



第四章 线性系统二次型指标的最优控制



本章主要内容

4.1 线性二次型最优控制的数学描述

4.2 连续系统的有限时间状态调节器

4.3 连续系统的无限时间状态调节器

4.4 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器

4.5 连续系统的伺服跟踪最优控制器

4.6 离散系统的状态调节器

4.7 小结





4.1 线性二次型最优控制的数学描述

对于变分法而言，其设计结果本质上是开环控制器，虽然可按开环控制器的控制规律形成闭环控制器，但显得繁琐且鲁棒性不高。对于极小值原理而言，其在求解非线性系统最优控制时需要解决困难的两点边值问题，即使对于线性系统，当指标函数是最短时间或最少燃料等非线性函数时，得到最优控制的解析表达式仍十分困难。





美国学者卡尔曼在研究状态方程、线性系统能控性和能观性基础上，以空间飞行器制导为背景，提出了线性系统的二次型指标函数，获得了易于求解的线性最优状态反馈控制器。该控制器的设计可归结为求解非线性黎卡提(**Riccati**)矩阵微分方程或代数方程。目前，黎卡提矩阵方程的求解已得到广泛深入的研究，有标准的计算机程序可供使用，求解规范方便。





一般情况的线性二次型问题可表示如下：

设线性时变系统的方程为

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (4-1)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) \quad (4-2)$$

其中 $X(t)$ 为 n 维状态向量， $U(t)$ 为 m 维控制向量， $Y(t)$ 为 l 维输出向量。设 $U(t)$ 不受约束。





$$e(t) = Z(t) - Y(t) \quad (4-3)$$

其中, $Z(t)$ 为 l 维理想输出向量。寻找最优控制, 使下面的性能指标最小

$$J(u) = \frac{1}{2} e^T(t_f) P e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt \quad (4-4)$$

其中, P 是 $l \times l$ 对称半正定常数阵, $Q(t)$ 是 $l \times l$ 对称半正定阵, $R(t)$ 是 $m \times m$ 对称正定阵。一般将 P 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 取成对角阵。





1. 上式中的第一项 $\frac{1}{2}e^T(t_f)Pe(t_f)$ 是为了考虑对终端误差的要求而引进的，其为终端误差的代价函数，表示对终端误差的惩罚。当对终端误差要求较严时，可将这项加到性能指标中。例如，在航天器的交会对接问题中，由于对两个航天器终态的一致性要求特别严格，而对动态过程和控制能量消耗并没有过多要求，因此必须加上这一项，以保证终端状态误差最小。





2. $Q(t)$ 为半正定阵，则当 $e(t) \neq 0$ ，就有 $e^T(t)Q(t)e(t) \geq 0$

， $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} e^T(t)Q(t)e(t)dt$ 表示误差平方和积分，故这项表示对系统误差的惩罚。 $\frac{1}{2} e^T(t_f)Pe(t_f)$ 表示对终端误差的惩罚，当对终端误差要求较严时，可将这项加到性能指标中。





3. 积分项中的第二项 $U^T(t)R(t)U(t)$ 表示工作过程中控制 $u(t)$ 产生的分量。

因 $R(t)$ 为正定阵，则当 $U(t) \neq 0$ ，就有 $U^T(t)R(t)U(t) > 0$ 。也就是说，只要存在控制，这项总是正的。例如

$$R(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) & 0 \\ 0 & r_2(t) \end{bmatrix} \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

设 $r_1(t) > 0$ ， $r_2(t) > 0$ ，则 $R(t)$ 为正定阵，于是

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} U^T(t)R(t)U(t)dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [r_1(t)u_1^2(t) + r_2(t)u_2^2(t)]dt$$





它与消耗的控制能量成正比，消耗得越多，则性能指标值越大。故性能指标中这一项表示了对消耗控制能量的惩罚。 $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ 可看作加权系数，如认为 $u_1(t)$ 的重要性大于 $u_2(t)$ ，则可加大 $r_1(t)$ 。将 $R(t)$ 选成时间函数，是为了对不同时刻的 $U(t)$ 加权不一样。实际上，为了简单起见常选用常数阵 R 。

总之，性能指标 $J(u)$ 最小表示了要用不大的控制量来保持较小的误差，以达到能量和误差的综合最优。





本章将讨论如下几种线性系统二次型最优控制问题：

1. 连续系统的有限时间状态调节器设计。

此时, $C(t)$ 为单位阵, 理想输出 $Z(t) = 0$, $Y(t) = X(t) = -e(t)$, 终端时间 t_f 有限, 即在有限的时间用不大的控制量来使 $X(t)$ 保持在零值附近, 因此称为有限时间状态调节器问题。





2. 连续系统的无限时间状态调节器设计。

此时，终端时间 t_f 无穷大，其他条件与前相同，即在无穷长时间内(系统达到稳态)用不大的控制量来使 $X(t)$ 保持在零值附近。





3. 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器设计。

4. 连续系统的伺服跟踪最优控制器设计。

此时, $Z(t) \neq 0$, $e(t) = Z(t) - Y(t)$, 即需用不大的控制量使 $Y(t)$ 跟踪 $Z(t)$, 因此称为伺服跟踪问题。

5. 离散系统的状态调节器(含有限时间和无限时间两种)。





本章主要内容

4.1 线性二次型最优控制的数学描述

4.2 连续系统的有限时间状态调节器

4.3 连续系统的无限时间状态调节器

4.4 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器

4.5 连续系统的伺服跟踪最优控制器

4.6 离散系统的状态调节器

4.7 小结





4.2连续系统的有限时间状态调节器

考虑下面的系统状态方程和性能指标 J

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad X(t_0) = X_0 \quad (4-5)$$

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) P X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt \quad (4-6)$$

要求寻找最优控制 $U(t)$, 使 J 最小。这里 $U(t)$ 无约束。 P 、 $Q(t)$ 为对称半正定阵, $R(t)$ 为对称正定阵。终端时间 t_f 为有限值。





4.2.1 基于极小值原理的设计方法

因 $U(t)$ 无约束，故等同于用经典变分法求解。

取哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2} [X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t)] \\ + \lambda^T(t)[A(t)X(t) + B(t)U(t)] \quad (4-7)$$

最优解的必要条件如下：

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -[Q(t)X(t) + A^T(t)\lambda(t)] \quad (4-8)$$





控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial U} = R(t)U(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0 \quad (4-9)$$

$$U = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t)$$

因 $R(t)$ 正定，故 $R^{-1}(t)$ 存在，由上式可确定最优控制 $U(t)$ 。为寻求最优反馈控制律还需把 $U(t)$ 与状态 $X(t)$ 联系起来。





横截条件为

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} = \frac{\partial}{\partial X(t_f)} \left[\frac{1}{2} X^T(t_f) P X(t_f) \right] = P X(t_f) \quad (4-10)$$

我们再一次遇到了两点边值问题（已知 $X(t_0)$ 和 $\lambda(t_f)$ ），如前所述，一般要试凑 $\lambda(t_0)$ 再积分协态方程使 $\lambda(t_f)$ 满足要求。

但这里处理的是线性微分方程，可找到更简单的解法。从(4-10)可见，协态 $\lambda(t)$ 和状态 $X(t)$ 在终端时刻 t_f 成线性关系。





这启发我们假定：

$$\lambda(t) = K(t)X(t) \quad (4-11)$$

然后再来求出 $K(t)$ （这种方法称为扫描法）。

将（4-11）代入（4-9），再代入（4-5），得

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) \quad (4-12)$$

由（4-11）和（4-8）可得

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{K}(t)X(t) + K(t)\dot{X}(t) = -Q(t)X(t) - A^T(t)K(t)X(t) \quad (4-13)$$





将(4-12)代入(4-13)可得

$$[\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + \\ + A^T(t)K(t) + Q(t)]X(t) = 0$$

上式对任意 $X(t)$ 都应成立，故方括号内的项应
为零，这就得出

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + \\ & + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t) \end{aligned} \quad (4-14)$$





上式是 $K(t)$ 的非线性矩阵微分方程，称为黎卡提（**Riccati**）矩阵微分方程。一般来说得不出 $K(t)$ 的解析表达式，但可用计算机程序算出 $K(t)$ 的数值解。为了求解 $K(t)$ ，要知道它的边界条件。比较(4-11)和(4-10)可知

$$K(t_f) = P \quad (4-15)$$

因此可从 t_f 到 t_0 逆时间积分黎卡提微分方程，求出 $K(t)$ 。由(4-9)和(4-11)就可构成最优反馈控制





$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) = -G(t)X(t) \quad (4-16)$$

$G(t) = R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ 又称为最优反馈增益矩阵。最优反馈系统的结构图如图4-1所示。



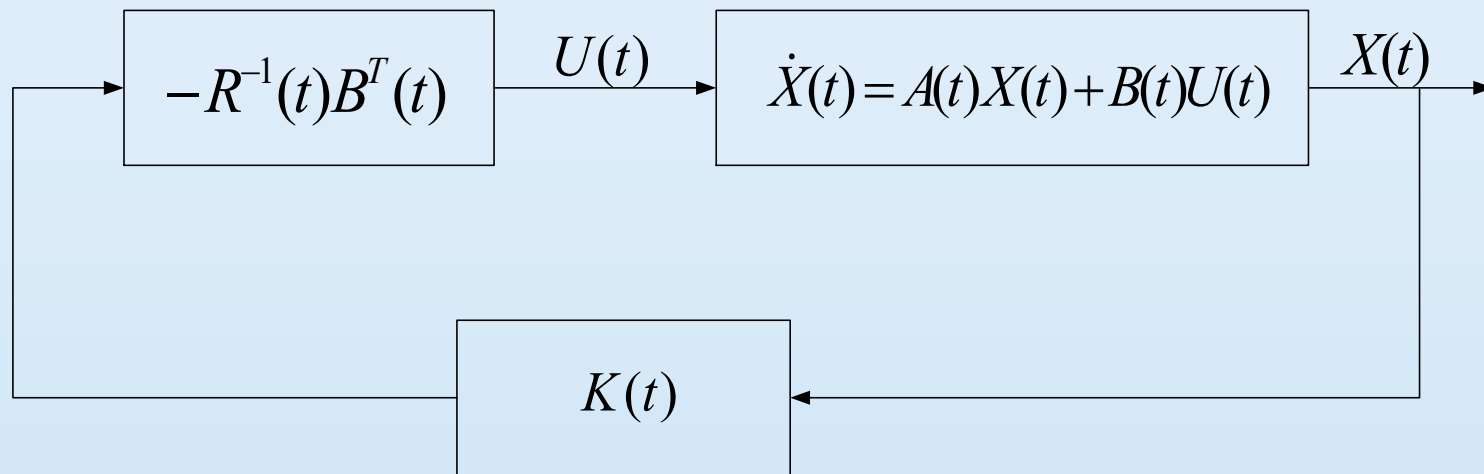


图4-1 最优反馈系统的结构图



注意到 $K(t)$ 与状态 $X(t)$ 无关，故可在系统未运行前，将 $R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ 先计算出来（称为离线计算），把它存储在计算机中。

在系统运行时，将 $-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ 从计算机存储元件中取出，与同一时刻测量到的 $X(t)$ 相乘，就可构成最优控制 $U(t)$ 。

由此可见，系统运行时的计算量（称为在线计算量）只是一个乘法计算，计算量很小。





综上所述，连续系统的有限时间状态调节器可归结为黎卡提矩阵微分方程的求解，得出方程的解之后，代入(4-16)式便可得到状态调节器。

下面研究黎卡提矩阵微分方程的求解方法及解的性质。





4.2.2 黎卡提微分方程的求解

本节讨论黎卡提矩阵微分方程的近似求解及解的性质

1. 黎卡提矩阵微分方程的求解

矩阵黎卡提微分方程是非线性的，一般不能求得闭合形式的解。在数字机上求解时，可用一阶差分代替微分

$$\frac{dK(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t}$$



于是可用下面的差分方程来近似黎卡提
微分方程

$$\begin{aligned} K(t + \Delta t) \approx & K(t) + \Delta t \{ -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + \\ & + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t) \} \end{aligned} \quad (4-17)$$





求解上式时，以 $K(t_f) = P$ 为初始条件，取 Δt 为负的小量，从 t_f 到 t_0 逆时间递推计算，即可出 $K(t)$ 。具体方法是：取 Δt 为负小量，令 $t = t_f$ ， $K(t_f) = P$ 将代入 (4-17) 式求出 $K(t_f + \Delta t)$ ，再代入 (4-17) 式求出 $K(t_f + 2\Delta t)$ ，依此循环计算下去得到 $K(t)$ 的近似解。显然， Δt 的绝对值越小，计算结果越精确。由于 $K(t)$ 与状态 $X(t)$ 无关，因此，只要状态方程和性能指标确定，便可事先算出 $K(t)$ 的值，存储到计算机中备用。





2、 $K(t)$ 是对称矩阵，即 $K(t) = K^T(t)$ ， T 表示转置。
这可证明如下：因为 P 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 都是对称的，
将(4-14)式转置一下，可得

$$\begin{aligned} [\dot{K}(t)]^T &= \dot{K}^T(t) = -K^T(t)A(t) - A^T(t)K^T(t) + \\ &+ K^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K^T(t) - Q(t) \end{aligned}$$





因此 $K^T(t)$ 和 $K(t)$ 一样满足同一黎卡提方程，并且边界条件一样，即 $K^T(t_f) = P = K(t_f)$ 。于是，由微分方程解的唯一性可知 $K^T(t) = K(t)$

利用这个对称性，求 $n \times n$ 维 $K(t)$ 的元时，只需积分 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个方程即可。





3、黎卡提矩阵微分方程解的时变性

即使系统是定常的，即系统矩阵 \mathbf{A} ，输入矩阵 \mathbf{B} 为常数阵，加权阵 R 和 Q 也是常数阵，但 $K(t)$ 仍为时变阵。

这从 $K(t)$ 是黎卡提微分方程的解可看出。 $K(t)$ 时变时，反馈控制增益也时变，在实现时总是不太方便。

下一段将看到，对线性定常系统，若终端时间 $t_f \rightarrow \infty$ ，且系统满足一些附加条件时， $K(t)$ 将变为常数阵 K 。





例4-1 设系统状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= u & x_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4-18)$$

寻找最优控制 $u(t)$ 使下面的性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt \quad (4-19)$$

为最小。





解 把状态方程 (4-18) 和 (4-5) 式相比较, 把性能指标 (4-19) 和 (4-6) 式相比较, 可得

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (4-20)$$

考虑到 $K(t)$ 是对称阵, 设

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

为简单起见, 上式右端省略了自变量 t 。把上面的 A 、 B 、 Q 、 R 和 $K(t)$ 代入黎卡提方程 (4-14) 式, 可得





$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{12} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 + k_{12}^2 & -k_{11} + k_{12}k_{22} \\ -k_{11} + k_{22}k_{12} & -2k_{12} + k_{22}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-22)$$

令上式等号左右端的对应元相等，得

$$\begin{aligned} \dot{k}_{11} &= -1 + k_{12}^2 \\ \dot{k}_{12} &= -k_{11} + k_{12}k_{22} \\ \dot{k}_{22} &= -2k_{12} + k_{22}^2 \end{aligned} \quad (4-23)$$



这是一组非线性微分方程。由边界条件

$$K(t_f) = P = 0 \quad (4-24)$$

得

$$k_{11}(t_f) = k_{12}(t_f) = k_{22}(t_f) = 0 \quad (4-25)$$

由 t_f 到 t_0 逆时间积分上面的非线性微分方程组，即可求得 $k_{11}(t), k_{12}(t), k_{22}(t)$ 。于是最优控制为

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1} B^T K(t) X(t) = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -k_{12}(t)x_1(t) - k_{22}(t)x_2(t) \end{aligned}$$





$k_{12}(t)$ 、 $k_{22}(t)$ 、 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和 $u(t)$ 随时间变化的曲线可求出，如图4-2(a)、(b)、(c)所示。

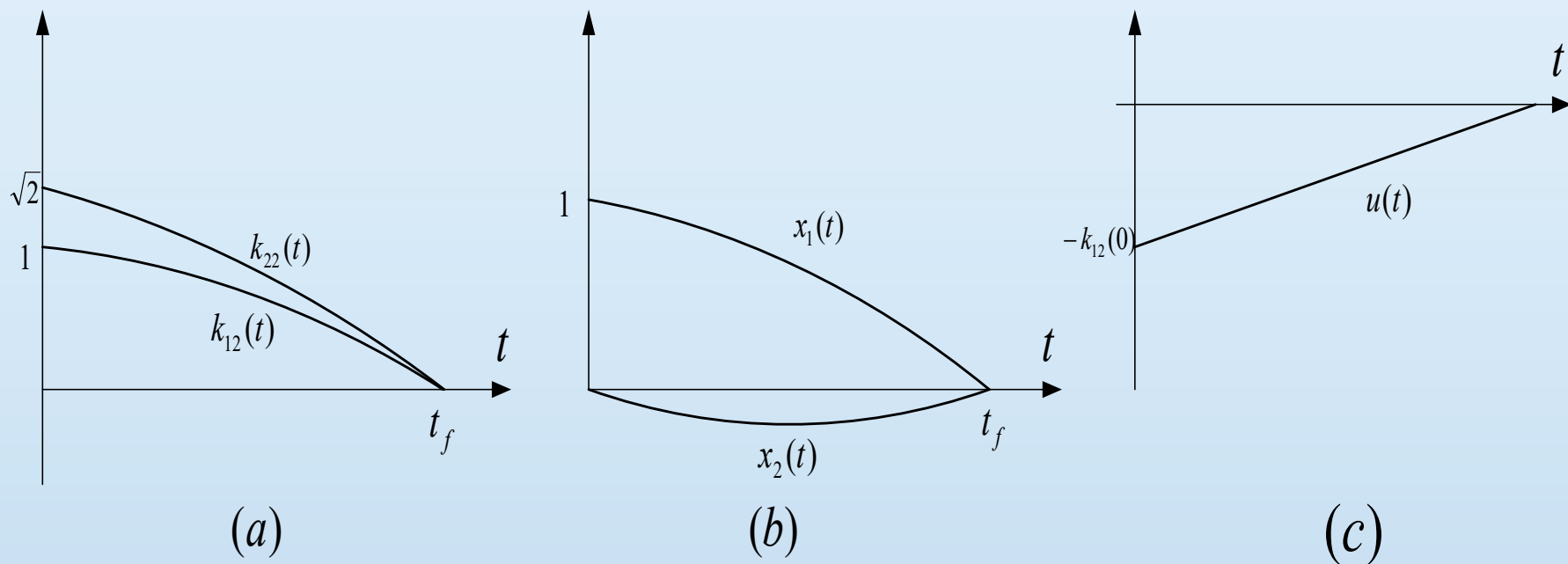


图4-2 $k_{12}(t)$ 、 $k_{22}(t)$ 、 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和 $u(t)$ 的时间曲线



由图4-2可见，定常系统的反馈系数 $k_{12}(t)$ 、 $k_{22}(t)$ 都是时变的。当 t_f 比系统的过渡过程时间大很多时， $k_{12}(t)$ 、 $k_{22}(t)$ 只在接近 t_f 时才有较大的变化，其它时间接近于常数。当 $t_f \rightarrow \infty$ 时， \dot{k}_{11} 、 \dot{k}_{12} 和 \dot{k}_{22} 都趋于零，则黎卡提微分方程变为黎卡提代数方程

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + k_{12}^2 \\ 0 &= -k_{11} + k_{12}k_{22} \\ 0 &= -2k_{12} + k_{22}^2 \end{aligned} \quad (4-26)$$



解上面的方程组可得 k_{11} 、 k_{12} 、 k_{22} 的稳态值

$$k_{11} = \sqrt{2} \quad k_{12} = 1 \quad k_{22} = \sqrt{2}$$

于是最优控制律可表示为

$$u(t) = -x_1(t) - \sqrt{2} x_2(t) \quad (4-27)$$

最优控制系统的结构图如图4-3所示。



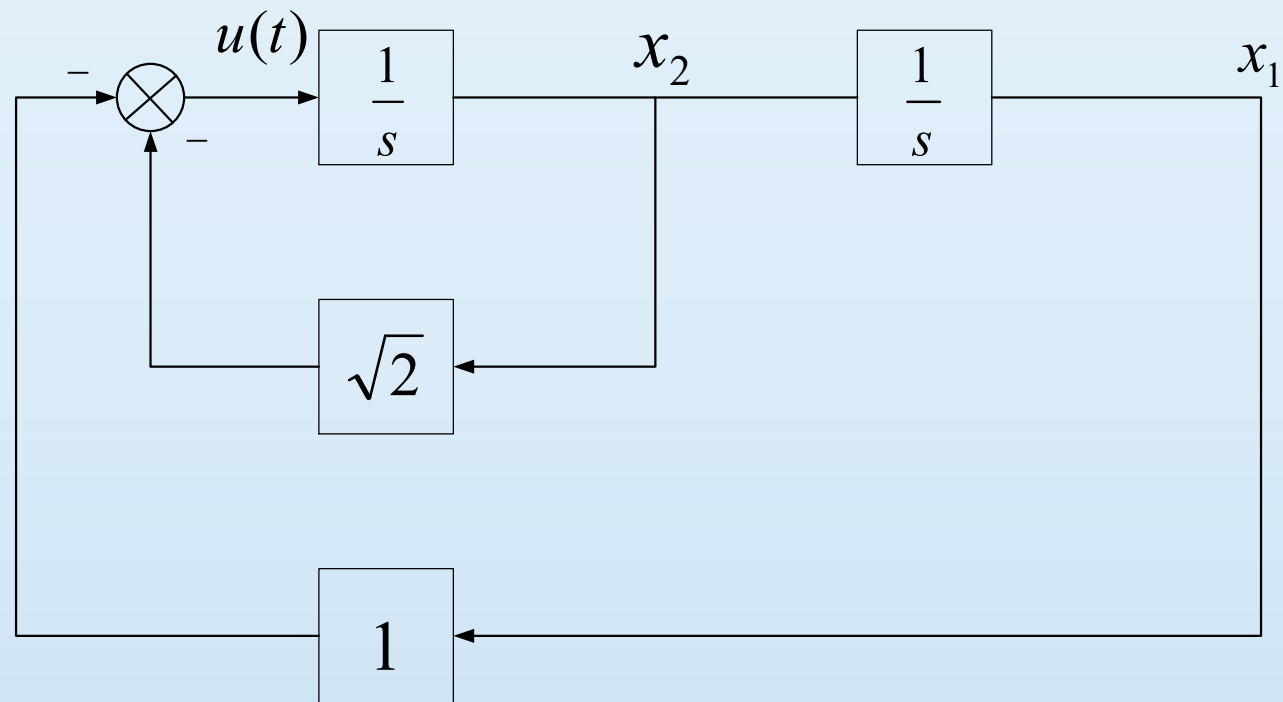


图4-3 重积分系统最优控制的结构图



*****MATLAB程序*****

A=[0 1;0 0];

B=[0;1];

C=eye(2);

D=[0;0];

Q=diag([1 0]);

R=1;

K=lqr(A,B,Q,R);

initial(ss(A-B*K,B,C,D),[1,0])





Response to initial conditions

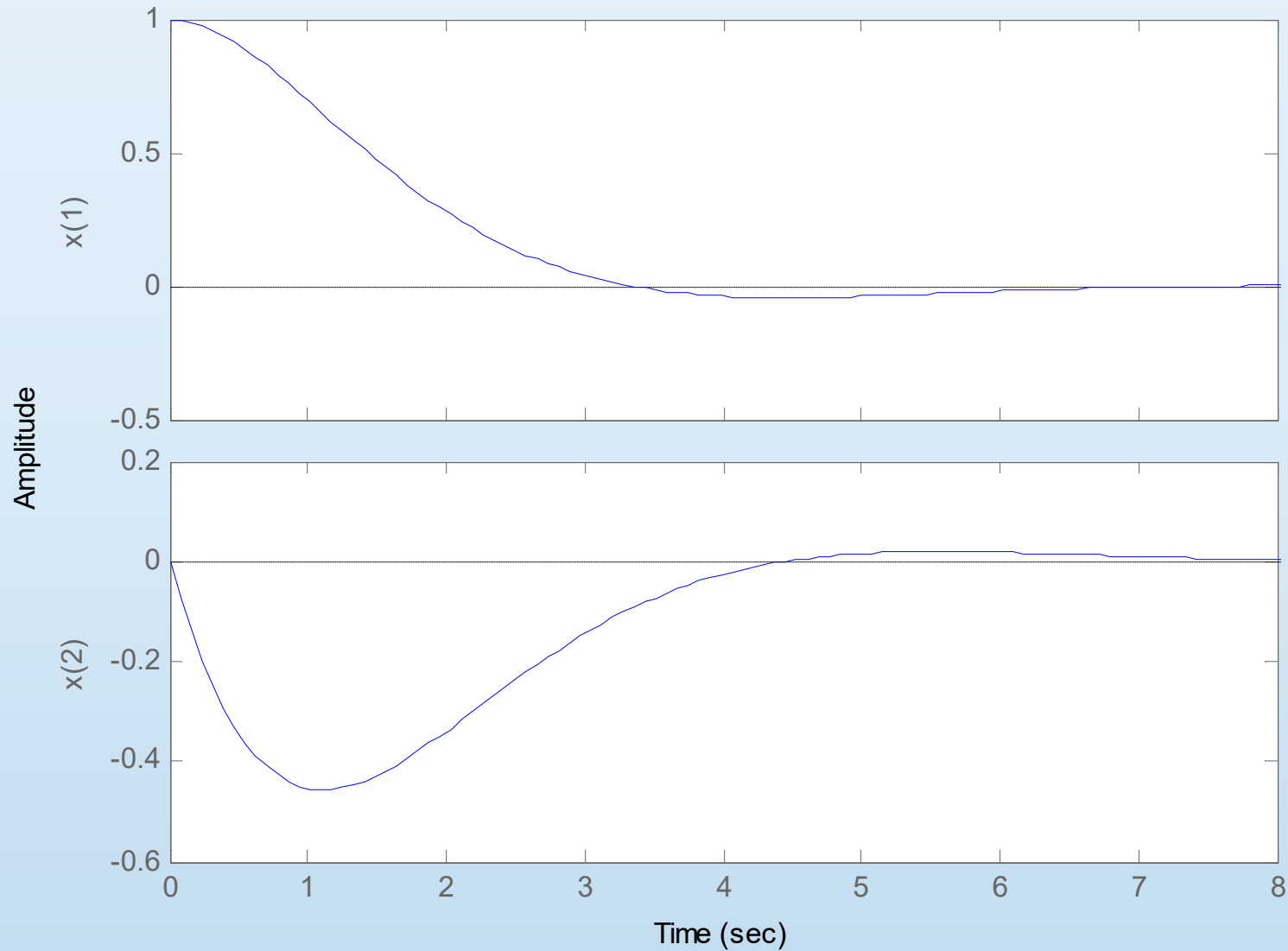


图4-4 重积分系统最优控制的系统响应



本章主要内容

4.1 线性二次型最优控制的数学描述

4.2 连续系统的有限时间状态调节器

4.3 连续系统的无限时间状态调节器

4.4 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器

4.5 连续系统的伺服跟踪最优控制器

4.6 离散系统的状态调节器

4.7 小结





4.3 连续系统的无限时间状态调节器

4.3.1 黎卡提代数方程

上一节我们研究了连续系统有限时间状态调节器问题，其最优反馈控制器是状态反馈形式。然而，状态反馈增益阵是时变的，为了工程实现，必须将其事先存储至计算机内以备在线使用。显然，随着系统复杂度的提高以及系统工作时间的增加，需要的存储量是相当可观的，工程实现难度很大。因此，工程应用领域更希望获得常值最优反馈增益阵。





当系统状态方程和性能指标中的加权矩阵都是定常的，积分指标上限无穷大时，可得到常值最优反馈增益阵，我们称之为无限时间的状态调节器问题。以下不加证明地列出主要结果，然后再对相关条件作进一步说明。





线性定常系统

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (4-28)$$

X 为 n 维, U 为 m 维, 系统是可控的或至少是可稳的 (可稳指不可控的状态是渐近稳定的)。性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T QX + U^T RU) dt \quad (4-29)$$





其中 U 不受约束, Q 和 R 为常数对称正定阵。
或者可将对 Q 的要求改为对称半正定, (A, Q_1) 可观测, 或至少可检测 (可检测指不可观测的状态是渐近稳定的), Q_1 是 Q 的矩阵平方根: 。

上节我们已经证明了: 使 J 为 极小的最优控制是存在和唯一的, 且可表示为:

$$U(t) = -R^{-1} B^T KX(t) = -GX(t) \quad (4-30)$$





其中 G 为 $m \times n$ 维常数阵，称为反馈增益阵， K 为 $n \times n$ 维正定对称阵，满足下面的矩阵黎卡提代数方程

$$-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q = 0 \quad (4-31)$$

对照有限时间调节器的公式（4-14）可见，令 $\dot{K}(t) = 0$ ，并将时变阵换成常数阵即得到（4-31）式。





与有限时间的调节器不同，无限时间的状态调节器问题附加了三组条件：

- (1) 系统可控或至少可镇定；
- (2) Q 为对称正定阵，或 Q 对称半正定并且 (A, Q_1) 可观测，至少可检测。
- (3) 性能指标中没有考虑终端状态惩罚函数 $\frac{1}{2} X^T(t_f) P X(t_f)$ 。





下面逐一解释上述条件：

1) 系统可控或至少可镇定。

因为无限时间状态调节问题的性能指标积分上限为无穷，为了保证积分值为有限， $X(t)$ 和 $U(t)$ 要收敛到零。





如果系统可控，则通过状态反馈可任意配置闭环系统极点，使系统渐近稳定。可控的条件可减弱为镇定，即不可控的状态是渐进稳定的。对有限时间调节器来讲，因为积分上限 t_f 为有限值，即使系统不可控，状态变量不稳定，但积分指标仍可为有限值，故仍旧有最优解。





2) Q 为正定或 Q 为半正定并且 (A, Q_1) 可观测至少可检测。

这个条件是保证最优反馈系统稳定而提出的，因性能指标 J 取有限值，还不能保证系统稳定。

例如只要不稳定的状态变量在性能指标中不出现（未被指标函数所“观测”到）即可。 Q 为半正定时就可能出现这种情况，所以 Q 必须正定。或者半正定，但还有 (A, Q_1) 可观，至少可检。





3) 无限时间状态调节器问题的性能指标中并没有考虑终端状态的惩罚函数 $\frac{1}{2} X^T(t_f) P X(t_f)$

这是因为我们所关注的是系统在有限时间内的响应，所以在 $t_f = \infty$ 时的终端代价没有工程实际意义。





4.3.2 LQR系统的稳定裕度分析

考虑无限时间状态调节器

$$\min_u J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t)] dt \quad (4-32)$$
$$s.t. \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), X(t_0) = X_0$$

可得出矩阵黎卡提代数方程

$$-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q = 0 \quad (4-33)$$





求解矩阵黎卡提代数方程后得到 K ，于是

$$G = R^{-1} B^T K \quad (4-34)$$

$$U(t) = -GX(t) \quad (4-35)$$

闭环系统为

$$\dot{X}(t) = (A - BR^{-1}B^TK)X(t) \quad (4-36)$$

或

$$\dot{X}(t) = (A - BG)X(t) \quad (4-37)$$





在式(4-33)中添加 KsI 及 $-sIK$ 各一项, s 为复变量, 得

$$K(sI - A) + (-sI - A^T)K + G^T R G = Q \quad (4-38)$$

为书写方便, 令 $\phi(s) = (sI - A)^{-1}$, $\phi^T(-s) = (-sI - A^T)^{-1}$ 。

将式(4-38)左乘 $B^T(-sI - A^T)^{-1}$, 右乘 $(sI - A)^{-1}B$, 得

$$\begin{aligned} & B^T(-sI - A^T)^{-1}KB + B^TK(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}G^TRG(sI - A)^{-1}B \\ &= B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

可以得到

$$B^T\phi^T(-s)G^TR + RG\phi(s)B + B^T\phi^T(-s)G^TRG\phi(s)B + R = B^T\phi^T(-s)Q\phi(s)B + R$$

$$\text{即 } [B^T\phi^T(-s)G^T + I]R[G\phi(s)B + I] = B^T\phi^T(-s)Q\phi(s)B + R$$





进而

$$B^T (-sI - A^T)^{-1} Q (sI - A)^{-1} B + R = \left[I + G(-sI - A)^{-1} B \right]^T R \left[I + G(sI - A)^{-1} B \right] \quad (4-39)$$

设 $R = I$ ，并令 $s = j\omega$ ，则式(4-39)化为

$$\begin{aligned} B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} Q (j\omega I - A)^{-1} B + 1 &= \left[I + G(-j\omega I - A)^{-1} B \right]^T \left[I + G(j\omega I - A)^{-1} B \right] \\ &= \left\| I + G(j\omega I - A)^{-1} B \right\|^2 \end{aligned}$$

考虑到 $Q \geq 0$ ，故 $B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} Q (j\omega I - A)^{-1} B \geq 0$ ，于是

$$\left\| I + G(j\omega I - A)^{-1} B \right\| \geq 1 \quad (4-40)$$





为了简明地表述**LQR**的稳定裕度，本节在上述结果基础上研究单输入系统，此时，向量 $U(t)$ 退化为标量，加权阵**R**退化为标量**r**，系数矩阵**B**退化为列向量**b**，增益矩阵**G**退化为行向量 g^T ，范数退化为模。于是，式(4-40)退化为

$$1 + \left| g^T (j\omega I - A)^{-1} b \right| \geq \left| 1 + g^T (j\omega I - A)^{-1} b \right| \geq 1$$

即有

$$\left| 1 + g^T (j\omega I - A)^{-1} b \right| \geq 1 \quad (4-41)$$

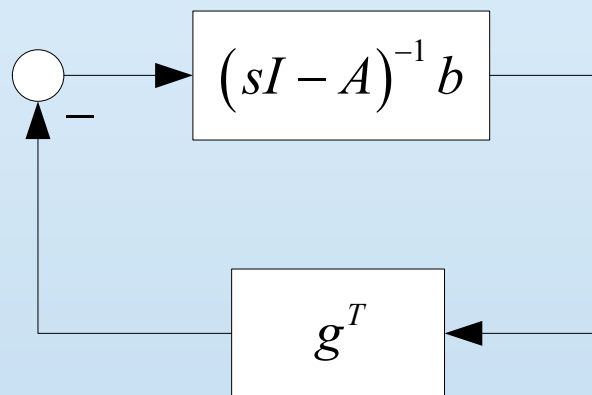




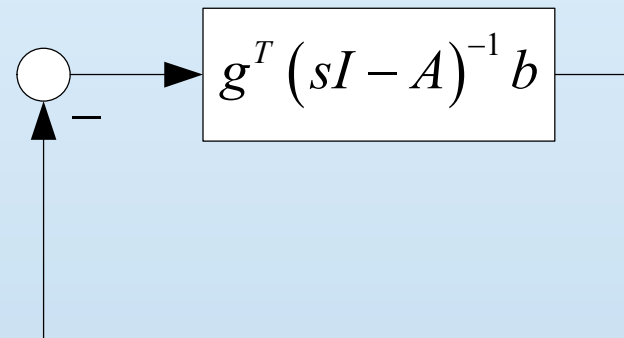
因为本节讨论状态调节器，故 $C = I$ ，即全部状态变量作为输出。所以受控对象的传递函数矩阵为

$$C(sI - A)^{-1}b = (sI - A)^{-1}b$$

图4-5a与4-5b完全等价，仅表征的意义不同。



(a)



(b)

图4-5 两个等价的框图



按Nyquist判据：对于稳定的闭环系统，由前向通道的传递函数 $G(s)$ 和反馈通道的传递函数 $H(s)$ 所构成的 $G(s)H(s)$ ，包绕 $(-1, j0)$ 点的次数必须等于 $G(s)H(s)$ 在 s 平面上右半平面的极点数。若 s 平面上， s 从 $-j\omega$ 顺时针走向 $j\omega$ ，则 $G(s)H(s)$ 应以逆时针包绕 $(-1, j0)$ 点。若 A 为稳定矩阵，则在 s 平面上右半平面的极点数为零。又因 $U(t)$ 是按式(4-35)计算的，它能保证闭环系统渐近稳定。





从图4-5b可以发现

$$G(s) = g^T (sI - A)^{-1} b, H(s) = 1$$

因此，开环传递函数

$$G(s)H(s) = G(s) = g^T (sI - A)^{-1} b$$





即开环频率函数 $G(j\omega) = g^T (j\omega I - A)^{-1} b$ 必须不包绕 $(-1, j0)$ 。由于式(4-41)必须满足，即开环频率特性的第一点必在以 $(-1, j0)$ 为圆心的单位圆之外(见图4-6a)，或以逆时针反向包绕 $(-1, j0)$ 点次数为零(见图4-6b和c)，所以，不论开环频率特性的幅度如何增长，都始终不会包绕 $(-1, j0)$ 点。由此可以得出结论：系统具有无限大的幅值裕度。





从图4-6d看，开环频率特性如果穿越以原点为圆心的单位圆(如图中细实线所示)，交于某点，则开环频率特性以在该点的幅度顺时针转过一个角度后，凡可与 $(-1, j0)$ 点重合者，即为相位裕度。可见，交点E是一个最小的临界点，开环频率特性以E点的幅度顺时针转过60度后，即可与 $(-1, j0)$ 点重合。因此，系统的相位裕度至少为60度。





以幅度裕度和相位裕度来表达系统稳定裕度是反馈控制的惯用方式，上述稳定裕度分析常称之为**LQR**性能的频域解释。需要指出，以上单输入系统**LQR**方案的稳定裕度分析是以全状态反馈为前提条件的。



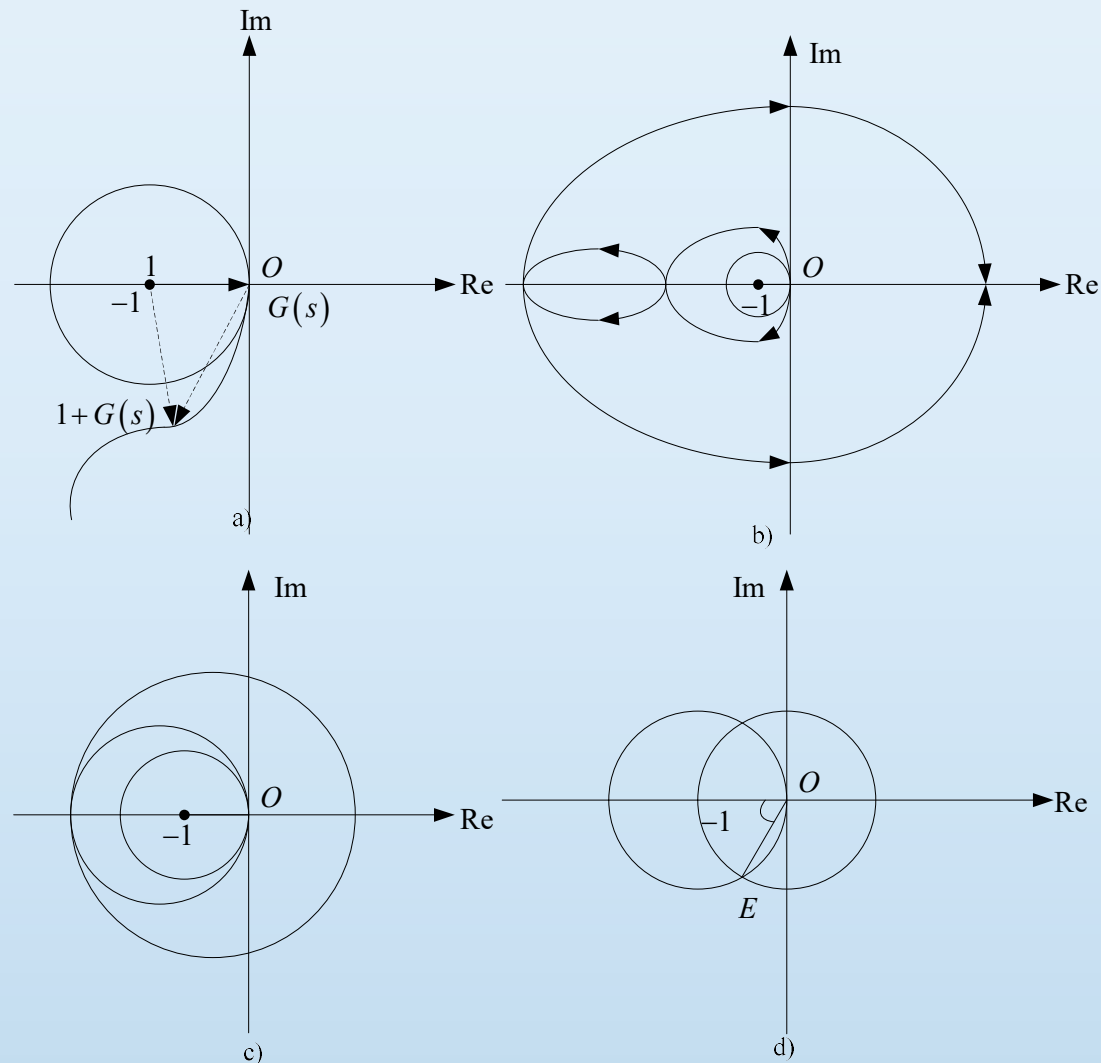


图 4-6 幅度与相位裕度



4.3.3 利用Matlab求解黎卡提代数方程

无限时间状态调节器在上世纪70年代便投入工程应用，目前，很多计算机软件的控制工具箱都提供了其求解程序。以下介绍利用**Matlab**求解黎卡提代数方程的几种方法，以便读者快速完成无限时间状态调节器的设计。





方法一 简单迭代算法

令 $\Phi_0 = 0$, 则可以写出下面的迭代公式

$$\Phi_{i+1} = E^T \Phi_i E - (E^T \Phi_i G + W) (G^T \Phi_i G + H)^{-1} (E^T \Phi_i G + W) + Q$$

$$E = (I - A)^{-1} (I + A)$$

$$G = 2(I - A)^{-1} B$$

$$H = R + B^T (I - A^T)^{-1} Q (I - A)^{-1} B$$

$$W = Q(I - A)^{-1} B$$

如果 Φ_{i+1} 收敛于一个常数矩阵, 即 $\|\Phi_{i+1} - \Phi_i\| < \varepsilon$,

则可得黎卡提代数方程解:

$$P = 2(I - A^T)^{-1} \Phi_{i+1} (I - A)^{-1}$$





*****MATLAB程序*****

```
I=eye(size(A));
```

```
iA=inv(I-A);
```

```
E=iA*(I+A);
```

```
G=2*iA^2*B;
```

```
H=R+B'*iA'*Q*iA*B;
```

```
W=Q*iA*B;
```

```
P0=zeros(size(A));
```

```
i=0;
```

```
while(1),i=i+1;
```

```
    P=E'*P0*E-(E'*P0*G+W)*inv(G'*P0*G+H)*(E'*P0*G+W)'+Q;
```

```
    if(norm(P-P0)<eps),break;
```

```
    else,P0=P;
```

```
    end
```

```
end
```





方法二 lqr函数

MATLAB控制系统工具箱中提供了求解黎卡提代数方程的函数**lqr**，调用的格式为：

$$[K,P,E] = \text{lqr}(A,B,Q,R)$$

其中输入矩阵为**A,B,Q,R**，**(A,B)**为给定对象的状态方程模型，**(Q,R)**分别为加权矩阵**Q**和**R**，返回矩阵**K**为状态反馈矩阵，**P**为黎卡提代数方程的解，**E**为闭环系统的零极点。





lqr函数求解建立在MATLAB控制系统工具箱中一个基于**Schur**变换的黎卡提方程求解函数**are**，该函数的调用格式为：

$$\mathbf{X}=\mathbf{are}(\mathbf{M},\mathbf{T},\mathbf{V})$$

其中， $\mathbf{M}, \mathbf{T}, \mathbf{V}$ 矩阵满足下列黎卡提代数方程。





$$MX + XM^T - XTX + V = 0$$

对比前面给出的黎卡提方程，容易知道

$$M = -A$$

$$T = BR^{-1}B^T$$

$$V = -Q$$





方法三 **care**函数

我们也可采用**MATLAB**控制系统工具箱中**care**函数求解黎卡提代数方程其调用方法如下：

[P,E,K,Report]=care(A,B,Q,R,zeros(size(B)),eye(size(A)))

其中**Report**是留数矩阵**Res**的**Frobenius**范数（其值为： **$\sqrt{\text{sum}(\text{diag}(\text{Res}' * \text{Res}))}$** ，或者用 **$\text{Norm}(\text{Res}, 'fro')$** 计算），其余变量定义同**lqr**函数。





采用**care**函数的优点在于可设置**P**的终值条件，例如可以设置**P**的终值条件为**[0.2;0.2]**:

```
[P,E,K,Report]=care(A,B,Q,R,  
[0.2;0.2],eye(size(A)))
```

而采用**lqr**函数不能设置黎卡提代数方程的边界条件。





例4-2 线性系统为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其目标函数是:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ x^T \begin{bmatrix} 500 & 200 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} x + u^T [1.6667] u \right\} dt$$

确定其无限时间的状态调节器 $u^*(t)$ 。





解:

方法一:

$A = [0 \ 1; -5, -3];$

$B = [0; 1];$

$Q = [500 \ 200; 200 \ 100];$

$R = 1.6667;$

mylq

$K = \text{inv}(R) * B' * P$

P

E

运行结果:

$K = 13.0276 \quad 6.7496$

$P = 67.9406 \quad 21.7131$

$21.7131 \quad 11.2495$

$E = -0.1111 \quad 0.2222$

$-1.1111 \quad -0.7778$





方法二:

$A = [0 \ 1; -5, -3];$

$B = [0; 1];$

$Q = [500 \ 200; 200 \ 100];$

$R = 1.6667;$

$[K, P, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$

运行结果:

$K = 13.0276 \quad 6.7496$

$P = 67.9406 \quad 21.7131$

$21.7131 \quad 11.2495$

$E = -7.2698$

-2.4798





方法三:

$A = [0 \ 1; -5, -3];$

$B = [0; 1];$

$Q = [500 \ 200; 200 \ 100];$

$R = 1.6667;$

$[P, E, K, RR] = \text{care}(A, B, Q,$
 $R, \text{zeros}(\text{size}(B)), \text{eye}(\text{size}(A)))$

运行结果:

$P = 67.9406 \quad 21.7131$

$21.7131 \quad 11.2495$

$E = -7.2698$

-2.4798

$K = 13.0276 \quad 6.7496$

$RR = 2.8458e-015$





利用以上三种方法求解黎卡提代数方程的结果相同

。

$$u^*(t) = -13.0276x_1(t) - 6.7496x_2(t)$$

如果需设置了 \mathbf{P} 的终值条件，则只能用方法三求解，
例如终值条件为 $[0.2; 0.2]$ ：





MATLAB程序 $A=[0 \ 1;-5,-3];$
 $B=[0;1];$
 $Q=[500 \ 200;200 \ 100];$
 $R=1.6667;$
 $[P,E,K,RR]=care(A,B,Q,R,[0.2;0.2],eye(size(A)))$
运行结果:
 $P=67.7233 \ 21.5685$
 $21.5685 \ 11.0961$
 $E=-7.3052$
 -2.4723
 $K=13.0608 \ 6.7775$
 $RR=1.2847e-014$





最优控制变量与状态变量之间的关系:

$$u^*(t) = -13.0608x_1(t) - 6.7775x_2(t)$$





本章主要内容

4.1 线性二次型最优控制的数学描述

4.2 连续系统的有限时间状态调节器

4.3 连续系统的无限时间状态调节器

4.4 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器

4.5 连续系统的伺服跟踪最优控制器

4.6 离散系统的状态调节器

4.7 小结





4.4具有指定衰减速率的无限时间状态调节器

对于无限时间状态调节器设计而言，若 Q 的任意分解
 $Q = C^T C$ ， (A, B) 能控， (A, C) 能观测，则对任意状态初
值都存在使闭环系统渐近稳定的唯一最优调节器

$$U^*(t) = -R^{-1} B^T K X(t)$$

，其中 K 是黎卡提代数方程

$$-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q = 0$$

的唯一正定解





尽管闭环系统是渐近稳定的，但不能保证其状态按照期望的速度衰减。在实际工程中，往往希望闭环系统状态依照事先指定的速度衰减。

由此，本节探讨具有指定衰减速度的无限时间状态调节器设计问题。





系统状态方程为

$$\dot{X} = AX + BU \quad (4-42)$$

$$X(t_0) = x_0$$

性能指标为

$$J_{\beta}[U(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{2\beta t} [X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t)] dt \quad (4-43)$$

其中 $R > 0$, $Q \geq 0$, $\beta > 0$ 为给定衰减常数。





取

$$\begin{aligned}\xi(t) &= e^{\beta t} X(t) \\ v(t) &= e^{\beta t} U(t)\end{aligned}\quad (4-44)$$

则最优控制问题(4-42), (4-43)变为

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (A + \beta I_n) \xi + Bv \\ \xi(0) &= X(0) = X_0\end{aligned}\quad (4-45)$$

性能指标为

$$J_{\beta}[v(t)] = \int_0^{\infty} [\xi^T(t) Q \xi(t) + v^T(t) R v(t)] dt \quad (4-46)$$





设定 (A, B) 能控，且对 Q 的任一分解 $Q = C^T C$, (A, C) 能观测，则有相关的秩判据为

$$\begin{aligned} & \text{rank} \left(B, (A + \beta I_n) B, \dots, (A + \beta I_n)^{n-1} B \right) \\ &= \text{rank} \left(B, AB, \dots, A^{n-1} B \right) \begin{bmatrix} I_r & \beta I_r & \cdots & \beta^{n-1} I_r \\ 0 & I_r & & (n-1) \beta^{n-2} I_r \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & (n-1) \beta I_r \\ 0 & 0 & & I_r \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \left(B, AB, \dots, A^{n-1} B \right) \end{aligned}$$





并且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A + \beta I_n) \\ \vdots \\ C(A + \beta I_n)^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

因为 (A, B) 能控, (A, C) 能观测, 因此 $(A + \beta I_n, B)$ 能控, $(A + \beta I_n, C)$ 能观测。结合无限时间状态调节器设计的求解方法, 可以得到状态调节器为

$$v^*(t) = -R^{-1} B^T K_\beta \xi$$





其中 K_β 是如下黎卡提方程

$$K_\beta (A + \beta I_n) + (A + \beta I_n)^T K_\beta + C^T C - K_\beta B R^{-1} B^T K_\beta = 0$$

(4-47)

的唯一正定解。此时闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (A + \beta I_n - B R^{-1} B^T K_\beta) \xi \\ \xi(0) &= X_0\end{aligned}$$

是渐近稳定的，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) e^{\beta t} = 0$$





又注意到

$$U^*(t)e^{\beta t} = v^*(t) = -R^{-1}B^TK_{\beta}X(t)e^{\beta t}$$

于是，有

$$U^*(t) = -R^{-1}B^TK_{\beta}X(t)$$

其中 K_{β} 满足式(4-47)。当 $\beta = 0$ 时， $K_0 = K$ 就是定常系统无限时间状态调节器中的 **K** 阵。

综上所述可得如下结论：





给定定常系统无限时间的状态调节器设计问题(4-42)
, (4-43)。如果 (A, B) 能控, 并且对 Q 的任意分解 $Q = C^T C$,
· (A, C) 完全能观测, 则存在唯一的具有指定衰减速度 β
的最优调节器 $U^*(t) = -R^{-1} B^T K_\beta X(t)$

使得闭环系统

$$\dot{X} = (A - BR^{-1} B^T K_\beta) X$$

$$X(0) = X_0$$

的解 $X(t)$ 满足





$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) e^{\beta t} = 0$$

其中 K_{β} 是如下黎卡提方程

$$K_{\beta} (A + \beta I_n) + (A + \beta I_n)^T K_{\beta} + C^T C - K_{\beta} B R^{-1} B^T K_{\beta} = 0$$

的唯一正定解。





例4-4 设 $A=1, B=1, C=1, R=1, \beta=1$, 易知 (A, B) 完全能控, (A, C) 完全能观, 则式(4-47)为

$$2k_{\beta} + 2k_{\beta} + 1 - k_{\beta}^2 = 0$$

其解为

$$k_{\beta} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$k_{\beta} = 2 + \sqrt{5}$$

由于 $k_{\beta} > 0$, 所以 $U^*(t) = -(2 + \sqrt{5})X(t)$ 。

因此具有衰减速度为1的状态调节器





其闭环系统为

$$\dot{X}^*(t) = -(1 + \sqrt{5})X^*$$

$$X^*(0) = X_0$$

最优轨线为

$$X^*(t) = e^{-(1+\sqrt{5})t} X_0$$

并且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X^*(t) e^t = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{5}t} X_0 = 0$$





本章主要内容

4.1 线性二次型最优控制的数学描述

4.2 连续系统的有限时间状态调节器

4.3 连续系统的无限时间状态调节器

4.4 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器

4.5 连续系统的伺服跟踪最优控制器

4.6 离散系统的状态调节器

4.7 小结





4.5连续系统的伺服跟踪最优控制器

设系统的状态方程和输出方程为

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad X(t_0) = X_0 \quad (4-48)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) \quad (4-49)$$

其中, x 为 n 维, U 为 m 维, Y 为 q 维。设理想输出为 $Z(t)$, 跟踪误差 $e(t)$ 为

$$e(t) = Z(t) - Y(t) \quad (4-50)$$





寻找控制 u (u 不受约束) 使下列性能指标最小

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f) P e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt \quad (4-51)$$

其中 $R(t)$ 为正定阵, P 、 $Q(t)$ 为半正定阵, t_f 给定。

这一问题的物理意义是在有限时间内以较小的控制

能量为代价, 使误差保持在零值附近。

跟踪问题的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} [Z(t) - C(t)X(t)]^T Q(t) [Z(t) - C(t)X(t)] \\ & + \frac{1}{2} U^T(t) R(t) U(t) + \lambda^T(t) [A(t)X(t) + B(t)U(t)] \end{aligned} \quad (4-52)$$



因 U 无约束，由控制方程

可得
$$\frac{\partial H}{\partial U} = R(t)U(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0$$

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (4-53)$$

由协态方程得出

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial X(t)} = & -C^T(t)Q(t)C(t)X(t) - A^T(t)\lambda(t) \\ & + C^T(t)Q(t)Z(t) \end{aligned} \quad (4-54)$$





由横截条件得

$$\begin{aligned}\lambda(t_f) &= \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} = \frac{\partial}{\partial X(t_f)} \left[\frac{1}{2} e^T(t_f) P e(t_f) \right] \\ &= C^T(t_f) P [C(t_f) X(t_f) - Z(t_f)]\end{aligned}\quad (4-55)$$

由上式可见 $\lambda(t_f)$ 中有一项与 $X(t_f)$ 成线性关系，另一项与理想输出 $Z(t_f)$ 成线性关系。根据扫描法的思想，令

$$\lambda(t) = K(t)X(t) - g(t)\quad (4-56)$$





其中矩阵 $K(t)$ 和向量时间函数 $g(t)$ 待定。将
(4-56) 式对 t 微分，得

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{K}(t)X(t) + K(t)\dot{X}(t) - \dot{g}(t) \quad (4-57)$$

设法从上式中消去 $\dot{X}(t)$ ，为此把 (4-53) 和 (4-56) 代入状态方程 (4-48)，可求出

$$\dot{X}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]X(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t) \quad (4-58)$$

将 (4-58) 代入 (4-57)，即得





$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) = & [\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]X(t) \\ & + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t) - \dot{g}(t)\end{aligned}\quad (4-59)$$

另外，（4-56）代入（4-54）可得

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) = & [-C^T(t)Q(t)C(t) - A^T(t)K(t)]X(t) + A^T(t)g(t) \\ & + C^T(t)Q(t)Z(t)\end{aligned}\quad (4-60)$$

（4-59）减去（4-60）可得





$$\begin{aligned} 0 = & [\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \\ & + C^T(t)Q(t)C(t)]X(t) + [K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - A^T(t)]g(t) \\ & - \dot{g}(t) - C^T(t)Q(t)Z(t) \end{aligned} \quad (4-61)$$

上式对任意的 $X(t)$ 、 $Z(t)$ 均应成立，于是可得

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) = & [K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - A^T(t)]g(t) - C^T(t)Q(t)Z(t) \\ & - C^T(t)Q(t)C(t) \end{aligned} \quad (4-62)$$

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \quad (4-63)$$





上面的微分方程组的边界条件可推导如下：由
(4-56) 得

$$\lambda(t_f) = K(t_f)X(t_f) - g(t_f)$$

而由 (4-55) 得

$$\lambda(t_f) = C^T(t_f)PC(t_f)X(t_f) - C^T(t_f)PZ(t_f)$$

比较上面两式，可得

$$K(t_f) = C^T(t_f)PC(t_f) \quad (4-64)$$

$$g(t_f) = C^T(t_f)PZ(t_f) \quad (4-65)$$





由上面的 t_f 时的边界条件出发，逆时间积分（4-62）和（4-63）即可求出 $K(t)$ 、 $g(t)$ 。于是，最优控制可根据（4-53）和（4-56）求得为

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)[K(t)X(t) - g(t)] \quad (4-66)$$

下面对其含义进行必要的说明。





1. 关于 $K(t)$ 。由于黎卡提矩阵微分方程(4-62)及其边界条件(4-64)均与理想输出 $z(t)$ 无关，所以矩阵 $K(t)$ 是 $A(t), B(t), C(t), P, Q(t), R(t)$ 以及终端时间 t_f 的函数，这意味只要系统方程、性能指标和终端时间确定, $K(t)$ 就确定了。





将方程(4-62)及边界条件(4-64)与方程(4-14)及边界条件(4-15)相比较, 当 $C(t) = I$ 时它们是相一致的, 这意味着最优跟踪系统的反馈结构, 与最优状态调节器系统的反馈结构相同。如再将最优闭环微分方程(4-58)和(4-12)相比较, 在这两个方程中, 转移矩阵均为 $A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$, 也就是说, 最优跟踪系统的特征值与最优状态调节器的特征值相同, 其动态性能和理想输出 $z(t)$ 无关。





2. 关于 $g(t)$ 。最优伺服跟踪系统和最优状态调节器系统的本质差异主要反映在 $g(t)$ 上。 $g(t)$ 是与理想输出 $Z(t)$ 有关的，它表示了跟踪 $Z(t)$ 的驱动作用。为了求出当前时刻的 $g(t)$ ，需要知道全部未来时刻的 $Z(t)$ ， $t \leq \tau \leq t_f$ 。这是因为积分(4-63)求 $g(t)$ 是从 t_f 逆时间进行的。于是在实现最优控制时，必须预先知道 $Z(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 中的变化规律。





在某些情况下能做到这点，如跟踪卫星时，卫星的运动可事先计算出来。但大部分情况下 $z(t)$ 的将来值是未知的，如导弹攻击敌机，敌机的运动规律不知道。这时可有两种处理方法：一种是根据对 $z(t)$ 的测量，预报它的将来值，另一种是将 $z(t)$ 看成随机的。用后一种处理方法时，当然只能得到统计平均意义下的最优。





例4-5 已知一阶系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}\tag{4-67}$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} p e^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [q e^2(t) + r u^2(t)] dt \tag{4-68}$$

其中 $p \geq 0$, $q > 0$, $r > 0$ 。寻找最优控制 $u(t)$ 使 J 最小。





解由 (4-67) (4-68) 知

$$A = a, B = 1, C = 1, Q = q, R = r, P = p$$

由 (4-66) 得

$$u(t) = \frac{1}{r} [g(t) - K(t)x(t)] \quad (4-69)$$

由 (4-62) 可得标量函数满足下面的一阶黎卡提方程

$$\dot{K}(t) = -2aK(t) + \frac{1}{r} K^2(t) - q \quad (4-70)$$





由（4-64）求得边界条件

$$K(t_f) = p$$

标量函数 $g(t)$ 满足微分方程（4-63），即

$$\dot{g}(t) = -\left[a - \frac{1}{r}K(t)\right]g(t) - qZ(t)$$

边界条件由（4-65）求得为

$$g(t_f) = pZ(t_f)$$

最优轨线 $x(t) = y(t)$ 由（4-58）求得：

$$\dot{x}(t) = \left[a - \frac{1}{r}K(t)\right]x(t) + \frac{1}{r}g(t)$$



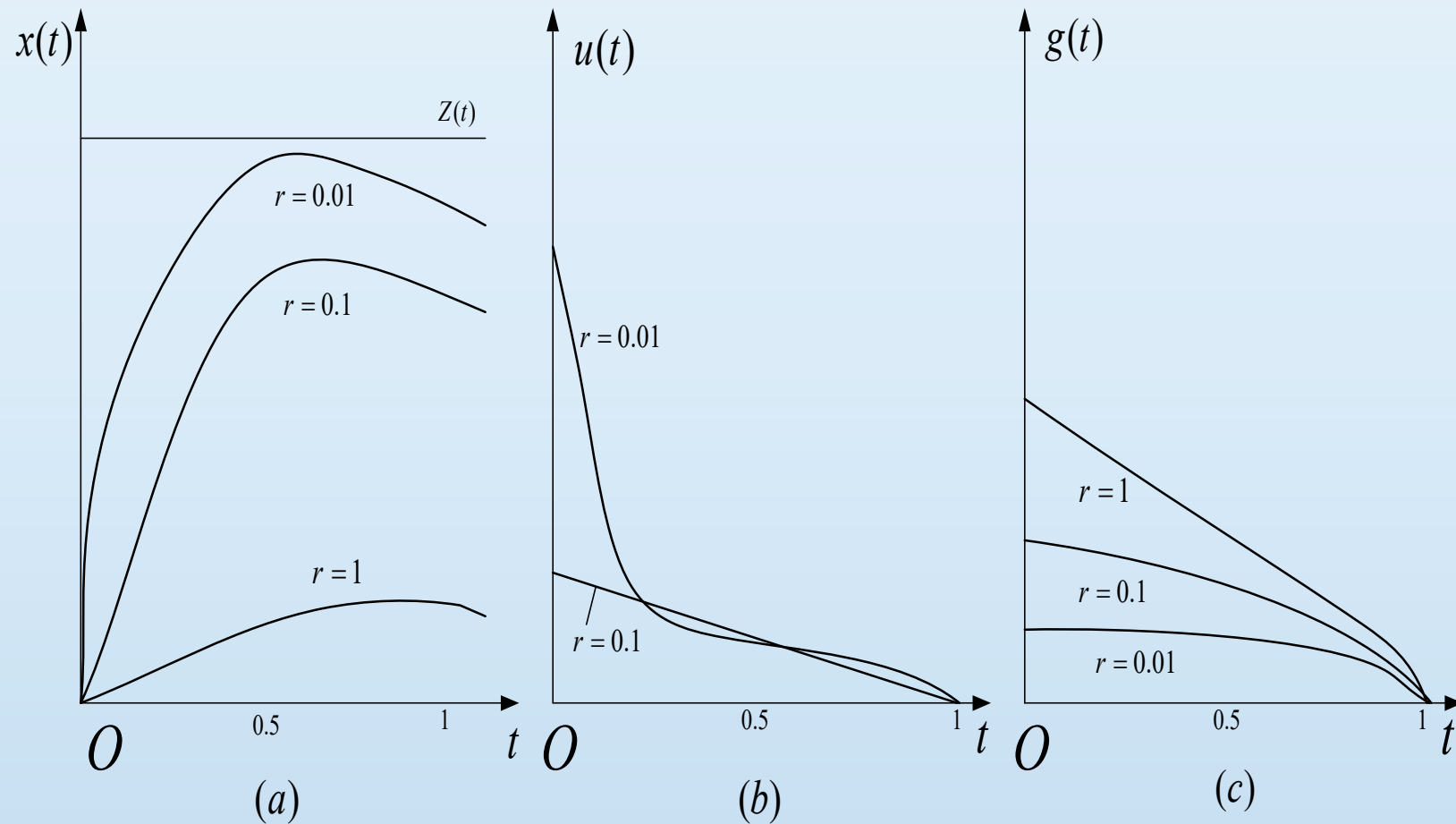


图4-7 $x(t)$ 、 $u(t)$ 、 $g(t)$ 以 r 为参数的时间曲线



图4-7 (a)表示了当 $a = -1$, $x(0) = 0$, $p = 0$, $q = 1$
 $t_f = 1$, 和理想输出 $Z(t) = 1(t)$ 时, 以 r 为参数的最优 $x(t)$
的一组曲线。

由图可见, 随着 r 的减小, $x(t)$ 跟踪 $Z(t)$ 的能力增强。此外, 在接近 $t_f = 1$ 时, 跟踪误差又回升, 这时因为 $p = 0$, $g(t_f) = K(t_f) = 0$, 使 $u(t_f) = 0$ 的缘故。





图4-4 (b)表示了最优控制曲线，随着 r 的减小， $u(t)$ 增大，所以提高跟踪能力是以增大控制量为代价的。

图4-4 (c)是 $g(t)$ 的变化曲线。由图4-4 (a)可见当 $r = 0.01$ ，也就是 q 的百分之一时，控制量较大才获得较好的跟踪性能。





本章主要内容

4.1 线性二次型最优控制的数学描述

4.2 连续系统的有限时间状态调节器

4.3 连续系统的无限时间状态调节器

4.4 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器

4.5 连续系统的伺服跟踪最优控制器

4.6 离散系统的状态调节器

4.7 小结





4.6 离散系统的状态调节器

4.6.1 离散系统的有限时间状态调节器

设线性时变离散系统的状态方程为

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)U(k)$$

$$X(0) = X_0$$

二次型性能指标为

$$J = \frac{1}{2} X^T(N)P(N)X(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [X^T(k)Q(k)X(k) + U^T(k)R(k)U(k)]$$





$P(N)$ 、 $Q(k)$ 为半正定阵， $R(k)$ 为正定阵。要求寻找最优控制序列 $u(k)$ ，使 J 最小。

采用极小值原理进行求解，写出哈密顿函数

$$H(k) = \frac{1}{2} X^T(k) Q(k) X(k) + \frac{1}{2} U^T(k) R(k) U(k) + \lambda^T(k+1) [A(k) X(k) + B(k) U(k)] \quad (4-73)$$

协态方程

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial X(k)} = Q(k) X(k) + A^T(k) \lambda(k+1) \quad (4-74)$$





横截条件为

$$\begin{aligned}\lambda(N) &= \frac{\partial \phi}{\partial X(N)} = \frac{\partial}{\partial X(N)} \left[\frac{1}{2} X^T(N) P(N) X(N) \right] \\ &= P(N) X(N)\end{aligned}\quad (4-75)$$

控制方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(k)}{\partial U(k)} &= R(k)U(k) + B^T(k)\lambda(k+1) = 0 \\ U(k) &= -R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1)\end{aligned}\quad (4-76)$$

假设

$$\lambda(k) = K(k)X(k)\quad (4-77)$$





把（4-77）代入协态方程（4-74）得

$$K(k)X(k) = Q(k)X(k) + A^T(k)K(k+1)X(k+1) \quad (4-78)$$

由状态方程（4-71）和控制方程（4-76）可得

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A(k)X(k) + B(k)U(k) \\ &= A(k)X(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)X(k+1) \end{aligned}$$

所以

$$X(k+1) = [I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)]^{-1} A(k)X(k)$$

把上式代入（4-78）并消去等式两端的 $X(k)$ ，可得 $K(k)$ 必须满足下面的黎卡提矩阵差分方程





$$K(k) = Q(k) + A^T(k)K(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)]^{-1}A(k) \quad (4-79)$$

对上式方括号部分应用矩阵求逆引理。

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

$$\text{令 } A = I, \quad B = B(k), \quad C = R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)$$

可得矩阵黎卡提差分方程的另一形式

$$K(k) = Q(k) + A^T(k)K(k+1)A(k) - A^T(k)K(k+1)B(k)[R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)K(k+1)A(k) \quad (4-80)$$





黎卡提方程的终端条件为

$$K(N) = P(N) \quad (4-81)$$

从 $k = N$ 开始反向递推计算 (4-79) 即可决定 $K(k)$

求出 $K(k)$ 后, 下面来决定 $U(k)$ 。由 (4-74) 得

$$\lambda(k+1) = (A^T(k))^{-1} [\lambda(k) - Q(k)X(k)] = A^{-T}(k) [K(k) - Q(k)]X(k)$$

因而由 (4-76) 得

$$U(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]X(k) \quad (4-82)$$

式 (4-82) 可化为另一形式, 将 (4-79) 代入 (4-82) 并利用 (4-80) 得





$$U(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)\left[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)\right]^{-1}A(k)X(k)$$

$$= -R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)\left[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)\right]^{-1}.$$

$$\left\{ \left[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1) \right] - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1) \right\} A(k)X(k)$$

$$= -R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1) \left\{ I - \left[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1) \right]^{-1} B(k)R^{-1}(k)B^T(k) \cdot \right.$$

$$K(k+1) \left. \right\} A(k)X(k)$$

$$= - \left\{ R^{-1}(k) - R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1) \left[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1) \right]^{-1} \cdot \right.$$

$$B(k)R^{-1}(k) \left. \right\} B^T(k)K(k+1)A(k)X(k)$$





对上式花括号内引用前面的矩阵求逆引理

取 $A = R(k)$, $B = B^T(k)K(k+1)$, $C = B(k)$ 可得

$$\begin{aligned} U(k) &= -\left[R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)\right]^{-1} B^T(k)K(k+1)A(k)X(k) \\ &= -L(k)X(k) \end{aligned} \quad (4-83)$$

$$L(k) = \left[R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)\right]^{-1} B^T(k)K(k+1)A(k) \quad (4-84)$$

$L(k)$ 是最优反馈增益阵。





例4-6 设系统状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad x(0) \text{ 给定} \quad (4-85)$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2}cx^2(2) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^1 u^2(k) \quad (4-86)$$

要求寻找最优序列 $u(0)$ 、 $u(1)$ ，使 J 最小。

解 从给定的系统方程可见，系统矩阵 $A(k) = 1$ ，输入矩阵 $B(k) = 1$





从给定的性能指标可知加权阵 $P(N) = c$, $Q(k) = 0$, $R(k) = 1$ 。黎卡提方程 (4-79) 可写成

$$\begin{aligned} K(k) &= Q(k) + A^T(k) \left[K^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k) \right]^{-1} A(k) \\ &= \left[K^{-1}(k+1) + 1 \right]^{-1} = \frac{K(k+1)}{K(k+1) + 1} \end{aligned} \quad (4-87)$$

终端值 $K(2) = P(2) = c$ 。由 $k = 2$ 反向计算, 求出 $K(1)$ 、 $K(0)$ 。

$$K(1) = \frac{K(2)}{K(2) + 1} = \frac{c}{c + 1} \quad (4-88)$$





$$K(0) = \frac{K(1)}{K(1) + 1} = \frac{c}{2c + 1} \quad (4-89)$$

再利用 (4-82) 式计算 $u(k)$, $k = 0, 1$ 。

$$U(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]X(k) = -K(k)X(k)$$

$$u(0) = -K(0)x(0) = -\frac{c}{2c + 1}x(0) \quad (4-90)$$

$$x(1) = x(0) + u(0) = \frac{c + 1}{2c + 1}x(0) \quad (4-91)$$

再计算 $u(1)$

$$u(1) = -K(1)x(1) = -\frac{c}{c + 1}x(1) = -\frac{c}{2c + 1}x(0) \quad (4-92)$$





4.6.2 离散系统的无限时间状态调节器

设线性定常离散系统的状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad (4-93)$$

X 为 n 维状态向量, U 为 m 维输入向量。性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [X^T(k)QX(k) + U^T(k)RU(k)] \quad (4-94)$$





假设 (A, B) 可控或可稳, R 为对称正定的常数阵, Q 为对称正定的常数阵, 或 Q 为对称半正定常数阵, 但 (A, Q_1) 可观测或可检测, $Q = Q_1^T Q_1$ 。要求寻找最优控制使 J 最小。

可以证明, 对于上面的问题, 最优控制是存在和唯一的, 它可以表示为

$$U(k) = -LX(k) \quad (4-95)$$





L 为 $m \times n$ 维的常数反馈增益阵,参考 (4-84) ,
将时变阵换成常数阵, L 可表示为

$$L = (R + B^T K B)^{-1} B^T K A \quad (4-96)$$

其中 K 为 $n \times n$ 常数阵,是下面的矩阵黎卡提代数方程的唯一的对称正定解。在 (4-80) 的矩阵黎卡提差分方程中, 将时变阵换为常数阵, 即可得出矩阵黎卡提代数方程为

$$-K + Q + A^T K A - A^T K B (R + B^T K B)^{-1} B^T K A = 0 \quad (4-97)$$





最优反馈控制系统为

$$X(k+1) = [A - BL]X(k) \quad (4-98)$$

下面用例子来说明上述结果的应用。

例4-7 系统的状态方程为

$$x_1(k+1) = x_2(k) \quad x_2(k+1) = x_2(k) + u(k) \quad (4-99)$$

性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [qx_1^2(k) + u^2(k)], \quad q > 0 \quad (4-100)$$





寻找最优控制使 J 最小。

❖ 解

由状态方程 (4-99) 和性能指标 (4-100) 可求得下面的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (4-101)$$

因 $[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 非奇异，故系统可控。

当 $q > 0$, Q 为半正定，故有下面的分解





$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{q} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$Q_1^T = \begin{bmatrix} \sqrt{q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Q_1^T \quad A^T Q_1^T] = \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} \quad (4-102)$$





(4-102) 非奇异, 故 (A, Q_1) 对可观测。于是满足稳态状态调节器问题的条件。

令 $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$, 黎卡提方程可写成

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{11} + 2k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}}_{A^T K A} -$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}}_{A^T K B} \underbrace{\frac{1}{1 + k_{22}}}_{[R + B^T K B]^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}}_{B^T K A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$





由上式可解得

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(q + \sqrt{q^2 + 4q}) \end{bmatrix} \quad (4-103)$$

由 (4-95)、(4-96) 可得

$$\begin{aligned} U(k) &= -LX(k) = \frac{-1}{1+k_{22}} \begin{bmatrix} 0 & k_{12} + k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \\ &= \frac{-(k_{12} + k_{22})}{1+k_{22}} x_2(k) = -\frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2 + q + \sqrt{q^2 + 4q}} x_2(k) \end{aligned}$$





最优反馈增益阵 $L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{12} + k_{22}}{1 + k_{22}} \end{bmatrix}$

闭环系统的系统矩阵为

$$A_{CL} = A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{12} + k_{22}}{1 + k_{22}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{1 + k_{22}} \end{bmatrix}$$

$$k_{22} = \frac{1}{2}(q + \sqrt{q^2 + 4q})$$





闭环特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{1+k_{22}}$ 。

显然，根的模都小于1，闭环系统稳定。

MATLAB程序

```
q=1;A=[0 1;0 1];
```

```
B=[0;1];
```

```
C=eye(2);
```

```
D=[0;0];
```

```
Q=diag([q 0]);
```

```
R=1;
```

```
K=LQR(A, B, Q, R);
```

```
step(ss(A-B*K, B, C, D))
```

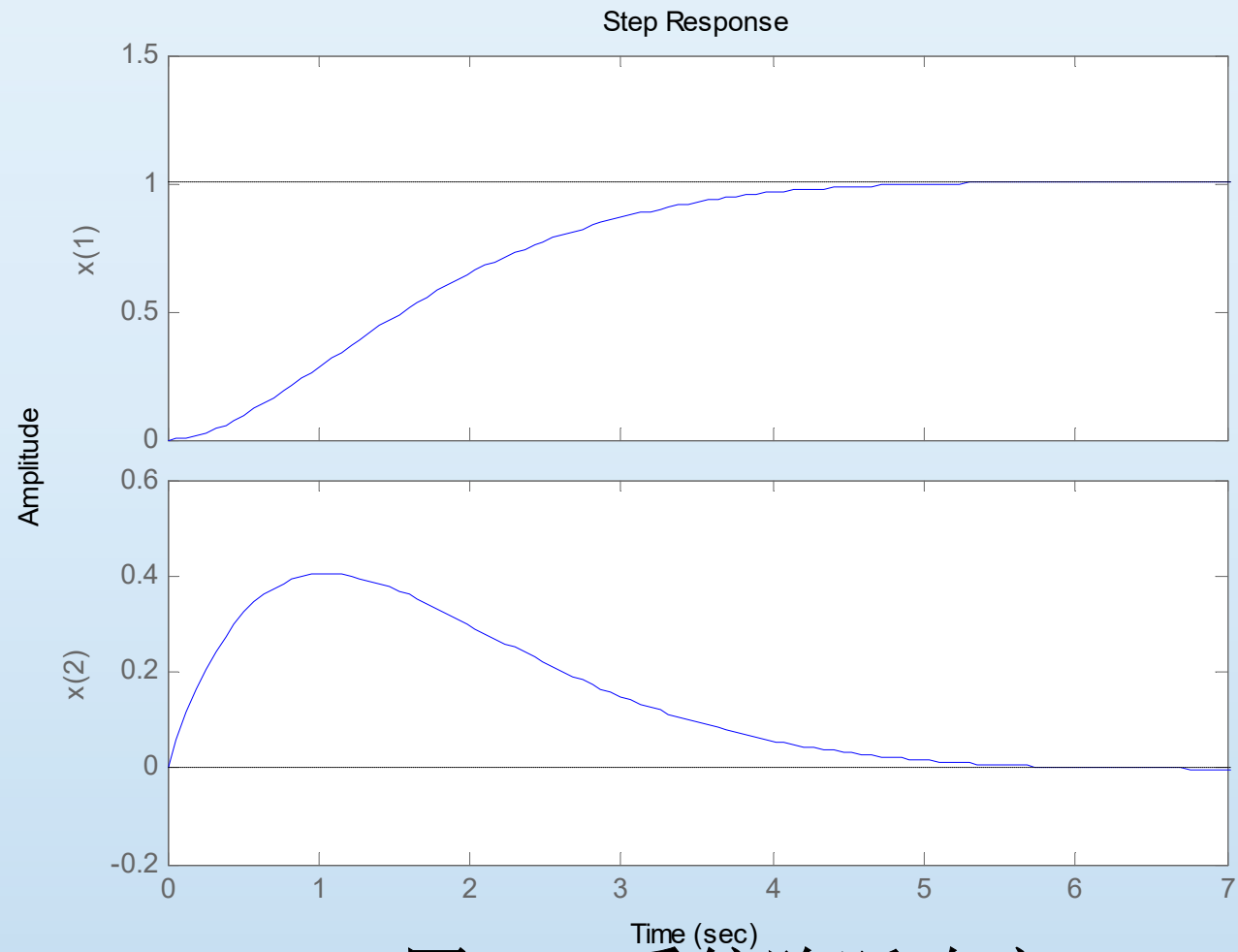


图4-8 系统阶跃响应





本章主要内容

4.1 线性二次型最优控制的数学描述

4.2 连续系统的有限时间状态调节器

4.3 连续系统的无限时间状态调节器

4.4 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器

4.5 连续系统的伺服跟踪最优控制器

4.6 离散系统的状态调节器

4.7 小结





4.7 小结

1、本节讨论了线性系统二次型指标的最优控制问题，这时可得到线性的最优反馈控制律，即控制量正比于状态变量，可写成 $u(t) = -G(t)X(t)$ ，或 $u(k) = -L(k)X(k)$ 。把这种线性二次型问题的最优控制与非线性系统的开环控制结合起来，还可减少开环控制的误差。线性二次型问题的最优控制一般可分状态调节器问题和伺服跟踪问题两大类。





2、对于终端时刻 t_f 有限的连续系统状态调节器问题，要求加权阵 P 、 Q 为对称半正定， R 为对称正定，但并不要求系统完全可控。





这时最优控制可写成 $U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) = -G(t)X(t)$

$K(t)$ 满足黎卡提矩阵微分方程 (4-14)，终端条件 $K(t_f) = P$ 。从 t_f 到 t_0 逆向积分 (4-14) 即可求得 $K(t)$ ，积分方法建议采用变步长四阶龙格-库塔法。

对离散系统有类似要求，最优控制

$$U(k) = -[R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k)K(k+1)A(k)$$

$K(k)$ 满足矩阵黎卡提差分方程。





3、 当连续系统是定常的, t_f 为无限时, 可得
到所谓稳态状态调节器问题。

这时的附加条件是: 系统要可控, 至少可稳; Q
要正定, 或 Q 半正定, 但 (A, Q_1) 可观测, 至少可
检, $Q = Q_1^T Q_1$ 。





满足这些条件后， $U(t) = -R^{-1} B^T K X(t) = -G X(t)$
 G 为常数阵。 K 满足黎卡提矩阵代数方程。可用牛顿迭代法求解。离散系统的无限时间状态调节器为

$$U(k) = -(R + B^T K B)^{-1} B^T K A X(k)$$

而 K 满足黎卡提代数方程（4-97）。





4、伺服跟踪问题的最优控制解法为

$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)[K(t)X(t) - g(t)]$, $K(t)$ 、 $g(t)$ 满足微分方程

(4-62)、**(4-63)**，终端条件为 **(4-64)**、**(4-65)**

即 $K(t_f) = C^T(t_f)PC(t_f)$, $g(t_f) = C^T(t_f)PZ(t_f)$

$Z(t)$ 是理想输出。





4.8 习题

习题1 系统状态方程为
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} [x_1^2(3) + 2x_2^2(3)] + \frac{1}{2} \int_0^3 \left[2x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) \right] dt$$

求最优控制





连续时变系统标准线性二次型为

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad X(t_0) = X_0$$

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) P X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt$$

对比系数可以得到:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, R = \frac{1}{2}$$





设 $K(t) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$ 代入 *Riccati* 方程

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t)$$

得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{12} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 + 2k_{12}^2 & -1 - k_{11} + 2k_{12}k_{22} \\ -1 - k_{11} + 2k_{22}k_{12} & -4 - 2k_{12} + 2k_{22}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



进一步解出 $\dot{k}_{11} = -2 + 2k_{12}^2$

$$\dot{k}_{12} = -1 - k_{11} + 2k_{12}k_{22}$$

$$\dot{k}_{22} = -4 - 2k_{12} + 2k_{22}^2$$

边界条件为

$$K(t_f) = P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

最优控制为

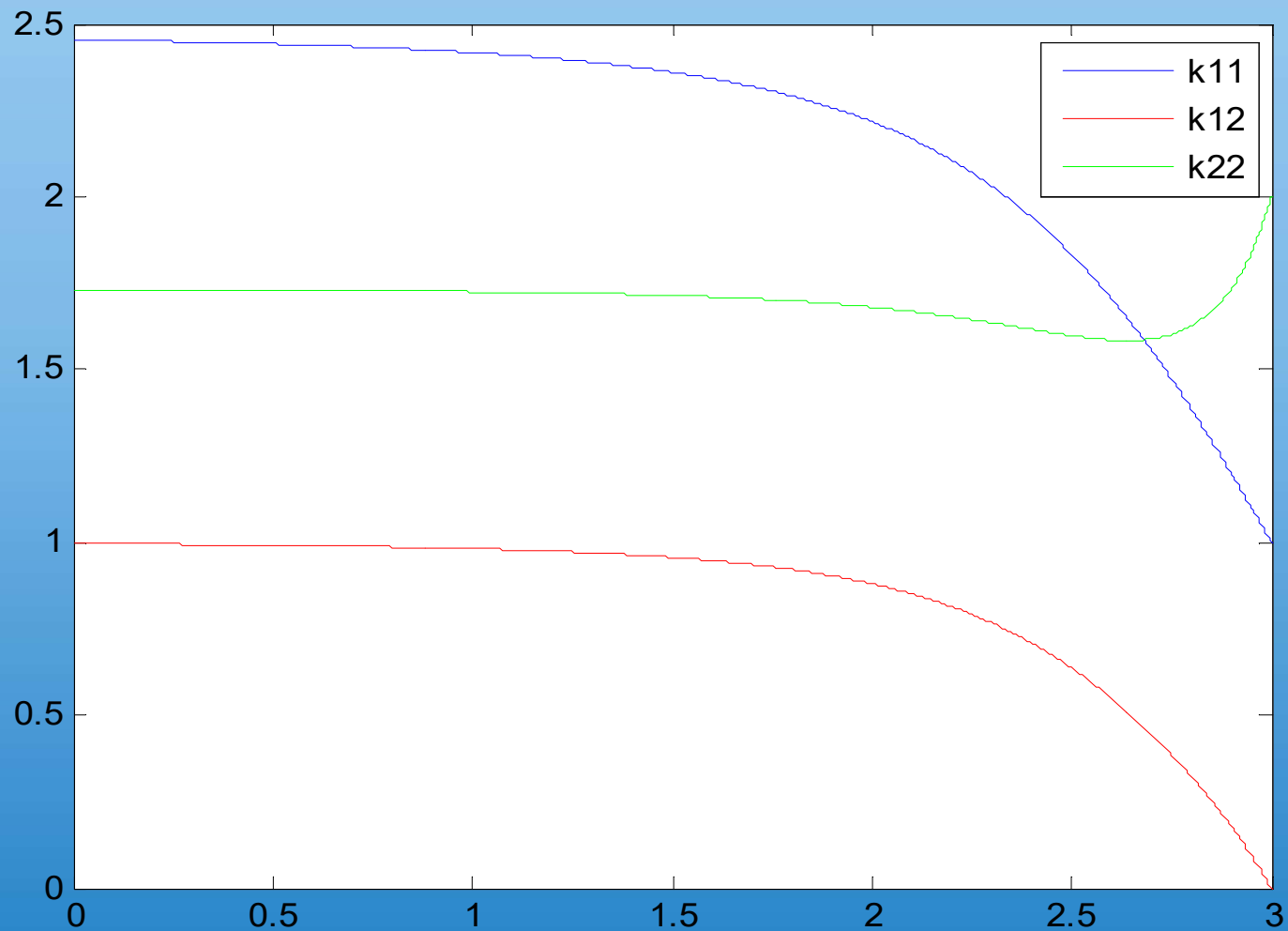
$$u(t) = -R^{-1}B^TK(t)X(t)$$

$$= -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= -2[k_{12}(t)x_1(t) + k_{22}x_2(t)]$$

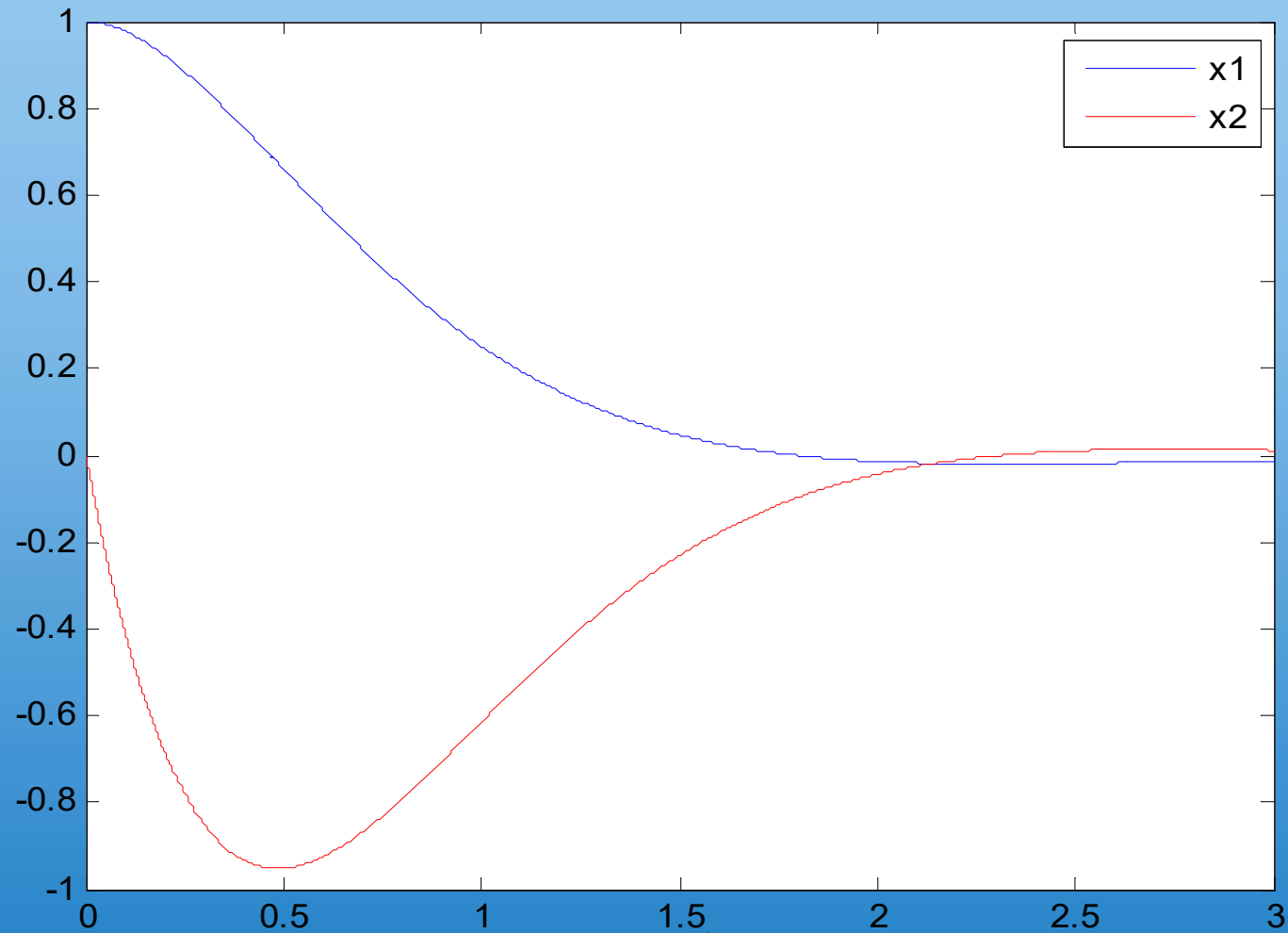


逆积分上述方程可以得到



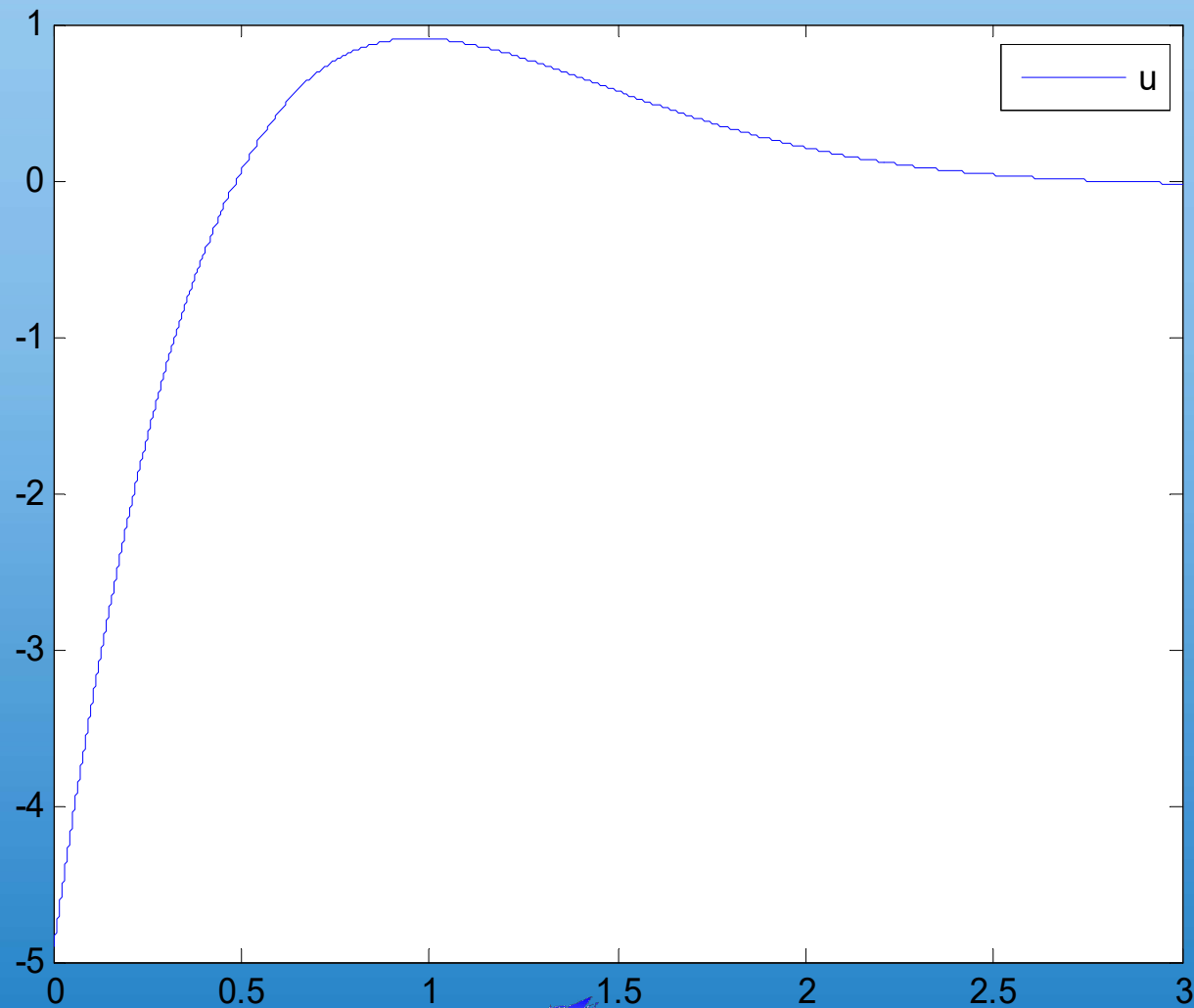


取系统初值 $X_0 = [1 \quad 0]$





最优控制为





习题2 系统状态方程为
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

性能泛函为

$$J = \int_0^{\infty} (x_2^2 + 0.1u^2) dt$$

求最优控制





这是连续系统无限时间状态调节器问题。
需要满足如下条件才可以设置线性二次标准型的最优控制器。

- 1) 系统可控或至少可镇定。
- 2) Q 为对称非负定阵且 (A, Q_1) 可观测或至少可检测。
- 3) 性能指标中没有考虑终端罚函数。





对比标准型。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} R = 0.2$$

验证满足上述的条件，于是利用如下公式求取最优控制。

$$-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q = 0$$

$$U(t) = -R^{-1}B^T KX(t)$$





于是可以得到如下方程

$$5k_{11}^2 - 2(-k_{11} + k_{12}) = 0$$

$$5k_{11}k_{12} - (-k_{12} + k_{22}) = 0$$

$$5k_{12}^2 = 2$$

由 K 的正定性解得

$$K = \begin{bmatrix} 0.3413 & 0.6325 \\ 0.6325 & 1.7117 \end{bmatrix}$$

于是最优控制为

$$U(t) = -1.7065x_1(t) - 3.1625x_2(t)$$





习题3 系统状态方程为 $\dot{x}(t) = -u(t)$

性能泛函为

$$J = \int_0^{\infty} (x^2(t) + u^2(t)) dt$$

求最优控制





这是连续系统无限时间状态调节器问题。
需要满足如下条件才可以设置线性二次标准型的最优控制器。

- 1) 系统可控或至少可镇定。
- 2) Q 为对称非负定阵且 (A, Q_1) 可观测或至少可检测。
- 3) 性能指标中没有考虑终端罚函数。





对比标准型

$$A = 0, B = -1, Q = 2, R = 2$$

验证满足上述的条件，于是利用如下公式求取最优控制。

$$-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q = 0$$

$$U(t) = -R^{-1}B^T KX(t)$$





于是可以得到如下方程

$$k(-1) \frac{1}{2} (-1)k - 2 = 0$$

由 k 的正定性解得

$$k = 2$$

于是最优控制为

$$u(t) = x(t)$$

利用初值 $x(0) = 1$ 最优轨线为

$$x(t) = e^t$$





习题4 系统状态方程为 $x_{k+1} = x_k + u_k$
性能泛函为

$$J = \sum_{k=0}^2 (x_k^2 + u_k^2)$$

求最优控制





这是离散系统状态调节器问题。

对比标准型

$$A(k) = 1, \quad B(k) = 1, \quad P(N) = 0, \quad Q(k) = 2, \quad R(k) = 2$$

*Riccati*方程为

$$\begin{aligned} K(k) &= Q(k) + A^T(k) [K^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1} A(k) \\ &= 2 + \frac{K(k+1)}{\frac{1}{2}K(k+1) + 1} \end{aligned}$$





终端值 $K(3) = P(3) = 0$

于是

$$K(2) = \frac{K(3)}{\frac{1}{2}K(3) + 1} + 2 = 2$$

$$K(1) = \frac{K(2)}{\frac{1}{2}K(2) + 1} + 2 = 3$$

$$K(0) = \frac{K(1)}{\frac{1}{2}K(1) + 1} + 2 = \frac{16}{5}$$



计算 $u(k)$

$$\begin{aligned} u(k) &= -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]X(k) \\ &= -\frac{1}{2}(K(k) - 2)X(k) \end{aligned}$$





所以最优控制为

$$u(0) = -\frac{1}{2}(K(0) - 2)x(0) = -\frac{3}{5}x(0)$$

$$x(1) = x(0) + u(0) = \frac{2}{5}x(0)$$

$$u(1) = -\frac{1}{2}(K(1) - 2)x(1) = -\frac{1}{2}x(1)$$

$$x(2) = x(1) + u(1) = \frac{1}{2}x(1)$$

$$u(2) = -\frac{1}{2}(K(2) - 2)x(2) = 0$$





习题5 系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

性能泛函为

$$J = x^2(5) + \frac{1}{2} \int_0^5 u^2(t) dt$$

求最优控制





对比标准型

$$A = 0, B = 1, P = 2, Q = 0, R = 1$$

代入Riccati方程

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + \\ K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t)$$





于是可以得到如下方程

$$\dot{K} = -K^2, K(5) = P = 2$$

解得

$$K(t) = \frac{-1}{t - 5.5}$$

于是最优控制为

$$u(t) = -R^{-1}B^TK(t)X(t) = \frac{-1}{t - 5.5}x(t)$$





习题6 系统状态方程为 $x_{k+1} = x_k + 2u_k$

性能泛函为

$$J = x_N^2 + 4\beta \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$$

求最优控制





这是离散系统状态调节器问题。

对比标准型

$$A = 1, B = 2, P(N) = 2, R = 8\beta, Q = 0$$

*Riccati*方程为

$$\begin{aligned} K(k) &= Q(k) + A^T(k)[K^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1}A(k) \\ &= \frac{K(k+1)}{\frac{1}{2\beta}K(k+1) + 1} \end{aligned}$$





终端值 $K(N) = P(N) = 2$

于是

$$K(N-1) = \frac{K(N)}{\frac{1}{2\beta}K(N) + 1}$$

所以

$$K(m) = \frac{2}{2\frac{1}{2\beta}(N-m) + 1} = \frac{2\beta}{N-m+\beta}$$





计算 $u(k)$

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]X(k)$$

$$= -\frac{1}{4\beta}K(k)X(k)$$

$$= -\frac{1}{4\beta}X(k)\frac{2\beta}{N - k + \beta}$$

