136 页，课后习题 3、4、5-(1)、7、9

3. 证明：设 $rank(A)=m$，$rank(B)=n$. A B 均为 l 阶方阵

$\Rightarrow$ ~~$r_1+r_2\le n$~~. ~~$\Leftarrow$~~ $m+n\le l$

对 A 相抵分解，~~$A=P[$~~ 彐可逆阵 P_1 和 Q_1 使得 $A=P_1\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_1$，

同理，彐可逆矩阵 P_2、Q_2 使得 $B=P_2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}Q_2=B$

$\Rightarrow P^{-1}AQ^{-1}=\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$P_2^{-1}BQ_2^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}=0=P_1^{-1}AQ_1^{-1}P_2^{-1}BQ_2^{-1}$

$\Rightarrow$ 取 $P_2^{-1}=Q_1$，$Q_2^{-1}=P_1$ 可满足要求.

4. 解. (1) 对 A 相抵分解. 彐可逆矩阵 P. Q. 使得 $A=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$.

$A^2=A\Rightarrow P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q\cdot P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

$\Rightarrow QP=I$. 即 $Q=P^{-1}$

(2) 同理对 A 相抵分解.

$A=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$. $A^2=0\Rightarrow P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q=0$

$\because P$. Q 可逆.

$\therefore\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0$

令 $T=QP=\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0\Rightarrow T_1=0$

则 $QP=\begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}$　　$Q=\begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}P^{-1}$

5. (1)

$A=\begin{bmatrix}0&1&-2&4&-i\\0&-1&2&-4&i\\0&-1&1+i&-3&-i\end{bmatrix}$ $\quad rank A=2 \quad a_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} \quad a_5=\begin{bmatrix}-i\\i\\-i\end{bmatrix}$ 线性无关.

定义 $B=\begin{bmatrix}1&-i\\-1&i\\-1&-i\end{bmatrix}=[a_2, a_5]$

$a_1\ a_3\ a_4$ 在基 $a_2\ a_5$ 下的坐标:

$C_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\quad C_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\quad C_3=\begin{bmatrix}-\frac{3+i}{2}\\-\frac{i+1}{2}\end{bmatrix}$ $\quad C_4=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{i}{2}\end{bmatrix}$ $\quad C_5=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

$C=\begin{bmatrix}0&1&-\frac{3+i}{2}&\frac{7}{2}&0\\0&0&-\frac{i+1}{2}&\frac{i}{2}&1\end{bmatrix}$

（答案不唯一）

7. 证: $rank\ A=r$.

令 $A=BC$, 其中 $B\in C^{m\times r}$, $C\in C^{r\times n}$, B 为列满秩, C 为行满秩.

则 $AA^H=BCC^HB^H$.

令 $C=[C_r\ 0]$, 则 $CC^H=[C_r\ 0]\begin{bmatrix}C_r^H\\0\end{bmatrix}=C_rC_r^H$

$\because rank(C_r)=rank(C_r^H)=r$. $\therefore rank(C_rC_r^H)=r$.

又 B 为列满秩, B^H 为行满秩.

$\therefore rank(BCC^HB^H)=r$.

即 $rank(AA^H)=rank(A)=r$.

同理可证, $rank(A^HA)=rank(A)$.

故 $rank(A)=rank(AA^H)=rank(A^HA)$, 得证.

9.

设 a 是 AB 的非零特征值, 则存在非零向量 x

使得 $ABx=ax$.

而 $Bx\neq\theta$, 否则 $Bx=0\Rightarrow ax=0$, 与 $a\neq 0$,

$x\neq\theta$ 矛盾

记 $Bx=y$

$BAy=ay$. $\because y$ 是非零向量、

$\therefore a$ 也是 BA 的特征值。

同理 BA 的非零特征值也是 AB 的特征值。

即 AB 和 BA 具有完全相同的非零特征值。[redacted]