矩阵理论

王磊

自动化科学与电气工程学院

第三章 矩阵分解

Schur 分 解

定理3.5.1（Schur引理）任意n阶复方矩阵A相似于上三角矩阵Λ，即存在可逆矩阵P使得$\Lambda = P^{-1}AP$为上三角阵，其中上三角矩阵Λ的对角元素是矩阵A的特征值.

定理3.5.2（Schur引理）任意复方矩阵A酉相似于上三角矩阵Λ，即存在一酉矩阵U使得$\Lambda = U^H AU$为上三角阵.

注1: 与定理3.5.1相比，定理3.5.2进一步说明了Schur分解中的满秩矩阵P可以是酉矩阵．由于酉矩阵的逆矩阵是其共轭转置，不需要复杂计算，这为简化分析提供了重要的技术支持.

【思考】： 是否存在正交矩阵Q使得实方阵A具有如下Schur分解？

$$Q^TAQ = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定理3.5.3（实方阵Schur引理）设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$的特征值均为实数, 则存在正交矩阵$Q$使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定义3.5.1（矩阵多项式） 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\varphi(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, a_i \in \mathbb{C}$（$i = 0,1,\cdots,n$）是数域$\mathbb{C}$上的多项式, 则

$$\varphi(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

称为**矩阵多项式**.

推论3.5.1 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, $\varphi(\lambda)$为任一多项式, 则矩阵多项式$\varphi(A)$的n个特征值为$\varphi(\lambda_1),\cdots,\varphi(\lambda_n)$.

推论3.5.2 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则矩阵$A^m$的$n$个特征值为$\lambda_1^m,\cdots,\lambda_n^m$, $m \in \mathbb{N}$.

注2: n阶矩阵A的属于特征值λ_i的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_i$也是$\varphi(A)$的属于特征值$\varphi(\lambda_i)$的特征向量.

【思考】: 设$f_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$是矩阵$A$特征多项式, 求矩阵多项式$f_A(A)$.

定理3.5.4（Hamilton-Cayley定理）设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的特征多项式为$f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$, 则

$$f_A(A) = 0.$$

注3: 由于$L(V) \cong \mathbb{C}^{n\times n}$, 故对线性变换$T$有平行的结果: $\forall T \in L(V)$且$f_A(\lambda)$为T的特征多项式，则$f_A(T)$为零变换.

例3.5.1 已知$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$，计算矩阵多项式$A^4-2A^2+I$.

例3.5.1 已知$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$，计算矩阵多项式$A^4-2A^2+I$.

$$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

例3.5.1 已知$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$，计算矩阵多项式$A^4-2A^2+I$.

$$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

$$g(\lambda)=f_A(\lambda)(\lambda+3)+4(\lambda-1)^2$$

推论3.5.3 设复方阵A可逆, 其特征多项式为$f_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$, 则矩阵$A$的逆矩阵计算公式为

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I\right)$$

例3.5.2 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$的逆.

例3.5.2 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$的逆.

$$A^{-1}=A^2-3A+3I=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

定义3.5.2（零化多项式） 给定复方阵$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$，若存在多项式$g(\lambda)$使得$g(A) = 0$，则称$g(\lambda)$为$A$的**零化多项式**.

定义3.5.3（最小多项式） 复方阵A的零化多项式中最小次数的首1多项式称为A的**最小多项式**，记为$m_A(\lambda)$.

【思考】： 特征多项式$f_A(\lambda)$是矩阵A的零化多项式，问$f_A(\lambda)$是矩阵A的最小多项式吗？

定理3.5.5（最小多项式的性质）设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则

（1）矩阵A的最小多项式$m_A(\lambda)$是唯一的，且可整除A的任一零化多项式. 特别地，有$m_A(\lambda)|f_A(\lambda)$.

（2）矩阵A的特征多项式$f_A(\lambda)$与最小多项式$m_A(\lambda)$具有相同的根（不计重数）.

例3.5.3 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$的最小多项式.

例3.5.3 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$的最小多项式.

$$f_A(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+6).$$

例3.5.3 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$的最小多项式.

$$f_A(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+6).$$

通过计算知，$(A-3I)(A+6I)=0$. 因此，

$$m_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+6)$$

例3.5.4 设$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 求$A^{100}$.

例3.5.4 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 求$A^{100}$.

$$f_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

例3.5.4 设$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, 求$A^{100}$.

$$f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-4)$$

$$A^m=\left(\frac{4^m-1}{3}\right)A+\left(\frac{4-4^m}{3}\right)I, m=0,1,\cdots,$$

第三章 矩阵分解

对 角 化 分 解

定义3.6.1（单纯矩阵）若n阶复方阵A相似于对角矩阵, 则矩阵A称为**可对角化矩阵**（或**单纯矩阵**）.

【思考】： 若线性变换T在某基下的矩阵为对角阵, 这里的某基如何确定？

定理3.6.1 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的全部互异特征根为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, $(m \le n)$, 则以下表达等价:

（1）A是单纯矩阵;

（2）A有n个线性无关的特征向量;

（3）特征值λ_i（$i=1,\cdots,m$）的代数重数等于其几何重数;

（4）$\sum_{i=1}^{m} \dim E(\lambda_i) = n$;

（5）最小多项式$m_A(\lambda)$无重根.

例3.6.1 设线性变换$T\in L(\mathbb{R}^3)$在$\mathbb{R}^3$空间的一组基$\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3$下的矩阵为$A$，即$T[\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3]=[\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3]A$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

问:

（1）线性变换T可否对角化;

（2）若T可对角化，试求满秩矩阵P使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

例3.6.1 设线性变换$T \in L(\mathbb{R}^3)$在$\mathbb{R}^3$空间的一组基$\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$下的矩阵为$A$，即$T[\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3] = [\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3]A$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

问:

（1）线性变换T可否对角化;

（2）若T可对角化，试求满秩矩阵P使$P^{-1}AP$为对角矩阵. 【$f_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 5)$】

例3.6.2 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$且$A^2 = A$，试判断$A$是否可对角化.

推论3.6.1 若复方阵A的零化多项式$g(\lambda)$无重根, 则矩阵A是单纯矩阵.

推论3.6.2 若n阶复方阵A恰好有n个互异特征值, 则它必可对角化, 反之则不然.

注1: 上述两个推论仅是复方阵A为单纯矩阵的充分而非必要条件.

例3.6.3 设$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, 求$A^{100}$.

例3.6.3 设$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, 求$A^{100}$.

解：矩阵A的特征多项式

$$f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-4)$$

则它的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=4$;

对应的特征向量分别为$\boldsymbol{p}_1=[1,-1]^T$, $\boldsymbol{p}_2=[1,2]^T$.

$$令P=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix},有P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

例3.6.4 求解常系数线性常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

例3.6.4 求解常系数线性常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

$$f_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$$

【思考】：若定义3.6.1中的相似变换矩阵是酉矩阵，则此时的单纯矩阵会表现出何种性质？

推论3.6.3 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则$A$是Hermite矩阵当且仅当$A$的所有特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为实数，且存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$使得$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

推论3.6.4 设矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 则$A$是实对称矩阵当且仅当$A$的所有特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为实数, 且存在正交矩阵$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$使得$Q^T AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

例3.6.5 求正交矩阵Q使得Q^TBQ为对角阵, 其中

$$B=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -1 & -3\\ -3 & 3 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

例3.6.5 求正交矩阵Q使得Q^TBQ为对角阵, 其中

$$B=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -1 & -3\\ -3 & 3 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

解: 计算B的特征多项式为: $f(\lambda)=(\lambda-8)(\lambda+4)^3$.

对于$\lambda_1=8$, 计算其特征向量为

$$x_1=(1,-1,1,-1)^T.$$

对于$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-4$, 其特征向量为

$x_2=(1,0,0,1)^T$, $x_3=(1,1,0,0)^T$, $x_4=(1,0,-1,0)^T$

将$x_1 = (1,-1,1,-1)^T$单位化得$z_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$;

将$x_2 = (1,0,0,1)^T$，$x_3 = (1,1,0,0)^T$，$x_4 = (1,0,-1,0)^T$正交化得

- $y_2 = (1,0,0,1)^T$，$y_3 = \frac{1}{2}(1,2,0,-1)^T$,
- $y_4 = \frac{1}{3}(1,-1,-3,-1)^T$.

单位化得

- $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^T$，$z_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1)^T$,
- $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{6}(1,-1,-3,-1)^T$.

注2: 求Hermite矩阵A酉相似于对角阵的步骤如下:

（1）求出A的全部相异特征值及重数;

（2）对于每个特征值λ，求方程$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的一个基础解系, 并将其单位正交化处理;

（3）由标准正交特征向量生成酉矩阵Q, 则$Q^T AQ$是对角矩阵.

【思考】： 除了Hermite矩阵外，还有哪些矩阵可以酉相似对角化？

定义3.6.2（正规矩阵） 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，若$A^H A = AA^H$, 则称$A$为**正规矩阵**（或**规范矩阵**）.

定理3.6.2 复方阵A是正规矩阵当且仅当A酉相似于对角阵，即$A^H A = AA^H$当且仅当存在酉矩阵U使得$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

推论3.6.5 复方阵A是正规矩阵当且仅当A有n个特征向量构成$\mathbb{C}^n$空间的一组标准正交基，且属于A的不同特征值的特征向量正交.

例3.6.6 设$A=\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} & -1 \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ -1 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$，验证$A$是正规矩阵，并求酉矩阵$U$使得$U^H AU$为对角阵.

例3.6.6 设$A=\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} & -1 \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ -1 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$，验证$A$是正规矩阵，并求酉矩阵$U$使得$U^H AU$为对角阵.

解：由于$AA^H=\begin{bmatrix} 2 & \mathrm{i} & -1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ -1 & -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}=A^H A$, 故$A$是正规矩阵.

由矩阵A的特征多项式$f_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$知，$A$的特征值为$\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=-1$.

对于$\lambda_1 = 2$, 计算其特征向量为$\boldsymbol{x}_1 = [1, -\mathrm{i}, -1]^T$;

对于$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 计算其特征向量为$\boldsymbol{x}_2 = [1,0,1]^T$, $\boldsymbol{x}_3 = [1, \mathrm{i}, 0]^T$;

对$\boldsymbol{x}_1$作单位化处理、对$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$作Gram-Schmit正交化处理, 得$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, -\mathrm{i}, -1]^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, -\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right]^T$;

令$U = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$, 则$U^H A U = \mathrm{diag}(2, -1, -1)$.

推论3.6.6 实方阵A是正交矩阵当且仅当A的所有特征值的模值为1，且存在酉矩阵U使得$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$A$的$n$个特征值.

推论3.6.7 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则$A$是酉矩阵当且仅当$A$的所有特征值的模值为1，且存在酉矩阵$U$使得$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$A$的$n$个特征值.

第三章 矩阵分解

谱 分 解

例3.7.1 求正规矩阵$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$的谱分解式.

例3.7.1 求正规矩阵$A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$的谱分解式.

解: 计算矩阵A的特征值与特征向量, 分别为:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=[1,1,0,0]^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=[1,0,1,0]^T,\boldsymbol{\beta}_3=[-1,0,0,1]^T;$$

$$\lambda_4=-3,\boldsymbol{\beta}_4=[1,-1,-1,1]^T.$$

例3.7.1 求正规矩阵$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$的谱分解式.

将$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$和$\boldsymbol{\beta}_3$单位正交化, 并将$\boldsymbol{\beta}_4$单位化, 得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right]^T, \boldsymbol{\alpha}_2=\left[\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right]^T$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\left[-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}}\right]^T, \boldsymbol{\alpha}_4=\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^T$$

例3.7.1 求正规矩阵$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$的谱分解式.

定义$E_1=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^H+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^H+\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\alpha}_3^H$, $E_2=\boldsymbol{\alpha}_4\boldsymbol{\alpha}_4^H$, 则 $A=E_1-3E_2$是A的谱分解式, 其中

$$E_1=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

定义3.7.1（正规矩阵谱分解）设$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$是正规矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的$m$个互异特征值，其代数重数分别为$d_1,\cdots,d_m$且$d_1+\cdots+d_m=n$. 矩阵$A$的**谱分解式**为

$$A=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j E_j$$

式中，$E_j=\sum_{i=1}^{d_j}\boldsymbol{u}_{ji}\boldsymbol{u}_{ji}^H$，$j=1,\cdots,m$，称为矩阵$A$的**谱阵**，$\boldsymbol{u}_{j1},\cdots,\boldsymbol{u}_{jd_j}$是属于特征值$\lambda_j$的$d_j$个单位正交的特征向量.

定理3.7.2（正规矩阵谱阵的性质）设正规矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$有谱分解式为$A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j E_j$，其中，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$A$的$m$个互异特征值，$E_1, \cdots, E_m$是$A$的$m$个谱阵，则对任意$i, j = 1, \cdots, m$且$i \neq j$，有

（1）$E_j = E_j^H = (E_j)^2$;

（2）$E_i E_j = 0$;

（3）$E_i A = A E_i = \lambda_i E_i$;

（4）$\sum_{k=1}^{m} E_k = I$;

（5）谱阵集合$\{E_1, \cdots, E_m\}$唯一.

定理3.7.3 设n阶复方阵A有m个互异的特征值，记为$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$，则$A$为正规矩阵当且仅当存在$m$个$n$阶矩阵$E_1,\cdots,E_m$使得对任意$i,j=1,\cdots,m$且$i\neq j$, 有

（1）$A=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k E_k$;

（2）$E_j=E_j^H=(E_j)^2$;

（3）$E_iE_j=0$;

（4）$E_iA=AE_i=\lambda_iE_i$;

（5）$\sum_{k=1}^{m}E_k=I$;

（6）谱阵集$\{E_1,\cdots,E_m\}$唯一.

定义3.7.2（幂等矩阵）设$E\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若$E^2=E$，则称$E$为**幂等矩阵**（或**投影矩阵**）．Hermite幂等矩阵称为**正交投影矩阵**.

思考：为什么**幂等矩阵称之为投影矩阵**、Hermite幂等矩阵称为**正交投影矩阵**？

定理3.7.4（幂等矩阵性质） 若$E \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$是幂等矩阵,

则（1）E为单纯矩阵且相似于矩阵$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

（2）$\mathrm{tr}(E) = r$;

（3）$E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in R(E)$, 其中$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$.

注1: 定理3.7.4性质（3）的几何解释为：向量$\boldsymbol{x} \in R(E)$当且仅当向量$\boldsymbol{x}$在空间$R(E)$的投影恰为它本身.

例3.7.2 求向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$在$V_m = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$上的正交投影，其中向量组$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$是$\mathbb{C}^n$空间的$m$个线性无关向量, $m \leq n$.

以$V_m = V_1$为例进行说明

例3.7.2 求向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$在$V_m = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$上的正交投影，其中向量组$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$是$\mathbb{C}^n$空间的$m$个线性无关向量, $m \leq n$.

以$V_m = V_1$为例进行说明

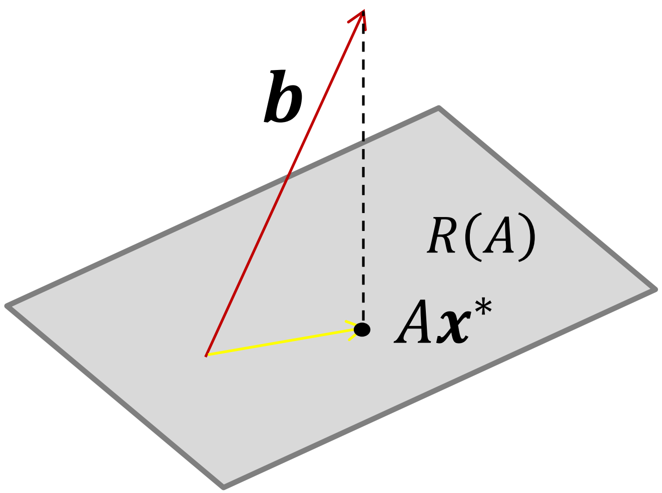
补考说明：$A^H A$和AA^H秩的问题（三种方法）

例3.7.2 求向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$在$V_m = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$上的正交投影，其中向量组$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$是$\mathbb{C}^n$空间的$m$个线性无关向量, $m \le n$.

【思考】： 若例3.7.2中的向量组$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关, 应如何求解？

例3.7.3 求向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$在$W = \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = 0, \\ A \in \mathbb{C}_m^{m\times n} \end{matrix} \right\}$上的正交投影.

例3.7.4（最小二乘问题） 考查线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中, $A \in \mathbb{C}_n^{m\times n}$和$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$给定, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$待定. 求向量$\boldsymbol{x}$使得$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|$最小.



例3.7.3 求矩阵$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$的谱分解.

例3.7.3 求矩阵$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$的谱分解.

其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$. 对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=[2,-1,0]^T,\alpha_2=[0,0,1]^T,\alpha_3=[-1,1,1]^T,$$

于是$P=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$$A = P\text{diag}(1,1,-2)P^{-1}$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^H\\ \beta_2^H\\ \beta_3^H\end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1\alpha_1\beta_1^H + \lambda_2\alpha_2\beta_2^H + \lambda_3\alpha_3\beta_3^H$$

其中

$$\alpha_1 = [2,-1,0]^T, \beta_1^H = [1,1,0],$$

$$\alpha_2 = [0,0,1]^T, \beta_2^H = [-1,-2,1],$$

$$\alpha_3 = [-1,1,1]^T, \beta_3^H = [1,2,0].$$

注意到$\lambda_1=\lambda_2$, 定义

$$E_1=\alpha_1\beta_1^H+\alpha_2\beta_2^H=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$E_2=\alpha_3\beta_3^H=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$A=E_1-2E_2$$

思考: E_i是幂等矩阵或正交投影矩阵吗？

定义3.7.3（单纯矩阵谱分解）设$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$是单纯矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的$m$个互异特征值，其代数重数分别为$d_1,\cdots,d_m$, 则矩阵$A$的谱分解式定义为

$$A=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j E_j$$

其中, $E_j=\sum_{i=1}^{d_j}\boldsymbol{\alpha}_{ji}\boldsymbol{\beta}_{ji}^H$, $j=1,\cdots,m$, 称为A的谱阵, $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jd_j}$是属于特征值$\lambda_j$的$d_j$个线性无关的单位特征向量，行向量$\boldsymbol{\beta}_{jk}^H$, 是矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1d_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{md_m}]^{-1}$的第$\left(\sum_{i=1}^{j-1}d_j+k\right)$行（令$d_0=0$）, $k=1,\cdots,d_j$, $j=1,\cdots,m$.

定理3.7.5 设 n 阶复方阵 A 有 m 个互异特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$，则 A 是单纯矩阵当且仅当存在 m 个 n 阶矩阵 $E_1,\cdots,E_m$ 使得对任意 $i,j=1,\cdots,m$ 且 $i\neq j$, 有

（1）$A=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k E_k$;

（2）$E_j=(E_j)^2$;

（3）$E_iE_j=0$;

（4）$E_iA=AE_i=\lambda_i E_i$;

（5）$\sum_{k=1}^{m}E_k=I$;

（6）谱阵集 $\{E_1,\cdots,E_m\}$ 唯一.

例3.7.6 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 求$\sum_{i=1}^{100} A^i$.

例3.7.6 设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$, 求$\sum_{i=1}^{100}A^i$.

解：$A=\lambda_1E_1+\lambda_2E_2$

例3.7.6 设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$，求$\sum_{i=1}^{100} A^i$.

解：$A=\lambda_1 E_1+\lambda_2 E_2$

$$\sum_{i=1}^{100} A^i=\left(\sum_{i=1}^{100}\lambda_1^i\right)E_1+\left(\sum_{i=1}^{100}\lambda_2^i\right)E_2$$

$$=\frac{5^{101}-5}{4}\begin{bmatrix}1/5 & 0 & -2/5\\ 0 & 0 & 0\\ -2/5 & 0 & 4/5\end{bmatrix}$$

推论3.7.1 设单纯矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的谱分解为$A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j E_j$, $f(\lambda)$为数域$\mathbb{C}$上的任一多项式, 则

$$f(A) = \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j) E_j$$

式中，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$为$A$的$m$个互异特征值，$E_j$（$j = 1, \cdots, m$）是矩阵$A$的谱阵.

推论3.7.2 设单纯矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的谱分解为$A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j E_j$, 则

$$E_i = \frac{1}{\prod_{\substack{l=1,\\ l\neq i}}^{m}(\lambda_i - \lambda_l)} \prod_{\substack{l=1,\\ l\neq i}}^{m} (A - \lambda_l I), i = 1, \cdots, m$$

例3.7.7 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$的谱分解.

例3.7.7 求矩阵$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$的谱分解.

其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

判断

$$I-A=\begin{bmatrix}-3 & -6 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

故矩阵A可对角化,

$$\varphi_1(\lambda)=\lambda+2,\ \varphi_2(\lambda)=\lambda-1$$

例3.7.7 求矩阵$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$的谱分解.

$$\varphi_1(\lambda)=\lambda+2,\ \varphi_2(\lambda)=\lambda-1$$

$$E_1=\frac{1}{\varphi_1(\lambda_1)}\varphi_1(A)=\frac{1}{3}(A+2I)=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

同理

$$E_2=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

课堂测试

设A是实对称矩阵，若A相似于对角阵diag(3,9,3)，且$x_1 = (1,2,3)^T$，$x_2 = (1,1,1)^T$是属于特征值3的特征向量，求$A = ?$

课堂测试

设A是实对称矩阵，若A相似于对角阵diag(3,9,3)，且$x_1=(1,2,3)^T$，$x_2=(1,1,1)^T$是属于特征值3的特征向量，求$A=$？

解：属于特征值9的特征向量为$x_3=(1,-2,1)^T$.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ -2 & 7 & -2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}.$$