北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

现代控制理论

王陈亮

北京航空航天大学
自动化科学与电气工程学院

3.1.1 问题描述

考虑如下非线性系统：

$$\dot{x} = Ax + \varphi(y) + \bar{b}u + \delta(t), y = x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{n-1} & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n} \tag{3.1.1}$$

其中$x = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$、$u \in \mathbb{R}$和$y \in \mathbb{R}$为系统的状态、输入和输出， $b = [b_m, \cdots, b_0]^T \in \mathbb{R}^{m+1}$为未知常量， $b_m \neq 0, \varphi(y) \in \mathbb{R}^n$是未知连续可微函数，$\delta(t)$为未知分段连续的干扰。

□ 控制目的

在仅有输出 y 可测量的条件下，设计控制信号 u 使得

- 闭环系统内所有信号有界；
- 被控对象输出$y(t)$跟踪给定的期望轨迹$y_d(t)$。

□ 假设

- 假设1： b_m的符号已知。
- 假设2：$B(s) = b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0$为Hurwitz多项式。
- 假设3：$\delta(t)$有界。
- 假设4：$y_d(t)$及其前ρ阶导数已知且有界，$y_d^{(\rho)}(t)$ 分段连续，其中$\rho := n - m$。

3.1.2 RBF神经网络

一个径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络可表示为

$$Y = a^T F(\eta)$$

其中$\eta \in \mathbb{R}^q$和$Y \in \mathbb{R}$分别是神经网络的输入和输出，$a \in \mathbb{R}^N$为权值向量， N代表节点个数，$F(\eta) = [f_1(\eta), \cdots, f_N(\eta)]^T \in \mathbb{R}^N$是基函数向量， $f_i(\eta)$通常选为高斯函数：

$$f_i(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp(-\frac{\|\eta - h_i\|^2}{2r^2}),\ i = 1, \cdots, N$$

其中$h_i \in \mathbb{R}^q$和$r > 0$为常量，分别称为基函数的中心和宽度。

3.1 基于神经网络的鲁棒自适应控制

引理3.1：对于任意给定的常数$\mu > 0$和任意连续函数$\psi(\eta)\colon \Omega_\eta \to \mathbb{R}$，其中$\Omega_\eta \subset \mathbb{R}^q$为一紧集，通过适当地选取$r$、$h_i$和充分大的$N$，总存在RBF神经网络$a^T F(\eta)$使得

$$\psi(\eta) = a^T F(\eta) + \Delta(\eta), \quad |\Delta(\eta)| \le \mu, \quad \forall \eta \in \Omega_\eta$$

将$\varphi(y)$的第i个元素记为$\varphi_i(y)$。本节将利用RBF神经网络来逼近$\varphi_i(y)$：

$$\varphi_i(y) = a_i^T F_i(y) + \Delta_i(y), \quad |\Delta_i(y)| \le \mu_i, \quad \forall y \in \Omega_y \tag{3.1.2}$$

将式(3.1.2)代入(3.1.1)，可得

$$\dot{x} = Ax + H(y)\bar{a} + \bar{b}u + \bar{\Delta}(y) + \delta(t) \tag{3.1.3}$$

其中 $\bar{a} = [a_1^T, \cdots, a_n^T]^T \in \mathbb{R}^l$，$\bar{\Delta}(y) = [\Delta_1(y), \cdots, \Delta_n(y)]^T \in \mathbb{R}^n$，$l = \sum_{i=1}^n N_i$，

$$H(y)=\begin{bmatrix} F_1^T(y) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & F_n^T(y) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times l}$$

3.1.3 滤波器设计

构造如下一组K滤波器:

$$\dot{\xi}=A_0\xi+Ky \tag{3.1.4}$$

$$\dot{\Xi}=A_0\Xi+H(y) \tag{3.1.5}$$

$$\dot{\lambda}=A_0\lambda+E_nu \tag{3.1.6}$$

其中$K=[k_1,\dots,k_n]^T$由设计人员选取使得$A_0=A-KE_1^T$为Hurwitz矩阵，E_i表示$\mathbb{R}^n$中的第i个坐标向量。引入信号$v_j=A_0^j\lambda(j=0,\dots,m)$，其导数满足

$$\dot{v}_j=A_0v_j+E_{n-j}u \tag{3.1.7}$$

3.1 基于神经网络的鲁棒自适应控制

x的估计值$\hat{x}$可表示为

$$\hat{x} = \xi + \Xi\bar{a} + \sum_{j=0}^{m} b_j v_j \tag{3.1.8}$$

定义$\varepsilon = x - \hat{x}$，可以证明：

$$\dot{\varepsilon} = A_0\varepsilon + \bar{\Delta}(y) + \delta(t) \tag{3.1.9}$$

令δ，ξ，λ，v_j和ε的第i个元素分别记为δ_i，ξ_i，λ_i，$v_{j,i}$和ε_i，$H(y)$和Ξ的第i行分别记为$H_i(y)$和Ξ_i。由式(3.1.3)、(3.1.8)可知

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x_2 + H_1(y)\bar{a} + \bar{\Delta}_1(y) + \delta_1(t) \\ &= \xi_2 + [H_1(y) + \Xi_2]\bar{a} + \sum_{j=0}^{m} b_j v_{j,2} + \varpi\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

其中$\varpi = \varepsilon_2 + \bar{\Delta}_1(y) + \delta_1(t)$有界，即存在未知常量$g$，使得

$$|\varpi(t)| \le g,\ \forall t \ge 0 \tag{3.1.11}$$

3.1.4 控制器设计

定义

$$z_1 = y - y_d,\ \ z_i = v_{m,i} - \alpha_{i-1}, i = 2, \cdots, \rho \tag{3.1.12}$$

其中α_{i-1}是将在第$i-1$步中设计的镇定函数。令

$$\alpha_\rho := u + v_{m,\rho+1},\ \ z_{\rho+1} := 0 \tag{3.1.13}$$

由式(3.1.7)、(3.1.12)和(3.1.13)有

$$\dot{v}_{m,i} = -k_i v_{m,1} + z_{i+1} + \alpha_i, i = 2, \cdots, \rho \tag{3.1.14}$$

第1步：$z_1 = y - y_d$的导数可以表示为

$$\dot{z}_1 = b_m z_2 + b_m \alpha_1 + \xi_2 + \theta^T \omega_1 + \varpi - \dot{y}_d \tag{3.1.15}$$

其中 $\omega_1 = \left[H_1(y) + \Xi_2, 0, v_{m-1,2}, \cdots, v_{0,2}\right]^T \in \mathbb{R}^{l+m+1}$，

$\theta = [\bar{a}^T, b^T]^T \in \mathbb{R}^{l+m+1}$，定义第1个准Lyapunov函数：

定义

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1}\tilde{\theta} + \frac{|b_m|}{2\gamma}\tilde{p}^2 \tag{3.1.16}$$

其中正定对称矩阵$\Gamma \in \mathbb{R}^{(l+m+1)\times(l+m+1)}$和标量$\gamma > 0$为设计参数，$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$， $\tilde{p} = \hat{p} - p$，$\hat{\theta}$和$\hat{p}$分别为θ和$p = \frac{1}{b_m}$的估计。微分V_1有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \le\ & z_1(b_m z_2 + b_m \alpha_1 + \xi_2 + \theta^T \omega_1 + \varpi - \dot{y}_d) \\ & + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} + \frac{|b_m|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\hat{p}}\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

由Young不等式和式(3.1.11)可以验证

$$z_1 \varpi \le d_1 z_1^2 + \frac{g^2}{4d_1} \tag{3.1.18}$$

其中$d_1 > 0$为设计参数。将(3.1.18)代入(3.1.17)得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\le z_1\left(b_m z_2 + b_m\alpha_1 + \xi_2 + \hat{\theta}^T\omega_1 + d_1 z_1 - \dot{y}_d\right)\\ &\quad +\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \Gamma\omega_1 z_1\right) + \frac{|b_m|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\hat{p}} + \frac{g^2}{4d_1}\\ &\le -c_1 z_1^2 + z_1 b_m z_2 + z_1 b_m\alpha_1 - z_1\bar{\alpha}_1\\ &\quad +\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \Gamma\omega_1 z_1\right) + \frac{|b_m|}{\gamma}\tilde{p}\dot{\hat{p}} + \frac{g^2}{4d_1}\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

其中$c_1 > 0$为设计参数，$\bar{\alpha}_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T\omega_1 - \xi_2 - d_1 z_1 + \dot{y}_d$。

针对$\hat{\theta}$，定义第1个调节函数

$$\tau_1 = \Gamma\omega_1 z_1 - \sigma_1\Gamma\hat{\theta} \tag{3.1.20}$$

选取

$$\alpha_1 = \hat{p}\bar{\alpha}_1 \tag{3.1.21}$$

其中$\hat{p}$对应的自适应律为

$$\dot{\hat{p}} = -\operatorname{sign}(b_m)\gamma z_1\bar{\alpha}_1 - \gamma\sigma_2\hat{p} \tag{3.1.22}$$

将式(3.1.20) − (3.1.22)代入(3.1.19)并注意$b_m\hat{p} - b_m\tilde{p} = b_m p = 1$，我们有

$$\dot{V}_1 \le -c_1z_1^2 + z_1b_mz_2 + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1\right)$$
$$-\sigma_1\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_2|b_m|\tilde{p}\hat{p} + \frac{g^2}{4d_1} \tag{3.1.23}$$

第2步：注意到α_1可表示为y, $\hat{\theta}$和$X_1 = [y_d, \dot{y}_d, \xi, \Xi_1, \dots, \Xi_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, \hat{p}]^T$的光滑函数。于是$z_2 = v_{m,2} - \alpha_1$的导数可表示为

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + \beta_2 + \theta^T\omega_2 - b_mz_1 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\varpi - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \tag{3.1.24}$$

其中 $\omega_2 = [-\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(H_1(y)+\Xi_2), z_1 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}v_{m,2}, -\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}v_{m-1,2}, \cdots,$ $-\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}v_{0,2}]^T \in \mathbb{R}^{l+m+1}$，$\beta_2 = -k_2 v_{m,1} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\xi_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial X_1}\dot{X}_1$。

定义第2个准Lyapunov函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \tag{3.1.25}$$

其导数满足

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 \le & -c_1 z_1^2 + z_2\left(z_3 + \alpha_2 + \beta_2 + \theta^T\omega_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\varpi - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right) \\
& +\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1\right) - \sigma_1\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_2|b_m|\tilde{p}\hat{p} + \frac{g^2}{4d_1} \\
\le & -c_1 z_1^2 + z_2\left(z_3 + \alpha_2 + \beta_2 + \hat{\theta}^T\omega_2 + d_2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right) \\
& +\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1 - \Gamma\omega_2 z_2\right) - \sigma_1\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_2|b_m|\tilde{p}\hat{p} \\
& + \sum_{j=1}^{2}\frac{g^2}{4d_j}
\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

其中$d_2 > 0$为设计参数，令

$$\tau_2 = \tau_1 + \Gamma\omega_2 z_2 \tag{3.1.27}$$

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - \beta_2 - \hat{\theta}^T\omega_2 - d_2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_2 + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\tau_2 \tag{3.1.28}$$

其中$c_2 > 0$为设计参数。于是有

$$\dot{V}_2 \le -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + z_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}\left(\tau_2 - \dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_2\right)$$
$$-\sigma_1\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_2|b_m|\tilde{p}\hat{p} + \sum_{j=1}^{2}\frac{g^2}{4d_j} \tag{3.1.29}$$

第i步($3 \le i \le \rho$)：注意到α_{i-1}是$y, \hat{\theta}$和$X_{i-1} = [y_d, \dot{y}_d, \ldots, y_d^{(i-1)}, \xi, \Xi_1, \ldots, \Xi_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+i-1}, \hat{p}]^T$的光滑函数, $z_i = v_{m,i} - \alpha_{i-1}$的导数可表示为

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i + \beta_i + \theta^T\omega_i - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\varpi - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \tag{3.1.30}$$

3.1 基于神经网络的鲁棒自适应控制

其中 $\omega_i = -\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\left[H_1(y) + \Xi_2, v_{m,2}, \dots, v_{0,2}\right]^T \in \mathbb{R}^{q+m+1}$， $\beta_i = -k_i v_{m,1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\xi_2 - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial X_{i-1}}\dot{X}_{i-1}$。选取第$i$个准Lyapunov函数:

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2 \tag{3.1.31}$$

其中V_{i-1}的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}_{i-1} \le & -\sum_{j=1}^{i-1} c_j z_j^2 + \sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}}\left(\tau_{i-1} - \dot{\hat{\theta}}\right) \\ & + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1}\right) + z_{i-1}z_i \\ & -\sigma_1 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} - \sigma_2 |b_m| \tilde{p}\hat{p} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{g^2}{4d_j}\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

利用(3.1.30) – (3.1.32)可以证明

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_i \le & -\sum_{j=1}^{i-1} c_j z_j^2 + z_i\Big(z_{i-1}+z_{i+1} + \alpha_i + \beta_i + \theta^T\omega_i \\
& - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\varpi - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\Big) + \sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial\hat{\theta}}\big(\tau_{i-1}-\dot{\hat{\theta}}\big) \\
& +\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1}\right) - \sigma_1\tilde{\theta}^T\hat{\theta} - \sigma_2|b_m|\tilde{p}\hat{p} + \sum_{j=1}^{i-1}\frac{g^2}{4d_j} \\
\le & -\sum_{j=1}^{i-1} c_j z_j^2 + z_i\Big(z_{i-1}+z_{i+1} + \alpha_i + \beta_i + \hat{\theta}^T\omega_i \\
& + d_i\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\Big) + \sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial\hat{\theta}}\big(\tau_{i-1}-\dot{\hat{\theta}}\big) \\
& +\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1} - \Gamma\omega_i z_i\right) - \sigma_1\tilde{\theta}^T\hat{\theta} \\
& -\sigma_2|b_m|\tilde{p}\hat{p} + \sum_{j=1}^{i}\frac{g^2}{4d_j}
\end{aligned}
\tag{3.1.33}
$$

3.1 基于神经网络的鲁棒自适应控制

令

$$\tau_i = \tau_{i-1} + \Gamma \omega_i z_i \tag{3.1.34}$$

$$\alpha_i = -c_i z_i - z_{i-1} - \beta_i - \hat{\theta}^T \omega_i - d_i \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_i + \sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \omega_i \tag{3.1.35}$$

其中$c_i > 0$为设计参数。然后式(3.1.33)变为

$$\dot{V}_i \le -\sum_{j=1}^{i} c_j z_j^2 + z_i z_{i+1} + \sum_{j=2}^{i} z_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \left(\tau_i - \dot{\hat{\theta}}\right) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left(\dot{\hat{\theta}} - \tau_i\right) - \sigma_1 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} - \sigma_2 |b_m| \tilde{p} \hat{p} + \sum_{j=1}^{i} \frac{g^2}{4 d_j} \tag{3.1.36}$$

3.1 基于神经网络的鲁棒自适应控制

在得到τ_ρ和α_ρ后，令

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau_\rho \tag{3.1.37}$$

考虑式(3.1.13)可知

$$u = \alpha_\rho - v_{m,\rho+1} \tag{3.1.38}$$

在式(3.1.36)中，令$i = \rho$并利用式(3.1.37)和(3.1.13)，可得

$$\dot{V}_\rho \le -\sum_{j=1}^{\rho} c_j z_j^2 - \sigma_1 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} - \sigma_2 |b_m| \tilde{p} \hat{p} + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{g^2}{4d_j} \tag{3.1.39}$$

3.1.5 稳定性分析

定理3.1：考虑由被控对象(3.1.1)、滤波器(3.1.4) − (3.1.6)、自适应律(3.1.22)和(3.1.37)以及控制律(3.1.38)组成的闭环系统。假定假设1-4成立且神经网络逼近(3.1.2)在充分大的紧集Ω_y上成立，则闭环系统内所有信号一致最终有界且z_1可收敛至一任意小的残集内。

证明：利用不等式$-\tilde{\theta}^T\hat{\theta} \leq -\frac{1}{2}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} + \frac{1}{2}\theta^T\theta$和$-\tilde{p}\hat{p} \leq -\frac{1}{2}\tilde{p}^2 + \frac{1}{2}p^2$，式(3.1.39)可改写为

$$\begin{aligned}\dot{V}_\rho &\leq -\sum_{j=1}^{\rho} c_j z_j^2 - \frac{1}{2}\sigma_1\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} - \frac{1}{2}\sigma_2|b_m|\tilde{p}^2 + K_1 \\ &\leq -K_2 V_\rho + K_1\end{aligned} \tag{3.1.40}$$

3.1 基于神经网络的鲁棒自适应控制

其中$K_1=\frac{1}{2}\sigma_1\theta^T\theta+\frac{1}{2}\sigma_2|b_m|p^2+\sum_{j=1}^{\rho}\frac{g^2}{4d_j}$, $K_2=\min\{2c_1,\cdots,2c_\rho,\frac{\sigma_1}{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})},\gamma\sigma_2\}$。上式意味着

$$0\le V_\rho(t)\le\frac{K_1}{K_2}+\left[V_\rho(0)-\frac{K_1}{K_2}\right]e^{-K_2t} \tag{3.1.41}$$

由(3.1.41)可知， V_ρ有界。然后类似于2.3节的分析，可以证明闭环系统的信号一致最终有界。此外，由式(3.1.41)和(3.1.16)可知

$$\lim_{t\to+\infty}|z_1(t)|\le\lim_{t\to+\infty}\sqrt{2V_\rho(t)}\le\sqrt{\frac{2K_1}{K_2}} \tag{3.1.42}$$

因此通过增大K_2，可以使得z_1收敛至一任意小的残集内。