3-7 a.

一阶子式最小公分母：$s(s+1)^2(s+2)(s+3)^2(s+4)(s+5)$

二阶子式最小公分母：$s(s+1)^2(s+2)(s+3)^2(s+4)(s+5)$

∴麦克米伦阶为8

b.

一阶子式最小公分母：$s(s+1)(s+3)$

二阶子式最小公分母：0

∴麦克米伦阶为3.

3-8.

a. $G(s)=\frac{1}{4}+\dfrac{-\frac{1}{8}s^3-\frac{1}{8}s+\frac{3}{16}}{s^4+\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}}$

一个可控形实现为：$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $C=\left[\frac{3}{16}\ -\frac{1}{8}\ 0\ -\frac{1}{8}\right]$ $D=\frac{1}{4}$

$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\y=Cx+Du\end{cases}$

是最小阶实现，G(s)无零极相消.

b. $G(s)=\dfrac{s^2-s+1}{(s^2-s+1)(s^3-1)}$

一个可控形实现为：$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&-1&1&-1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $C=[1\ -1\ 1\ 0\ 0]$

$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\y=Cx\end{cases}$

不是最小阶实现，G(s)~~存~~有零极相消.

3-9

a. $G(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-5}{s+2}+\frac{5}{s+3}$

$\therefore y(s)=\frac{1}{s+1}u(s)+\frac{-5}{s+2}u(s)+\frac{5}{s+3}u(s)$

设 $x_1(s)=\frac{1}{s+1}u(s)$ $\quad x_2(s)=\frac{1}{s+2}u(s)$ $\quad x_3(s)=\frac{1}{s+3}u(s)$

$\therefore \dot{x}_1=-x_1+u \quad \dot{x}_2=-2x_2+u \quad \dot{x}_3=-3x_3+u$

$y=x_1-5x_2+5x_3$

$$\therefore \dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & -5 & 5\end{bmatrix}x$$

b. $G(s)=\frac{5}{(s+2)^3}+\frac{-4}{(s+2)^2}+\frac{1}{s+2}$ $\qquad \therefore y(s)=\frac{5}{(s+2)^3}u(s)+\frac{-4}{(s+2)^2}u(s)+\frac{1}{s+2}u(s)$

令 $x_1(s)=\frac{1}{(s+2)^3}u(s)$. $\quad x_2(s)=\frac{1}{(s+2)^2}u(s)$ $\quad x_3(s)=\frac{1}{s+2}u(s)$

则 $x_1(s)=\frac{1}{s+2}x_2(s)$ $\quad x_2(s)=\frac{1}{s+2}x_3(s)$

$\therefore \dot{x}_1=-2x_1+x_2 \quad \dot{x}_2=-2x_2+x_3 \quad \dot{x}_3=-2x_3+u$

$y=5x_1-4x_2+x_3$

$$\therefore \dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}5 & -4 & 1\end{bmatrix}x$$

3-12

(1) 不可简约实现

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

(2) 不可控实现

$$G(s)=\frac{s-1}{(s^3+1)(s-1)}=\frac{s-1}{s^4-s^3+s-1}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

(3) 不可观实现

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

(4) 既不可控也不可观

$$\dot{x}=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right)x+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}u \qquad y=[1\ 0\ 0\ 0]x$$

3-14

a. $$G(s)=\frac{1}{s(s+1)^2(s+2)(s+3)(s+4)}\cdot\begin{bmatrix}2s^2(s+1)(s+4)\\(s^2+2s+2)(s+2)(s+3)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^6+11s^5+45s^4+85s^3+74s^2+24s}\cdot\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}s^4+\begin{bmatrix}10\\7\end{bmatrix}s^3+\begin{bmatrix}8\\18\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}0\\22\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0\\12\end{bmatrix}\right\}.$$

∴ 可控标准形 $$\dot{x}=\left(\begin{array}{c|c}0&I_{5\times5}\\\hline 0\ -24&-74\ \ -85\ \ -45\ \ -11\end{array}\right)x+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0&0&8&10&2&0\\12&22&18&7&1&0\end{bmatrix}x$$

b. $$G(s)=\frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}\cdot\left[(2s+3)s(s+1),\ (s^2+2s+2)(s+2)\right]$$

$$=\frac{1}{s^5+5s^4+9s^3+7s^2+2s}\left\{[2\ 1]s^3+[5\ 4]s^2+[3\ 6]s+[0\ 4]\right\}$$

∴ 可观标准形 $$\dot{x}=\left(\begin{array}{c|c}0&0\\\hline I_{4\times4}&\begin{matrix}-2\\-7\\-9\\-5\end{matrix}\end{array}\right)x+\begin{pmatrix}0&4\\3&6\\5&4\\2&1\\0&0\end{pmatrix}u \qquad y=[0\ 0\ 0\ 0\ 1]x$$

3-15(a)还有另一种解法

3-15

a. 用满秩分解的方法.

$$G(s)=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}+\frac{1}{s+2}\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix}+\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}+\frac{1}{s+2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\end{bmatrix}+\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

b. $\delta G(s)=4$ 按行展开.

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2}&\frac{2s+1}{s^2}\\\frac{s+3}{s^2}&\frac{2}{s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{[0\ 2]s+[1\ 1]}{s^2}\\\frac{[1\ 2]s+[3\ 0]}{s^2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore A=\left[\begin{array}{cc|cc}0&0&&\\1&0&\multicolumn{2}{c}{0}\\\hline \multicolumn{2}{c|}{0}&0&0\\&&1&0\end{array}\right]\quad B=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\3&0\\1&2\end{bmatrix}\quad C=\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\quad D=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

4-2

a. $[sI-(A+BK)]^{-1}=[(sI-A)-BK]^{-1}=\{(sI-A)[I-(sI-A)^{-1}BK]\}^{-1}$

$=[I-(sI-A)^{-1}BK]^{-1}(sI-A)^{-1}$

b. $(I-XY)[I+X(I-YX)^{-1}Y]=I+X(I-YX)^{-1}Y-XY-XYX(I-YX)^{-1}Y$

$=I+X(I-YX)(I-YX)^{-1}Y-XY=I$

$\therefore (I-XY)^{-1}=I+X(I-YX)^{-1}Y$

开环 $\begin{cases}\dot{x}=Ax+BK\\y=Cx\end{cases}$ 闭环 $\begin{cases}\dot{x}=Ax+B(Kx+Hv)=(A+BK)x+BHv\\y=Cx\end{cases}$

闭环传函 $=C[sI-(A+BK)]^{-1}BH\overset{(a)}{=}C[I-(sI-A)^{-1}BK]^{-1}(sI-A)^{-1}BH$

$\overset{(b)}{=}C\{I+(sI-A)^{-1}B[I-K(sI-A)^{-1}B]^{-1}K\}(sI-A)^{-1}BH$

$=C(sI-A)^{-1}BH+C(sI-A)^{-1}B[I-K(sI-A)^{-1}B]^{-1}K(sI-A)^{-1}BH$

$=G(s)\{I+[I-K(sI-A)^{-1}B]^{-1}K(sI-A)^{-1}B\}H$

$\overset{(b)}{=}G(s)[I-K(sI-A)^{-1}B]^{-1}H$

$\overset{(b)}{=}G(s)\{I+K(sI-A)^{-1}[I-BK(sI-A)^{-1}]^{-1}B\}H$

$=G(s)\{I+K[sI-(A+BK)]^{-1}B\}H$

3-15(a)的另一种解法

a. $G(s)=\begin{bmatrix}\frac{2+s}{s+1} & \frac{1}{s+3}\\ \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3}\\ \frac{-1}{s+1} & \frac{-1}{s+2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

将 $g(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3}\\ \frac{-1}{s+1} & \frac{-1}{s+2}\end{bmatrix}$ 按列展开得 $g(s)=\begin{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}{s+1} & \frac{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$

~~此时~~ 最小阶实现为

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -6 & -5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

此时 $\delta G(s)=3$，方程也为3阶

4-4

不稳定特征值1可控，故可以通过状态反馈稳定.

设 $K=[0\ 0\ k_1\ k_2\ k_3]$，则

$$A+BK=\left(\begin{array}{cc:ccc}-2 & 1 & k_1 & k_2 & k_3\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline & & 1 & 1 & 0\\ & 0 & k_1 & k_2+1 & k_3+1\\ & & k_1 & k_2 & k_3+1\end{array}\right)$$

右下角块的特征式为 $s^3-(k_2+k_3+3)s^2+(k_2+2k_3+3-k_1)s-(k_3+1)$

期望多项式 $(s+1)^2(s+2)=s^3+4s^2+5s+2$

$$\therefore\begin{cases}k_2+k_3+3=-4\\ k_2+2k_3+3-k_1=5\\ k_3+1=-2\end{cases}\qquad\begin{cases}k_1=-12\\ k_2=-4\\ k_3=-3\end{cases}\qquad K=[0\ 0\ -12\ -4\ -3].$$

4-5 有一个$\lambda=-1$不可控，故$\{-2,-2,-2,-2\}$不可配置.

设$K=[k_1\ k_2\ 0\ 0]$. $A+BK=\left(\begin{array}{cc:cc}2 & 1 & 0 & 0\\ k_1 & 2+k_2 & 0 & 0\\ \hdashline & & -1 & \\ & & & -1\end{array}\right)$

左上角块: $s^2-(k_2+4)s+2k_2+4-k_1=(s+2)^2=s^2+4s+4$

$\therefore k_2=-8\quad k_1=-16\qquad K=[-16\ -8\ 0\ 0]$

再设 $K=[k_1\ k_2\ k_3\ 0]$ $\quad A+BK=\left(\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & 0 & 0\\ k_1 & 2+k_2 & k_3 & 0\\ k_1 & k_2 & k_3-1 & 0\\ \hdashline k_1 & k_2 & k_3 & -1\end{array}\right)$

左上角块: $s^3-(k_2+k_3+3)s^2+(-k_1+k_2+4k_3)s-k_1+2k_2-4k_3+4=(s+2)^3=s^3+6s^2+12s+8$

$\therefore k_1=-\frac{64}{3}\quad k_2=-\frac{80}{9},\quad k_3=-\frac{1}{9}\qquad K=[-\frac{64}{3},\ -\frac{80}{9},\ -\frac{1}{9},\ 0]$

4-7

求A的特征值： $\lambda_1=-2$. $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$

对应的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$.

故 $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&0\\0&1&3\end{bmatrix}$ $\quad P=\begin{bmatrix}0&1&0\\3&0&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}$

$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ $\quad PB=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \cancel{P^{-1}=[-2}$

特征值-1不可控但稳定．故可以用状态反馈镇定．

$\{-2,-3,-2\}$ 不可配置．$\{-2,-2,-1\}$ 可以配置．