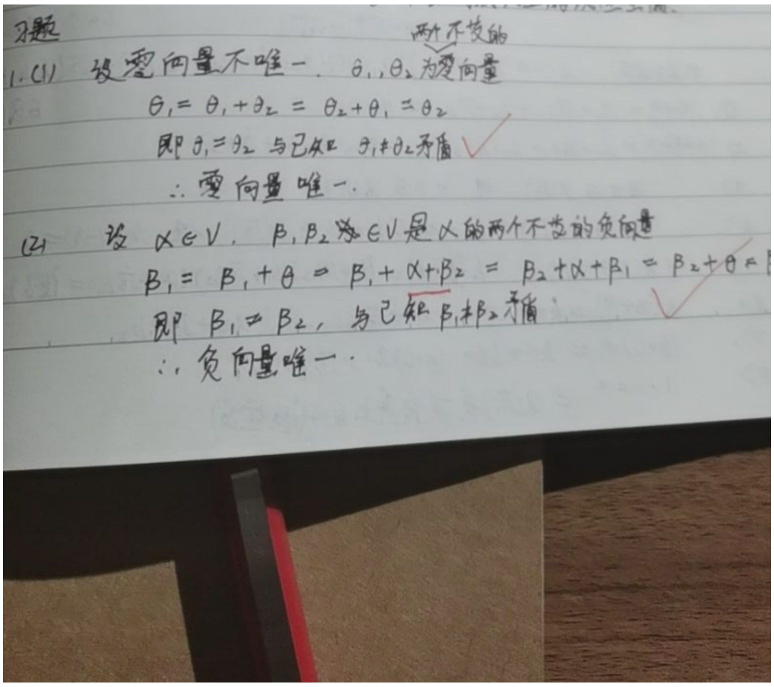
因为没有标准答案，这是找的一些同学的作业答案，大家可以参考一下，如果有问题请同学们及时反馈!



习题

1.(1) 设零向量不唯一. θ_1,θ_2 为两个不等的零向量

$\theta_1=\theta_1+\theta_2=\theta_2+\theta_1=\theta_2$

即 $\theta_1=\theta_2$ 与已知 $\theta_1\neq\theta_2$ 矛盾

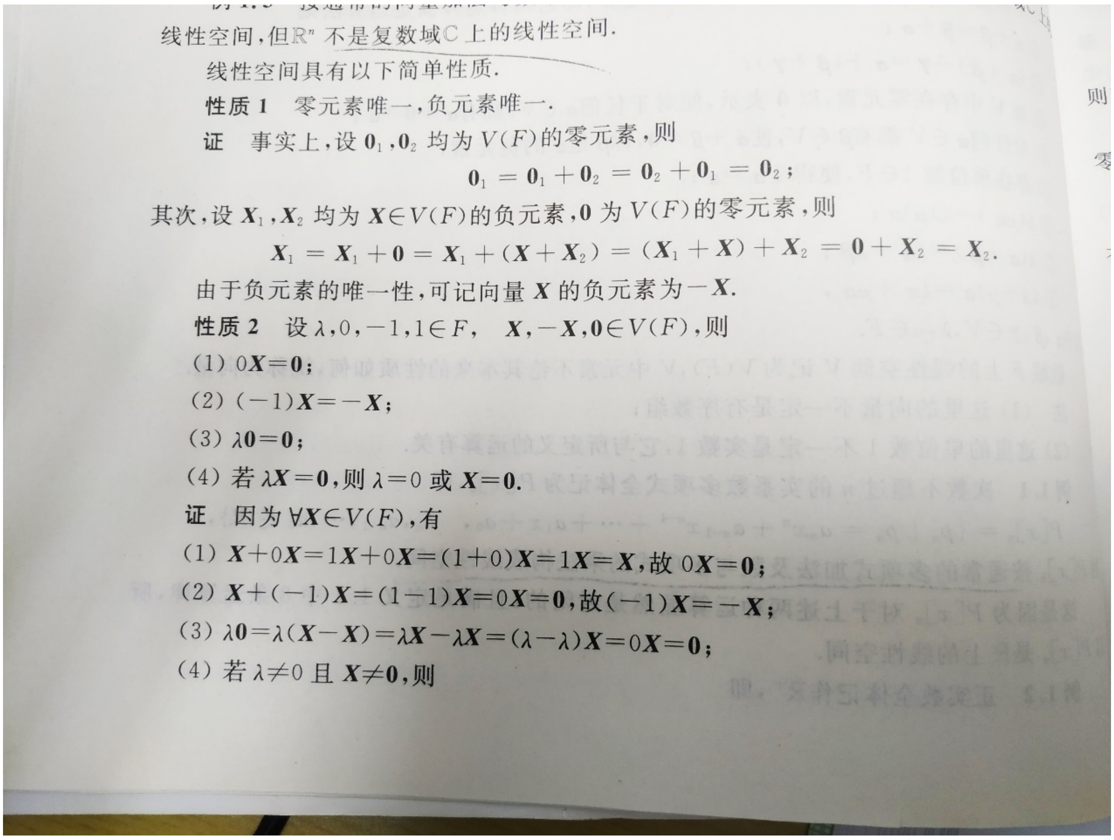
∴ 零向量唯一.

(2) 设 $\alpha\in V$, β_1,β_2 ~~为~~ $\in V$ 是 α 的两个不等的负向量

$\beta_1=\beta_1+\theta=\beta_1+\alpha+\beta_2=\beta_2+\alpha+\beta_1=\beta_2+\theta=\beta_2$

即 $\beta_1=\beta_2$, 与已知 $\beta_1\neq\beta_2$ 矛盾

∴ 负向量唯一.



线性空间，但$\mathbb{R}^n$不是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间.

线性空间具有以下简单性质.

性质 1 零元素唯一，负元素唯一.

证 事实上，设 $\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 均为 $V(F)$ 的零元素，则

$$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2;$$

其次，设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 均为 $\boldsymbol{X}\in V(F)$ 的负元素，$\mathbf{0}$ 为 $V(F)$ 的零元素，则

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_1+\mathbf{0}=\boldsymbol{X}_1+(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_2)=(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X})+\boldsymbol{X}_2=\mathbf{0}+\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_2.$$

由于负元素的唯一性，可记向量 $\boldsymbol{X}$ 的负元素为 $-\boldsymbol{X}$.

性质 2 设 $\lambda,0,-1,1\in F$, $\boldsymbol{X},-\boldsymbol{X},\mathbf{0}\in V(F)$，则

(1) $0\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$;

(2) $(-1)\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}$;

(3) $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

(4) 若 $\lambda\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$.

证 因为 $\forall\boldsymbol{X}\in V(F)$，有

(1) $\boldsymbol{X}+0\boldsymbol{X}=1\boldsymbol{X}+0\boldsymbol{X}=(1+0)\boldsymbol{X}=1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$，故 $0\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$;

(2) $\boldsymbol{X}+(-1)\boldsymbol{X}=(1-1)\boldsymbol{X}=0\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，故 $(-1)\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}$;

(3) $\lambda\mathbf{0}=\lambda(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X})=\lambda\boldsymbol{X}-\lambda\boldsymbol{X}=(\lambda-\lambda)\boldsymbol{X}=0\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$;

(4) 若 $\lambda\neq0$ 且 $\boldsymbol{X}\neq\mathbf{0}$，则

(4) 若 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$，则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵，若在实数域上定义通常实矩阵的加法和数乘运算，则下

$$\boldsymbol{X} = 1\boldsymbol{X} = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\boldsymbol{X} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{X}) = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

这与 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 矛盾，故 $\lambda\neq 0$ 与 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 不能同时成立.

定义 1.2　设 V 是一个线性空间，L 是 V 的一个非空子集，如果 L 对 V 中所定义的加法和数乘两种运算构成线性空间，则称 L 为 V 的子空间.

一个非空子集要满足什么条件才能够成子空间呢？因 L 是 V 的一部分，V 中的运算对 L 而言，定义 1.1 中规律①，②，⑤，⑥，⑦，⑧显然是满足的，因此只要 L 对所定义的两种运算封闭且满足规律③，④即可，但由线性空间的性质知，若 L 对运算封闭，则满足规律③，④，因此有以下定理.

定理 1.1　线性空间 V 的非空子集 L 构成线性空间的充要条件是 L 对于 V 中的运算封闭.

$$\mathbb{R}^+=\{a|a>0,\quad a\in\mathbb{R}\},$$

在$\mathbb{R}^+$中定义加法及数乘为

$$a\oplus b\overset{\text{def}}{=\!=}ab,\quad \lambda\circ a\overset{\text{def}}{=\!=}a^\lambda,$$

其中$a,b\in\mathbb{R}^+$,$\lambda\in\mathbb{R}$. 证明$\mathbb{R}^+$对上述加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

证 实际上要验证10条.

对加法的封闭性:对于任何$a,b\in\mathbb{R}^+$,有$a\oplus b=ab\in\mathbb{R}^+$;

对数乘的封闭性:对于任何$\lambda\in\mathbb{R},a\in\mathbb{R}^+$,有$\lambda\circ a=a^\lambda\in\mathbb{R}^+$;

(1) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$;

(2) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a(bc)=a\oplus(bc)=a\oplus(b\oplus c)$;

(3) 在$\mathbb{R}^+$中存在零元素1,使对任何$a\in\mathbb{R}^+$,有$a\oplus 1=a\cdot 1=a$;

(4) 对于任何$a\in\mathbb{R}^+$,有负元素$a^{-1}\in\mathbb{R}^+$,使$a\oplus a^{-1}=aa^{-1}=1$;

(5) 存在单位数$1\in\mathbb{R}$,使$1\circ a=a^1=a$;

(6) $\lambda\circ(\mu\circ a)=\lambda\circ a^\mu=(a^\mu)^\lambda=a^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)\circ a$;

(7) $(\lambda+\mu)\circ a=a^{\lambda+\mu}=a^\lambda a^\mu=a^\lambda\oplus a^\mu=(\lambda\circ a)\oplus(\mu\circ a)$;

(8) $\lambda\circ(a\oplus b)=(ab)^\lambda=a^\lambda b^\lambda=(\lambda\circ a)\oplus(\lambda\circ b)$,

其中$a,b,c\in\mathbb{R}^+$,$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

因此$\mathbb{R}^+$对所定义的加法"$\oplus$"、数乘"$\circ$"构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

从这个例子可以看到,线性空间中定义的加法和数乘不一定是通常意义上的加法与数乘,只是人为地把这两种运算叫做加法与数乘.

例 1.3 按通常的向量加法与数乘,$\mathbb{R}^n$是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间,$\mathbb{C}^n$是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间,但$\mathbb{R}^n$不是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间.

线性空间具有以下简单性质.

性质 1 零元素唯一,负元素唯一.

证 事实上,设$\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$均为$V(F)$的零元素,则

$$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2;$$

其次,设$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$均为$\boldsymbol{X}\in V(F)$的负元素,$\mathbf{0}$为$V(F)$的零元素,则

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_1+\mathbf{0}=\boldsymbol{X}_1+(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_2)=(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X})+\boldsymbol{X}_2=\mathbf{0}+\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_2.$$

由于负元素的唯一性,可记向量$\boldsymbol{X}$的负元素为$-\boldsymbol{X}$.

线性空间与线性变换

No.

Date.

5. ∵设 $V=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$. $n=\dim V$ ∵ $\dim V=\dim W$

∵ W是V的子空间 ∴ $W=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$

∴ $W=V$

6. 已知 集合 $H\in C^4$ ，C^4是线性空间

$\circ: \alpha\in\mathbb{R}^+, k\in\mathbb{R}, k\circ\alpha=\alpha^k$

否为线性空间.

3)是其自身上的线性空间.

Date. / /

7. $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ z & 0 & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ -x-y & 0 & t \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

∴ W的维数为3，一组基是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. (1) W是 $C^{n\times n}$ 的一个子集，且对任意 $k,l\in R$，和 $\alpha,\beta\in W$，

$[-1\ 0\ 0] \quad [-1\ 0\ 0] \quad [0\ 0\ 1]$

8. (1) W是 $C^{n\times n}$ 的一个子集，且对任意 $k, l \in R$，和 $\alpha, \beta \in W$，

有. $A(k\alpha + l\beta) = kA\alpha + lA\beta = k\alpha A + l\beta A = (k\alpha + l\beta)A$

因此 $k\alpha + l\beta \in W$，∴ W是 $C^{n\times n}$ 的一个子空间

(2) 设 $W = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

则 $AX = XA$ ∴ $X = A^{-1}XA$ ∴ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & na_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{n}{2}a_{2n} \\ \frac{1}{n}a_{n1} & \frac{2}{n}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

∴ 矩阵X 中除了主对角的元素，其它元素全为0.

即 $X = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ∴ ~~X为~~ ∴ W的维数为n维.

它的一组基为 E_{ij} ($i=j=0,1,2\cdots n$).

9. 由 $AX=0 \Rightarrow N(A) = \mathrm{span}\{(1,-2,1)^T\}$

易知：$\dim(R(A)) = \mathrm{rank}A = 2 \quad R(A) = \mathrm{span}\{(1.4.7)^T, (2.5.8)^T\}$

$N(A)\cap R(A) \Rightarrow k_1(1,-2,1)^T = l_1(1.4.7)^T + l_2(2.5.8)^T$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ -l_1 \\ -l_2 \end{pmatrix} = 0$ 易证为满秩矩阵

$\Rightarrow N(A)\cap R(A) = \{0\}$

$N(A) + R(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

八.10、证明：设 $k_0,\cdots,k_n\in\mathbb{R}$，考察方程

$$k_0 l_0(x)+\cdots+k_n l_n(x)=0. \quad (1)$$

若对式(1)对任意 $x\in[a,b]$ 均有 $k_0=k_1=\cdots=k_n=0$，则 $l_0(x),\cdots,l_n(x)$ 线性无关；否则线性相关。

注意到当 $x=x_j$，$j=0,\cdots,n$ 时有

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases} \quad (2)$$

则有 $k_0 l_0(x_j)+\cdots+k_n l_n(x_j)=k_j l_j(x_j)=k_j=0$.

由此，当 $x=x_j$，$j=0,\cdots,n$ 时，$k_j=0$，即 $l_0(x),\cdots,l_n(x)$ 线性无关。

又知 $P_n(x)$ 空间维数为 $n+1$，故 $l_0(x),\cdots,l_n(x)$ 是 $P_n(x)$ 的一组基。

13、$k_1+k_2(x-1)+k_3(x-1)^2$

$=(k_1-k_2+k_3)+(k_2-2k_3)x+k_3x^2$

$\because$ 1、x、x^2 线性无关

$\therefore$ 解得 $k_1=k_2=k_3=0$

故 $1,(x-1),(x-1)^2$ 是 $P_2(x)$ 的一组基.

根据过渡矩阵定义.

$$[1\quad (x-1)\quad (x-1)^2]=[1\quad x\quad x^2]A$$

过渡矩阵 A 为 $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

14. 由 $Ax=0$ $\Rightarrow$ $N(A)=\text{span}\{(12,1,-11)^T\}$

$\text{rank}(A)=2$

$\dim(N(A))=n-\text{rank}(A)=1$

$R(A)=\text{span}\{(0,1)^T,(2,3)^T\}$

$\dim R(A)=\text{rank}\,A=2$

No. Date

已知一个包含40个方程42个变量的齐次方程组的基础解系由

线性无关的解向量构成,则能判断与此齐次方程组系数相同的

齐次方程组成有解吗?

由基础解系有两个线性无关的解向量构成知 该齐次方程组系

数矩阵A的秩 $\text{rank}(A)=42-2=40$

因此A为行满秩,对于非齐次方程组

$\text{rank}(A|\beta)=\text{rank}(A)=40$,

因此非齐次方程组有解.

AND ASTRONAUTICS

• 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,其零空间和列空间有可能相同吗?若相同,则矩阵有何性质,能否给出充要条件.

当 $A^2=0$ 且 $r(A)=\frac{n}{2}$, $n=2k(k=1,2\cdots)$ 时,其零空间和列空间相同.

充分性: 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$

$\therefore A\alpha_1=A\alpha_2=\cdots=A\alpha_n=0$

$\therefore R(A)\subseteq N(A)$

又 $\because \dim[R(A)]=r(A)=\frac{n}{2}$ $\dim[R(A)]+\dim[N(A)]=n$

$\therefore \dim[R(A)]=\dim[N(A)]=\frac{n}{2}$

$\therefore R(A)=N(A)$ 零空间和列空间相同.

必要性: $\because$ 矩阵A的零空间和列空间相同

$\therefore \dim[R(A)]=\dim[N(A)]=\frac{n}{2}$

$\therefore r(A)=\frac{n}{2}$

设 $\forall\alpha$ $A\alpha\in R(A)$

$\because R(A)=N(A)$

$\therefore A\cdot A\alpha=0$ 恒成立 $\forall\alpha$

$\therefore A^2=0$

$\therefore$ 当 $R(A)=N(A)$ 时, $A^2=0$ 且 $r(A)=\frac{n}{2}$, $n=2k(k=1,2\cdots)$