北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

现代控制理论

王陈亮

北京航空航天大学
自动化科学与电气工程学院

4.2.1 问题描述

考虑如下非线性系统：

$$\dot{x} = Ax + \varphi(y)a + \bar{b}\eta(y)N(u), y = x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{n-1} & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n} \tag{4.2.1}$$

其中$x = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$、$u \in \mathbb{R}$和$y \in \mathbb{R}$为系统的状态、输入和输出，$\varphi(y) \in \mathbb{R}^{n\times q}$和$\eta(y) \in \mathbb{R}$为已知光滑函数，$a \in \mathbb{R}^q$和$b = [b_m, \cdots, b_0]^T \in \mathbb{R}^{m+1}$为未知常量，$b_m \neq 0$，$N(u)$代表间隙或回滞非线性。

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

- 间隙模型(如齿轮传动)

$$N\big(u(t)\big)=\begin{cases} h(u(t)-r_1), \text{若 } u(t)>u(t^-) \text{ 且 } N\big(u(t^-)\big)=h(u(t^-)-r_1) \\ h(u(t)-r_2), \text{若 } u(t)<u(t^-) \text{ 且 } N\big(u(t^-)\big)=h(u(t^-)-r_2) \\ N\big(u(t^-)\big), \text{其它} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

其中$h>0$、$r_1>0$和 $r_2<0$为常数，$u(t^-)=\lim\limits_{\Delta t\to 0^-}u(t+\Delta t)$。

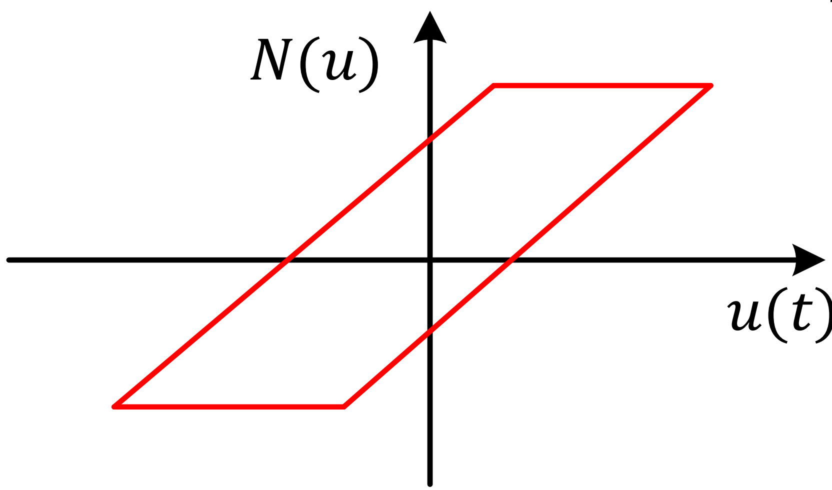

图 4.2.1 间隙非线性

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

- 回滞模型(如超磁致伸缩驱动器，Bouc-Wen模型)

$$N(u) = hu + r_1 f \tag{4.2.3}$$

其中$h > 0$ 和 $r_1 > 0$为常量，f满足

$$\dot{f} = \dot{u} - r_2|\dot{u}||f|^{r_3-1}f + r_4\dot{u}|f|^{r_3}, f(0) = 0 \tag{4.2.4}$$

其中r_2 、r_3 、r_4为常量，满足$r_2 > |r_4|$、$r_3 > 1$ 。在图4.2.2中$h = 3$，$r_1 = 5$ ，$r_2 = 1$ ，$r_3 = 2$ ，$r_4 = 0.5$ ，$f(0) = 0$，$u(t) = 3\mathrm{sin}t$。

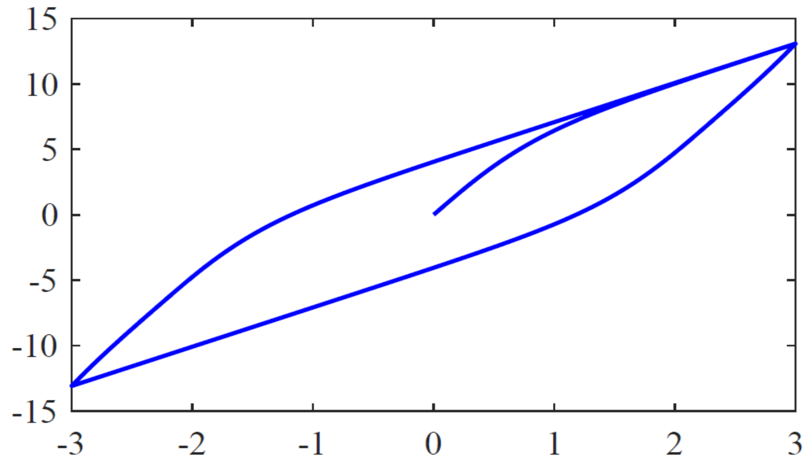

图 4.2.2 回滞非线性

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

针对 (4.2.4)，定义 $V_f=\frac{1}{2}f^2$，可得 $\dot{V}_f=f\dot{u}[1-(\mathrm{sign}(\dot{u})\mathrm{sign}(f)r_2+r_4)|f|^{r_3}]$。由 $r_2>|r_4|$，$r_3>1$，可知当 $|f|\geq\sqrt[r_3]{\frac{1}{r_2+r_4}}$ 时 $\dot{V}_f\leq 0$。再利用 $f(0)=0$，可知$\forall t\geq 0$, $|f(t)|\leq\sqrt[r_3]{\frac{1}{r_2+r_4}}$。

对于间隙模型(4.2.2)，令$\Delta(t)=N\big(u(t)\big)-hu(t)$；对于回滞模型(4.2.3)，令$\Delta(t)=r_1f(t)$，则式(4.2.2)和(4.2.3)可统一写成

$$N(u)=hu+\Delta \tag{4.2.5}$$

其中 Δ 有界。

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

□ 控制目的

在仅有输出 y 可测量的条件下，设计控制信号 u 使得

- 闭环系统内所有信号有界；
- 被控对象输出$y(t)$跟踪给定的期望轨迹$y_d(t)$ 。

□ 基本假设

- 假设1： b_m的符号已知。
- 假设2：$B(s)=b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0$为Hurwitz多项式。
- 假设3：$\eta(y)\ \neq 0$，$\forall\ y\in\mathbb{R}$ 。
- 假设4：$y_d(t)$及其前ρ阶导数已知且有界，其中$\rho:=n-m$。

4.2.2 高增益K滤波器

选取参数 $k_i > 0 (i = 1, \cdots, n)$使得 $s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n$ 为Hurwitz多项式，令

$$K_\mu = [\mu k_1, \cdots, \mu^n k_n]^T, \quad K = [k_1, \cdots, k_n]^T$$

$$A_\mu = A - K_\mu E_1^T, \quad A_0 = A - K E_1^T$$

其中$\mu \geq 1$为设计参数，E_i 表示 $\mathbb{R}^n$中的第i个坐标向量。高增益K滤波器构造如下：

$$\dot{\xi} = A_\mu \xi + K_\mu y \tag{4.2.6}$$

$$\dot{\Xi} = A_\mu \Xi + \varphi(y) \tag{4.2.7}$$

$$\dot{\lambda} = A_\mu \lambda + E_n \eta(y) u \tag{4.2.8}$$

引入信号$v_j = A_\mu^j \lambda (j = 0, \ldots, m)$，其导数满足

$$\dot{v}_j = A_\mu v_j + E_{n-j} \eta(y) u \tag{4.2.9}$$

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

x的估计值可表示为

$$\hat{x} = \xi + \Xi a + \sum_{j=0}^{m} h b_j v_j \tag{4.2.10}$$

定义$\tilde{x} = x - \hat{x}$，可以证明：

$$\dot{\tilde{x}} = A_\mu \tilde{x} + \bar{b}\Delta(t)\eta(y) \tag{4.2.11}$$

引入变换

$$\varepsilon = W\tilde{x}, \quad W = \mathrm{diag}\{1, \mu^{-1}, \cdots, \mu^{1-n}\} \tag{4.2.12}$$

注意$WA_\mu W^{-1} = \mu A_0$，可以证明

$$\dot{\varepsilon} = \mu A_0 \varepsilon + W\bar{b}\Delta(t)\eta(y) \tag{4.2.13}$$

定义$V_\varepsilon = \varepsilon^T H\varepsilon$，其中矩阵$H$正定对称且满足 $A_0^T H + HA_0 = -(2+\rho)I_n$。注意 $\mu \geq 1$，可以证明

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

$$\dot{V}_\varepsilon = -(2+\rho)\mu\varepsilon^T\varepsilon + 2\varepsilon^T HW\bar{b}\Delta(t)\eta(y)$$
$$\leq -(1+\rho)\mu\varepsilon^T\varepsilon + g\eta^2(y) \quad (4.2.14)$$

其中常数 g 满足 $g \geq \|H\|^2\left\|\bar{b}\Delta(t)\right\|^2$，$\forall t \geq 0$。

令ξ，λ，v_j和ε的第i个元素分别记为ξ_i，λ_i，$v_{j,i}$和ε_i，$\varphi(y)$和Ξ的第 i 行分别记为$\varphi_i(y)$和 Ξ_i。则 y 的导数可表示成

$$\dot{y} = x_2 + \varphi_1(y)a$$
$$= \xi_2 + [\varphi_1(y) + \Xi_2]a + \sum_{j=0}^{m} h b_j v_{j,2} + \mu\varepsilon_2 \quad (4.2.15)$$

4.2.3 控制器设计

定义

$$z_1 = y - y_d\,,\quad z_i = v_{m,i} - \alpha_{i-1},\ i = 2,\cdots,\rho \tag{4.2.16}$$

其中α_{i-1}是将在第$i-1$步中设计的镇定函数。令

$$\alpha_\rho := \eta(y)u + v_{m,\rho+1}\,,\quad z_{\rho+1} := 0 \tag{4.2.17}$$

由式(4.2.9)、(4.2.16)和(4.2.17)可得

$$\dot{v}_{m,i} = -k_i\mu^i v_{m,1} + z_{i+1} + \alpha_i,\ i = 2,\cdots,\rho \tag{4.2.18}$$

第1步：$z_1 = y - y_d$的导数可以表示为

$$\dot{z}_1 = hb_m z_2 + hb_m\alpha_1 + \xi_2 + \theta^T\omega_1 + \mu\varepsilon_2 - \dot{y}_d \tag{4.2.19}$$

其中 $\omega_1 = \left[\varphi_1(y) + \Xi_2, 0, v_{m-1,2},\cdots,v_{0,2}\right]^T \in \mathbb{R}^{q+m+1}$，

$\theta = [a^T, hb^T]^T \in \mathbb{R}^{q+m+1}$。

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

令$\hat{\theta}$、$\hat{p}$和$\hat{g}$分别是θ、$p=\frac{1}{hb_m}$和g的估计值。定义第1个准Lyapunov函数：

$$V_1=V_\varepsilon+\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{2}\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta}+\frac{h}{2\gamma_1}|b_m|\tilde{p}^2+\frac{1}{2\gamma_2}\tilde{g}^2 \tag{4.2.20}$$

其中正定对称矩阵$\Gamma\in\mathbb{R}^{(q+m+1)\times(q+m+1)}$、标量$\gamma_1>0$、标量$\gamma_2>0$为设计参数，$\tilde{\theta}=\hat{\theta}-\theta$，$\tilde{p}=\hat{p}-p$，$\tilde{g}=\hat{g}-g$。微分式(4.2.20)有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1\le&-(1+\rho)\mu\varepsilon^T\varepsilon+g\eta^2(y)+z_1(hb_mz_2+hb_m\alpha_1+\xi_2\\&+\theta^T\omega_1+\mu\varepsilon_2-\dot{y}_d)+\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}+\frac{h}{\gamma_1}|b_m|\tilde{p}\dot{\hat{p}}+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{g}\dot{\hat{g}}\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

引入光滑函数

$$\bar{\eta}=\frac{2}{z_1^2+\epsilon}\eta^2(y) \tag{4.2.22}$$

其中$\epsilon > 0$为设计参数，注意

$$z_1\mu\varepsilon_2 \le \frac{1}{4}\mu z_1^2 + \mu\varepsilon^T\varepsilon \tag{4.2.23}$$

由式(4.2.21) − (4.2.23)可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 \le & -\rho\mu\varepsilon^T\varepsilon + z_1(hb_m z_2 + hb_m\alpha_1 + \xi_2 + \hat{\theta}^T\omega_1 \\
& + \frac{1}{4}\mu z_1 - \dot{y}_d + \hat{g}z_1\bar{\eta}) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \Gamma\omega_1 z_1\right) \\
& + \frac{h}{\gamma_1}|b_m|\tilde{p}\dot{\hat{p}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{g}\left(\dot{\hat{g}} - \gamma_2 z_1^2\bar{\eta}\right) + \delta \\
\le & -c_1 z_1^2 - \rho\mu\varepsilon^T\varepsilon + z_1 hb_m z_2 + z_1 hb_m\alpha_1 - z_1\bar{\alpha}_1 \\
& + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \Gamma\omega_1 z_1\right) + \frac{h}{\gamma_1}|b_m|\tilde{p}\dot{\hat{p}} \\
& + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{g}\left(\dot{\hat{g}} - \gamma_2 z_1^2\bar{\eta}\right) + \delta
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

其中$\delta = g\eta^2(y) - gz_1^2\bar{\eta} = \frac{g(\epsilon - z_1^2)}{z_1^2+\epsilon}\eta^2(z_1 + y_d)$， $\bar{\alpha}_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T\omega_1 - \xi_2 - \frac{1}{4}\mu z_1 + \dot{y}_d - \hat{g}z_1\bar{\eta}$， $c_1 > 0$为设计参数。容易验证，当$|z_1| > \sqrt{\epsilon}$，时，$\delta < 0$；当时$|z_1| \leq \sqrt{\epsilon}$，$\delta$有界。因此存在常数$\bar{\delta}$使得$\delta \leq \bar{\delta}$。令

$$\tau_1 = \Gamma\omega_1 z_1 - \sigma_3\Gamma\hat{\theta} \tag{4.2.25}$$

$$\dot{\hat{g}} = \gamma_2 z_1^2\bar{\eta} - \sigma_2\gamma_2\hat{g} \tag{4.2.26}$$

$$\alpha_1 = \hat{p}\bar{\alpha}_1 \tag{4.2.27}$$

$$\dot{\hat{p}} = -\mathrm{sign}(b_m)\gamma_1 z_1\bar{\alpha}_1 - \gamma_1\sigma_1\hat{p} \tag{4.2.28}$$

其中$\sigma_1 > 0$、 $\sigma_2 > 0$和$\sigma_3 > 0$为设计参数。将式(4.2.25) − (4.2.28)代入式(4.2.24)，有

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

$$\dot{V}_1 \le -c_1 z_1^2 - \rho\mu\varepsilon^T\varepsilon + z_1 h b_m z_2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1\right)$$
$$-\sigma_3\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_1 h|b_m|\tilde{p}\hat{p} - \sigma_2\tilde{g}\hat{g} + \bar{\delta} \qquad (4.2.29)$$

第2步：注意到α_1可表示为y，$\hat{\theta}$和$X_1 = [y_d, \dot{y}_d, \xi, \Xi_1, \dots, \Xi_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, \hat{p}, \hat{g}]^T$的光滑函数。$z_2 = v_{m,2} - \alpha_1$的导数可表示为

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + \beta_2 + \theta^T\omega_2 - hb_m z_1 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\mu\varepsilon_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \qquad (4.2.30)$$

其中 $\omega_2 = [-\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(\varphi_1(y) + \Xi_2), z_1 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}v_{m,2}, -\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}v_{m-1,2}, \dots, -\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}v_{0,2}]^T \in \mathbb{R}^{q+m+1}$，$\beta_2 = -k_2\mu^2 v_{m,1} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\xi_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial X_1}\dot{X}_1$。

定义第2个准Lyapunov函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \qquad (4.2.31)$$

其导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 \le & -c_1 z_1^2 - (\rho-1)\mu\varepsilon^T\varepsilon + z_2[z_3+\alpha_2+\beta_2+\hat{\theta}^T\omega_2 \\ & +\frac{1}{4}\mu\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}] + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}-\tau_1-\Gamma\omega_2 z_2\right) \\ & -\sigma_3\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_1 h|b_m|\tilde{p}\hat{p} - \sigma_2\tilde{g}\hat{g} + \bar{\delta}\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

令

$$\tau_2 = \tau_1 + \Gamma\omega_2 z_2 \tag{4.2.33}$$

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - \beta_2 - \hat{\theta}^T\omega_2 - \frac{1}{4}\mu\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_1 + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\tau_2 \tag{4.2.34}$$

其中$c_2>0$为设计参数，然后有

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 \le & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - (\rho-1)\mu\varepsilon^T\varepsilon + z_2 z_3 + \bar{\delta} \\ & + z_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_2-\dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}-\tau_2\right) \\ & -\sigma_3\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_1 h|b_m|\tilde{p}\hat{p} - \sigma_2\tilde{g}\hat{g}\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

第i步($3 \le i \le \rho$)：注意到α_{i-1}是$y, \hat{\theta}$和$X_{i-1} = [y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(i-1)}, \xi, \Xi_1, \dots, \Xi_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+i-1}, \hat{p}, \hat{g}]^T$的光滑函数, $z_i = v_{m,i} - \alpha_{i-1}$的导数可表示为

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i + \beta_i + \theta^T \omega_i - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \mu \varepsilon_2 - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \tag{4.2.36}$$

其中$\omega_i = -\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \left[\varphi_1(y) + \Xi_2, v_{m,2}, \dots, v_{0,2}\right]^T \in \mathbb{R}^{q+m+1}$， $\beta_i = -k_i \mu^i v_{m,1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \xi_i - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial X_{i-1}} \dot{X}_{i-1}$ 。选取第i个准Lyapunov函数：

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 \tag{4.2.37}$$

其中V_{i-1} 的导数满足

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{i-1} \leq & -\sum_{j=1}^{i-1} c_j z_j^2 + \sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \left(\tau_{i-1} - \dot{\hat{\theta}} \right) + z_{i-1} z_i \\
& -(\rho + 2 - i)\mu \varepsilon^T \varepsilon + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1} \right) \\
& -\sigma_3 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} - \sigma_1 h |b_m| \tilde{p} \hat{p} - \sigma_2 \tilde{g} \hat{g} + \bar{\delta}
\end{aligned} \tag{4.2.38}
$$

利用式(4.2.36) − (4.2.38)可证明

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_i \leq & -\sum_{j=1}^{i-1} c_j z_j^2 - (\rho + 1 - i)\mu \varepsilon^T \varepsilon + z_i [z_{i-1} + z_{i+1} \\
& +\alpha_i + \beta_i + \hat{\theta}^T \omega_i + \frac{1}{4}\mu \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \right)^2 z_i - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}] \\
& +\sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \left(\tau_{i-1} - \dot{\hat{\theta}} \right) - \sigma_1 h |b_m| \tilde{p} \hat{p} - \sigma_2 \tilde{g} \hat{g} \\
& + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1} - \Gamma \omega_i z_i \right) - \sigma_3 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} + \bar{\delta}
\end{aligned} \tag{4.2.39}
$$

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

令

$$\tau_i = \tau_{i-1} + \Gamma\omega_i z_i \tag{4.2.40}$$

$$\alpha_i = -c_i z_i - z_{i-1} - \beta_i - \hat{\theta}^T\omega_i - \frac{1}{4}\mu\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i + \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\tau_i + \sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial\hat{\theta}}\Gamma\omega_i \tag{4.2.41}$$

其中$c_i > 0$为设计参数。然后有

$$\begin{aligned}\dot{V}_i \le & -\sum_{j=1}^{i} c_j z_j^2 - (\rho + 1 - i)\mu\varepsilon^T\varepsilon + z_i z_{i+1} \\ & + \sum_{j=2}^{i} z_j \frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_i - \dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_i\right) \\ & -\sigma_3\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_1 h|b_m|\tilde{p}\hat{p} - \sigma_2\tilde{g}\hat{g} + \bar{\delta}\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

4.2 含回滞/间隙非线性系统控制

在得到τ_ρ和α_ρ后，令

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau_\rho \tag{4.2.43}$$

考虑式(4.2.17)可知

$$u = \frac{1}{\eta(y)}(\alpha_\rho - v_{m,\rho+1}) \tag{4.2.44}$$

在式(4.2.42)中，令$i = \rho$并利用式(4.2.43)，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_\rho \le & -\sum_{j=1}^{\rho} c_j z_j^2 - \mu\varepsilon^T\varepsilon - \sigma_3\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_1 h|b_m|\tilde{p}\hat{p} \\ & -\sigma_2\tilde{g}\hat{g} + \bar{\delta}\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

4.2.4 稳定性分析

定理4.2：考虑由被控对象(4.2. 1) 、滤波器(4.2.6) − (4.2.8) 、自适应律(4.2.26)、(4.2.28)和(4.2.43)以及控制律(4.2.44)组成的闭环系统。假定假设1-4成立，则闭环系统所有信号全局一致有界且z_1可收敛至一任意小的残集内。

证明：利用不等式$-\tilde{\theta}^T\hat{\theta} \le -\frac{1}{2}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} + \frac{1}{2}\theta^T\theta$和$-\tilde{p}\hat{p} \le -\frac{1}{2}\tilde{p}^2 + \frac{1}{2}p^2$，式(4.2.45)可改写为

$$\begin{aligned}\dot{V}_\rho &\le -\sum_{j=1}^{\rho} c_j z_j^2 - \mu\varepsilon^T\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma_3\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} - \frac{1}{2}\sigma_1 h|b_m|\tilde{p}^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\sigma_2\tilde{g}^2 + D_1 \\ &\le -D_2V_\rho + D_1\end{aligned} \tag{4.2.46}$$

其中$D_1=\frac{1}{2}\sigma_3\theta^T\theta+\frac{1}{2}\sigma_1 h|b_m|p^2+\frac{1}{2}\sigma_2 g^2+\bar{\delta}$, $D_2=\min\{2c_1,\cdots,2c_\rho,\frac{\mu}{\lambda_{\max}(H)},\frac{\sigma_3}{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})},\gamma_1\sigma_1,\gamma_2\sigma_2\}$。上式意味着

$$0\le V_\rho(t)\le\frac{D_1}{D_2}+\left[V_\rho(0)-\frac{D_1}{D_2}\right]e^{-D_2 t} \tag{4.2.47}$$

然后，类似于2.3节的分析，可以证明闭环系统内所有信号全局一致有界。此外，z_1可收敛至一任意小的残集内。