北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

王磊

自动化科学与电气工程学院

第三章 矩阵分解

矩阵分解: 把矩阵分解为形式比较简单或性质比较熟悉的若干个矩阵的乘积形式.

分解的意义: 清晰地反映出原矩阵的某些特征, 提供有效的数值计算方法和理论分析依据.

课后扩展:试用程序语言（matlab、C等）编写本章分解定理.

第三章 矩阵分解

- 相抵分解
- 满秩分解
- 三角分解
- QR分解
- Schur分解
- 对角化分解
- 谱分解
- Jordan分解
- 奇异值分解

第三章 矩阵分解

相 抵 分 解

引理3.1.1 设$A, B \in F^{m\times n}$, 则以下表述等价:

（1） A与B相抵;

（2）存在可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$和$Q \in F^{n\times n}$使得$A = PBQ$;

（3）矩阵A与B均可通过有限次初等行列变换得到同一个矩阵;

（4） $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

注1: 引理3.1.1 性质（3）经初等行列变换所得矩阵的最简形式为$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 称为矩阵$A$（或$B$）的**相抵标准形**, 其中$r$为矩阵$A$（或$B$）的秩.

引理3.1.2 设$A \in F^{m\times n}$的秩为r，则存在可逆矩阵可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$和$Q \in F^{n\times n}$使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

该表达式称为矩阵A 的**相抵分解式**.

例3.1.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$， $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$, 证明:

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)).$$

例3.1.2 求解线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

第三章 矩阵分解

满 秩 分 解

定理3.2.1 （**满秩分解定理**）设$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r > 0$），则存在列满秩矩阵$B$和行满秩矩阵$C$使得$A = BC$.

定理3.2.1 （**满秩分解定理**）设$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r>0$），则存在列满秩矩阵$B$和行满秩矩阵$C$使得$A=BC$.

注1: 由于列空间$R(A)$的基选取不同，矩阵A的**满秩分解也不唯一**. 实际上，上述证明也提供了一种满秩分解的计算方法.

例3.2.1 求矩阵$A=\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$的满秩分解.

注2: 在挑选列空间$R(A)$的基时，并不一定从A的列向量中选取.

定理3.2.2 设$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r > 0$），$A = B_1C_1$和$A = B_2C_2$是矩阵$A$的两种不同满秩分解, 则存在可逆矩阵$D \in \mathbb{C}^{r\times r}$使得 $B_1 = B_2D$和$C_1 = D^{-1}C_2$.

注3: 定理3.2.2表明只要找到矩阵A的一个满秩分解表达式就可以构造无数个满秩分解.

例3.2.2 求满足等式$AB=I$或$BA=I$的矩阵B，其中，矩阵A分别为

（1） $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

（2） $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

（3） $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

定理3.2.2 （**右逆和左逆**）矩阵$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r > 0$）有右逆（即存在矩阵$B$使得$AB = I$ ）的充分必要条件是A为行满秩矩阵；矩阵A有左逆（即存在矩阵B使得$BA = I$）的充分必要条件是A为列满秩矩阵.

定理3.2.2 （**右逆和左逆**）矩阵$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r > 0$）有右逆（即存在矩阵$B$使得$AB = I$）的充分必要条件是$A$为行满秩矩阵；矩阵$A$有左逆（即存在矩阵$B$使得$BA = I$）的充分必要条件是$A$为列满秩矩阵.

注4：设$A \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$，则$AA^H$是$r$阶非奇异矩阵．根据$AA^H(AA^H)^{-1} = I$，得$A^H(AA^H)^{-1}$是矩阵$A$的一个右逆．同理，当$A \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$时，$(A^H A)^{-1}A^H$是矩阵$A$的一个左逆.

第三章 矩阵分解

三 角 分 解

定义3.3.1 （**三角矩阵**）设矩阵$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若$A$的对角线上（下）方的元素全为零，即$\forall i<j$，$a_{ij}=0$（$\forall i>j, a_{ij}=0$），则称矩阵$A$为**下（上）三角矩阵**．通常将下三角矩阵和上三角矩阵统称为**三角矩阵**. 进一步，将对角线元素全为正实数的三角矩阵称为**正线三角矩阵**，将对角线元素全为1的三角矩阵称为**单位三角矩阵**.

定理3.3.1（*LU*分解定理）设矩阵$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$是非奇异矩阵，则存在唯一的单位下三角矩阵$L$和上三角矩阵$U$使得$A=LU$成立的充分必要条件是$A$的所有顺序主子式均非零，即

$$\Delta_i(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}\neq 0, i=1,\cdots,n$$

例3.3.1 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$的$LU$分解.

注1: 非奇异上三角矩阵U可进一步分解为对角矩阵和单位上三角矩阵的乘积, 即

$$\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & & u_{13} & \cdots & u_{1n}\\ 0 & u_{22} & & u_{23} & \cdots & u_{2n}\\ & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & u_{n-1,n-1} & & u_{n-1,n}\\ 0 & \cdots & & 0 & & u_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11} & & & & \\ & u_{22} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & u_{n-1,n-1} & \\ & & & & u_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}}\\ & 1 & \frac{u_{23}}{u_{22}} & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & 0 & & 1 & \frac{u_{n-1,n}}{u_{n-1,n-1}}\\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

定理3.3.2（*LDU*分解定理） 设$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$是非奇异矩阵，则存在唯一的单位下三角矩阵$L$, 对角矩阵$D$和单位上三角矩阵$U$使得$A=LDU$成立的充分必要条件是$A$的所有顺序主子式均非零, 即

$$\Delta_i(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}\neq 0, i=1,\cdots,n$$

分解式$A=LDU$称为矩阵A的***LDU*分解**.

注2: 定理3.3.2中对角矩阵$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$可由矩阵$A$的顺序主子式求得

$$d_1 = a_{11}$$

$$d_i = \frac{\Delta_i(A)}{\Delta_{i-1}(A)}, i = 2, \cdots, n$$

注3: 若定义$\tilde{L} = LD$，矩阵A的分解为$A = \tilde{L}U$，其中，$\tilde{L}$是下三角矩阵，U是单位上三角矩阵．这是定理3.3.1的另一种表达, 常称之为**Crout分解**. 定理3.3.1常称之为**Doolittle分解**.

例3.3.2 求解A_1和A_2的LU分解, 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例3.3.2 求解A_1和A_2的LU分解, 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

只要$x + y = 2$即可;

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

例3.3.2 求矩阵$A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ 0 & -3 & -5\\ 1 & -3 & -6\end{bmatrix}$的$LU$分解.

例3.3.2 求矩阵$A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ 0 & -3 & -5\\ 1 & -3 & -6\end{bmatrix}$的$LU$分解.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

因此不能作LU分解.

注4: 在定理3.3.1和定理3.3.2中，矩阵A的非奇异性仅作为相应定理的已知条件，并非分解存在性的充分必要条件．换而言之，若矩阵A是奇异矩阵且可作LU分解，但其分解是不唯一的（例3.3.2）;若矩阵A是非奇异矩阵, 其LU分解可能不存在（例3.3.3）.

推论3.3.1（Cholesky分解） 若n阶实对称矩阵A是正定的，则存在唯一的正线上三角矩阵R使得$A = R^T R$.

例3.3.4 求正定矩阵$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$的Cholesky分解.

例3.3.5 求解线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

【思考】：考察系数矩阵A为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ 0 & -3 & -5\\ 1 & -3 & -6\end{bmatrix}$$

则根据例3.3.2知，此时无法利用LU分解求解线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. 但实际上，由于系数矩阵$A$是非奇异的，该方程组一定存在唯一解$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$.

面临矩阵A无法进行LU分解的困难，应如何处理这一问题呢？

定义3.3.2（排列矩阵） 设$\boldsymbol{e}_i$是n阶单位矩阵I的第i个列向量，则矩阵$P=[\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n}]$称为一个$n$阶**排列矩阵**（或**置换矩阵**），其中$i_1,\cdots,i_n$是$1,\cdots,n$的一个排列.

命题3.3.1 若P是排列矩阵，则P^T和P^{-1}也是排列矩阵，且$P^T=P^{-1}$.

注5: 将矩阵A的行按照$i_1,\cdots,i_n$的次序重排，即排列矩阵$[\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n}]$左乘矩阵$A$;将$A$的列按照$i_1,\cdots,i_n$的次序重排，即排列矩阵$[\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n}]$右乘矩阵$A$.

引理3.3.1 设$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$是非奇异矩阵, 则存在排列矩阵$P$使得$PA$的所有顺序主子式均非零.

例3.3.6 求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Q R 分 解

定义3.4.1（***QR*分解**）若复方阵A可分解为$A=QR$，其中Q为酉矩阵，R为上三角矩阵，则称矩阵A可作QR**分解**（或**酉三角分解**）．若分解式$A=QR$中，矩阵A是实方阵，Q为正交矩阵，R为上三角矩阵，此时则称分解式$A=QR$为**正交三角分解**.

定理3.4.1 若实方阵A满秩，则存在正交矩阵Q及正线上三角阵R 满足$A = QR$且分解唯一.

注1: 若一实方阵既是正交矩阵又是正线上三角矩阵，则该矩阵一定是单位矩阵.

注2: 若不要求上三角阵R的对角元素全为正实数，则导致矩阵A的QR分解不唯一.

例如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq QR$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq Q_1 R_1$$

定理3.4.2 设复方阵A可逆，则存在酉矩阵U及正线上三角阵R 满足$A = UR$且分解唯一.

【思考】： 非方矩阵是否可作QR分解？

定理3.4.2 设复方阵A可逆，则存在酉矩阵U及正线上三角阵R 满足$A = UR$且分解唯一.

【思考】：非方矩阵是否可作QR分解？

推论3.4.1 矩阵$A \in \mathbb{C}_n^{m\times n}$可分解为$A = UR$，其中，$U$是$m$阶酉矩阵，$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$，$R_1$为正线上三角矩阵，$n \le m$.

例3.4.1 利用QR分解求矩阵的特征值, 其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

例3.4.1 利用QR分解求矩阵的特征值, 其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

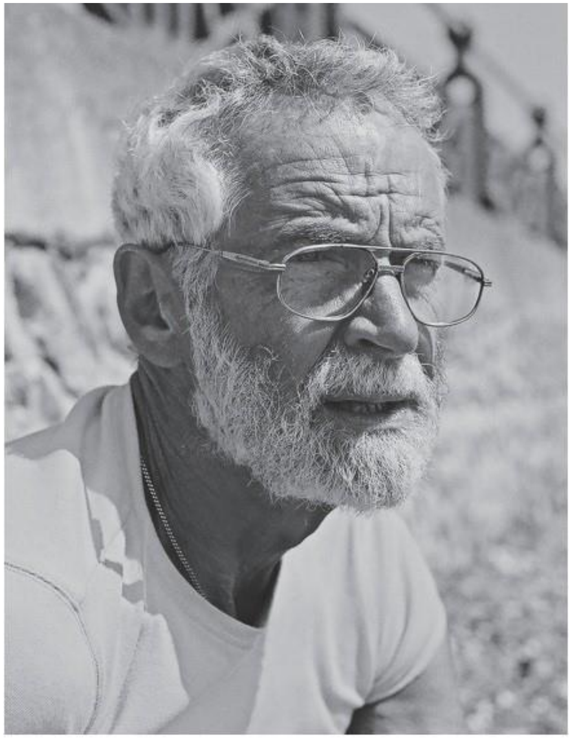
求矩阵的特征值、特征向量的一种有效方法:QR算法(二十世纪在科学和工程上有最大贡献与影响的十大算法).

IMA Journal of Numerical Analysis (2009) **29**, 467–485
doi:10.1093/imanum/drp012
Advance Access publication on June 8, 2009

The QR algorithm: 50 years later its genesis by John Francis and Vera Kublanovskaya and subsequent developments

GENE GOLUB
'February 29, 1932 – November 16, 2007, formerly Fletcher Jones Professor of Computer Science, Stanford University'
AND
FRANK UHLIG†
Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, Auburn, AL 36849-5310

[Received on 31 January 2009]



John Francis in July 2008

求矩阵的特征值、特征向量的一种有效方法:QR算法.

首先对矩阵A_k进行QR分解:

$$A_k = Q_k R_k,$$

其中$A_1 = A$.

求矩阵的特征值、特征向量的一种有效方法:QR算法.

首先对矩阵A_k进行QR分解:

$$A_k = Q_k R_k,$$

其中$A_1 = A$.

然后令$A_{k+1} = R_k Q_k$.

求矩阵的特征值、特征向量的一种有效方法:QR算法.

首先对矩阵A_k进行QR分解:

$$A_k = Q_k R_k,$$

其中$A_1 = A$.

然后令$A_{k+1} = R_k Q_k$.

由$A_k = Q_k R_k \Rightarrow A_{k+1} = {Q_k}^H A_k Q_k$

即A_{k+1}与A_k相似，有相同特征值.

例3.4.1 利用QR分解求矩阵的特征值，其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 3 & 1\\0 & 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 1 & -3\\-2 & 1 & 1\\2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A_{10}=\begin{bmatrix}4.7282 & 0.0781 & 0\\0.0781 & 3.0035 & -0.0020\\0 & 0.0048 & 1.2680\end{bmatrix}$$

该矩阵特征值精确解：$\lambda_1=3+\sqrt{3}=4.7321,$

$\lambda_2=3,\ \ \lambda_3=3-\sqrt{3}=1.2679.$