7. 设 $P_2(x)$ 是R上的线性空间，定义函数

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \quad , \quad f(x),g(x)\in P_2(x)$$

(1) 证明 $P_2(x)$ 是欧氏空间

(2) 求 $P_2(x)$ 关于基 $1,x,x^2$ 的度量矩阵

(3) 计算 $f(x)=1-x+x^2$ 和 $g(x)=1-4x-5x^2$ 的内积.

解(1) 共轭对称性: $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx=(g,f)=\overline{(g,f)}$

实数共轭为其本身

可加性: $(f_1+f_2,g)=\int_{-1}^{1}[f_1(x)+f_2(x)]g(x)dx$

$$=\int_{-1}^{1} f_1(x)g(x)dx+\int_{-1}^{1} f_2(x)g(x)dx$$

$$=(f_1,g)+(f_2,g)$$

齐次性: $(kf,g)=\int_{-1}^{1} kf(x)g(x)dx=k\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=k(f,g)$

正定性: $(f,f)=\int_{-1}^{1} f(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1} f^2(x)dx\geq 0$

当且仅当 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上恒等于0时，等号成立.

$\therefore P_2(x)$ 是欧氏空间

(2) $(1,1)=\int_{-1}^{1} 1\times 1\,dx=2$

$(1,x)=\int_{-1}^{1} x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}=0=(x,1)$

$(1,x^2)=\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}=(x^2,1)$

$(x,x^2)=\int_{-1}^{1} x^3dx=0 \quad (x,x)=\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

$(x^2,x^2)=\int_{-1}^{1} x^4dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{5}$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$\cancel{(f,g)=\int_{-1}^{1}(1-x+x^2)(1-4x-5x^2)dx}$

f在基 $1,x,x^2$ 下的坐标为 $[1,-1,1]^T$

g在基 $1,x,x^2$ 下的坐标为 $[1,-4,-5]^T$

$$(f,g)=\beta^H A\alpha=[1,-4,-5]\begin{bmatrix}2&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\left[-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right]\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=0$$

习题： $P_n(x)$ 是线性空间

18.(1) ① $(f,g)=\sum_{i=0}^{n}f(t_i)g(t_i)=\sum_{i=0}^{n}g(t_i)f(t_i)=(g,f)$

又 $P_n(x)$ 是R上的线性空间，$\therefore (g,f)=\overline{(g,f)}$

② $(f+g,h)=\sum_{i=0}^{n}[f(t_i)+g(t_i)]\cdot h(t_i)$

$=\sum_{i=0}^{n}f(t_i)h(t_i)+\sum_{i=0}^{n}g(t_i)h(t_i)$

$=(f,h)+(g,h).$

③ $(kf,g)=\sum_{i=0}^{n}kf(t_i)g(t_i)=k\sum_{i=0}^{n}f(t_i)g(t_i)=k(f,g)$

④ $(f,f)=\sum_{i=0}^{n}f(t_i)\cdot f(t_i)=\sum_{i=0}^{n}f^2(t_i)\geq 0$

当且仅当 $f(t_i)=0$ 时，$(f,f)=0$.

综上. $P_n(x)$ 是欧氏空间.

(2). $t_0=-2,\ t_1=-1,\ t_2=0,\ t_3=1,\ t_4=2$

$(f,g)=f(t_0)g(t_0)+f(t_1)g(t_1)+f(t_2)g(t_2)+f(t_3)g(t_3)+f(t_4)g(t_4)$

①. 正交化：

令 $\alpha_1=1,\ \alpha_2=x,\ \alpha_3=x^2$.

$\therefore \beta_1=\alpha_1=1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}\cdot\beta_1=x$

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\cdot\beta_2$

$=x^2-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}\cdot\beta_1-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}\cdot\beta_2$

$=x^2-2$

②. 单位化：

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{(\beta_1,\beta_1)}}\cdot\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{(\beta_3,\beta_3)}}\cdot\beta_3=\frac{1}{\sqrt{14}}(x^2-2)$

$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{(\beta_2,\beta_2)}}\cdot\beta_2=\frac{1}{\sqrt{10}}x$,

(3). 要求 $f(x)=5-\frac{1}{2}x^4$ 到 span(1, x, x^2) 的最佳逼近向量，

即求 $f(x)=5-\frac{1}{2}x^4$ 在 span(1, x, x^2) 上的正交投影.

令 $W=\text{span}(1, x, x^2)$.

则 $Proj_W f=(f, r_1)\cdot r_1+(f, r_2)\cdot r_2+(f, r_3)\cdot r_3$.

又 $(f, r_1)\cdot r_1=(5-\frac{1}{2}x^4, \frac{1}{\sqrt{2}})\cdot r_1=\frac{8}{5}$

$(f, r_2)\cdot r_2=(5-\frac{1}{2}x^4, \frac{x}{\sqrt{10}})\cdot r_2=0$

$(f, r_3)\cdot r_3=(5-\frac{1}{2}x^4, \frac{x^2}{\sqrt{14}}-\frac{2}{\sqrt{14}})\cdot r_3=-\frac{31}{14}x^2+\frac{31}{7}$

$\therefore Proj_W f=\frac{8}{5}-\frac{31}{14}x^2+\frac{31}{7}=-\frac{31}{14}x^2+\frac{211}{35}$

17. 设 $A\in C^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，证明：

(1) A的所有特征值均为实数

(2) 若A是正定矩阵，则A的所有特征值均为正实数

证明：(1) $A^H=A$

根据定义：设λ是矩阵A的任意一个特征值

$Ax=\lambda x$

两边取共轭转置：$x^HA^H=\bar{\lambda}x^H$

$x^HA=\bar{\lambda}x^H$

两边右乘x：$x^HAx=\bar{\lambda}x^Hx$

$\lambda x^Hx=\bar{\lambda}x^Hx$

$\because x$为非零列向量

$\therefore x^Hx>0$

要使等式~~两边~~成立 $\Rightarrow \lambda=\bar{\lambda}$

$\therefore \lambda$为实数

(2) $f(x)=x^HAx$

$\forall x\in C^n$，$f(x)\geq 0$，当且仅当$x=0$时，$f(x)=0$.

而$Ax=\lambda x$，x为非零列向量

两侧左乘x^H：$x^HAx=\lambda x^Hx$

在x非零时，$x^HAx>0$

$\therefore \lambda x^Hx>0$

又$\because x^Hx>0$

$\therefore \lambda>0$

故λ为正实数

20. 设$V=\{a\cos t+b\sin t \mid a,b\in R\}$，对$\forall f,g\in V$，定义

$$(f,g)=f(0)g(0)+f(\tfrac{\pi}{2})g(\tfrac{\pi}{2})$$

(1) 证明V是二维实线性空间

(2) 证明(f,g)是V上的内积

(3) 求$f(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$的长度.

解：(1) 一个集合，如果定义的加法和数乘运算是通常~~的~~实数间的加乘运算，只需检验对运算的封闭性

$a_1\cos t+b_1\sin t+a_2\cos t+b_2\sin t=(a_1+a_2)\cos t+(b_1+b_2)\sin t\in V$

对$\forall\lambda\in R$，

$\lambda(a\cos t+b\sin t)=\lambda a\cos t+\lambda b\sin t\in V$

∴ V是一个线性空间，且为实线性空间.

又在$[-\pi,\pi]$上，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\cancel{\cos t}\sin t\,d(\sin t)$

$=\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

∴ $\cos t$与$\sin t$正交 ⇒ 两者线性无关

而V中任意元素均可由$\cos t$与$\sin t$线性表示

⇒ V是二维实线性空间.

(2) 共轭对称性：$(f,g)=f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})=g(0)f(0)+g(\frac{\pi}{2})f(\frac{\pi}{2})$

$=(g,f)=\overline{(g,f)}$

可加性：$(f_1+f_2,g)=[f_1(0)+f_2(0)]g(0)+[f_1(\frac{\pi}{2})+f_2(\frac{\pi}{2})]g(\frac{\pi}{2})$

$=f_1(0)g(0)+f_1(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})+f_2(0)g(0)+f_2(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})$

$=(f_1,g)+(f_2,g)$

齐次性：$(kf,g)=[kf(0)]g(0)+[kf(\frac{\pi}{2})]g(\frac{\pi}{2})$

$=k[f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})]$

$=k(f,g)$

正定性: $(f,f) = f(0)f(0) + f(\frac{\pi}{2})f(\frac{\pi}{2})$

$= [f(0)]^2 + [f(\frac{\pi}{2})]^2$

$= a^2+b^2 \geq 0$

当且仅当 $a=b=0$ 时，等号成立，此时 $f=\theta$.

$\therefore (f,g)$ 是V上的内积

(3) $(h,h) = [h(0)]^2 + [h(\frac{\pi}{2})]^2$

$= (3\cos 7 + 4\sin 9)^2 + [3\cos(\frac{\pi}{2}+7) + 4\sin(\frac{\pi}{2}+9)]^2$

$= (3\cos 7 + 4\sin 9)^2 + (-3\sin 7 + 4\cos 9)^2$

$= 9\cos^2 7 + 16\sin^2 9 + 24\cos 7\sin 9 + 9\sin^2 7 + 16\cos^2 9 - 24\cos 9\sin 7$

$= 25 + 24(\cos 7\sin 9 - \cos 9\sin 7)$

$= 25 + 24\sin(9-7)$

$= 25 + 24\sin 2$

$\|h\| = \sqrt{(h,h)} = \sqrt{25+24\sin 2}$

21. 证: ① 先证 $N(A)+N(A-I)$ 是直和.

由定义知, $N(A) = \{x \in C^n \mid Ax=0\}$

$N(A-I) = \{x \in C^n \mid (A-I)x=0\}$.

设 $y \in (N(A)\cap N(A-I))$, 则.

$\begin{cases} Ay=0 \\ (A-I)y=0 \end{cases} \Rightarrow Iy = y = 0.$

故 $N(A)\cap N(A-I) = \{\theta\}$. 因此, $N(A)+N(A-I)$ 是直和.

② 再证和空间等于 C^n 空间.

$\because \dim(N(A)) = n - r(A)$, $\dim(N(A-I)) = n - r(A-I)$

$\dim(N(A)) + \dim(N(A-I)) = n - r(A) + n - r(A-I) = 2n - [r(A)+r(A-I)]$

要证 $\dim N(A) + \dim N(A-I) = n$. ~~即证~~

即证 $r(A) + r(A-I) = n$.

下面证 $r(A)+r(A-I)=n$.

~~$\because r(A)+r(A-I)=r(A)+r(I-A)\geq r(A+I-A)$~~

$\because r(A)+r(A-I)=r(A)+r(I-A)\geqslant r(A+I-A)=r(I)=n$

且 $A^2=A\Rightarrow A(A-I)=0$, 有

$r(A)+r(A-I)\leq n$.

$\therefore r(A)+r(A-I)=n$. 得证.

$\because \dim N(A)+\dim N(A-I)=2n-[r(A)+r(A-I)]=2n-n=n$.

又由定义知. $N(A)$. $N(A-I)$ 是 C^n 的子空间.

$\therefore C^n=N(A)+N(A-I)$.

综上, $C^n=N(A)\dot{+}N(A-I)$ 得证.

22. 证明: 由题21知 $C^n=N(A)\dot{+}N(A-I)$, 则

只需证 $N(A)\perp N(A-I)$, 即可得出 $N(A)\oplus N(A-I)$.

由定义, $N(A)=\{x\in C^n \mid Ax=0\}$. $N(A-I)=\{x\in C^n \mid (A-I)x=0\}$.

对于任意向量 $x\in N(A)$, $y\in N(A-I)$. 有.

$Ax=0$, $(A-I)y=0\Rightarrow Ay=y$. $\therefore y^H=y^HA^H=y^HA$.

$\therefore (x,y)=y^Hx=y^HAx=0$

即 $N(A)\perp N(A-I)$. 得证.

$\therefore C^n=N(A)\oplus N(A-I)$ 得证.

23. 解：设 y 在 W 上的正交投影为 z.

$$z=Proj_W y=\frac{(y,x_1)}{(x_1,x_1)}\cdot x_1+\frac{(y,x_2)}{(x_2,x_2)}\cdot x_2.$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}-\frac{7}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1\\-8\\4\end{bmatrix}$$

设 s 为 y 到空间 W 的距离向量，d 为 y 到 W 的最小距离.

$\therefore s=y-z=\begin{bmatrix}0\\3\\6\end{bmatrix}$. $d=\|s\|=3\sqrt{5}$

若选取 $x_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，则对 x_1, x_2 进行正交化处理.

$$\cancel{z=Proj_W y=\frac{(y,x_1)}{(x_1,x_1)}\cdot x_1+}$$

$\alpha_1=x_1=\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}$. $\alpha_2=x_2-\frac{(x_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\cdot\alpha_1=\frac{2}{15}\begin{bmatrix}5\\16\\7\end{bmatrix}$，取 $\alpha_2=\begin{bmatrix}5\\16\\7\end{bmatrix}$

$$z'=Proj_W y=\frac{(y,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\cdot\alpha_1+\frac{(y,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\cdot\alpha_2$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{22}\begin{bmatrix}5\\16\\7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{25}{11}\\-\frac{9}{11}\\\frac{2}{11}\end{bmatrix}$$

$$Proj_{W^\perp} y=\begin{bmatrix}-\frac{36}{11}\\-\frac{36}{11}\\\frac{108}{11}\end{bmatrix}\qquad d=\|Proj_{W^\perp} y\|=\frac{36}{\sqrt{11}}$$

24. 设 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ 是欧氏空间 R^5 的一组标准正交基，令 $\alpha_1 = \xi_1 + \xi_5$,

$\alpha_2 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_4$, $\alpha_3 = 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

求 $W = \mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一组标准正交基.

解: 显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

施密特正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 = \xi_1 + \xi_5$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_4 - \frac{(\xi_1 + \xi_5)\cdot(\xi_1 - \xi_2 + \xi_4)}{(\xi_1 + \xi_5)\cdot(\xi_1 + \xi_5)} (\xi_1 + \xi_5)$$

$$= \xi_1 - \xi_2 + \xi_4 - \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_5)$$

$$= \frac{1}{2}\xi_1 - \xi_2 + \xi_4 - \frac{1}{2}\xi_5$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

$$= 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \frac{2}{2}(\xi_1 + \xi_5) - 0$$

$$= 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_1 - \xi_5$$

$$= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_5$$

单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_5)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_4 - \xi_5)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_5)$$

25、解：已知数据点为 (2,1)．(5,2)．(7,3)．(8,3)．

$\therefore G=\min\sum_{i=1}^{4}|y^{(i)}-\mu x|^2=[1-(\mu_0+2\mu_1)]^2+[2-(\mu_0+5\mu_1)]^2+[3-(\mu_0+7\mu_1)]^2+[3-(\mu_0+8\mu_1)]^2$

$=4\mu_0^2+142\mu_1^2+44\mu_0\mu_1-18\mu_0-114\mu_1+23$.

$\therefore \frac{\partial G}{\partial \mu_0}=8\mu_0+44\mu_1-18=0$

$\frac{\partial G}{\partial \mu_1}=284\mu_1+44\mu_0-114=0$

解得 $\begin{cases}\mu_0=\frac{2}{7}\\ \mu_1=\frac{5}{14}\end{cases}$

$\therefore y=\frac{2}{7}+\frac{5}{14}t$.

方法二：数据点为 (2,1)、(5,2)．(7,3)．(8,3)．

$\therefore a_1=\begin{bmatrix}2\\5\\7\\8\end{bmatrix}$. $a_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$. $b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\3\end{bmatrix}$

又 $\min\|Ax-b\|^2=\|A\lambda-b\|^2$

$\therefore Ax=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\mu_0+\begin{bmatrix}2\\5\\7\\8\end{bmatrix}\mu_1$

$\therefore \min\|Ax-b\|=\min\|b-Ax\|=\min\left\|\begin{bmatrix}1\\2\\3\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\mu_0-\begin{bmatrix}2\\5\\7\\8\end{bmatrix}\mu_1\right\|$

令 $W=\{a_0,a_1\}$．对 a_0,a_1 进行正交化，有．

$\alpha_0=a_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_1=a_1-\frac{(a_1,\alpha_0)}{(\alpha_0,\alpha_0)}\cdot\alpha_0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-7\\-1\\3\\5\end{bmatrix}$

$Proj_W{}^b=\frac{(b,\alpha_0)}{(\alpha_0,\alpha_0)}\cdot\alpha_0+\frac{(b,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\cdot\alpha_1$

$=\frac{9}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\frac{5}{28}\begin{bmatrix}-7\\-1\\3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\frac{29}{14}\\\frac{39}{14}\\\frac{44}{14}\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\mu_0+\begin{bmatrix}2\\5\\7\\8\end{bmatrix}\mu_1=\begin{bmatrix}1\\\frac{29}{14}\\\frac{39}{14}\\\frac{44}{14}\end{bmatrix}$. 解得 $\begin{cases}\mu_0=\frac{2}{7}\\ \mu_1=\frac{5}{14}\end{cases}$ $\therefore y=\frac{2}{7}+\frac{5}{14}t$

3. 用基扩张定理重新证明定理1.4.4

证明：设 $\dim(W)=m$ $\dim(V)=n$

取 W 的一组正交基 $x_1, \cdots x_m$

∵ W 是 V 的线性子空间

由基扩充定理，可由 $n-m$ 个线性无关的向量与 $x_1 \cdots x_m$ 共同构成 V 的一组基。

取 M 为以 $x_{m+1} \cdots x_n$ 为一组基的向量空间

则有 M 为 V 的子空间

且 $V=M+W$

$\forall \alpha \in W$ 有 $\alpha=k_1x_1+\cdots+k_mx_m$

$\beta \in M$ 有 $\beta=k_{m+1}x_{m+1}+\cdots+k_nx_n$

则 $(\alpha,\beta)=\left(\sum_{i=1}^{m} k_ix_i, \sum_{i=m+1}^{n} k_ix_i\right)$

$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} k_ik_j(x_i,x_j)$

$=0$

∴ $W \perp M$ ∴ $M=W^{\perp}$

∴ $V=W+W^{\perp}$

AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

3. ① $A^2=A \Rightarrow R(I-A)=N(A)$.

充分性：已知 $A^2=A$，则：

$\forall x \in N(A)$，有 $Ax=0 \Rightarrow (I-A)x = x-Ax = x \Rightarrow x \in R(I-A)$.

$\forall x \in R(I-A)$，$\exists y \in C^n$, s.t. $x=(I-A)y$. $\because Ax=(A-A^2)y=0$

$\therefore x \in N(A)$

$\therefore N(A)=R(I-A)$.

② $R(I-A)=N(A) \Rightarrow rank(I-A)+rank(A)=n$

$\because rank(A)=dim(R(A))=n-dim(N(A))$,

$rank(I-A)=dim(R(I-A))=dim(N(A))$

$\therefore rank(I-A)+rank(A)=n$

③ $rank(A)+rank(I-A)=n \Rightarrow A^2=A$.

设 $N(A)=span(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$，$N(I-A)=span(\beta_1,\dots,\beta_{n-r})$

若 β_i 可由 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性表出，则 $\beta_i=\sum_{j=1}^{r} k_j\alpha_j$，$\beta_i \neq \theta$，$(I-A)\beta_i=0$

则 $A\beta_i=\sum_{j=1}^{r}k_jA\alpha_j=0$ 又 $\because A\beta_i=\beta_i$ $\therefore \beta_i=0$，矛盾，同理 α_i 也不能由 $\beta_1,\dots,\beta_{n-r}$ 线性表示.

$\therefore \alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_{n-r}$ 是 n 个线性无关向量.

记 $B=[\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_{n-r}]$，则 B 可逆.

$\because AB=[0,\dots,0,A\beta_1,\dots,A\beta_{n-r}]=[0,\dots,0,\beta_1,\dots,\beta_{n-r}]$,

$A^2B=AB$

$\therefore A^2BB^{-1}=ABB^{-1} \Rightarrow A^2=A$.