1.7（一元多项式） 设F是数域, n是自然数, λ是一个文字（或符号）, 形式表达式

$$g(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

其中$a_i\in F$（$i=0,1,\cdots,n$）, 称为数域F上的**一元多项式**. 如果$a_n\neq 0$, 则称$a_n\lambda^n$为多项式的**首项**, n称为$g(\lambda)$的**次数**, 记为$\deg\big(g(\lambda)\big)=n$, a_n称为$g(\lambda)$的首项系数. 若$a_n=1$, 则称$g(\lambda)$**为首1多项式**.

定理2.1.3 设$g(\lambda)$和$h(\lambda)$是数域F上的多项式且$h(\lambda) \neq 0$, 则存在唯一的多项式$p(\lambda)$和$q(\lambda)$使得

$$g(\lambda) = p(\lambda)h(\lambda) + q(\lambda)$$

式中$q(\lambda) = 0$或$\deg\big(q(\lambda)\big) < \deg\big(h(\lambda)\big)$.

定义2.1.8（多项式整除） 设$g(\lambda)$和$h(\lambda)$是数域F上的多项式, 如果存在多项式$p(\lambda)$使得$g(\lambda) = p(\lambda)h(\lambda)$, 则称多项式$h(\lambda)$**整除**$g(\lambda)$, 记为$h(\lambda)|g(\lambda)$, $h(\lambda)$是$g(\lambda)$的**因式**, $g(\lambda)$是$h(\lambda)$的**倍式**.

定义2.1.9（公因式） 设$g(\lambda)$、$h(\lambda) \in P_n(\lambda)$，若$p(\lambda)$既是$g(\lambda)$的因式, 又是$h(\lambda)$的因式, 则称$p(\lambda)$是$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的**公因式**. 若$d(\lambda)$是$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的公因式, 且$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的任一公因式都是$d(\lambda)$的因式, 则称$d(\lambda)$是$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的一个**最大公因式**.

定义2.1.10（公倍式） 设$g(\lambda)$、$h(\lambda) \in P_n(\lambda)$，若$p(\lambda)$既是 $g(\lambda)$的倍式, 又是$h(\lambda)$的倍式, 则称$p(\lambda)$是$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的**公倍式**.若$d(\lambda)$是$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的公倍式, 且$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的任一公倍式都是$d(\lambda)$的倍式, 则称$d(\lambda)$是$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的一个**最小公倍式**.

定义2.1.11（友矩阵） 设$f(\lambda)$是数域F上的首1多项式，其表达式为

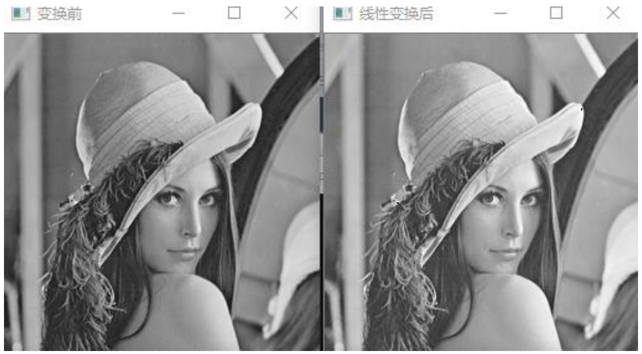
$$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

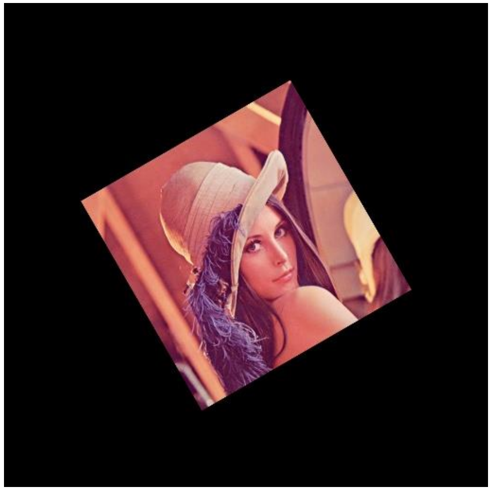
定义n阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \text{或} A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

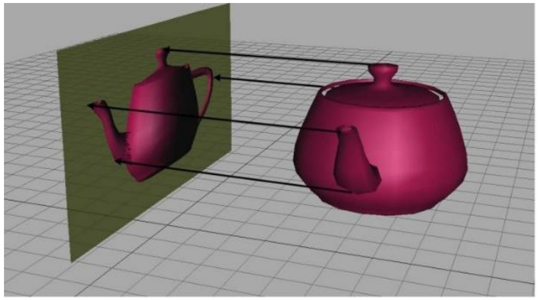
称为多项式$f(\lambda)$的**友矩阵（或伴侣矩阵）**.

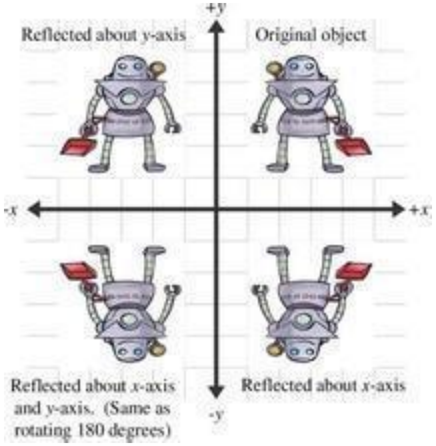
应用实例:灰度图像的线性变换





旋转、缩放、投影、镜像等.





定义2.2.1（**线性映射**）设V和W是数域F上的线性空间, 如果映射$T: V \to W$满足下述性质:

（1）**可加性**: $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y});$$

（2）**齐次性**: $\forall \lambda \in F$, $T(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})$;

称T为V到W的一个**线性映射**. 特别地, 当$V = W$时, 映射T为V到自身的线性映射, 称T为V上的**线性变换**（或**线性算子**）.

例2.2.1 设V是数域F上的线性空间, 定义映射$T: V \to V$, 分别满足

（1）$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}, \forall \boldsymbol{x} \in V$;

（2）$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$;

（3）$T(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$;

则以上三个映射均为线性变换, 分别称为**零变换**、**恒等变换**和**负变换**.

例2.2.2 定义$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\forall \boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$,

（1）$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$, k_1和k_2为正常数;

（2）$T(\boldsymbol{x}) = (x_1, -x_2)$;

（3）$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$, φ为旋转角;

则以上三个映射均为线性变换, 分别称为**平面伸压变换**、**平面反射变换**和**平面旋转变换**, 它们是常见的图形变换.

例2.2.3 在多项式空间$P_n(x)$, 定义$T: P_n \to P_n$满足

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in P_n(x)$$

则映射T是$P_n(x)$上的线性变换, 称为**微分变换**.

例2.2.4 在$C[a,b]$空间, 定义$T: C[a,b] \to C[a,b]$满足

$$T(f(x)) = \int_a^x f(t)dt, \forall f(x) \in C[a,b]$$

则映射T是$C[a,b]$上的线性变换, 称为**积分变换**.

例2.2.5 设W是线性空间V的非平凡子空间, 定义映射T为

$$T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Proj}_W \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$$

则映射T是V上的线性变换, 称为**正交投影变换**.

例2.2.6 设V是数域F上的线性空间, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是$V$的两组基, 定义映射$T:V\to V$为

$$T(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n][x_1,\cdots,x_n]^T,\forall\boldsymbol{x}\in V$$

式中, $[x_1,\cdots,x_n]^T$是向量$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标. 则映射$T$是$V$上的线性变换.

例2.2.7 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性空间$V$的一组基, 定义映射$T$为

$$T(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3)$$
$$=(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

式中, $k_1,k_2,k_3\in F$.

（1）证明映射T是$V\to V$的线性变换.

（2）若$\boldsymbol{\beta}_0=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$, 求$T(\boldsymbol{\beta}_0)$.

例2.2.8 线性空间$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$（定义在其自身的线性空间）中, 定义映射T为

$$T(x+y\sqrt{3})=x, \forall x,y\in\mathbb{Q}$$

则映射T不是线性变换. 这是因为

$$T(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})=3\neq\sqrt{3}T(\sqrt{3}).$$

思考: $\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 定义映射$T:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{n\times m}$使得

$$T(A)=A^T$$

问: 映射T是线性映射吗？

思考: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 定义映射$T: \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$使得

$$T(A) = A^T$$

问: 映射T是线性映射吗？

定理2.2.1 设T是数域F上线性空间V到W的线性映射，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$的一组向量，$k_1,\cdots,k_p \in F$，则

$$T\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_p\boldsymbol{\alpha}_p\right)=k_1T(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_pT\left(\boldsymbol{\alpha}_p\right)$$

推论2.2.1 设T是线性空间V到W的线性映射, 则

（1）$T(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\theta}'$, $\boldsymbol{\theta}\in V$, $\boldsymbol{\theta}'\in W$;

（2）$T(-\boldsymbol{x})=-T(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x}\in V$;

（3）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$中一组线性相关向量, 则$T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_p)$是$W$中一组线性相关向量;

（4）若$T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_p)$是$W$的一组线性无关向量, 则$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$中一组线性无关向量.

思考: 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$中线性无关向量组, 则$T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_p)$在什么条件下也线性无关?

注1: 推论2.2.1性质（1）的几何意义是**线性映射必须保持原点不动**. 因此解析几何中常见的平移变换一般不是线性变换.

定理2.2.2 设T是数域F上线性空间V到W的线性映射, 当且仅当T是单射时, V中线性无关向量组的像是W中线性无关向量组.

推论2.2.2 设线性空间V和W的维数相同, 且T是线性空间V到W的线性映射, 当且仅当T是单射时, V中一组基的像是W中一组基. 此时映射T是双射.

定义2.2.2（线性映射的加法运算）设$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, 定义$T_1$与$T_2$的和$T_1 + T_2$为

$$(T_1 + T_2)(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in V$$

式中,等式右端的“+”表示线性空间W的加法运算.

定义2.2.3（线性映射的数乘运算）设$T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\lambda \in F$, 定义λ与T的数乘$\lambda \cdot T$为

$$(\lambda T)(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot T(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in V$$

式中, 等式右端的“·”表示线性空间W的数乘运算, 常省略.

定理2.2.3 集合$\mathcal{L}(V,W)$对定义2.2.2的加法和定义2.2.3的数乘构成数域F上的线性空间, 称为**线性映射空间**. 特别地, $\mathcal{L}(V)$称为**线性变换空间**.

思考: 线性空间$\mathcal{L}(V,W)$的维数是多少？

定理2.2.4（线性映射值空间和**核空间）**设$T \in \mathcal{L}(V,W)$, 定义

$$N(T)=\{\boldsymbol{x}\in V|T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\theta}\}$$

$$R(T)=\{\boldsymbol{y}\in W|\boldsymbol{y}=T(\boldsymbol{x}),\forall \boldsymbol{x}\in V\}$$

则$N(T)$是V的子空间, $R(T)$是W的子空间. 我们称$N(T)$是线性映射T的**核空间**（或**零空间**），$R(T)$是线性映射T的**像空间**（或**值空间**）；并称$\dim N(T)$为T的**零度**（或**亏**），$\dim R(T)$为T的**秩**.

定理2.2.5（亏加秩定理）设$T \in L(V,W)$, 则

$$\dim N(T) + \dim R(T) = \dim V$$

即线性映射T的亏加秩等于其定义域V空间的维数.

Extremely Important

定义2.3.1（**矩阵**）设V和W是数域F上的线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$分别是$V$和$W$的基，且$T\in\mathcal{L}(V,W)$.

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{11}\boldsymbol{\eta}_1+a_{21}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{\eta}_m \\ T(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=a_{12}\boldsymbol{\eta}_1+a_{22}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{\eta}_m \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\eta}_1+a_{2n}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\eta}_m \end{cases}$$

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\triangleq[T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)]=[\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m]A$$

A称为T在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的**矩阵**.

若$V = W$, 则有

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) \triangleq [T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]\, A$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in F^{n\times n}$$

矩阵A称为线性变换T在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$下的**矩阵**.

例2.3.1 定义平面旋转变换$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 满足

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

取定$\mathbb{R}^2$中的标准基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, 则有

例2.3.1 定义平面旋转变换$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 满足

$$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$$

取定$\mathbb{R}^2$中的标准基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$, 则有

$$T(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

例2.3.2 在多项式空间$P_n(x)$中, 定义微分变换

$T: P_n \to P_n$

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in P_n(x)$$

取定$P_n(x)$的一组基$1, x, x^2, \cdots, x^n$, 则有

例2.3.2 在多项式空间$P_n(x)$中, 定义微分变换

$T: P_n \to P_n$:

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in P_n(x)$$

取定$P_n(x)$的一组基$1, x, x^2, \cdots, x^n$, 则有

$$T(x^n) = nx^{n-1} = [1, x, x^2, \cdots, x^n][0,0, \cdots, n, 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

例2.3.3 设V是数域F上的线性空间, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是$V$的两组基, 定义线性变换$T: V\to V$为

$$T(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n][x_1,\cdots,x_n]^T,\forall\boldsymbol{x}\in V$$

式中, $[x_1,\cdots,x_n]^T$是$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标. 求$T$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵.

定理2.3.1 设V和W是数域F上的线性空间, 取定$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$分别是$V$和$W$的一组基. 任取$A=\left(a_{ij}\right)\in F^{m\times n}$, 则有且仅有一个线性映射$T\in\mathcal{L}(V,W)$使其在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵恰为$A$.

定义2.3.2（**同构映射**）设V和W是数域F上的线性空间，若存在双射$f: V \to W$满足

（1）$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$;

（2）$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$,

式中，$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$是V中任意向量，λ是数域F的任意数，则称f是V到W的**同构映射**，并称线性空间V与W**同构**.

定理2.3.2 设V和W是数域F上的线性空间，它们维数分别为n和m，则线性映射空间$\mathcal{L}(V,W)$和矩阵空间$F^{m\times n}$同构.

命题2.3.1（**同构映射的性质**）设V和W是数域F上的线性空间, $T: V \to W$是同构映射, 则

（1）$T(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}'$, $\boldsymbol{\theta} \in V$, $\boldsymbol{\theta}' \in W$;

（2）$T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$;

（3）$T(\sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i) = \sum \alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$, $\forall \alpha_i \in F$和$\boldsymbol{x}_i \in V$;

（4）V的向量组$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$线性相关当且仅当其像$T(\boldsymbol{x}_1), \cdots, T(\boldsymbol{x}_r)$线性相关;

（5）若$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$是$V$的一组基, 则$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$是$W$的一组基;

（6）T的逆映射$T^{-1}: W \to V$存在且是同构映射.

定理2.3.3 线性空间同构当且仅当它们的维数相等.

定理2.3.3 线性空间同构当且仅当它们的维数相等.

推论2.3.1 任一实（复）n维线性空间均与$\mathbb{R}^n$（$\mathbb{C}^n$）同构.

推论2.3.2 设V和W是数域F上的线性空间, 它们维数分别为n和m, 则

$$\dim\big(L(V,W)\big) = \dim(F^{m\times n}) = mn$$

推论2.3.3 设V是数域$\mathbb{R}$（或$\mathbb{C}$）上的n维线性空间, 则线性变换空间$L(V)$与$\mathbb{R}^{n\times n}$（或$\mathbb{C}^{n\times n}$）同构.

定理2.3.4 设映射T是n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射, T在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$A$. 对任意向量$\boldsymbol{x}\in V$, 有

$$\boldsymbol{\beta}=A\boldsymbol{\alpha}$$

式中, $\boldsymbol{\beta}\in F^m$和$\boldsymbol{\alpha}\in F^n$分别是像$T(\boldsymbol{x})$和原像$\boldsymbol{x}$在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的坐标.

$P_3(x)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P_2(x)$

$$
\begin{tikzcd}
a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \arrow[r, "p(x) \longrightarrow T(p(x))"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{同构映射}"'] & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \arrow[d, leftrightarrow, "\text{同构映射}"] \\
{[a_0, a_1, a_2, a_3]^T} \arrow[r, "\boldsymbol{\beta} = A\boldsymbol{\alpha}"] & {[a_1, 2a_2, 3a_3]^T}
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{R}^4$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3$

定理2.3.5 设V和W是数域F上的n维和m维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$是$V$的两组基，由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$的过渡矩阵为$Q$;$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$和$\boldsymbol{\eta}_1',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$是$W$的两组基，由$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$到$\boldsymbol{\eta}_1',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$的过渡矩阵为$P$;设线性映射$T\in\mathcal{L}(V,W)$在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$A$，$T$在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$下的矩阵为$B$，则

$$B = P^{-1}AQ$$

注1: 矩阵$A \in F^{m\times n}$经过有限次初等变换变成矩阵B, 则称**矩阵A与B相抵（或等价）**，记为$A \cong B$. 上式表明**线性映射在不同基下的矩阵是相抵的**;

推论2.3.4 设V是数域F上的n维线性空间, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\varepsilon}_1', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$是$V$的两组基, 由$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$到$\boldsymbol{\varepsilon}_1', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$的过渡矩阵为$P$, 线性变换$T \in \mathcal{L}(V)$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$和基$\boldsymbol{\varepsilon}_1', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$下的矩阵分别为$A$和$B$, 则

$$B = P^{-1}AP$$

注2: **相似矩阵反映的是同一个线性变换**.

定理2.3.6 设V和W是数域F上的n维和m维线性空间, 若$T \in L(V,W)$在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$A$, 则

（1）$\dim N(T)=\dim N(A)$;

（2）$\dim R(T)=\dim R(A)=\operatorname{rank}(A)$;

（3）$\dim N(A)+\dim R(A)=n$.（亏加秩）

例2.3.5 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n}+a_{n-1}u_{k+n-1}+\cdots+a_1u_{k+1}+a_0u_k=0$$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 求方程解空间的维数.

定义2.4.1（**线性变换的特征值**和**特征向量**）设线性变换$T \in L(V)$，若存在$\lambda_0 \in F$及V的非零向量ξ使得$T\xi = \lambda_0\xi$，则称λ_0是T的一个**特征值**，称ξ为T的属于特征值λ_0的一个**特征向量**.

定义2.4.1（**线性变换的特征值**和**特征向量**）设线性变换$T \in L(V)$，若存在$\lambda_0 \in F$及V的非零向量ξ使得$T(\xi) = \lambda_0 \xi$, 则称λ_0是T的一个**特征值**, 称ξ为T的属于特征值λ_0的一个**特征向量**.

例2.4.1 设V是数域F上的n维线性空间，定义恒等变换$T_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$和零变换$T_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}$，$\forall \boldsymbol{x} \in V$，则$V$的任意非零向量$\xi$都是$T_1$的属于特征值$\lambda_0 = 1$的特征向量和$T_2$的属于特征值$\lambda_0 = 0$的特征向量.

注1: 从几何角度看，**特征向量在线性变换作用下保持共线**, 即在同一直线上（有可能反向）.

注2: 设ξ是T的属于特征值λ_0的一个特征向量，则$k\xi$也是T的属于特征值λ_0的特征向量, 其中$k \in F$且$k \neq 0$.

注3: 若$\xi \in N(T)$且$\xi \neq \boldsymbol{\theta}$, 则$\xi$是属于0的特征向量.

注4: 设$T \in L(V)$, $\xi_1,\cdots,\xi_n$是V的一组基, 且$T\xi_i = \lambda_i\xi_i$（$i = 1,\cdots,n$）, 则T在基$\xi_1,\cdots,\xi_n$下的矩阵为对角阵.

定义2.4.2（**矩阵特征值**和**特征向量**）设$A \in F^{n\times n}$，λ为一文字，矩阵$\lambda I - A$称为A的**特征矩阵**，其行列式$|\lambda I - A|$称为A的**特征多项式**，方程$|\lambda I - A| = 0$的根称为A的**特征值**（或**特征根**）．方程$(\lambda I - A)\boldsymbol{\alpha} = 0$的非零解向量$\boldsymbol{\alpha}$称为属于特征值$\lambda$的**特征向量**.

注5: λ是线性变换T的特征值当且仅当λ是A的特征值;向量ξ是线性变换T的特征向量当且仅当$\boldsymbol{\alpha}$是A的特征向量，其中$\xi = [\xi_1, \cdots, \xi_n]\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}$是$\xi$在线性空间$V$的基$\xi_1, \cdots, \xi_n$下的坐标.

例2.4.2 设$T \in L(\mathbb{R}^3)$，它在基ξ_1, ξ_2, ξ_3下的矩阵A为

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

求T的全部特征值和特征向量.

思考: 矩阵$A \in F^{n\times n}$有n个特征值吗？

思考: 矩阵$A \in F^{n\times n}$有n个特征值吗?

例2.4.3 考查矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 其特征多项式为

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

若$F = \mathbb{C}$, 则矩阵A有两个特征值, 分别为$\pm \mathrm{i}$;若$F = \mathbb{R}$, 则方程$\lambda^2 + 1 = 0$无实根, 即矩阵A在数域$\mathbb{R}$上无特征值.

因此, **矩阵的特征值依赖于V所在的数域F**.

定理2.4.1 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$的特征值, 则

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A)$$

式中, $\mathrm{tr}(A)$称为矩阵A的**迹**.

例2.4.4 设λ是可逆复方阵A的特征值，试证明

（1）λ^{-1}是A^{-1}的特征值;

（2）$\lambda^{-1}|A|$是A^*的特征值.

定义2.4.3（**特征子空间**）设λ是矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的一个特征值，定义集合

$$E(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

则$E(\lambda)$是$\mathbb{C}^n$的线性子空间，称为属于特征值λ的**特征子空间**，$\dim(E(\lambda))$为特征值λ的**几何重数**.

注6: 特征子空间$E(\lambda)$也是齐次线性方程组$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$的解空间, 还是矩阵$(\lambda I - A)$的零空间.

注7: 由一元n次多项式方程在复数域内有且仅有n个根知, n阶矩阵A在复数域内必有n个特征值, 记为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 其中$\lambda_i$作为特征方程根的重数, 称为$\lambda_i$的**代数重数**.

例2.4.5 求如下矩阵特征值的代数重数和几何重数

$$J_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},J_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},J_3=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

定理2.4.2 复方阵的任一特征值的几何重数不超过它的代数重数.

命题2.4.1 若n阶方阵A与B相似, 则

（1）A与B有相同的特征多项式与特征值;

（2）A与B有相同的秩与行列式;

（3）A与B有相同的迹.

注8: 线性变换的矩阵的特征多项式与基的选取无关, 它直接由线性变换决定, 故可称之为线性变换的特征多项式.

定理2.4.4 矩阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关.

注9: 形如D的矩阵称为Vardermonde矩阵，它的行列式称为Vardermonde行列式.

定义2.5.1（**正交变换**和**酉变换**）若欧氏（酉）空间中的线性变换T保持向量的内积不变，即对V的任意向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$有

$$(T(\boldsymbol{x}),T(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

则称T为**正交（酉）变换**.

定义2.5.2（**正交矩阵**和**酉矩阵**）若n阶实方阵A满足$A^TA=I$或$AA^T=I$，则称A为**正交矩阵**；若n阶复方阵A满足$A^HA=I$或$AA^H=I$，则称A为**酉矩阵**.

定理2.5.1 设V是n维欧氏（酉）空间，$T \in L(V)$，则以下命题等价:

（1）T是正交（酉）变换;

（2）T保持长度不变，即$\|T(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$;

（3）若$\xi_1, \cdots, \xi_n$是V中一组标准正交基，则$T(\xi_1), \cdots, T(\xi_n)$也是$V$中一组标准正交基;

（4）T在V的任一标准正交基下的矩阵A为正交（酉）矩阵.

1.3 线性变换与矩阵——正交变换

思考：正交矩阵A的特征值一定是± 1吗？

1.3 线性变换与矩阵——正交变换

思考：正交矩阵A的特征值一定是± 1吗？

注: 正交阵的特征值是模为1的复数.

例如: $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, 其特征值为$-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1$

命题2.5.1 正交（酉）矩阵A满足如下性质:

（1）正交矩阵的行列式必为± 1，酉矩阵的行列式的模值为1;

（2）$A^{-1}=A^{H}$均为正交（酉）矩阵;

（3）正交（酉）矩阵的乘积仍为正交（酉）阵;

（4）A的所有特征值的模值为1.

定理2.5.2 矩阵A是n阶正交（酉）矩阵当且仅当矩阵A的n个列（行）向量构成n维欧氏（酉）空间的一组标准正交基.

例2.5.1 平面旋转变换$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\forall \boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$，满足$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，$\varphi$为旋转角（逆时针取正）. T在标准基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

由于A是正交矩阵, 故T是正交变换. 在一般的n维欧氏空间中, 定义

$$T(i,j)=(t_{kl}(i,j))_{n\times n}$$

$$=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & \\
& & & \cos\varphi & 0 & \cdots & 0 & \sin\varphi & & \\
& & & 0 & 1 & & & 0 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
& & & 0 & & & 1 & 0 & & \\
& & & -\sin\varphi & 0 & \cdots & 0 & \cos\varphi & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

式中，$t_{ii}(i,j) = t_{jj}(i,j) = \cos\varphi$，$t_{ij}(i,j) = \sin\varphi$，$t_{ji}(i,j) = -\sin\varphi$，且对于任意$k \neq i,j$和$l \neq i,j$，$t_{kl}(i,j) = 0$．我们将矩阵$T(i,j)$称为**Givens矩阵**（或**初等旋转矩阵**）．

命题2.5.2 设Givens矩阵$T(i,j)\in\mathbb{R}^{n\times n}$，则以下命题成立:

（1）$T(i,j)$是正交矩阵且$\left(T(i,j)\right)^{-1}=\left(T(i,j)\right)^{T}$;

（2）设$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$,

若$\boldsymbol{y}=T(i,j)\boldsymbol{x}=[y_1,\cdots,y_n]^T$, 则

$$y_k=x_k, k\neq i$$

$$y_i=\cos\varphi\, x_i+\sin\varphi\, x_j$$

$$y_j=-\sin\varphi\, x_i+\cos\varphi\, x_j$$

注1: 命题2.5.2性质（2）表明若$x_i^2+x_j^2\neq 0$, 定义

$$\cos\varphi=\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}},\sin\varphi=\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}$$

则$y_i=\sqrt{x_i^2+x_j^2},\ y_j=0$. 此时, 若定义$\boldsymbol{y}=T(1,j)\boldsymbol{x}$,

则向量$\boldsymbol{y}$的第1个分量为$\sqrt{x_1^2+x_j^2}$, 第j个分量为0. 进一步, 必存在着有限个Givens矩阵的乘积, 记为T使得$T\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$.

例2.5.2 设$\boldsymbol{x}=[0,1,1]^T$, 取Givens矩阵

$$T(1,2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, T(1,2)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

再取Givens矩阵

$$T(1,3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

定义$T=T(1,3)T(1,2)$得

$$T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

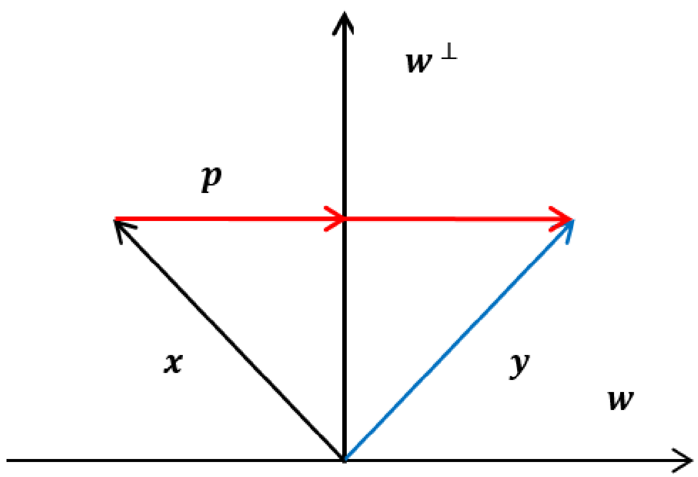
则有$T\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$.

定义2.5.3（Householder矩阵）设$\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$是单位向量, 定义矩阵

$$H(\boldsymbol{w}) = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^H$$

称为**Householder矩阵**（或**初等反射矩阵**）.

例 2.5.3 设 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ 是给定单位向量，定义映射 $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$，其中，$\boldsymbol{y}$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 关于空间 $W^{\perp}$ 的对称向量，$W = \mathrm{span}(\boldsymbol{w})$. 如下图所示



$$\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{p}=\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}=\mathrm{Proj}_{W^{\perp}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\boldsymbol{w}$$

由此, 解得

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{H}\boldsymbol{x}=H(\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}$$

式中, $H(\boldsymbol{w})$是Householder矩阵.

命题2.5.3 Householder矩阵$H(\boldsymbol{w})$具有以下性质:

（1）$|H(\boldsymbol{w})| = -1$;

（2）$\left(H(\boldsymbol{w})\right)^H = H(\boldsymbol{w}) = \left(H(\boldsymbol{w})\right)^{-1}$;

（3）设$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$且$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$，则存在单位向量$\boldsymbol{w}$使得$H(\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$的充分必要条件是

$$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^H\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}$$

并且若上述条件成立，则使$H(\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$成立的单位向量$\boldsymbol{e}$可取为$\boldsymbol{w} = \frac{e^{i\theta}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$，其中$\theta$为任一实数.

例2.5.4 设$\boldsymbol{x}=[0,1,1]^T$, 取$\boldsymbol{y}=\left[\sqrt{2},0,0\right]^T$, 并定义

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

有Householder矩阵

$$H(\boldsymbol{w}) = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则$H(\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$. 该结果与例2.5.2相同.

思考：给定实方阵A，是否有限个Givens矩阵或Householder矩阵的乘积，记为T使得TA变成如下形式

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中，$*$为任意实数，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是矩阵$A$的$n$个特征值.