现代控制理论

王陈亮

北京航空航天大学
自动化科学与电气工程学院

2.4.1 带翼锥形体构型高超声速飞行器模型

考虑NASA Langley 研究中心给出的一类带翼锥形体构型的高超声速飞行器纵向模型。该高超声速飞行器模型示意图如下图所示：

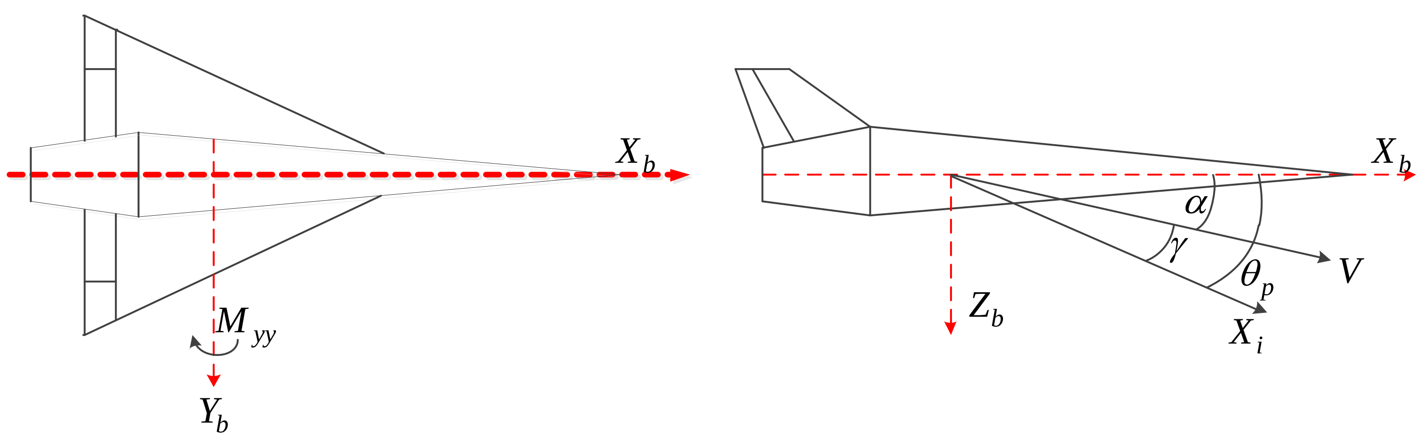

图2.4.1 带翼锥形体高超声速飞行器纵向模型示意图

2.4 高超声速飞行器自适应控制

模型的数学表达式为：

$$\dot{V}=\frac{T\cos\alpha-D}{m}-\frac{G\sin\gamma}{r^2}$$
$$\dot{h}=V\sin\gamma$$
$$\dot{\gamma}=\frac{L+T\sin\alpha}{m}-\frac{G-V^2r\cos\gamma}{Vr^2}$$
$$\dot{\alpha}=q-\dot{\gamma}$$
$$\dot{q}=M_{yy}/I_{yy} \qquad (2.4.1)$$

其中：$L=\bar{q}SC_L,\ D=\bar{q}SC_D,\ T=\bar{q}SC_T$

$$M_{yy}=\bar{q}S\bar{c}[C_M(\alpha)+C_M(\delta_e)+C_M(q)]$$
$$\bar{q}=\frac{1}{2}\rho V^2,\ r=h+R_e,\ C_L=C_L^{\alpha}\alpha$$
$$C_D=C_D^{\alpha^2}\alpha^2+C_D^{\alpha}\alpha+C_D^{0}$$
$$C_T=C_T^{\delta_T}\delta_T+C_T^{0},\ C_M(\alpha)=C_{M,\alpha}^{\alpha^2}\alpha^2+C_{M,\alpha}^{\alpha}\alpha+C_{M,\alpha}^{0}$$
$$C_M(q)=(\bar{c}/2V)q\left(C_{M,q}^{\alpha^2}\alpha^2+C_{M,q}^{\alpha}\alpha+C_{M,q}^{0}\right)$$
$$C_M(\delta_e)=c_e(\delta_e-\alpha)$$

V	速度	m	飞行器质量	S	机翼参考面积
γ	航迹倾角	T	推力	$\bar{q}$	气动压力
h	高度	D	阻力	ρ	空气密度
α	攻角	L	升力	$\bar{c}$	平均气动弦长
q	俯仰角速度	M_{yy}	俯仰力矩	δ_T	油门开度
r	距地心距离	I_{yy}	俯仰转动惯量	δ_e	升降舵舵偏角
R_e	地球半径	G	重力常数		

2.4.2 指定跟踪性能控制方法

定义高度和速度跟踪误差为

$$e_1 = h - h_r,\ e_2 = V - V_r \tag{2.4.2}$$

上式中h_r和V_r分别为高度和速度的参考指令。对于跟踪误差$e_i\,(i=1,2)$,定义一个指数衰减的性能函数p_i

$$p_i(t) = (p_{0i} - p_{\infty i})\exp(-a_i t) + p_{\infty i},\ i = 1,2 \tag{2.4.3}$$

上式中，$p_{0i} > p_{\infty i} > 0$和$a_i > 0$均为预先指定的设计参数。

进而，指定跟踪性能问题可以表示为：

$$-\underline{b}_i p_i(t) < e_i(t) < \overline{b}_i p_i(t), \forall t \geq 0 \tag{2.4.4}$$

其中$\underline{b}_i > 0$和$\overline{b}_i > 0$为预先指定的设计参数。

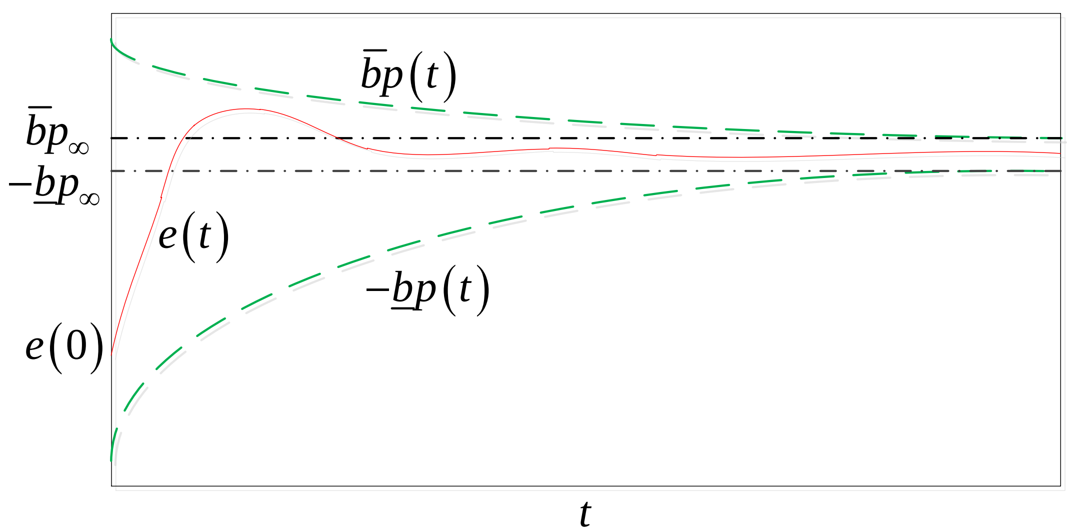

图 2.4.2 指定跟踪性能示意图

2.4 高超声速飞行器自适应控制

为了将公式（2.4.4）所描述的受约束控制问题转化为等效的无约束控制问题，定义如下非线性函数来对跟踪误差进行转化。

$$w_i = W_i\left(\frac{e_i}{p_i}\right), i = 1, 2 \tag{2.4.5}$$

上式中，W_i为单调递增的函数，且具有如下性质

$$W_i(\cdot): \quad (-\underline{b}_i, \overline{b}_i) \to (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{\frac{e_i}{p_i} \to -\underline{b}_i} W_i\left(\frac{e_i}{p_i}\right) = -\infty, \quad \lim_{\frac{e_i}{p_i} \to \overline{b}_i} W_i\left(\frac{e_i}{p_i}\right) = +\infty \tag{2.4.6}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

由公式(2.4.6)可以看出，通过非线性函数 W_i 可以对变量 $\frac{e_i}{p_i}$ 做一个从有限区间 $(-\underline{b}_i, \bar{b}_i)$ 到 $(-\infty, +\infty)$ 的一一映射。选择 W_i 的表达式为

$$w_i = W_i(\frac{e_i}{p_i}) = \ln(\underline{b}_i + \frac{e_i}{p_i}) - \ln(\bar{b}_i - \frac{e_i}{p_i}) \qquad (2.4.7)$$

对于上式进行分析可知，函数 $W_i(\cdot)$ 满足前述的各种要求。由公式(2.4.5)-(2.4.7)可以看出，如果 w_i 为有界量，则 $\frac{e_i}{p_i} \in (-\underline{b}_i, \bar{b}_i)$，从而指定跟踪性能(2.4.4)能够得到保证。因此，在后续的控制器设计中，为了实现指定跟踪性能，仅需保证 w_i 的有界性。

2.4.3 高超声速飞行器跟踪控制器设计

通过对公式进行分析可以看出，飞行器的高度变化主要受到升降舵偏转角的影响，而飞行器速度的变化主要受到发动机油门开度的影响。因此，可以将飞行器纵向模型划分为高度子系统和速度子系统，然后分别进行控制器设计。因为主要考虑高超声速飞行器巡航段的控制问题，可以对模型做如下假设：

假设**1**　推力项$T\sin\alpha$远小于升力项L以至于其可以忽略。

假设**2**　飞行器航迹角γ足够小，有关系$\sin\gamma\approx\gamma$。

假设**3**　高度参考指令h_r以及其前两阶导数$\dot{h}_r,\ddot{h}_r$均有界；速度参考指令以及其导数$\dot{V}_r$均有界。

2.4 高超声速飞行器自适应控制

根据假设1和假设2，可得到如下高度子系统的数学模型

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1 + g_1(V)x_2 \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, V) + g_2(V)x_3 \\
\dot{x}_3 &= f_3 + g_3 x_4 \\
\dot{x}_4 &= f_4(x, V) + g_4(V)\delta_e
\end{aligned}
\tag{2.4.8}
$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

式中，$x=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=[h,\gamma,\theta_p,q]$，$f_1=0$，$g_1(V)=V$

$f_2(x_1,x_2,V)=-\dfrac{\mu-V^2r}{Vr^2}\cos(\gamma)-g_2(V)\gamma$，$g_2(V)=\bar{q}S\dfrac{C_L^{\alpha}}{mV}$，$f_3=0$，$g_3=1$

$f_4(x,V)=\bar{q}S\bar{c}\dfrac{C_M(\alpha)+C_M(q)-c_e\alpha}{I_{yy}}$ $\quad g_4(V)=\bar{q}S\bar{c}\dfrac{c_e}{I_{yy}}$

速度子系统模型为

$$\dot{V}=f_5(x,V)+g_5(x,V)C_T^{\delta_T}\delta_T \tag{2.4.9}$$

式中，

$f_5(x,V)=\bar{q}S\dfrac{C_T^0\cos\alpha+C_D^{\alpha 2}\alpha^2-C_D^{\alpha}\alpha-C_D^0}{m}-\dfrac{G\sin\gamma}{r^2}$，$g_5(x,V)=\bar{q}S\dfrac{\cos\alpha}{m}$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

高度跟踪控制器设计

主要考虑高超声速飞行器的巡航控制问题。在巡航状态下，高超声速飞行器不会做大过载运动，飞行器速度变化较小。基于这个特点，做如下假设：

假设4 飞行器速度变化相对较慢，以至于$\frac{\dot{g}_i(V)}{g_i^2(V)}\approx 0$，而且存在正常数$g_M$和$g_m$使得$g_M \geq g_i(V) \geq g_m > 0 \quad i=1,2,4,5$。

高度子系统的控制器设计分为四个步骤进行，控制律在最后一步中得出。控制器设计之前，定义如下正标量$c_i(i=1,\cdots 4),\alpha_j,\tau_j\ (j=2,3,4),\mu_k\ (k=1,2)$和正定矩阵$\Gamma_1,\Gamma_2$作为控制器参数。

第1步：定义高度子系统的第一个面误差变量为 $s_1 = w_1$，其中 w_1 的定义见公式（2.4.7）。考虑公式（2.4.8）和（2.4.5）可得

$$\dot{s}_1 = \zeta_1(g_1 x_2 - \dot{h}_r - \frac{e_1 \dot{p}_1}{p_1}) \tag{2.4.10}$$

其中$\zeta_1 = \dfrac{\partial W_1}{\partial \dfrac{e_1}{p_1}} \dfrac{1}{p_1}$。因为$W_1$ 严格递增且$p_1 > 0$，因此可知$\zeta_1 > 0$。定义如下二次型函数

$$H_1 = \frac{1}{2g_1} s_1^2 \tag{2.4.11}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

考虑公式（2.4.10）和假设2.4对H_1求导

$$\dot{H}_1 = s_1\zeta_1[x_2 - \frac{1}{g_1}(\dot{h}_r + \frac{e_1\dot{p}_1}{p_1})] \tag{2.4.12}$$

设计虚拟控制信号x_{d2}为

$$x_{d2} = \frac{1}{\zeta_1}[-c_1s_1 - \frac{1}{\alpha_1}\zeta_1^2 s_1 + \zeta_1\frac{1}{g_1}(\dot{h}_r + \frac{e_1\dot{p}_1}{p_1})] \tag{2.4.13}$$

将公式（2.4.13）代入公式（2.4.12）中可得

$$\dot{H}_1 = -c_1s_1^2 - \frac{1}{\alpha_1}\zeta_1^2 s_1^2 + s_1\zeta_1(x_2 - x_{d2}) \tag{2.4.14}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

为了避免“微分爆炸”问题，我们让虚拟控制信号x_{d2}通过如下一阶低通滤波器

$$\tau_2 \dot{z}_2 + z_2 = x_{d2} \tag{2.4.15}$$

其中，τ_2为滤波器时间常数。从公式（2.4.15）可以看出，在接下来的设计中z_2和$\dot{z}_2 = \dfrac{x_{d2} - z_2}{\tau_2}$可以直接被用于控制器设计当中。

第2步：定义高度子系统的第二个面误差为

$$s_2 = x_2 - z_2 \tag{2.4.16}$$

考虑公式（2.4.8）以及 f_2 和 g_2 的具体表达式可得

$$\dot{s}_2 = g_2[x_3 + g_2^{-1}(f_2 - \dot{z}_2)] = g_2(x_3 - x_2 + \theta_1^{\mathrm{T}} \phi_1) \tag{2.4.17}$$

上式中，$\theta_1=[\frac{mG}{\rho S C_L^\alpha},\frac{m}{\rho S C_L^\alpha}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$，$\phi_1=[-\frac{2\cos\gamma}{V^2r^2},\frac{2(V\cos\gamma-r\dot{z}_2)}{Vr}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$。

考虑到飞行器相关参数难以精确获得，假设飞行器相关气动参数和惯性参数为未知，即θ_1为未知列向量，并采用自适应律对其进行在线估计，估计值定义为$\hat{\theta}_1$。定义如下二次型函数

$$H_2=\frac{1}{2g_2}s_2^2+\frac{1}{2}\tilde{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Gamma_1^{-1}\tilde{\theta}_1 \tag{2.4.18}$$

其中，$\tilde{\theta}_1:=\theta_1-\hat{\theta}_1$为参数估计误差。

2.4 高超声速飞行器自适应控制

考虑假设4和公式（2.4.17），对上式求导可得

$$\dot{H}_2 = s_2(x_3 - x_2 + \theta_1^{\mathrm{T}}\phi_1) - \tilde{\theta}_1^{\mathrm{T}}\Gamma_1^{-1}\dot{\hat{\theta}}_1 \tag{2.4.19}$$

设计虚拟控制信号x_{d3} 和自适应律$\dot{\hat{\theta}}_1$ 为：

$$x_{d3} = -c_2 s_2 + x_2 - \frac{\alpha_1}{2}s_2 - \frac{1}{\alpha_2}s_2 - \hat{\theta}_1^{\mathrm{T}}\phi_1 \tag{2.4.20}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma_1(s_2\phi_1 - \mu_1\hat{\theta}_1) \tag{2.4.21}$$

将公式（2.4.20）和公式（2.4.21）代入公式（2.4.19）中有

$$\dot{H}_2 = -c_2 s_2^2 - \frac{\alpha_1}{2}s_2^2 - \frac{1}{\alpha_2}s_2^2 + \mu_1\tilde{\theta}_1^{\mathrm{T}}\hat{\theta}_1 + s_2(x_3 - x_{d3}) \tag{2.4.22}$$

令 x_{d3} 通过如下一阶低通滤波器

$$\tau_3 \dot{z}_3 + z_3 = x_{d3} \tag{2.4.23}$$

其中，τ_3 为滤波器时间常数。

第3步：定义

$$s_3 = x_3 - z_3, \quad H_3 = \frac{1}{2} s_3^2 \tag{2.4.24}$$

采用类似于公式（2.4.18）到公式（2.4.22）的步骤，可以得到

$$\dot{H}_3 = -c_3 s_3^2 - \frac{\alpha_2}{2} s_3^2 - \frac{1}{\alpha_3} s_3^2 + s_3 (x_4 - x_{d4}) \tag{2.4.25}$$

其中

$$x_{d4} = -c_3 s_3 - \frac{\alpha_2}{2} s_3 - \frac{1}{\alpha_3} s_3 + \dot{z}_3 \tag{2.4.26}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

令x_{d4}通过如下一阶低通滤波器

$$\tau_4 \dot{z}_4 + z_4 = x_{d4} \tag{2.4.27}$$

第4步：定义最后一个面误差变量为

$$s_4 = x_4 - z_4 \tag{2.4.28}$$

考虑公式（2.4.8）可得

$$\dot{s}_4 = g_4[\delta_e + g_4^{-1}(f_4 - \dot{z}_4)] = g_4\left[\delta_e + x_2 - x_3 + \theta_2^T \phi_2\right] \tag{2.4.29}$$

其中，$\theta_2 = [\frac{1}{c_e}C_{M.\alpha}^{\alpha^2}, \frac{1}{c_e}C_{M,\alpha}^{\alpha}, \frac{1}{c_e}C_{M,\alpha}^{0}, \frac{\bar{c}}{c_e}C_{M,q}^{\alpha^2}, \frac{\bar{c}}{c_e}C_{M,q}^{\alpha}, \frac{\bar{c}}{c_e}C_{M,q}^{0}, \frac{1}{\rho S\bar{c}c_e}I_{yy}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^7$,

$$\phi_2 = [\alpha^2, \alpha, 1, \frac{q\alpha^2}{2V}, \frac{q\alpha}{2V}, \frac{q}{2V}, \frac{-2\dot{z}_4}{V^2}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^7。 \tag{2.4.30}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

同样的，θ_2为未知向量。设计自适应律对其进行估计，令估计值为$\hat{\theta}_2$，并定义估计误差为$\tilde{\theta}_2 := \theta_2 - \hat{\theta}_2$。

考虑二次型函数

$$H_4 = \frac{1}{2g_4} s_4^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}} \Gamma_2^{-1} \tilde{\theta}_2 \tag{2.4.31}$$

对H_4进行求导可得

$$\dot{H}_4 = s_4(\delta_e + x_2 - x_3 + \theta_2^{\mathrm{T}} \phi_2) - \tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}} \Gamma_2^{-1} \dot{\hat{\theta}}_2 \tag{2.4.32}$$

设计控制信号和自适应律为

$$\delta_e = -c_4 s_4 - \frac{\alpha_3}{2} s_4 - x_2 + x_3 - \hat{\theta}_2^{\mathrm{T}} \phi_2 \tag{2.4.33}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \Gamma_2 (s_4 \phi_2 - \mu_2 \hat{\theta}_2) \tag{2.4.34}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

考虑公式（2.4.33）和 (2.4.34)，可以进一步得到$\dot{H}_4$为

$$\dot{H}_4 = -c_4 s_4^2 + \mu_2 \tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}} \hat{\theta}_2 \tag{2.4.35}$$

高度子系统稳定性证明

首先根据公式（2.4.15）、（2.4.23）和（2.4.27），定义如下误差变量

$$Y_i = z_i - x_{di}, \quad i = 2,3,4 \tag{2.4.36}$$

注意到

$$\dot{z}_i = \frac{x_{di} - z_i}{\tau_i} = -\frac{Y_i}{\tau_i}, \quad x_i - x_{di} = s_i + Y_i, \quad i = 2,3,4 \tag{2.4.37}$$

结合公式（2.4.36）可得

$$\dot{Y}_i = -\frac{Y_i}{\tau_i} - \dot{x}_{di}, \quad i = 2,3,4 \tag{2.4.38}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

此外，由公式（2.4.13）已知x_{d2}是关于$(x_1, h_r, \dot{h}_r, p_1, \dot{p}_1)$的连续可微函数。因此，$\dot{x}_{d2}$可以表示为

$$\dot{x}_{d2} = \frac{\partial x_{d2}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial x_{d2}}{\partial h_r}\dot{h}_r + \frac{\partial x_{d2}}{\partial \dot{h}_r}\ddot{h}_r + \frac{\partial x_{d2}}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial x_{d2}}{\partial \dot{p}_1}\ddot{p}_1 \tag{2.4.39}$$

因为$h_r, \dot{h}_r, \ddot{h}_r, p_1, \dot{p}_1$，$\ddot{p}_1$均为有界量，进而考虑公式（2.4.8）和（2.4.37），有

$$\left|\dot{x}_{d2}\right| \le \Xi_2(s_1, s_2, Y_2) \tag{2.4.40}$$

上式中，Ξ_2为一个连续函数。类似的，可得

$$|\dot{x}_{d3}| \le \Xi_3(s_1, s_2, s_3, Y_2, Y_3, \hat{\theta}_1) \tag{2.4.41}$$

$$|\dot{x}_{d4}| \le \Xi_4(s_1, s_2, s_3, s_4, Y_2, Y_3, Y_4, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \tag{2.4.42}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

结合公式（2.4.38），（2.4.40），（2.4.41）和（2.4.42）可得

$$Y_i \dot{Y}_i \le -\frac{Y_i^2}{\tau_i} + \Xi_i |Y_i|, \quad i = 2,3,4 \tag{2.4.43}$$

定义如下准Lyapunov函数

$$H = \sum_{i=1}^{4} H_i + \sum_{i=2}^{4} \frac{Y_i^2}{2} \tag{2.4.44}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

定理 2.4 考虑由飞行器纵向模型（2.4.8），一阶低通滤波器（2.4.15）、（2.4.23）和（2.4.27），自适应律（2.4.21）、（2.4.34）和控制律（2.4.33）。若假设1-4均成立，则对于任意常数$R>0$，如果 $H(0)\le R$，则存在设计参数$c_i,(i=1,\cdots,4),\alpha_j,\tau_{j+1}(j=1,2,3),\mu_k,\Gamma_k(k=1,2)$使得闭环系统所有信号均有界，且指定跟踪性能能（2.4.4）能够得到保证。

证明：基于公式（2.4.14），（2.4.19），（2.4.25），（2.4.32）和（2.4.43）对公式（2.4.52）进行求导可得

$$\dot{H}\le-\sum_{i=1}^{4}c_i s_i^2-\frac{1}{\alpha_1}\zeta_1^2 s_1^2+s_1\zeta_1(s_2+Y_2)-\frac{\alpha_1}{2}s_2^2-\frac{1}{\alpha_2}s_2^2+s_2(s_3+Y_3)-\frac{\alpha_2}{2}s_3^2-\frac{1}{\alpha_3}s_3^2$$

$$+s_3(s_4+Y_4)-\frac{\alpha_3}{2}s_4^2+\sum_{i=1}^{2}\mu_i\tilde{\theta}_i\hat{\theta}_i-\sum_{i=2}^{4}(\frac{Y_i^2}{\tau_i}-\Xi_i\,|Y_i\,|) \tag{2.4.45}$$

由三角不等式可证得

$$2\tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}\hat{\theta}_i \le -\|\tilde{\theta}_i\|^2 + \|\theta_i\|^2 \text{，}\quad s_1\zeta_1(s_2+Y_2) \le \frac{1}{\alpha_1}\zeta_1^2 s_1^2 + \frac{\alpha_1}{2}s_2^2 + \frac{\alpha_1}{2}Y_2^2 \tag{2.4.46}$$

$$s_j(s_{j+1}+Y_{j+1}) \le \frac{1}{\alpha_j}s_j^2 + \frac{\alpha_j}{2}s_{j+1}^2 + \frac{\alpha_j}{2}Y_{j+1}^2,\quad \Xi_i|Y_i| \le \frac{\alpha_{i-1}}{2}\Xi_i^2 Y_i^2 + \frac{1}{2\alpha_{i-1}} \tag{2.4.47}$$

第一个不等式的证明如下

$$2\tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}\hat{\theta}_i = 2\tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}(\theta_i - \tilde{\theta}_i) \le -2\|\tilde{\theta}_i\|^2 + \|\tilde{\theta}_i\|^2 + \|\theta_i\|^2 \le -\|\tilde{\theta}_i\|^2 + \|\theta_i\|^2 \tag{2.4.48}$$

将公式（2.4.46）和（2.4.47）代入公式（2.4.45）可得

$$\dot{H} \le -\sum_{i=1}^{4}c_i s_i^2 - \sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i}{2}\|\tilde{\theta}_i\|^2 + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2\alpha_i} - \sum_{i=2}^{4}\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{\alpha_{i-1}}{2} - \frac{\alpha_{i-1}}{2}\Xi_i^2\right)Y_i^2 + \sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i}{2}\|\theta_i\|^2 \tag{2.4.49}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

定义紧集

$$\Omega = \{\frac{1}{g_M}s_1^2 + \frac{1}{g_M}s_2^2 + s_3^2 + \frac{1}{g_M}s_4^2 + \sum_{i=1}^{2}\tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}\Gamma_i^{-1}\tilde{\theta}_i + \sum_{i=2}^{4}Y_i^2 \le 2R\} \tag{2.4.50}$$

显然，连续函数Ξ_i在紧集Ω上存在最大值，记为M_i。从而有$\Xi_i^2 \le M_i^2$，进而结合公式（2.4.49）可得

$$\dot{H} \le -\sum_{i=1}^{4}c_i s_i^2 - \sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i}{2}||\tilde{\theta}_i||^2 - \sum_{i=2}^{4}(\frac{1}{\tau_i} - \frac{\alpha_{i-1}}{2} - \frac{\alpha_{i-1}}{2}M_i^2)Y_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2\alpha_i} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i}{2}||\theta_i||^2 \tag{2.4.51}$$

通过选择控制器参数使得$\frac{1}{\tau_i} > \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \frac{\alpha_{i-1}}{2}M_i^2$，有

$$\dot{H} \le -2\kappa_1 H + \kappa_2 \tag{2.4.52}$$

上式中，

$$\kappa_1 = \min\{c_i g_m\ (i=1,2,4),\ c_3,\ \frac{1}{\tau_{j+1}} - \frac{\alpha_j}{2} - \frac{\alpha_j}{2} M_{j+1}^2 (j=1,2,3),\ \frac{\mu_k}{2\lambda_{\max}(\Gamma_k^{-1})}(k=1,2)\}$$

$$\kappa_2 = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2\alpha_i} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i}{2}\|\theta_i\|^2$$

其中$\lambda_{\max}\left(\Gamma_i^{-1}\right)$为$\Gamma_i^{-1}$的最大特征值。选择控制器参数使得$\kappa_1 > \frac{\kappa_2}{2R}$,从而在$H=R$上有$\dot{H} \le 0$。因此可知$H \le R$ 为不变集。对公式（2.4.52）进行求解可得

$$0 \le H(t) \le \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} + (H(0) - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1})\exp(-2\kappa_1 t) \qquad (2.4.53)$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

由上式可以看出 H 为有界量，因此 H 中所包含的所有误差变量均有界。即 $\left(s_i\ (i=1,\cdots,4),Y_j\ (j=1,2,3),\tilde{\theta}_k\ (k=1,2)\right)$ 均有界。结合 $\left(h_r,\dot{h}_r,\ddot{h}_r\right)$ 的有界性和 $\theta_i\ (i=1,2)$ 的有界性，容易证明闭环系统的所有信号均有界。此外，通过 s_1 的有界性可以得出指定跟踪性能（2.4.4）能够得到保证。

2.4 高超声速飞行器自适应控制

速度跟踪控制器设计

首先，定义速度跟踪误差为

$$e_2 = V - V_r \tag{2.4.54}$$

考虑公式（2.4.7）和（2.4.9）可得$s_5 = w_2$的导数为

$$\dot{s}_5 = \zeta_2 g_5 (C_T^{\delta_T} \delta_T + \theta_3^{\mathrm{T}} \phi_3) \tag{2.4.55}$$

其中 $\theta_3 = [C_T^0, C_D^{\alpha^2}, C_D^{\alpha}, C_D^0, \dfrac{mG}{\rho S}, \dfrac{m}{\rho S}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6 \quad \zeta_2 = (\partial W_2 / \partial \dfrac{e_2}{p_2}) \dfrac{1}{p_2}$

$$\phi_3 = [1, \frac{-\alpha^2}{\cos\alpha}, \frac{-\alpha}{\cos\alpha}, \frac{-1}{\cos\alpha}, \frac{-2\sin\gamma}{V^2 r^2 \cos\alpha}, \frac{-2(\dot{V}_r + e_2 \dot{p}_2 / p_2)}{V^2 \cos\alpha}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6$$

为了进行控制器设计，首先定义

$$\iota = \min C_T^{\delta_T}, \quad o = \max \frac{\|\theta_3\|^2}{\iota} \tag{2.4.56}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

定义速度子系统的Lyapunov函数为

$$H_5 = \frac{1}{2g_5} s_5^2 + \frac{\iota}{2\sigma_1} \tilde{o}^2 \tag{2.4.57}$$

其中，$\tilde{o} := o - \hat{o}$，$\hat{o}$为o的估计。对公式（2.4.57）进行求导可以得

$$\dot{H}_5 = s_5 \zeta_2 (C_T^{\delta_T} \delta_T + \theta_3^{\mathrm{T}} \phi_3) - \frac{\iota}{\sigma_1} \tilde{o} \dot{\hat{o}} \tag{2.4.58}$$

基于定义（2.4.56）式，可对上式进行如下放缩

$$\dot{H}_5 \le s_2 \zeta_2 C_T^{\delta_T} \delta_T + \frac{\iota}{2} s_5^2 \zeta_2^2 o \left\| \phi_3 \right\|^2 + \frac{1}{2} - \frac{\iota}{\sigma_1} \tilde{o} \dot{\hat{o}} \tag{2.4.59}$$

设计油门开度为

$$\delta_T = -c_5 \frac{s_5}{\zeta_2} - \frac{1}{2} s_5 \hat{o} \zeta_2 \| \phi_3 \|^2 \tag{2.4.60}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

$\hat{o}$ 的自适应律为

$$\dot{\hat{o}}=\sigma_1\left(\frac{1}{2}\zeta_2^2 s_5^2\,\|\phi_3\|^2-\varepsilon_1\hat{o}\right),\quad \hat{o}(0)\ge 0 \tag{2.4.61}$$

将公式（2.4.61）和公式（2.4.62）代入公式（2.4.60）可得

$$\dot{H}_5\le -c_5\iota s_5^2+\iota\varepsilon_1\tilde{o}\hat{o}+\frac{1}{2} \tag{2.4.62}$$

采用和高度子系统类似的稳定性证明，由上式容易得出速度子系统各闭环信号均有界，且指定跟踪性能（2.4.7）能够得到保证。

2.4.4 仿真结果与分析

仿真中，系统状态变量的初始值设置为 $h(0)=110000\,\text{ft}$， $V(0)=15060\,\text{ft/s}$ $\gamma(0)=0\,\text{rad}$, $\theta_p(0)=0.005\,\text{rad}$, $q(0)=0\,\text{rad/s}$ 。各气动参数和惯性参数的标称值如下表中所示。

表 2.4.2 飞行器各气动及惯性参数标称值

$m=9375$	$I_{yy}=7\times10^{6}$	$S=3603$	$G=1.39\times10^{16}$
$c_e=0.0292$	$\rho=0.24325\times10^{-4}$	$C_D^{\alpha^2}=0.6450$	$C_D^{\alpha}=0.0043378$
$C_D^{0}=0.003772$	$C_L^{\alpha}=0.6203$	$C_T^{\delta_T}=0.00336(\text{if }\delta_T>1)$	$C_T^{0}=0.0224\,(\text{if }\delta_T>1)$
$C_T^{\delta_T}=0.02576\,(\text{if }\delta_T\le1)$	$C_T^{0}=0\,(\text{if }\delta_T\le1)$	$C_{M,\alpha}^{\alpha^2}=0.035$	$C_{M,\alpha}^{\alpha}=0.036617$
$C_{M,\alpha}^{0}=5.3261\times10^{-6}$	$C_{M,q}^{\alpha^2}=-6.796$	$C_{M,q}^{\alpha}=0.3015$	$C_{M,q}^{0}=-0.2289$
$\bar{c}=80$			

2.4 高超声速飞行器自适应控制

表2.4.2　控制器参数取值

$c_1=0.0002$	$c_2=40$	$c_3=10$	$c_4=10$	$c_5=2$	$p_{01}=50$
$p_{\infty 1}=7$	$p_{02}=10$	$p_{\infty 2}=1$	$\bar{b}_1=1$	$\underline{b}_1=1$	$\bar{b}_2=1$
$\underline{b}_2=1$	$a_1=0.1$	$a_2=0.1$	$\alpha_1=80$	$\alpha_2=1$	$\alpha_3=1$
$\tau_2=0.01$	$\tau_3=0.01$	$\tau_4=0.01$	$\Gamma_1=0.3I_2$	$\Gamma_2=0.1I_7$	$\mu_1=0.05$
$\mu_2=0.02$	$\sigma_1=0.1$	$\varepsilon_1=0.01$			

高度参考指令和速度参考指令由如下系统生成

$$\frac{h_r}{h_c}=\frac{\omega_1\omega_2^2}{(s+\omega_1)(s^2+2\zeta\omega_2 s+\omega_2^2)},\quad h_r(0)=110000\text{ft},\ \frac{V_r}{V_c}=\frac{\omega_1}{s+\omega_1},\quad V_r(0)=15060\text{ft/s} \tag{2.4.63}$$

上式中，s为拉普拉斯算子，$\omega_1=0.5$，$\omega_2=0.3$，$\zeta=0.95$，h_c和V_c设定为:

$$h_c=\begin{cases}110000\text{ ft} & \text{if } t<10\text{s}\\ 112000\text{ ft} & \text{if } t\ge 10\text{s}\end{cases}\quad V_c=\begin{cases}15060\text{ ft/s} & \text{if } t<30\ s\\ 15160\text{ ft/s} & \text{if } t\ge 30\ s\end{cases} \tag{2.4.64}$$

2.4 高超声速飞行器自适应控制

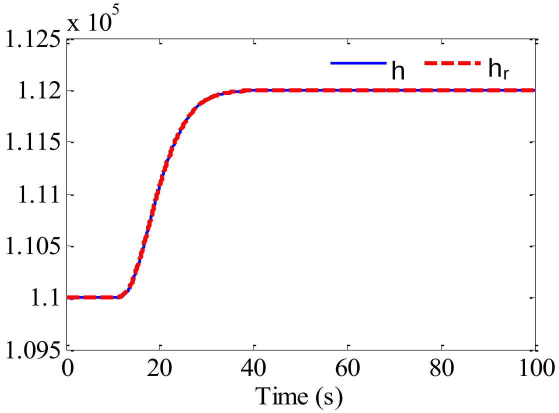

图2.4.3 高度跟踪

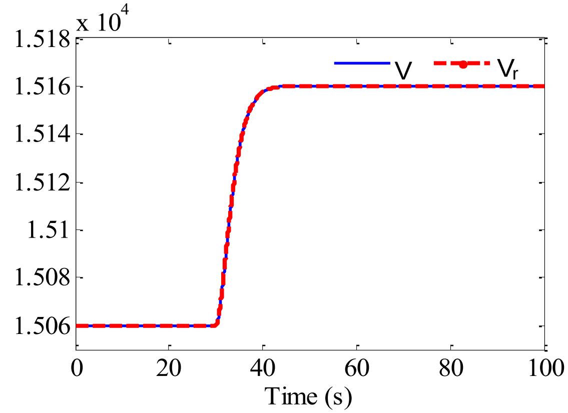

图 2.4.4 速度跟踪

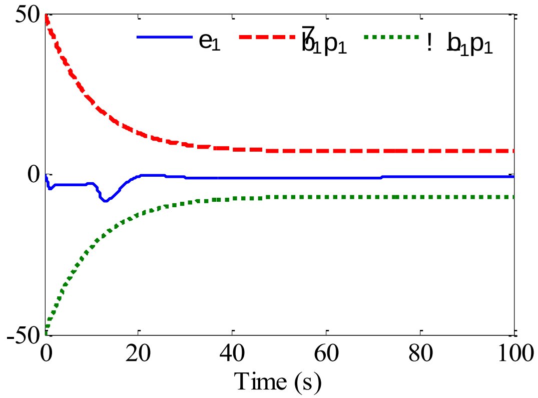

图 2.4.5 高度跟踪误差

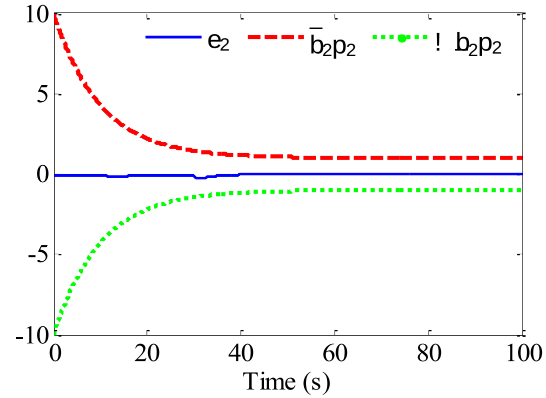

图 2.4.6 速度跟踪误差

2.4 高超声速飞行器自适应控制

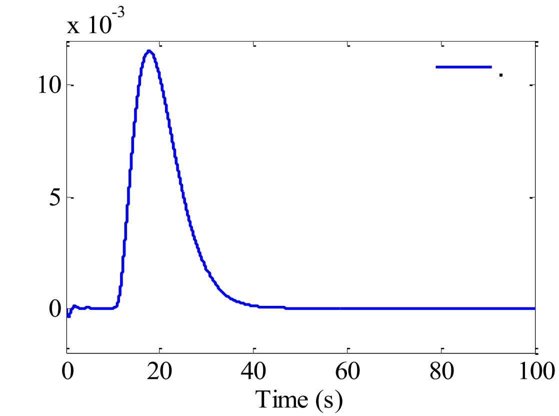

图 2.4.7 航迹角响应

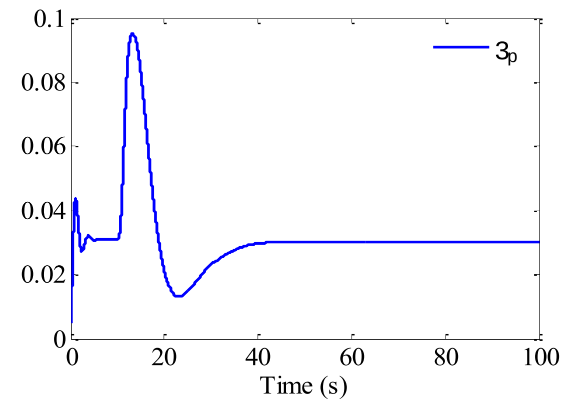

图 2.4.8 俯仰角响应

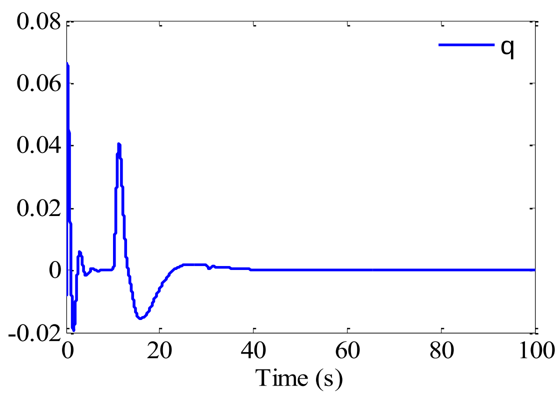

图 2.4.9 俯仰角速率响应

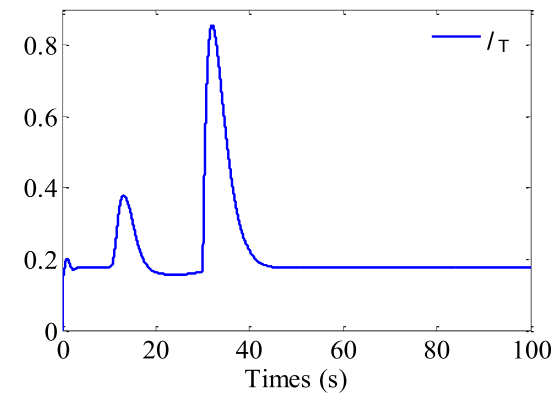

图 2.4.10 油门开度

2.4 高超声速飞行器自适应控制

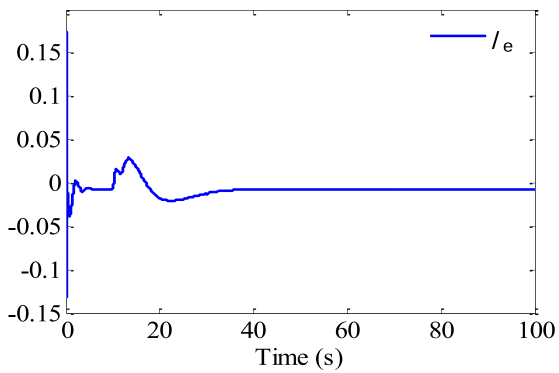

图 2.4.11 升降舵偏角

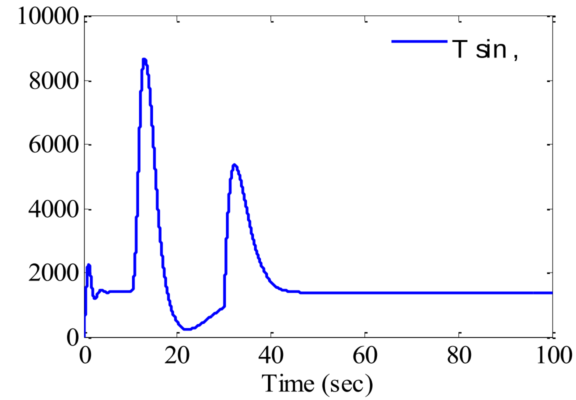

图 2.4.12 $T\sin(\alpha)$

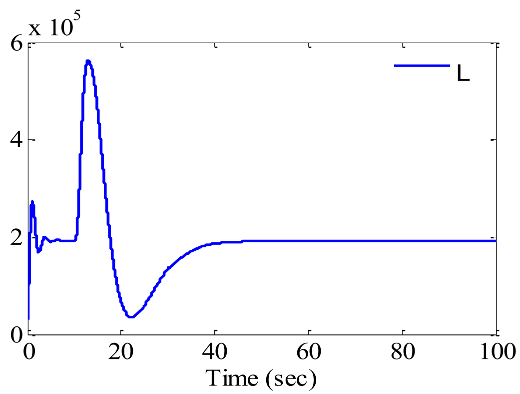

图 2.4.13 升力

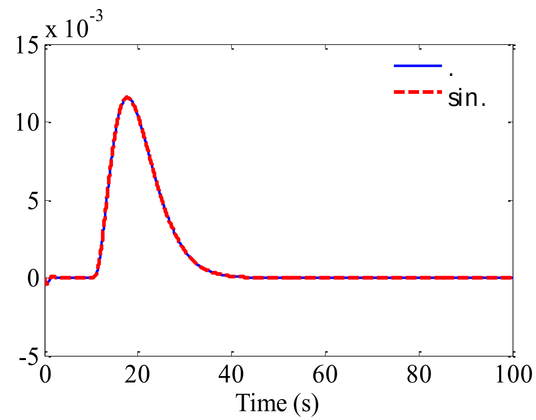

图 2.4.14 γ 和 $\sin\gamma$