# 习题课

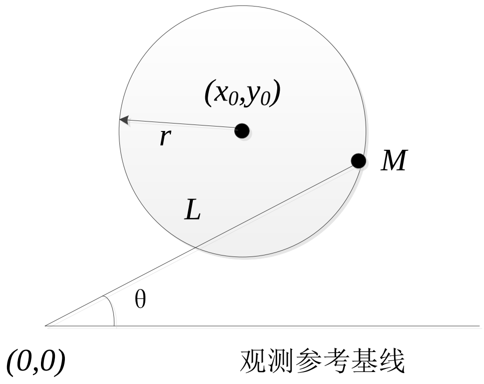
## 估计的基本方法最优预测、最优滤波

# 例1

如下图所示，一物体M沿着一已知半径为r的圆形轨道运动，设观测点位于直角坐标的（0，0）点，能够获得的测量信息有：视线与参考基线的夹角θ，物体距离观测点的距离L。两测量间相互独立，且均含有统计特性未知的测量噪声，若存在一系列的观测数据，请回答下列问题：

1）设计轨道中心坐标（x0，y0）的估计算法，给出具体的求解公式；

2）针对设计的算法，分析不同情况下观测信息对估计精度可能的影响。




$$\begin{cases} x = L\cos\theta \\ y = L\sin\theta \end{cases}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$x^2+x_0^2-2xx_0+y^2+y_0^2-2yy_0=r^2$$

**方法1**

$$x^2+y^2+\left(x_0^2+y_0^2\right)-2xx_0-2yy_0=r^2$$

设$\left(x_0^2+y_0^2\right)$=a　对a、$x_0$、$y_0$进行估计

$$H=\begin{bmatrix} 1 & -2x_1 & -2y_1 \\ 1 & -2x_2 & -2y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -2x_n & -2y_n \end{bmatrix}$$

**方法2**：

取p、q两个的不同位置的观测求差，构造新的求解关系，有：

$$2(x_p-x_q)x_0+2(y_p-y_q)y_0=x_q^2+y_q^2-\left(x_p^2+y_p^2\right)$$

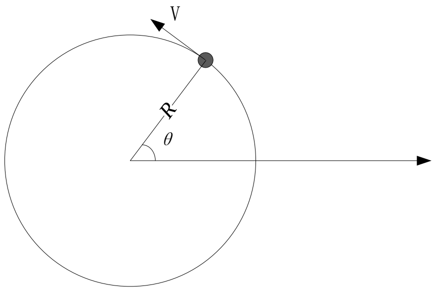
$$H=\begin{bmatrix} 2\left(x_l-x_k\right) & 2\left(y_l-y_k\right) \\ \vdots & \vdots \\ 2\left(x_p-x_q\right) & 2\left(y_p-y_q\right) \end{bmatrix}$$

# 例2

如图所示有一物体沿半径为50米的圆形轨道运动，其理想速率未知，但速率变化服从方差为1(米/秒)$^2$的正态分布，若仅能实现对$\theta$角的测量，并已知其测量误差方差为0.01度$^2$，为实现对其运动参数有效估计：

1）设计合理物体运动参数估计方法，并给出原因；

2）讨论圆周半径对估计结果的影响，分析其原因。




$$\begin{cases} \theta(k+1)=\theta(k)+V(k)\bullet\Delta t/R+W_\theta(k) \\ V(k+1)=V(k)+W_v(k) \end{cases}$$

$$Z(k)=\theta(k)+e(k)$$

设 $X_1=V$，$X_2=\theta$

有

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T}{R} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1(k) \\ W_2(k) \end{bmatrix}$$

$$Z(k)=[0 \quad 1]\begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix}+V(k)$$

圆周变化的影响，当R增大时，由于角度观测噪声不变，噪声占有效测量的比例变大，会影响速度V的估计结果。

若要获得对V 的有效估计，在不同R情况下应当注意合理的采样频率，获得利用新息对状态的合理修正，R大的时候采样间隔大，噪声影响相对减少，但滤波计算次数减少，收敛速度慢。

# 例3

利用已知地标点定位问题中，A为需要定位的移动体，M1~Mn为坐标已知的三维地标点，A移动过程中可以实时测量A到M1~Mn的距离d1~dn，对于A点定位应用请回答下列问题：

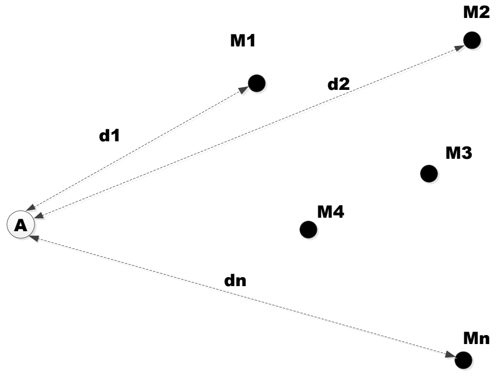
1）d1~dn测量噪声未知，请选择合适的估计方法，并给出理由；

2）推导出A点三维坐标计算公式；

3）对A点的定位精度进行讨论。

$$(x_i - x_a)^2 + (y_i - y_a)^2 + (z_i - z_a)^2 = d_i^2$$

$$x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 - 2x_i x_a - 2y_i y_a - 2z_i z_a + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = d_i^2$$




$$\begin{bmatrix} d_1^2\text{-}(x_1^2+y_1^2+z_1^2) \\ d_2^2\text{-}(x_2^2+y_2^2+z_2^2) \\ \vdots \\ d_i^2\text{-}(x_i^2+y_i^2+z_i^2) \\ \vdots \\ d_m^2\text{-}(x_m^2+y_m^2+z_m^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \text{-}2x_1 & -2y_1 & -2z_1 \\ 1 & 1 & 1 & \text{-}2x_2 & -2y_2 & -2z_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \text{-}2x_i & -2y_i & -2z_i \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \text{-}2x_m & -2y_m & -2z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a^2 \\ y_a^2 \\ z_a^2 \\ x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$$

**Z = HX**

**X = $(H^T H)^{-1} H^T Z$**

**$(H^T H)$** 不满秩，因此要设计合理的解算方法。

# 例3

$$1-\frac{2x_i x_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2}-\frac{2y_i y_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2}-\frac{2z_i z_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2}+\frac{\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right)-d_i^2}{x_a^2+y_a^2+z_a^2}=0$$

设 $p_1=\frac{1}{x_a^2+y_a^2+z_a^2},p_2=\frac{-2x_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2},p_3=\frac{-2y_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2},p_4=\frac{-2z_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$

$$\begin{bmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2-d_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2-d_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2+y_m^2+z_m^2-d_m^2 & x_m & y_m & z_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}=(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{Z}$$

此方程可解，在获得p1、p2、p3、p4后

$$p_1=\frac{1}{x_a^2+y_a^2+z_a^2},p_2=\frac{-2x_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2},p_3=\frac{-2y_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2},p_4=\frac{-2z_a}{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$$

$$x_a=-\frac{p_2}{2p_1},\quad y_a=-\frac{p_3}{2p_1},z_a=-\frac{p_4}{2p_1}$$

3）为获得A点位置的高精度结果，首先应得到距离的高精度测量，其次已知位置点相对A点应在各个方向上有效分布，避免过于集中在某一方向上而导致H$^T$H接近奇异，降低求解精度。

# 例4

某信号的理想模型为$s(n) = a + (-1)^n b$，但实际情况下，信号生成过程中存在加性零均值白噪声，信号的量测值为z(n)=s(n)+V(n),V为零均值白噪声，其方差为1。请设计该信号的Kalman滤波估计模型。

设

$$x_1 = a$$
$$x_2 = b$$

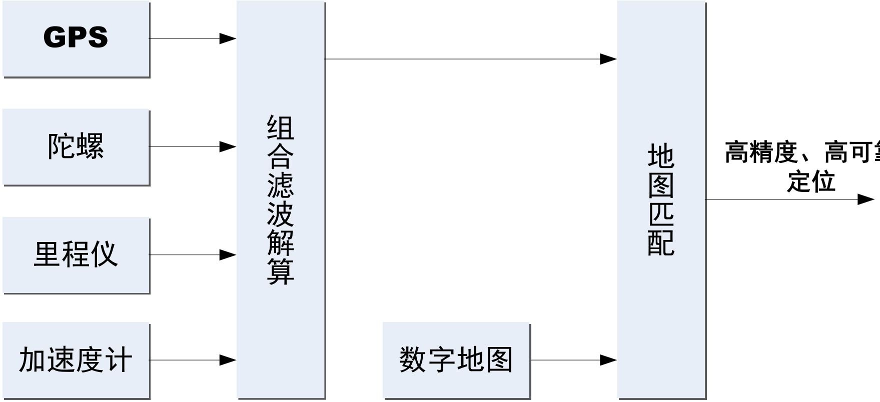
有

$$x_1(k+1) = x_1(k) + w_1$$
$$x_2(k+1) = -x_2(k) + w_2$$

则

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + V$$

# GPS/陀螺/里程计组合导航设计



## 1）系统模型

**状态**

$$
\begin{aligned}
N_y(k+1) &= N_y(k) + v(k)T\cos(\psi(k)) + w_1 \\
E_x(k+1) &= E_x(k) + v(k)T\sin(\psi(k)) + w_2 \\
\psi(k+1) &= \psi(k) + T\dot{\psi}(k) + w_3 \\
v(k+1) &= v(k) + w_4 \\
\dot{\psi}(k+1) &= \dot{\psi}(k) + w_5 \\
B(k+1) &= B(k) + w_6 \\
S(k+1) &= S(k) + w_7
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} North\_pos \\ East\_pos \\ Heading \\ Speed \\ Heading\_rate \\ Bias \\ ODmeter \end{bmatrix}
$$

**观测**

$$
\begin{aligned}
N_{gps} &= N_y(k) + e_1 \\
E_{gps} &= E_x(k) + e_2 \\
\psi_{gps} &= \psi(k) + e_3 \\
v_{speed}(k) &= n(k)S(k) + e_4 \\
\dot{\psi}_{gyro}(k) &= \dot{\psi}(k) + B + e_5
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} Z_{North\_pos} \\ Z_{East\_pos} \\ Z_{Heading} \\ Z_{GPS\_Speed} \\ Z_{Gyro\_rate} \end{bmatrix}
$$

## 2）噪声情况

$$N_y(k+1) = N_y(k) + v(k)T\cos(\psi(k)) + w_1$$
$$E_x(k+1) = E_x(k) + v(k)T\sin(\psi(k)) + w_2$$
$$\psi(k+1) = \psi(k) + T\dot{\psi}(k) + w_3$$
$$v(k+1) = v(k) + w_4$$
$$\dot{\psi}(k+1) = \dot{\psi}(k) + w_5$$
$$B(k+1) = B(k) + w_6$$
$$S(k+1) = S(k) + w_7$$

$$x^T = \begin{bmatrix} N_y & E_x & \psi & v & \dot{\psi} & B & S \end{bmatrix}$$

$$N_{gps} = N_y(k) + e_1$$
$$E_{gps} = E_x(k) + e_2$$
$$\psi_{gps} = \psi(k) + e_3$$
$$v_{speed}(k) = n(k)S(k) + e_4$$
$$\dot{\psi}_{gyro}(k) = \dot{\psi}(k) + B + e_5$$

$$y^T = \begin{bmatrix} N_{gps} & E_{gps} & \psi_{gps} & v_{speed} & \dot{\psi}_{gyro} \end{bmatrix}$$

$$Q = E\left[\tilde{x}\tilde{x}^T\right] = \begin{bmatrix} q_{11} & & & & & & 0 \\ & q_{22} & & & & & \\ & & q_{33} & & & & \\ & & & q_{44} & & & \\ & & & & q_{55} & & \\ & & & & & q_{66} & \\ 0 & & & & & & q_{77} \end{bmatrix}$$

$$R = E\left[\tilde{y}\tilde{y}^T\right] = \begin{bmatrix} r_{11} & & & & 0 \\ & r_{22} & & & \\ & & r_{33} & & \\ & & & r_{44} & \\ 0 & & & & r_{55} \end{bmatrix}$$

## 2）噪声情况

| sq | name | Meaning | UNIT | value |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $q_{11}$ | North position variance | | |
| 2 | $q_{22}$ | east position variance | | |
| 3 | $q_{33}$ | GPS heading variance | | |
| 4 | $q_{44}$ | GPS vilocity variance | | |
| 5 | $q_{55}$ | Gyro rate variance | | |
| 6 | $q_{66}$ | Gyro bias variance | | |
| 7 | $q_{77}$ | Odometer variance | | |

| sq | name | Meaning | UNIT | value |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $r_{11}$ | North position noise variance | | |
| 2 | $r_{22}$ | East position noise variance | | |
| 3 | $r_{33}$ | GPS heading noise variance | | |
| 4 | $r_{44}$ | GPS velocity noise variance | | |
| 5 | $r_{55}$ | Gyro rate noise variance | | |

## 3）状态方程的结构

$$N_y(k+1)=N_y(k)+v(k)T\cos(\psi(k))+w_1$$
$$E_x(k+1)=E_x(k)+v(k)T\sin(\psi(k))+w_2$$
$$\psi(k+1)=\psi(k)+T\dot{\psi}(k)+w_3$$
$$v(k+1)=v(k)+w_4$$
$$\dot{\psi}(k+1)=\dot{\psi}(k)+w_5$$
$$B(k+1)=B(k)+w_6$$
$$S(k+1)=S(k)+w_7$$

$$\phi(k+1,k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -v(k)T\sin(\psi(k)) & T\cos(\psi(k)) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & v(k)T\cos(\psi(k)) & T\sin(\psi(k)) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & T & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Gamma(k+1,k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

## 3）观测方程的结构

$$N_y(k+1) = N_y(k) + v(k)T\cos(\psi(k)) + w_1$$
$$E_x(k+1) = E_x(k) + v(k)T\sin(\psi(k)) + w_2$$
$$\psi(k+1) = \psi(k) + T\dot{\psi}(k) + w_3$$
$$v(k+1) = v(k) + w_4$$
$$\dot{\psi}(k+1) = \dot{\psi}(k) + w_5$$
$$B(k+1) = B(k) + w_6$$
$$S(k+1) = S(k) + w_7$$

$$N_{gps} = N_y(k) + e_1$$
$$E_{gps} = E_x(k) + e_2$$
$$\psi_{gps} = \psi(k) + e_3$$
$$v_{speed}(k) = n(k)S(k) + e_4$$
$$\dot{\psi}_{gyro}(k) = \dot{\psi}(k) + B + e_5$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 4）观测方程的结构

$$\begin{bmatrix} North\_pos \\ East\_pos \\ Heading \\ Speed \\ Heading\_rate \\ Bias \\ ODmeter \end{bmatrix}_{k|k} = \begin{bmatrix} North\_pos \\ East\_pos \\ Heading \\ Speed \\ Heading\_rate \\ Bias \\ ODmeter \end{bmatrix}_{k|k\text{-}1} + K(k)\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{North\_pos} \\ \tilde{Z}_{East\_pos} \\ \tilde{Z}_{Heading} \\ \tilde{Z}_{GPS\_Speed} \\ \tilde{Z}_{Gyro\_rate} \end{bmatrix}$$

## 5）K的理解

$$
\begin{bmatrix} North\_pos \\ East\_pos \\ Heading \\ Speed \\ Heading\_rate \\ Bias \\ ODmeter \end{bmatrix}_{k|k} = \begin{bmatrix} North\_pos \\ East\_pos \\ Heading \\ Speed \\ Heading\_rate \\ Bias \\ ODmeter \end{bmatrix}_{k|k\text{-}1} + K(k) \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{North\_pos} \\ \tilde{Z}_{East\_pos} \\ \tilde{Z}_{Heading} \\ \tilde{Z}_{GPS\_Speed} \\ \tilde{Z}_{Gyro\_rate} \end{bmatrix}
$$

K =

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.58962629300339 | -0.01891377183922 | 0.10236972175576 | 0 | -0.00025138710658 |
| -0.01891377183922 | 0.61551180725430 | 0.09947436578864 | 0 | -0.00024382397596 |
| 0.00022748827057 | 0.00022105414620 | 0.96449208050691 | 0 | 0.00008726833231 |
| 0.05178009710104 | -0.08386359944275 | 0.00826307651520 | 0 | -0.00002024022900 |
| -0.00149398494789 | -0.00101597858575 | 0.47081886648819 | 0 | 0.49636179137482 |
| 0.00149391511814 | 0.00101591085687 | -0.47080795794665 | 0 | 0.49868756543522 |
| 0 | 0 | 0 | 0.15805476054327 | 0 |