现代控制理论

——切换系统分析与综合

郑建英

北京航空航天大学　自动化科学与电气工程学院

本节基本内容

1. 切换线性系统
2. 任意切换下系统稳定性分析
3. 慢变切换下系统稳定性分析

切换系统

多个子系统 ＋ 切换律 ＝ 切换系统

- 刻画自然、社会及工程系统由于环境的变化而表现出的不同模态
- 基于不同控制器切换的控制技术

☞ 为控制器设计带来额外的自由度、可以处理高度复杂的非线性系统和大型不确定性系统的建模

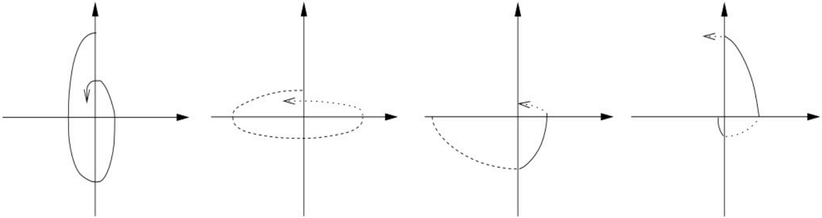
切换系统

切换率 \ 切换策略的分类

- 任意切换和受限切换
- 依赖于状态的切换和仅依赖于时间的切换
- 确定性切换和随机性切换
- 自主切换和能控切换

切换系统

稳定性问题

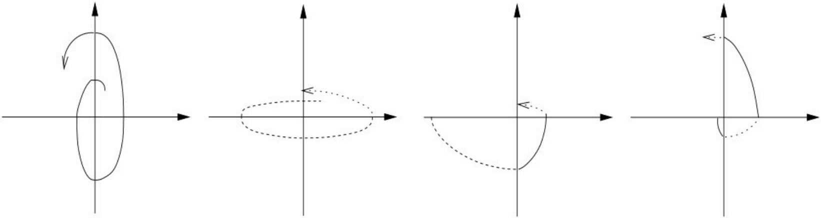


稳定子系统　稳定子系统　稳定切换律　不稳定切换律

<u>**稳定性分析问题：**什么条件下切换系统是稳定的</u>

切换系统

稳定性问题



不稳定子系统　不稳定子系统　稳定切换律　不稳定切换律

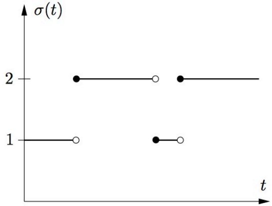
切换镇定问题： 如何设计切换律使系统稳定

切换线性系统

连续时间切换线性系统

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \tag{1}$$

- 系统状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$
- 切换率 $\sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{I} \triangleq \{1, \ldots, m\}$ — 右连续函数, 产生切换信号



- $A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \ldots, A_m\}$; 当 $\sigma(t) = i$, $A_{\sigma(t)} = A_i$

切换线性系统

- 渐近稳定 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$
- 指数稳定 $\|x(t)\| \le ce^{-\lambda t}\|x(0)\|\ \forall t \ge 0$ λ: 稳定裕度

☞ 只依赖于时间的切换率: 渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 指数稳定

稳定性分析问题

① $\sigma(t)$ 为任意切换

② $\sigma(t)$ 为基于驻留时间或平均驻留时间下的切换

什么条件下切换系统是渐近稳定的?

假设条件: $A_i, i \in \mathcal{I}$ 是 Hurwitz

切换线性系统

- 渐近稳定 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$
- 指数稳定 $\|x(t)\| \le ce^{-\lambda t}\|x(0)\| \ \forall t \ge 0$ 　　λ: 稳定裕度

☞ 只依赖于时间的切换率: 渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 指数稳定

稳定性分析问题

① $\sigma(t)$ 为任意切换

② $\sigma(t)$ 为基于驻留时间或平均驻留时间下的切换

什么条件下切换系统是渐近稳定的?

假设条件: $A_i, i \in \mathcal{I}$ 是 Hurwitz

任意切换下系统稳定性分析

回顾： 单一线性时不变系统 $\dot{x} = Ax$ 的渐近稳定性等价于二次 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T Px$ 的存在性，即

1. $V(x) > 0 \Leftrightarrow P > 0$
2. $\dot{V} = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA)x < 0 \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}P + PA < 0$

也就是，A 是 Hurwitz 的当且仅当

$$\forall Q > 0, A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$$

有正定解 P，且 $P = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t} Q \mathrm{e}^{At} \mathrm{d}t$

任意切换下系统稳定性分析

定理 1

当切换系统 *(1)* 存在一个**共同二次 *Lyapunov* 函数**，即

$$V(x) = x^T P x, P > 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} A_i x < 0, \forall i \in \mathcal{I}$$

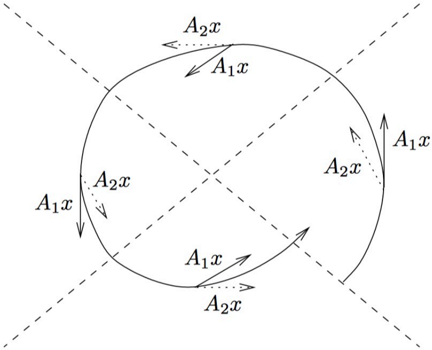
则它在任意切换下是渐近稳定的。

- 等价于存在 $P > 0$ 使得 $A_i^{\mathrm{T}} P + P A_i < 0 \ \forall i \in \mathcal{I}$
  —线性矩阵不等式问题
- 只是充分条件

- 考虑具有两个子系统的连续二阶切换系统：

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}$$

  - 最差情况下切换渐近稳定 $\Rightarrow$ 任意切换下渐近稳定

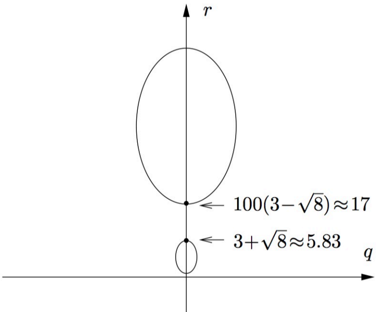


任意切换下系统稳定性分析

令 $P=\begin{bmatrix}1 & q\\ q & r\end{bmatrix}$, 则

$$-A_1P^T-PA_1=\begin{bmatrix}2-2q & 2q+1-r\\ 2q+1-r & 2q+2r\end{bmatrix}>0 \Longrightarrow q^2+\frac{(r-3)^2}{8}<1$$

$$-A_2P^T-PA_2=\begin{bmatrix}2-\frac{q}{5} & 2q+10-\frac{r}{10}\\ 2q+10-\frac{r}{10} & 20q+2r\end{bmatrix}>0 \Longrightarrow q^2+\frac{(r-300)^2}{800}<100$$



两个椭球无交集
$\Rightarrow$ 不存在共同二次
Lyapunov 函数

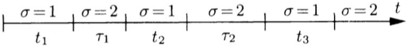
任意切换下系统稳定性分析

保证共同二次 Lyapunov 函数存在的代数条件?

- 可交换矩阵 $AB = BA$
- 矩阵指数 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^A$

☞ 当 A, B 是可交换时，有 $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$

当 $m = 2$, 即切换系统 (1) 只有两个子系统且 A_1, A_2 是可交换时:



$$
\begin{aligned}
x(t) &= \cdots e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 t_2} e^{A_2 \tau_1} e^{A_1 t_1} x(0) \\
&= \cdots e^{A_2 \tau_2} e^{A_2 \tau_1} \cdots e^{A_1 t_2} e^{A_1 t_1} x(0) \\
&= e^{A_2(\tau_1 + \tau_2 + \ldots)} e^{A_1(t_1 + t_2 + \ldots)} x(0)
\end{aligned}
$$

当 $t \to \infty$, 至少 $\tau_1 + \tau_2 + \ldots$ 或者 $t_1 + t_2 + \ldots$ 趋于无穷，由 A_1, A_2 是 Hurwitz 知， $e^{A_2(\tau_1+\tau_2+\ldots)}$ 或 $e^{A_1(t_1+t_2+\ldots)}$ 趋于 0，则 $x(t) \to 0$。因此切换系统是渐进稳定的

定理 2

设 $A_i, i \in \mathcal{I}$ 为一组可交换的 *Hurwitz* 矩阵，则切换系统 *(1)* 存在一个共同二次 *Lyapunov* 函数。

☞构造方法如下：

选一个正定矩阵 P_0, 定义 $P_i > 0, i = 1, \ldots, m$ 如下：

$$\begin{cases} P_1 A_1 + A_1^{\mathrm{T}} P_1 = -P_0 \\ P_2 A_2 + A_2^{\mathrm{T}} P_2 = -P_1 \\ \vdots \\ P_m A_m + A_m^{\mathrm{T}} P_m = -P_{m-1} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P_1 = \int_0^\infty e^{A_1^T t_1} P_0 e^{A_1 t_1} dt_1$$
$$P_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t_2} P_1 e^{A_2 t_2} dt_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t_2} \left(\int_0^\infty e^{A_1^T t_1} P_0 e^{A_1 t_1} dt_1 \right) e^{A_2 t_2} dt_2$$
$$P_m = \int_0^\infty e^{A_m^T t_m} \ldots \left(\int_0^\infty e^{A_1^T t_1} P_0 e^{A_1 t_1} dt_1 \right) \ldots e^{A_m t_m} dt_m$$

任意切换下系统稳定性分析

显然 $P_m > 0$. 欲证明 $A_i^{\mathrm{T}} P_m + P_m A_i < 0\ \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow P(x) = x^T P_m x$

令 $m = 3$(为了分析方便):

$$P_3 = \int_0^\infty e^{A_3^T t_3} \left(\int_0^\infty e^{A_2^T t_2} \left(\int_0^\infty e^{A_1^T t_1} P_0 e^{A_1 t_1} dt_1 \right) e^{A_2 t_2} dt_2 \right) e^{A_3 t_3} dt_3$$
$$= \int_0^\infty e^{A_3^T t_3} Q_3 e^{A_3 t_3} dt_3 \Rightarrow P_3 A_3 + A_3^{\mathrm{T}} P_3 = -Q_3$$

$$P_3 = \int_0^\infty e^{A_2^T t_2} \left(\int_0^\infty e^{A_3^T t_3} \left(\int_0^\infty e^{A_1^T t_1} P_0 e^{A_1 t_1} dt_1 \right) e^{A_3 t_3} dt_3 \right) e^{A_2 t_2} dt_2$$
$$= \int_0^\infty e^{A_2^T t_2} Q_2 e^{A_2 t_2} dt_2 \Rightarrow P_3 A_2 + A_2^{\mathrm{T}} P_3 = -Q_2$$

$$P_3 = \int_0^\infty e^{A_1^T t_1} \left(\int_0^\infty e^{A_2^T t_2} \left(\int_0^\infty e^{A_2^T t_3} P_0 e^{A_3 t_3} dt_1 \right) e^{A_2 t_2} dt_2 \right) e^{A_1 t_1} dt_1$$
$$= \int_0^\infty e^{A_1^T t_1} Q_1 e^{A_1 t_1} dt_1 \Rightarrow P_3 A_1 + A_1^{\mathrm{T}} P_3 = -Q_1$$

任意切换下系统稳定性分析

定理 3

当 $A_i, i \in \mathcal{I}$ 均为上三角或下三角 Hurwitz 矩阵，则切换系统 (1) 存在一个共同二次 Lyapunov 函数。

证明：

- 考虑一阶切换线性系统 $\dot{x}(t) = a_\sigma x(t)$。当 $a_i < 0, i \in \mathcal{I}$，对任意 $p > 0$，有 $pa_i + a_i^T p = 2a_i p < 0$，即共同二次 Lyapunov 函数存在。
- 考虑 n 阶切换线性系统 (1)，且 $A_i, i \in \mathcal{I}$ 均为上三角矩阵，即

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{1,1}^i & a_{1,2}^i & a_{1,3}^i & \cdots & a_{1,n}^i \\ & a_{2,2}^i & a_{2,3}^i & \cdots & a_{2,n}^i \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n}^i \\ & & & & a_{n,n}^i \end{bmatrix}$$

其中 $a_{j,j}^i < 0, j \in \{1, \ldots, n\}$

定理 3

当 $A_i, i \in \mathcal{I}$ 均为上三角或下三角 Hurwitz 矩阵，则切换系统 (1) 存在一个共同二次 Lyapunov 函数。

证明：

- 考虑一阶切换线性系统 $x(t) = a_\sigma x(t)$。当 $a_i < 0, i \in \mathcal{I}$，对任意 $p > 0$，有 $pa_i + a_i^T p = 2a_i p < 0$，即共同二次 Lyapunov 函数存在。
- 考虑 n 阶切换线性系统 (1)，且 $A_i, i \in \mathcal{I}$ 均为上三角矩阵，即

$$A_i = \begin{bmatrix} a^i_{1,1} & a^i_{1,2} & a^i_{1,3} & \cdots & a^i_{1,n} \\ & a^i_{2,2} & a^i_{2,3} & \cdots & a^i_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a^i_{n-1,n} \\ & & & & a^i_{n,n} \end{bmatrix}$$

其中 $a^i_{j,j} < 0, j \in \{1, \ldots, n\}$

任意切换下系统稳定性分析

- $\dot{x}_n = a^\sigma_{n,n} x_n$ 渐近稳定，即 $\lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0$
- $\dot{x}_{n-1} = a^\sigma_{n-1,n-1} x_{n-1} + a^\sigma_{n-1,n} x_n \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x_{n-1}(t) = 0$
- 数学归纳法 $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} x_j(t) = 0, j \in \{1, \ldots, n\}$

构造共同二次 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T P x$, P **是对角正定矩阵:**

- **矩阵的舒尔补 (Schur complement)**

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

  - 当 D 是可逆时，D 在矩阵中的舒尔补 $M/D := A - BD^{-1}C$
  - 当 A 是可逆时，A 在矩阵中的舒尔补 $M/A := D - CA^{-1}B$
  - $M > 0$ 当且仅当 $A > 0, M/A > 0$
  - $M > 0$ 当且仅当 $D > 0, M/D > 0$

任意切换下系统稳定性分析

- $\dot{x}_n = a^{\sigma}_{n,n} x_n$ 渐近稳定，即 $\lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0$
- $\dot{x}_{n-1} = a^{\sigma}_{n-1,n-1} x_{n-1} + a^{\sigma}_{n-1,n} x_n \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x_{n-1}(t) = 0$
- 数学归纳法 $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} x_j(t) = 0, j \in \{1, \ldots, n\}$

构造共同二次 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T P x$, P 是对角正定矩阵:

- **矩阵的舒尔补 (Schur complement)**

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

  - 当 D 是可逆时，D 在矩阵中的舒尔补 $M/D := A - BD^{-1}C$
  - 当 A 是可逆时，A 在矩阵中的舒尔补 $M/A := D - CA^{-1}B$
  - $M > 0$ 当且仅当 $A > 0, M/A > 0$
  - $M > 0$ 当且仅当 $D > 0, M/D > 0$

任意切换下系统稳定性分析

数学归纳构造法:

- 令 $P=\mathrm{diag}\{p_1,\ldots,p_n\}, p_i>0$ 待设计
- 令 A_i^j 表示 A_i 的第 $j,j+1,\ldots,n$ 行和第 $j,j+1,\ldots,n$ 列组成的子矩阵。则

$$A_i^j=\begin{bmatrix} a_{j,j}^i & a_{j,j+1}^i & a_{j,j+2}^i & \cdots & a_{j,n}^i \\ & a_{j+1,j+1}^i & a_{j+1,j+2}^i & \cdots & a_{j+1,n}^i \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n}^i \\ & & & & a_{n,n}^i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{j,j}^i & \bar{a}_j^i \\ 0 & A_i^{j+1} \end{bmatrix}$$

☞ 设计 $p_i, i=1,\ldots,n$ 使 $PA_j+A_j^TP<0, j=1,\ldots,m$

- 选择一个正实数 p_n，显然 $pa_{n,n}^i+a_{n,n}^{iT}p=2a_{n,n}^ip<0, i\in\mathcal{I}$
- 假设构造了 $P_{j+1}=\mathrm{diag}\{p_{j+1},\ldots,p_n\}$ 使得

$$P_{j+1}A_i^{j+1}+(A_i^{j+1})^TP_{j+1}<0, i\in\mathcal{I}$$

任意切换下系统稳定性分析

- 寻找正实数 p_j 使得

$$
\begin{aligned}
P_jA_i^j + A_i^{jT}P_j &= \begin{bmatrix} p_j & 0 \\ 0 & P_{j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j,j}^i & \bar{a}_j^i \\ 0 & A_i^{j+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{j,j}^i & \bar{a}_j^i \\ 0 & A_i^{j+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_j & 0 \\ 0 & P_{j+1} \end{bmatrix} \\
&< 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2p_j a_{j,j}^i & -p_j\bar{a}_j^i \\ -(\bar{a}_j^i)^T p_j & -(P_{j+1}A_i^{j+1} + (A_i^{j+1})^T P_{j+1}) \end{bmatrix} > 0 \\
&\Rightarrow -2p_j a_{j,j}^i + p_j\bar{a}_j^i(P_{j+1}A_i^{j+1} + (A_i^{j+1})^T P_{j+1})^{-1}(\bar{a}_j^i)^T p_j > 0 \\
&\Rightarrow p_j > -\frac{2a_{j,j}^i}{\bar{a}_j^i(P_{j+1}A_i^{j+1} + (A_i^{j+1})^T P_{j+1})^{-1}(\bar{a}_j^i)^T}, i \in \mathcal{I}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 通过数学归纳构造法，可以完成对角矩阵 P 的设计

任意切换下系统稳定性分析

定理 4

当存在非奇异矩阵 S 使得 $SA_iS^{-1}, i \in \mathcal{I}$ 均为上三角或下三角矩阵，则切换系统 (1) 存在一个共同二次 Lyapunov 函数。

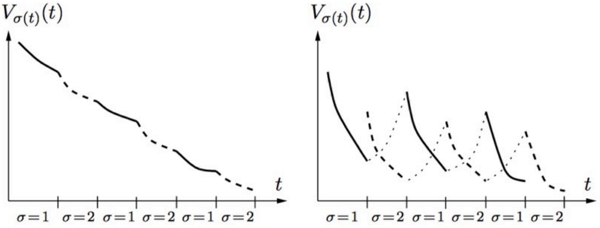
记 $B_i := SA_iS^{-1}$。当 B_i 是实矩阵时，则由定理 3，存在 $P > 0$ 使得
$PB_i + B_i^TP > 0$
令 $Q = S^TPS \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} QA_i + A_i^TQ &= S^TPSS^{-1}B_iS + S^TB_i^TS^{-T}S^TPS \\ &= S^TPB_iS + S^TB_i^TPS = S^T(PB_i + B_i^TP)S \\ &> 0 \end{aligned}$$

当 B_i 是复矩阵时，只需要对定理 3 的证明进行小改动。

多 Lyapunov 函数:

- 由对应于各个子系统的类 Lyapunov 函数组成
- 各类 Lyapunov 函数只需要对状态空间中特定区域的子系统具有非正李导数即可
- 可能不连续或者仅分片可微



: Two Lyapunov functions (solid graphs correspond to V_1, dashed graphs correspond to V_2): (a) continuous V_σ, (b) discontinuous V_σ

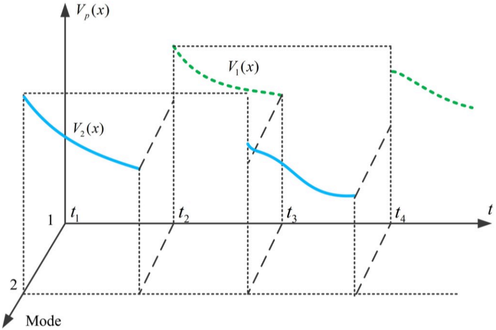
任意切换下系统稳定性分析

定理 5

令 V_i 为子系统 A_i 的 *Lyapunov* 函数。当给定任何一对切换时间 (t_i, t_j)，满足 $\sigma(t_i) = \sigma(t_j) = l \in \mathcal{I}$ 且 $\sigma(t_k) \neq l$ *for* $t_i < t_k < t_j$，若

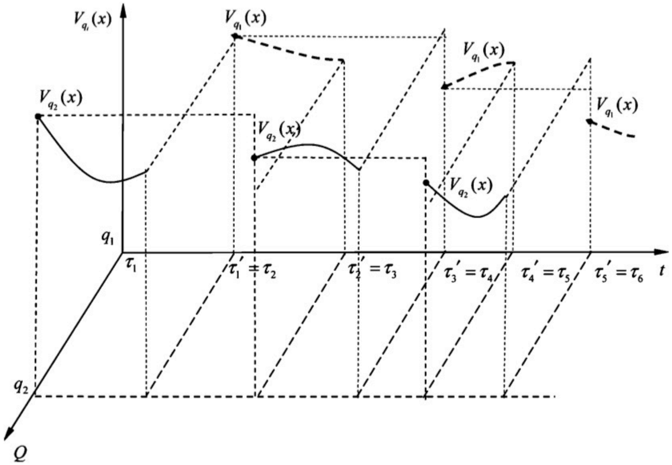
$$V_l(x(t_j)) - V_l(x(t_i)) < 0,$$

则切换线性系统 *(1)* 是渐近稳定的



任意切换下系统稳定性分析

即使当某段时间 Lyapunov 函数增加，切换系统也可能是稳定的



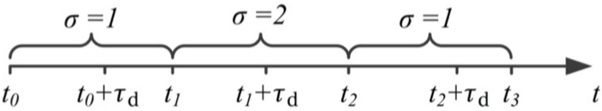
任意切换下系统稳定性分析

其他方法或结论:

- 各种不同类型的 Lyapunov 函数
- Lie 代数方法
- 多胞不确定线性时变系统的鲁棒渐近稳定性
- ...

慢变切换下系统稳定性分析

- 基于**驻留时间** τ_D的切换律（对应集合记 $\mathcal{S}[\tau_D]$）：存在 $\tau_D > 0$ 使得对任意 $i \in \mathbb{N}^+$，$t_{i+1} - t_i \geq \tau_{\mathrm{D}}$ (t_i：切换时刻)



- 令 $N_\sigma(t, T)$ 是时间段 (t, T) 内的切换次数

$$\Rightarrow (N_\sigma(t, T) - 1)\tau_D \leq T - t$$

$$\Rightarrow N_\sigma(t, T) \leq 1 + \frac{T - t}{\tau_D}$$

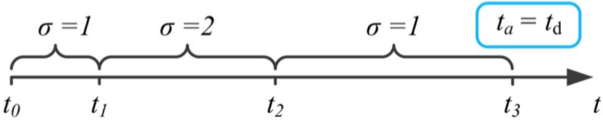
- **当 τ_d 足够大时，切换线性系统指数稳定**

慢变切换下系统稳定性分析

- 基于**平均驻留时间** τ_D的切换律（对应集合记 $\mathcal{S}_{ave}[\tau_D, N_0]$）：存在 $\tau_d, N_0 > 0$ 使得

$$N_\sigma(t,T) \leq N_0 + \frac{T-t}{\tau_D} \quad \forall T \geq t \geq 0,$$

其中，$N_\sigma(t,T)$ 是时间段 (t,T) 内的切换次数



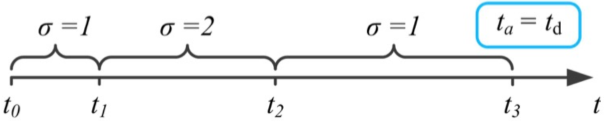
- $\mathcal{S}[\tau_D] \subset \mathcal{S}_{ave}[\tau_D, 1]$
- 当 τ_D 足够大时，切换线性系统指数稳定
- Q: 最小允许的驻留时间或平均驻留时间?

慢变切换下系统稳定性分析

- 基于**平均驻留时间** τ_D的切换律（对应集合记 $\mathcal{S}_{ave}[\tau_D, N_0]$）：存在 $\tau_d, N_0 > 0$ 使得

$$N_\sigma(t, T) \leq N_0 + \frac{T-t}{\tau_D} \quad \forall T \geq t \geq 0,$$

其中，$N_\sigma(t, T)$ 是时间段 (t, T) 内的切换次数



- $\mathcal{S}[\tau_D] \subset \mathcal{S}_{ave}[\tau_D, 1]$
- **当 τ_D 足够大时，切换线性系统指数稳定**
- **Q: 最小允许的驻留时间或平均驻留时间?**

定理 6

给定正实数 λ_0 使得对所有 $i \in \mathcal{I}$, $A_i + \lambda_0 I$ 是 *Hurwitz*。则对任何 $\lambda \in [0, \lambda_0)$，存在 τ_D^* 使得对任意 $\mathcal{S}_{ave}\ [\tau_D, N_0]$ 内的切换律，其中 $\tau_D \geq \tau_D^*$ 和 $N_0 > 0$，切换线性系统 *(1)* 是以稳定裕度 λ 指数稳定。

慢变切换下系统稳定性分析

证明:

- $A_i + \lambda_0 I$ 是 Hurwitz, $i \in \mathcal{I}$

  $\Rightarrow P_i\,(A_i + \lambda_0 I) + (A_i + \lambda_0 I)^T P_i = -I$; $\mathcal{P} = \{P_i : i \in \mathcal{I}\}$

  $\Rightarrow$ 子系统$\dot{x} = A_i x$的 Lyapunov 函数 $\quad V_i(x) \triangleq x^T P_i x$

1) V_i 是连续且沿着子系统 $\dot{x} = A_i x$ 指数下降

2) $\frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x + 2\lambda_0 V_i = x^T \left(P_i\,(A_i + \lambda_0 I) + (A_i + \lambda_0 I)^T P_i \right) x = -\|x\|^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x + 2\lambda_0 V_i < 0 \tag{2}$$

3)

$$\|x\|^2 \inf_{P \in \mathcal{P}} \sigma_{\min}[P] \le V_i(x) \le \|x\|^2 \sup_{\bar{P} \in \mathcal{P}} \sigma_{\max}[\bar{P}] \tag{3}$$

其中 $\sigma_{\min}$ 和 $\sigma_{\max}$ 分别表示矩阵的最小和最大奇异值

4)

$$\mu \triangleq \sup_{P,\bar{P} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma_{\max}[\bar{P}]}{\sigma_{\min}[P]} \Rightarrow V_i(x) \le \mu V_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i, j \in \mathcal{I} \tag{4}$$

慢变切换下系统稳定性分析

证明：

- $A_i + \lambda_0 I$ 是 Hurwitz, $i \in \mathcal{I}$
  $\Rightarrow P_i\,(A_i + \lambda_0 I) + (A_i + \lambda_0 I)^T P_i = -I$; $\mathcal{P} = \{P_i : i \in \mathcal{I}\}$
  $\Rightarrow$ 子系统$\dot{x} = A_i x$的 Lyapunov 函数 $\quad V_i(x) \triangleq x^T P_i x$

1) V_i 是连续且沿着子系统 $\dot{x} = A_i x$ 指数下降
2) $\frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x + 2\lambda_0 V_i = x^T \left(P_i\,(A_i + \lambda_0 I) + (A_i + \lambda_0 I)^T P_i \right) x = -\|x\|^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x + 2\lambda_0 V_i < 0 \tag{2}$$

3)

$$\|x\|^2 \inf_{P \in \mathcal{P}} \sigma_{\min}[P] \le V_i(x) \le \|x\|^2 \sup_{\bar{P} \in \mathcal{P}} \sigma_{\max}[\bar{P}] \tag{3}$$

其中 $\sigma_{\min}$ 和 $\sigma_{\max}$ 分别表示矩阵的最小和最大奇异值

4)

$$\mu \triangleq \sup_{P, \bar{P} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma_{\max}[\bar{P}]}{\sigma_{\min}[P]} \Rightarrow V_i(x) \le \mu V_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i, j \in \mathcal{I} \tag{4}$$

慢变切换下系统稳定性分析

证明:

- $A_i + \lambda_0 I$ 是 Hurwitz, $i \in \mathcal{I}$
  $\Rightarrow P_i(A_i + \lambda_0 I) + (A_i + \lambda_0 I)^T P_i = -I$; $\mathcal{P} = \{P_i : i \in \mathcal{I}\}$
  $\Rightarrow$ 子系统$\dot{x} = A_i x$的 Lyapunov 函数 $\quad V_i(x) \triangleq x^T P_i x$

1) V_i 是连续且沿着子系统 $\dot{x} = A_i x$ 指数下降

2) $\frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x + 2\lambda_0 V_i = x^T \left(P_i(A_i + \lambda_0 I) + (A_i + \lambda_0 I)^T P_i \right) x = -\|x\|^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x + 2\lambda_0 V_i < 0 \tag{2}$$

3)

$$\|x\|^2 \inf_{P \in \mathcal{P}} \sigma_{\min}[P] \leq V_i(x) \leq \|x\|^2 \sup_{\bar{P} \in \mathcal{P}} \sigma_{\max}[\bar{P}] \tag{3}$$

其中 $\sigma_{\min}$ 和 $\sigma_{\max}$ 分别表示矩阵的最小和最大奇异值

4)

$$\mu \triangleq \sup_{P, \bar{P} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma_{\max}[\bar{P}]}{\sigma_{\min}[P]} \Rightarrow V_i(x) \leq \mu V_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i, j \in \mathcal{I} \tag{4}$$

慢变切换下系统稳定性分析

证明:

- $A_i + \lambda_0 I$ 是 Hurwitz, $i \in \mathcal{I}$

  $\Rightarrow P_i\,(A_i + \lambda_0 I) + (A_i + \lambda_0 I)^T P_i = -I;\ \mathcal{P} = \{P_i : i \in \mathcal{I}\}$

  $\Rightarrow$ 子系统$\dot{x} = A_i x$的 Lyapunov 函数 $\quad V_i(x) \triangleq x^T P_i x$

1) V_i 是连续且沿着子系统 $\dot{x} = A_i x$ 指数下降

2) $\frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x + 2\lambda_0 V_i = x^T \left(P_i\,(A_i + \lambda_0 I) + (A_i + \lambda_0 I)^T P_i \right) x = -\|x\|^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x + 2\lambda_0 V_i < 0 \tag{2}$$

3)

$$\|x\|^2 \inf_{P \in \mathcal{P}} \sigma_{\min}[P] \le V_i(x) \le \|x\|^2 \sup_{\bar{P} \in \mathcal{P}} \sigma_{\max}[\bar{P}] \tag{3}$$

其中 $\sigma_{\min}$ 和 $\sigma_{\max}$ 分别表示矩阵的最小和最大奇异值

4)

$$\mu \triangleq \sup_{P, \bar{P} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma_{\max}[\bar{P}]}{\sigma_{\min}[P]} \Rightarrow V_i(x) \le \mu V_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i, j \in \mathcal{I} \tag{4}$$

慢变切换下系统稳定性分析

- 给定时间 $T > t_0 \geq 0$。令

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{N_\sigma(t_0,T)}$$

  表示时间段 (t_0, T) 上的信号切换时间

-

$$v(t) \triangleq e^{2\lambda_0 t} V_{\sigma(t)}(x(t)), \quad t \geq 0$$

  - 分片连续可微
  - 对于 $[t_i, t_{i+1})$，$\sigma(t_i) = l_i$，则

$$\dot{v}(t) = 2\lambda_0 e^{2\lambda_0 t} V_{l_i}(x) + e^{2\lambda_0 t} \frac{\partial V_{l_i}}{\partial x}(x) A_{l_i}(x), \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \tag{5}$$

$$(2) + (5) \Rightarrow \dot{v} < 0, t \in [t_i, t_{i+1})$$

$$\Rightarrow v(t) \leq v(t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i \in \{0, 1, \ldots, N_\sigma(t_0, T)\} \tag{6}$$

慢变切换下系统稳定性分析

- (4) $\Rightarrow$ 对任意 $i \in \{0, 1, \ldots, N_\sigma(t_0, T)\}$，有

$$v(t_{i+1}) = e^{2\lambda_0 t_{i+1}} V_{l_{i+1}}(x(t_{i+1})) \leq \mu e^{2\lambda_0 t_{i+1}} V_{l_i}(x(t_{i+1})) \tag{7}$$

- V_{l_i} 和 x 是连续的, 则对任意 $i \in \{0, 1, \ldots, N_\sigma(t_0, T)\}$，有

$$v(t_{i+1}) \leq \mu \lim_{\tau \uparrow t_{i+1}} e^{2\lambda_0 \tau} V_{l_i}(x(\tau)) = \mu \lim_{\tau \uparrow t_{i+1}} v(\tau) \tag{8}$$

-

$$(6) \Rightarrow \lim_{\tau \uparrow t_{i+1}} v(\tau) \leq v(t_i) \Rightarrow v(t_{i+1}) \leq \mu v(t_i)$$

$$\Longrightarrow v\left(t_{N_\sigma(t_0, T)}\right) \leq \mu^{N_\sigma(t_0, T)} v(t_0)$$

$$\Longrightarrow \lim_{\tau \uparrow T} v(\tau) \leq v\left(t_{N_\sigma(t_0, T)}\right) \leq \mu^{N_\sigma(t_0, T)} v(t_0)$$

$$\Longrightarrow e^{2\lambda_0 T} V_{\sigma(T^-)}(x(T)) \leq \mu^{N_\sigma(t_0, T)} e^{2\lambda_0 t_0} V_{\sigma(t_0)}(x(t_0))$$

其中 $\sigma(T^-) \triangleq \lim_{\tau \uparrow T} \sigma(\tau)$

慢变切换下系统稳定性分析

$$\Rightarrow V_{\sigma(T^-)}(x(T)) \le e^{-2\lambda_0(T-t_0)+N_\sigma(t_0,T)\log\mu} V_{\sigma(t_0)}(x(t_0))$$

$$(3) \Rightarrow \|x(T)\| \inf_{P\in\mathcal{P}} \sigma_{\min}[P] \le e^{-2\lambda_0(T-t_0)+N_\sigma(t_0,T)\log\mu} \|x(t_0)\| \sup_{\bar{P}\in\mathcal{P}} \sigma_{\max}[\bar{P}]$$

$$\Rightarrow \|x(T)\| \le p e^{-\lambda_0(T-t_0)+N_\sigma(t_0,T)\frac{\log\mu}{2}} \|x(t_0)\|, p \triangleq \left(\frac{\sup_{\bar{P}\in\mathcal{P}} \sigma_{\max}[\bar{P}]}{\inf_{P\in\mathcal{P}} \sigma_{\min}[P]}\right)$$

- 令 k 为实数。选择 $\tau_D^* \triangleq \frac{\log\mu}{2(\lambda_0-\lambda)}$， $N_0 \triangleq \frac{2k}{\log\mu}$.
  当切换律 $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{ave}}\ [\tau_D, N_0]$, 其中 $\tau_D \ge \tau_D^*$, 则有：

$$N_\sigma(t_0, T) \le N_0 + \frac{T-t_0}{\tau_D} \le N_0 + \frac{T-t_0}{\tau_D^*}$$

$$\Rightarrow N_\sigma(t_0, T) \le \frac{2k}{\log\mu} + \frac{2(T-t_0)(\lambda_0-\lambda)}{\log\mu}$$

$$\Rightarrow -\lambda_0(T-t_0) + N_\sigma(t_0, T)\frac{\log\mu}{2} \le k - \lambda(T-t_0)$$

$$\Rightarrow \|x(T)\| \le p e^{k-\lambda(T-t_0)} \|x(t_0)\|$$

因此 $x(t)$ 是以稳定裕度 λ 指数收敛

慢变切换下系统稳定性分析

$$\Rightarrow V_{\sigma(T^-)}(x(T)) \leq e^{-2\lambda_0(T-t_0)+N_\sigma(t_0,T)\log\mu} V_{\sigma(t_0)}(x(t_0))$$

$$(3) \Rightarrow \|x(T)\| \inf_{P\in\mathcal{P}} \sigma_{\min}[P] \leq e^{-2\lambda_0(T-t_0)+N_\sigma(t_0,T)\log\mu} \|x(t_0)\| \sup_{\bar{P}\in\mathcal{P}} \sigma_{\max}[\bar{P}]$$

$$\Rightarrow \|x(T)\| \leq pe^{-\lambda_0(T-t_0)+N_\sigma(t_0,T)\frac{\log\mu}{2}} \|x(t_0)\|, p \triangleq \left(\frac{\sup_{\bar{P}\in\mathcal{P}}\sigma_{\max}[\bar{P}]}{\inf_{P\in\mathcal{P}}\sigma_{\min}[P]}\right)$$

- 令 k 为实数。选择 $\tau_D^* \triangleq \frac{\log\mu}{2(\lambda_0-\lambda)}$, $N_0 \triangleq \frac{2k}{\log\mu}$.

  当切换律 $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{ave}}[\tau_D, N_0]$, 其中 $\tau_D \geq \tau_D^*$, 则有:

$$N_\sigma(t_0, T) \leq N_0 + \frac{T-t_0}{\tau_D} \leq N_0 + \frac{T-t_0}{\tau_D^*}$$

$$\Rightarrow N_\sigma(t_0, T) \leq \frac{2k}{\log\mu} + \frac{2(T-t_0)(\lambda_0-\lambda)}{\log\mu}$$

$$\Rightarrow -\lambda_0(T-t_0) + N_\sigma(t_0, T)\frac{\log\mu}{2} \leq k - \lambda(T-t_0)$$

$$\Rightarrow \|x(T)\| \leq pe^{k-\lambda(T-t_0)}\|x(t_0)\|$$

因此 $x(t)$ 是以稳定裕度 λ 指数收敛

慢变切换下系统稳定性分析

考虑既含有稳定子系统又含有不稳定子系统的切换线性系统的稳定性

假设 $A_1, \ldots, A_r, r < m$ 是不稳定的，$A_{r+1}, \ldots, A_m$ 是 Hurwitz 稳定，且存在 (λ_i, a_i) 使得

$$\begin{cases} \|e^{A_i t}\| \leq e^{a_i + \lambda_i t}, & 1 \leq i \leq r \\ \|e^{A_i t}\| \leq e^{a_i - \lambda_i t}, & r < i \leq m \end{cases}$$

$$\lambda^+ = \max_{1 \leq q \leq r} \lambda_q, \lambda^- = \min_{r+1 \leq q \leq N} \lambda_q$$

给定切换律 σ 和任何 $t > \tau$

- $T^+(\tau, t)$ 表示所有不稳定的子系统在时间段 $[\tau, t)$ 运行的总时间
- $T^-(\tau, t)$ 表示所有稳定的子系统在时间段 $[\tau, t)$ 运行的总时间

考虑切换律 σ 满足以下性质

（S1）对任意 $\lambda \in (0, \lambda^-)$, 选择 $\lambda^* \in (\lambda, \lambda^-)$ 使得对 $t > t_0$，有

$$\frac{T^-(t_0, t)}{T^+(t_0, t)} \geq \frac{\lambda^+ + \lambda^*}{\lambda^- - \lambda^*}$$

考虑既含有稳定子系统又含有不稳定子系统的切换线性系统的稳定性

假设 $A_1, \ldots, A_r, r < m$ 是不稳定的，$A_{r+1}, \ldots, A_m$ 是 Hurwitz 稳定，且存在 (λ_i, a_i) 使得

$$\begin{cases} \|e^{A_i t}\| \leq e^{a_i + \lambda_i t}, & 1 \leq i \leq r \\ \|e^{A_i t}\| \leq e^{a_i - \lambda_i t}, & r < i \leq m \end{cases}$$

$$\lambda^+ = \max_{1 \leq q \leq r} \lambda_q, \lambda^- = \min_{r+1 \leq q \leq N} \lambda_q$$

给定切换律 σ 和任何 $t > \tau$

- $T^+(\tau, t)$ 表示所有不稳定的子系统在时间段 $[\tau, t)$ 运行的总时间
- $T^-(\tau, t)$ 表示所有稳定的子系统在时间段 $[\tau, t)$ 运行的总时间

考虑切换律 σ 满足以下性质

（S1）对任意 $\lambda \in (0, \lambda^-)$, 选择 $\lambda^* \in (\lambda, \lambda^-)$ 使得对 $t > t_0$，有

$$\frac{T^-(t_0, t)}{T^+(t_0, t)} \geq \frac{\lambda^+ + \lambda^*}{\lambda^- - \lambda^*}$$

慢变切换下系统稳定性分析

定理 7

当切换律 σ 满足 *(S1)*，则对任何 $\lambda \in [0, \lambda^-)$，存在 τ_D^* 使得对任意 $\mathcal{S}_{ave}\ [\tau_D, N_0]$ 内的切换律 σ，其中 $\tau_D \geq \tau_D^*$ 和 $N_0 > 0$，切换线性系统 *(1)* 是以稳定裕度 λ 指数稳定。

证明：
令 $t_1, t_2, \cdots$ 表示信号切换时间，且在时间段 $[t_i, t_{i+1})$，有 $\sigma(t_i) = p_i$。
则对于 t，满足 $t_0 < \cdots < t_i \le t < t_{i+1}$，有

$$x(t) = e^{A_{p_i}(t-t_i)} e^{A_{p_{i-1}}(t_i - t_{i-1})} \cdots e^{A_{p_0}(t_1 - t_0)} x_0$$

令 $a = \max_{q \in \mathcal{I}_N} a_q$, $c = e^a$. 则

$$\begin{cases} \|e^{A_i t}\| \le e^{a+\lambda^+ t}, & 1 \le i \le r \\ \|e^{A_i t}\| \le e^{a-\lambda^- t}, & r < i \le m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x(t)\| &\le \|e^{A_{p_i}(t-t_i)}\| \|e^{A_{p_{i-1}}(t_i - t_{i-1})}\| \cdots \|e^{A_{p_0}(t_1 - t_0)}\| \|x_0\| \\ &\le e^{(i+1)a + \lambda^+ T^+(t_0,t) - \lambda^- T^-(t_0,t)} \|x_0\| \\ &= c e^{a N_\sigma(t_0,t) + \lambda^+ T^+(t_0,t) - \lambda^- T^-(t_0,t)} \|x_0\| \end{aligned}$$

$$\|x(t)\| \leq c e^{aN_\sigma(t_0,t)+\lambda^+ T^+(t_0,t)-\lambda^- T^-(t_0,t)} \|x_0\|$$

给定 $\lambda \in (0, \lambda^-)$，由（S1）得，存在 $\lambda^* \in (\lambda, \lambda^-)$ 使得

$$\frac{T^-(t_0,t)}{T^+(t_0,t)} \geq \frac{\lambda^+ + \lambda^*}{\lambda^- - \lambda^*}$$

成立

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lambda^+ T^+(t_0,t) - \lambda^- T^-(t_0,t) &\leq -\lambda^* \left(T^+(t_0,t) + T^-(t_0,t)\right) \\
&= -\lambda^* (t - t_0)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \leq c e^{aN_\sigma(t_0,t)-\lambda^*(t-t_0)} \|x_0\|$$

慢变切换下系统稳定性分析

$$\|x(t)\| \le c e^{aN_\sigma(t_0,t)-\lambda^*(t-t_0)} \|x_0\|$$

1. $a \le 0 \;\Rightarrow\; \|x(t)\| \le e^{-\lambda^*(t-t_0)} \|x_0\| \le e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0\|$
   因此对任意满足 (S1) 的切换率，切换系统是以稳定裕度 λ 指数收敛。
2. $a > 0$:
   令 k 为实数。选择$\tau_D^* = \frac{a}{\lambda^*-\lambda}$, $N_0 = \frac{k}{a}$。
   当切换律 $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{ave}}\ [\tau_D, N_0]$, 其中 $\tau_D \ge \tau_D^*$, 则有:

$$N_\sigma(t_0,t) \le N_0 + \frac{t-t_0}{\tau_D} \le N_0 + \frac{t-t_0}{\tau_D^*}$$

$$\Rightarrow N_\sigma(t_0,T) \le \frac{k}{a} + \frac{(t-t_0)(\lambda^*-\lambda)}{a}$$

$$\Rightarrow -\lambda^*(t-t_0) + N_\sigma(t_0,T)\,a \le k - \lambda(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \le c e^{k-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\|$$

   因此对任意 $\mathcal{S}_{\text{ave}}\ [\tau_D, N_0]$ 内的满足 (S1) 的切换律，$x(t)$ 是以稳定裕度 λ 指数收敛。