现代控制理论

——多智能体系统协调控制

郑建英

北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院

本节基本内容

1. 多智能体系统的基本概念
2. 图论
3. 离散时间多智能体系统一致性问题分析
4. 连续时间多智能体系统一致性问题分析

Outline

多智能体系统的基本概念

自然界中的群体现象：合作 $\Longrightarrow$ 更好的环境适应性

鱼群

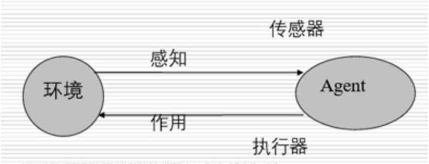
鸟群

狼群

蚁群

多智能体系统的基本概念

- 1986 年美国麻省理工学院的 Minsky 提出了智能体 (agent) 的概念，并且把生物界个体社会行为的概念引入到计算机学科领域
- 智能体指具有自治性、反应性、主动性、社会性和进化性的基本特性的实体, 它嵌入到环境中，通过传感器感知环境，通过执行器自治地作用于环境并满足设计要求。



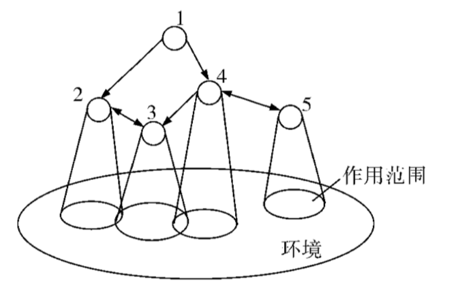
智能体与环境交互示意图

[波士顿动力 1](#) [2](#)

多智能体系统的基本概念

多智能体系统

- 多个智能体 + 网络互连 = 复杂大规模系统 “系统的系统”
- 目标：相互协作实现复杂智能，提高系统鲁棒性、可靠性、灵活性
- 主要特点：自主性、容错性、灵活性和可扩展性、协作能力。



多智能体系统的基本概念

应用：飞行器编队、传感器网络、数据融合、多机械臂协同装备、并行计算、多机器人合作控制、交通车辆控制、网络的资源分配...

编队控制

传感器网络

数据融合

交通车辆控制

多智能体系统的基本概念

高效、可靠、灵活、低成本

多智能体系统的基本概念

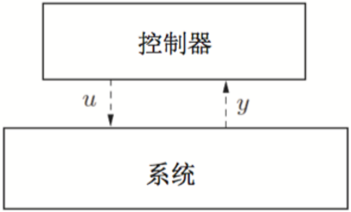
协调控制

1. 一致性控制
2. 会合控制
3. 聚结控制
4. 编队控制

后三者可视为一致性控制的推广与特例。多智能体系统达到一致是实现协调控制的首要条件。

主要控制结构类型

- 集中式控制结构



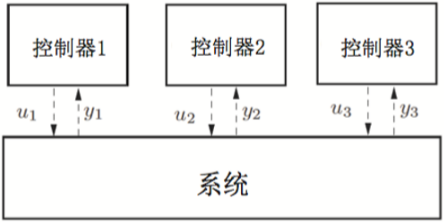
集中式控制结构 (其中 u 是控制输入， y 是系统输出) 。

- 优点: 结构简单，更容易实现系统的整体统一性
- 缺点： 中央控制器的负担大，适用于结构相对简单的小型系统

多智能体系统的基本概念

主要控制结构类型

- 去中心式控制结构

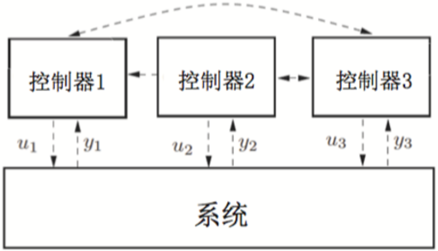


去中心式控制结构 (其中 u_1, u_2, u_3 是控制输入， y_1, y_2, y_3 是系统输出)。

- 优点: 并行运算
- 缺点： 控制器的相对独立而导致能实现的整体系统性能很有限; 不适用于耦合度比较强的系统

主要控制结构类型

- 分布式控制结构



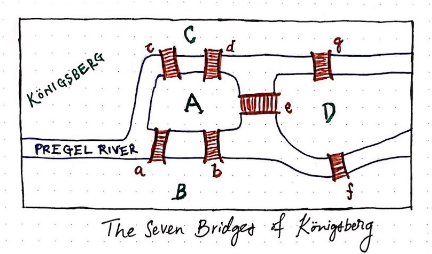
分布式控制结构 (其中 u_1, u_2, u_3 是控制输入， y_1, y_2, y_3 是系统输出) 。

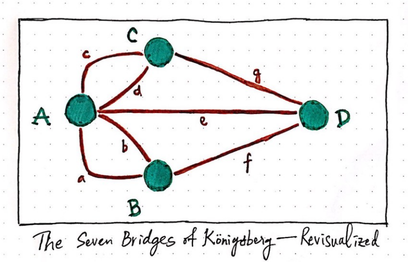
- 结合了集中式控制结构和去中心式控制结构的优点
- 避免了集中式控制结构和去中心式控制结构的缺点

多智能体系统分布式协调控制

Outline

图：描述某些事物之间的某种特定关系





图论

- $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 或者 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$
  - 顶点集合 $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
  - 边集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
  - 连接权值矩阵 \ 邻接矩阵 $\mathcal{A} = [a_{ij}]$:
    - $a_{ij} > 0$ 当 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}, i \neq j$; 否则 $a_{ij} = 0$
    - ⋆ $a_{ij} \in \{0, 1\}$
  - **有向图** 边是有方向的，$(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ 即 v_j 为起点，v_i 为终点
    - 完整图：$(i, j) \in \mathcal{E}, \forall i \neq j$

  无向图 无向边，即 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$，$A$ 对称矩阵

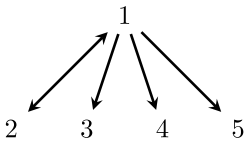


图: 有向图

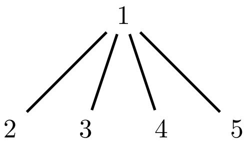


图: 无向图

图论

- v_j is v_i 的邻居: $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$
- v_i 的邻居集合: $\mathcal{N}_i = \{j : (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$
- v_i 的入度 $\deg_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$; v_i 的出度 $\deg_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$

  v_i 是平衡的当 $\deg_i^{\text{in}} = \deg_i^{\text{out}}$
- 平衡图: 所有顶点都是平衡的

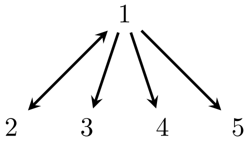


图: 有向图

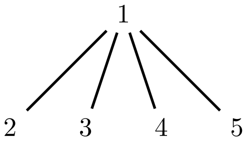


图: 无向图

图论

- 从 v_i 到 v_j 的路径： 存在顶点（不重复）与边的交替序列

$$v_i, (v_i, v_{i1}), v_{i1}, (v_{i1}, v_{i2}) \ldots, (v_{ik}, v_j), v_j$$

- v_i 对 v_j 是可达： 存在从 v_j 到 v_i 的路径
- v_i, v_j 是互达： 存在从 v_j 到 v_i 和从 v_i 到 v_j 的路径
- 树：任何两个顶点存在唯一一条路径的无向图
- 有向树：
  1）有且仅有一个顶点（称作根顶点）没有入邻居
  2）除根顶点外的其他顶点只有一个入邻居
  3）从根顶点到其他顶点只有一条唯一路径

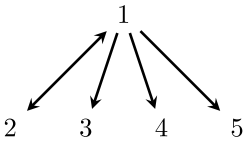


图: 有向图

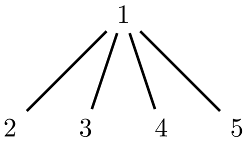


图: 无向图

图论

- 子图 $\mathcal{G}' = \{\mathcal{V}', \mathcal{E}'\}$: $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}, \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$
  - 生成子图: $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$
  - 生成树: $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ 且 $\mathcal{G}'$ 是树
- 连通性
  - 包含有向生成树
  - 强连通：任意一对顶点互相可达
  - 无向图：强连通 = 包含生成树

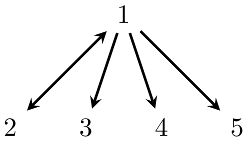


图: 有向图

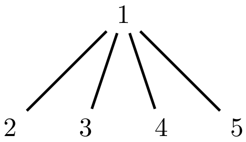


图: 无向图

- **Laplacian 矩阵**

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A},\ \mathcal{D} = \mathrm{diag}(\deg_1^{\mathrm{in}}, \ldots, \deg_n^{\mathrm{in}})$$

  - $\mathcal{L}\begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix}' = 0 \Rightarrow 0$ 是 $\mathcal{L}$ 的特征根
  - 特征根 $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$: $0 = |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|$
  - 无向图：$\mathcal{L}$ 对称，半正定 $\Longrightarrow \lambda_i \geq 0$

定理 1

$\mathcal{L}$ 的非零特征根全部具有正实部。进一步，$\mathcal{G}$ 包含一颗有向生成树当且仅当 0 是 $\mathcal{L}$ 的简单特征根且特征向量为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix}'$

- 无向图 $\mathcal{G}$ 是连通的当且仅当 $\lambda_2 > 0$

- **Laplacian** 矩阵

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A},\ \mathcal{D} = \mathrm{diag}(\mathrm{deg}_1^{\mathrm{in}}, \ldots, \mathrm{deg}_n^{\mathrm{in}})$$

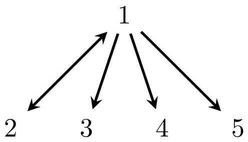
  - $\mathcal{L}\begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix}' = 0 \Rightarrow 0$ 是 $\mathcal{L}$ 的特征根
  - 特征根 $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$: $0 = |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|$
  - 无向图：$\mathcal{L}$ 对称，半正定 $\Longrightarrow \lambda_i \geq 0$

定理 1

$\mathcal{L}$ 的非零特征根全部具有正实部。进一步，$\mathcal{G}$ 包含一颗有向生成树当且仅当 0 是 $\mathcal{L}$ 的简单特征根且特征向量为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix}'$

■ 无向图 $\mathcal{G}$ 是连通的当且仅当 $\lambda_2 > 0$

图论



$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_{\text{out}} = \begin{bmatrix} 4 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- 有向非平衡图
- 包含一颗有向生成树；非强连通
- $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，特征根：$0, 1, 1, 1, 2$

图论

$$\mathcal{A} = [a_{ij}], \mathcal{D} = \text{diag}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\right\}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$$

- a_{ij} 非负实数—正实拉普拉斯矩阵:
  - ⋆ 一致性控制、平移编队控制问题、一致性滤波问题...
- a_{ij} 实数—符号拉普拉斯矩阵:
  - ⋆ 双一致性问题、簇一致性问题、仿射编队控制问题
- a_{ij} 复数—复拉普拉斯矩阵:
  - ⋆ 相似队形控制问题、基于相对位置的定位问题

Outline

1. 多智能体系统的基本概念
2. 图论
3. 离散时间多智能体系统一致性问题分析
4. 连续时间多智能体系统一致性问题分析

一致性控制

一致性 (consensus):
局部协作和相互通信 → 个体调整更新自己行为 → 最终每个个体达到相同的状态

三要素:

1. 具有动力学特征的智能体个体
2. 智能体之间用于信号传输的通信拓扑
3. 智能体个体对输入信号的响应，即一致性协议

研究历程:
群集现象模拟阶段 → 理论体系建立阶段 → 理论完善和实际应用阶段

一致性控制

多个方面展开工作:

- 连续时间 vs 离散时间
- 有领导者 vs 无领导者
- 无丢包 vs 丢包
- 固定拓扑 vs 切换拓扑 通信网络不确定性
- 无时滞 vs 有时滞

离散时间一致性控制

离散时间多智能体线性系统

$$x_i(k+1) = Ax_i(k) + Bu_i(k),\ i \in \{1, \ldots, N\} \tag{1}$$

- x_i: 第 i 个子系统的状态； u_i: 第 i 个子系统的输入
- 拓扑结构 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$
  - ⋆ $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
  - ⋆ 邻接矩阵 $\mathcal{A} = [a_{ji}]$: $a_{ji} = 1$ if $(i,j) \in \mathcal{E}$; 否则 $a_{ji} = 0$
  - ⋆ Laplacian 矩阵 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, $\mathcal{D} = \mathrm{diag}\left\{\sum_{j=1}^N a_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}\right\}$

    —特征根 $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$: $0 = |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|$

    —无向图：$\mathcal{L}$ 对称，半正定 $\Longrightarrow \lambda_i \geq 0$

离散时间一致性控制

离散时间多智能体线性系统

$$x_i(k+1) = Ax_i(k) + Bu_i(k),\ i \in \{1, \ldots, N\}$$

- x_i: 第 i 个子系统的状态； u_i: 第 i 个子系统的输入
- 拓扑结构 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$

分布式线性一致性协议

$$u_i(k) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j(k) - x_i(k)) \tag{2}$$

一致性控制

存在控制增益 K 使得闭环系统满足

$$\lim_{k \to \infty} \|x_i(k) - x_j(k)\|^2 = 0,\ \forall i, j \in \{1, \ldots, N\}$$

离散时间一致性控制

离散时间多智能体线性系统

$$x_i(k+1) = Ax_i(k) + Bu_i(k),\ i \in \{1, \ldots, N\}$$

- x_i: 第 i 个子系统的状态； u_i: 第 i 个子系统的输入
- 拓扑结构 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$

研究目标： 保证 K 存在的一致性条件和设计 K

假设条件

① A 的所有特征根不在单位圆内； $[A|B]$ 是可控的

② $\mathcal{G}$ 是无向图且连通 $\Longleftrightarrow \lambda_2 > 0$

③ $\mathcal{G}$ 是有向图且包含一颗有向生成树 $\Longleftrightarrow \lambda_2 \neq 0$

参考文献

K. You and L. Xie, “Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011.

离散时间一致性问题分析

闭环系统
$$
\begin{aligned}
x_i(k+1) &= Ax_i(k) + BK\sum_{j\in\mathcal{N}_i}(x_j(k)-x_i(k)) \\
&= Ax_i(k) + BK\sum_{j=1,\dots,N} a_{ij}(x_j(k)-x_i(k)),\ i=1,\dots,N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_N(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_1} a_{1j} & BKa_{12} & \dots & BKa_{1N} \\ BKa_{21} & -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_2} a_{2j} & \dots & BKa_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ BKa_{N1} & BKa_{N2} & \dots & -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_N} a_{Nj} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}
$$

令 $X(k) = \begin{bmatrix} x_1'(k) & x_2'(k) & \dots & x_N'(k) \end{bmatrix}'$

$$
\Longrightarrow X(k+1) = (I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)X(k) \qquad (2)
$$

Kronecker 积: $X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11}Y & \cdots & x_{1n}Y \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{m1}Y & \cdots & x_{mn}Y \end{bmatrix}$

离散时间一致性问题分析

闭环系统 $$x_i(k+1) = Ax_i(k) + BK\sum_{j\in\mathcal{N}_i}(x_j(k) - x_i(k))$$
$$= Ax_i(k) + BK\sum_{j=1,\dots,N} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)),\ i = 1,\dots,N$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_N(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_1} a_{1j} & BKa_{12} & \dots & BKa_{1N} \\ BKa_{21} & -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_2} a_{2j} & \dots & BKa_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ BKa_{N1} & BKa_{N2} & \dots & -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_N} a_{Nj} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}$$

令 $X(k) = \begin{bmatrix} x_1'(k) & x_2'(k) & \dots & x_N'(k) \end{bmatrix}'$

$$\Longrightarrow X(k+1) = (I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)X(k) \qquad (2)$$

Kronecker 积: $X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11}Y & \cdots & x_{1n}Y \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1}Y & \cdots & x_{mn}Y \end{bmatrix}$

离散时间一致性问题分析

误差动态特性–无向图

$$\bar{X}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(k),\ \delta_i(k) = x_i(k) - \bar{X}(k),\ \mathbf{1}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}'$$

$$\delta(k) = \begin{bmatrix} \delta_1(k) \\ \vdots \\ \delta_N(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) - \bar{X}(k) \\ \vdots \\ x_N(k) - \bar{X}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(k) \\ \vdots \\ x_N(k) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(k) \end{bmatrix}$$

$$= X(k) - \begin{bmatrix} \frac{1}{N}I_n & \dots & \frac{1}{N}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{N}I_n & \dots & \frac{1}{N}I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}$$

$$= \left(I_N \otimes I_n - \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N'}{N} \otimes I_n \right) X(k)$$

一致性等价于 $\lim_{k\to\infty} \|\delta_i(k)\| = 0\ \forall i \in 1, \dots, N$

离散时间一致性问题分析

误差动态特性–无向图

$$\delta(k) = \left(I_N \otimes I_n - \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N}{N} \otimes I_n \right) X(k)$$

$$\boxed{(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \delta(k+1) &= [I_N \otimes I_n - (\frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N}{N}) \otimes I_n] X(k+1) \\
&= [I_N \otimes I_n - (\frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N}{N}) \otimes I_n](I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK) X(k) \\
&= (I_N \otimes A)[I_N \otimes I_n - (\frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N}{N}) \otimes I_n] X(k) \\
&\qquad - (\mathcal{L} \otimes BK)[I_N \otimes I_n - (\frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N}{N}) \otimes I_n] X(k) \\
&= (I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)\delta(k)
\end{aligned}$$

多智能体系统一致性控制问题 = 误差系统镇定问题

误差动态特性–无向图

- 0 是 $\mathcal{L}$ 的特征根且存在右单位特征向量 $\frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}}$
- 选择 ϕ_i 满足

$$\mathcal{L}\phi_i = \lambda_i\phi_i, i = 2, \cdots, N,$$

并构成一个酉矩阵 (unitary matrix)

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}} & \phi_2 & \cdots & \phi_N \end{bmatrix}, \ (\Phi\Phi' = \Phi'\Phi = I)$$

$$\Longrightarrow \Phi'\mathcal{L}\Phi = \mathrm{diag}\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$$

- 相似变换 $\hat{\delta}(k) = (\Phi' \otimes I_n)\delta(k)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \hat{\delta}_1(k) &= (\frac{\mathbf{1}'_N}{\sqrt{N}} \otimes I_n)\delta(k) \\ &= (\frac{\mathbf{1}'_N}{\sqrt{N}} \otimes I_n)\left(I_N \otimes I_n - \frac{\mathbf{1}_N\mathbf{1}'_N}{N} \otimes I_n\right) X(k) \\ &= \left(\frac{\mathbf{1}'_N}{\sqrt{N}} \otimes I_n - \frac{\mathbf{1}'_N\mathbf{1}_N\mathbf{1}'_N}{\sqrt{N}N} \otimes I_n\right) X(k) \equiv 0 \end{aligned}$$

离散时间一致性问题分析

误差动态特性–无向图

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}(k) &= (\Phi' \otimes I_n)\delta(k) \\
\Longrightarrow \hat{\delta}(k+1) &= (\Phi' \otimes I_n)\delta(k+1) \\
&= (\Phi' \otimes I_n)(I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)(\Phi \otimes I_n)\hat{\delta}(k) \\
&= (I_N \otimes A - \mathrm{diag}\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\} \otimes BK)\hat{\delta}(k)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \hat{\delta}_i(k+1) = (A - \lambda_i BK)\hat{\delta}_i(k), i = 2, \ldots, N,
$$

离散时间一致性问题分析

误差动态特性–无向图

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(k) = (\Phi' \otimes I_n)\delta(k) \\ \Longrightarrow \hat{\delta}(k+1) &= (\Phi' \otimes I_n)\delta(k+1) \\ &= (\Phi' \otimes I_n)(I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)(\Phi \otimes I_n)\hat{\delta}(k) \\ &= (I_N \otimes A - \mathrm{diag}\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\} \otimes BK)\hat{\delta}(k)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \hat{\delta}_i(k+1) = (A - \lambda_i BK)\hat{\delta}_i(k), i = 2, \ldots, N,$$

多智能体系统一致性控制问题等价于共同镇定问题

离散时间一致性问题分析

误差动态特性–有向图

- 选择 $r = [r_i]$ 满足 $r'\mathcal{L} = 0$ 和 $r'\mathbf{1}_N = 1$
- 令

$$\delta_i(k) = x_i(k) - \sum_{j=1}^{N} r_j x_j(k)$$

$$\delta(k) = [\delta_1'(k) \quad \cdots \quad \delta_N'(k)]'$$

- 存在 S, Y 使得 $\Phi = \begin{bmatrix} 1_N & Y \end{bmatrix}$，$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} r' \\ S \end{bmatrix}$ 满足

$$\Phi^{-1}\mathcal{L}\Phi = \mathrm{diag}\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$$

- 令 $\hat{\delta}(k) = \left(\Phi^{-1} \otimes I_n\right)\delta(k)$. 当 $\mathcal{G}$ 为有向图时，多智能体系统 (1) 的一致性控制问题等价于

$$\hat{\delta}_i(k+1) = (A - \lambda_i BK)\hat{\delta}_i(k), i = 2, \ldots, N$$

的共同镇定问题

离散时间一致性问题分析

定理 2

给定通信网络拓扑图 $\mathcal{G}$, 多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当且仅当存在一个共同控制增益 K 使得

$$\rho(A - \lambda_i BK) < 1, \forall i = 2, \ldots, N$$

引理 3

当假设条件①成立时，存在临界值 $\gamma_c \in [0,1)$，使得修正代数 *Riccati* 不等式

$$P > A'PA - \gamma A'PB\left(B'PB\right)^{-1}B'PA \tag{3}$$

存在正定解 P 当且仅当 $\gamma > \gamma_c$。

- 离散时间代数 Riccati 方程

$$P = A'PA - A'PB\left(R + B'PB\right)^{-1}B'PA + Q$$

- 当 $\mathrm{rank}(B) = n$ 时，$\gamma_c = 1 - \frac{1}{\rho(A)^2}$
- 当 $\mathrm{rank}(B) = 1$ 时，$\gamma_c = 1 - \frac{1}{\Pi_{i=1}^n \lambda_i(A)^2}$
- 参考文献：
  L. Schenato, B. Sinopoli, M. Franceschetti, K. Poolla, and S. S. Sastry, "Foundations of control and estimation over lossy networks,"*Proceedings of the IEEE*, 2007

离散时间一致性问题分析

定理 4

当假设条件①③成立时，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当

$$\eta \triangleq 1 - \min_{\omega \in \mathbb{R}} \max_{i=2,\ldots,N} |1 - \omega\lambda_i|^2 > \gamma_c, \tag{4}$$

其中 γ_c 是使修正代数 *Riccati* 不等式 *(3)* 存在正定解的 γ 的临界值。进而，令

$$\omega^* = \arg\min_{\omega \in \mathbb{R}} \max_{i=2,\ldots,N} |1 - \omega\lambda_i|^2,$$

以及 $P > 0$ 是 $\gamma = \eta$ 时修正代数 *Riccati* 不等式 *(3)* 的正定解。则控制增益

$$K = \omega^*(B'PB)^{-1}B'PA$$

使得多智能体系统 *(1)* 取得一致性。

离散时间一致性问题分析

定理 4

当假设条件①③成立时，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当

$$\eta \triangleq 1 - \min_{\omega \in \mathbb{R}} \max_{i=2,\ldots,N} |1 - \omega\lambda_i|^2 > \gamma_c, \tag{4}$$

其中 γ_c 是使修正代数 *Riccati* 不等式 *(3)* 存在正定解的 γ 的临界值。进而，令

$$\omega^* = \arg\min_{\omega \in \mathbb{R}} \max_{i=2,\ldots,N} |1 - \omega\lambda_i|^2,$$

以及 $P > 0$ 是 $\gamma = \eta$ 时修正代数 *Riccati* 不等式 *(3)* 的正定解。则控制增益

$$K = \omega^* (B'PB)^{-1} B'PA$$

使得多智能体系统 *(1)* 取得一致性。

离散时间一致性问题分析

证明:

1. $\eta > \gamma_c \overset{\text{引理 3}}{\Longrightarrow}$ 当 $\gamma = \eta$ 时修正代数 Riccati 不等式 (3) 存在正定解，记为 P
2. 令 $\delta_i = 1 - \omega^* \lambda_i$. 显然，$|\delta_i|^2 < 1 - \eta$ for all $i \in \{2, \ldots, N\}$
3. $K = \omega^* (B'PB)^{-1} B'PA \Longrightarrow$ （H 表示共轭转置）

$$
\begin{aligned}
&(A - \lambda_i BK)^H P (A - \lambda_i BK) \\
&= A'PA - \lambda_i A'PBK - \lambda_i^H K'B'PA + \lambda_i^H \lambda_i K'B'PBK \\
&= A'PA + (-\lambda_i \omega^* - \lambda_i^H \omega^{*H} + \lambda_i^H \lambda_i \omega \omega^{*H}) A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&= A'PA + \left(|\delta_i|^2 - 1 \right) A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&\leq A'PA - \eta A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&< P
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \rho(A - \lambda_i BK) < 1$ for all $i \in \{2, \ldots, N\}$

$\Longrightarrow$ 由定理 2 得，K 解决了一致性问题，即定理 4 成立

证明:

1. $\eta > \gamma_c \overset{\text{引理 3}}{\Longrightarrow}$ 当 $\gamma = \eta$ 时修正代数 Riccati 不等式 (3) 存在正定解，记为 P
2. 令 $\delta_i = 1 - \omega^* \lambda_i$. 显然，$|\delta_i|^2 < 1 - \eta$ for all $i \in \{2, \ldots, N\}$
3. $K = \omega^* (B'PB)^{-1} B'PA \Longrightarrow$ （H 表示共轭转置）

$$
\begin{aligned}
&(A - \lambda_i BK)^H P (A - \lambda_i BK) \\
&= A'PA - \lambda_i A'PBK - \lambda_i^H K'B'PA + \lambda_i^H \lambda_i K'B'PBK \\
&= A'PA + (-\lambda_i \omega^* - \lambda_i^H \omega^{*H} + \lambda_i^H \lambda_i \omega \omega^{*H}) A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&= A'PA + \left(|\delta_i|^2 - 1 \right) A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&\leq A'PA - \eta A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&< P
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \rho(A - \lambda_i BK) < 1$ for all $i \in \{2, \ldots, N\}$

$\Longrightarrow$ 由定理 2 得，K 解决了一致性问题，即定理 4 成立

证明:

1. $\eta > \gamma_c \overset{\text{引理 3}}{\Longrightarrow}$ 当 $\gamma = \eta$ 时修正代数 Riccati 不等式 (3) 存在正定解，记为 P
2. 令 $\delta_i = 1 - \omega^* \lambda_i$. 显然，$|\delta_i|^2 < 1 - \eta$ for all $i \in \{2, \ldots, N\}$
3. $K = \omega^* (B'PB)^{-1} B'PA \Longrightarrow$ （H 表示共轭转置）

$$
\begin{aligned}
&(A - \lambda_i BK)^H P (A - \lambda_i BK) \\
&= A'PA - \lambda_i A'PBK - \lambda_i^H K'B'PA + \lambda_i^H \lambda_i K'B'PBK \\
&= A'PA + (-\lambda_i \omega^* - \lambda_i^H \omega^{*H} + \lambda_i^H \lambda_i \omega \omega^{*H}) A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&= A'PA + \left(|\delta_i|^2 - 1 \right) A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&\le A'PA - \eta A'PB (B'PB)^{-1} B'PA \\
&< P
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \rho (A - \lambda_i BK) < 1$ for all $i \in \{2, \ldots, N\}$

$\Longrightarrow$ 由定理 2 得，K 解决了一致性问题，即定理 4 成立

离散时间一致性问题分析

定理 5

当假设条件①②成立时，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当

$$\eta \triangleq 1 - \left(\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}\right)^2 > \gamma_c,$$

其中 γ_c 是使修正代数 *Riccati* 不等式 *(3)* 存在正定解的 γ 的临界值。进而，令 $P > 0$ 是 $\gamma = \eta$ 时修正代数 *Riccati* 不等式 *(3)* 的正定解。则控制增益

$$K = \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_N}(B'PB)^{-1}B'PA$$

使得多智能体系统 *(1)* 取得一致性。

证明： $\mathcal{G}$ 连通无向图 $\Rightarrow \lambda_i > 0, i = 2, \ldots, N$

$$\Rightarrow \min_{\omega\in\mathbb{R}} \max_{i\in\{2,\ldots,N\}} |1 - \omega\lambda_i|^2 = \left(\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}\right)^2, \omega^* = \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_N}$$

离散时间一致性问题分析

定理 5

当假设条件①②成立时，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当

$$\eta \triangleq 1 - \left(\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}\right)^2 > \gamma_c,$$

其中 γ_c 是使修正代数 *Riccati* 不等式 *(3)* 存在正定解的 γ 的临界值。进而，令 $P > 0$ 是 $\gamma = \eta$ 时修正代数 *Riccati* 不等式 *(3)* 的正定解。则控制增益

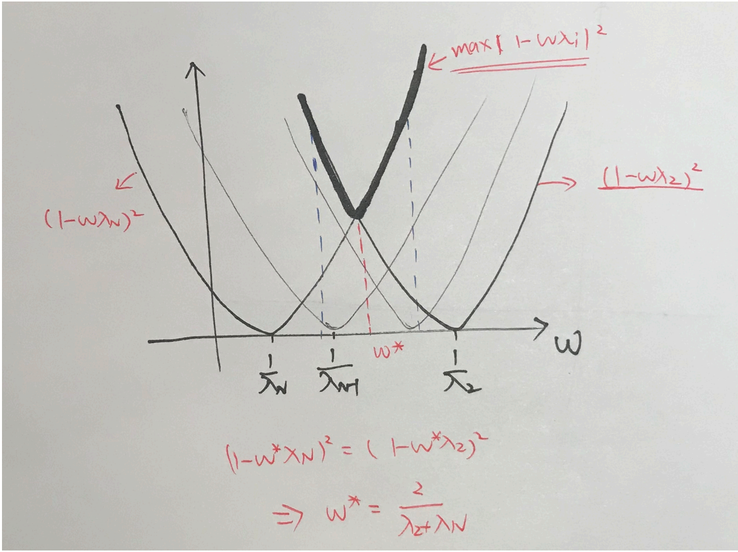
$$K = \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_N}(B'PB)^{-1}B'PA$$

使得多智能体系统 *(1)* 取得一致性。

证明： $\mathcal{G}$ 连通无向图 $\Rightarrow \lambda_i > 0, i = 2, \ldots, N$

$$\Rightarrow \min_{\omega \in \mathbb{R}} \max_{i \in \{2,\ldots,N\}} |1 - \omega\lambda_i|^2 = \left(\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}\right)^2, \omega^* = \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_N}$$

离散时间一致性问题分析



离散时间一致性问题分析

$$\eta \triangleq 1-\left(\frac{\lambda_N-\lambda_2}{\lambda_N+\lambda_2}\right)^2 = 1-\left(\frac{1-\lambda_2/\lambda_N}{1+\lambda_2/\lambda_N}\right)^2$$

- λ_2/λ_N : 拓扑结构的同步性能力
- $\lambda_2/\lambda_N \to 1$: 图趋于完整图 (任意两个顶点都有边)，任何可控的多智能体系统可以取得一致性
- $\mathcal{G}$ 增加或减少一条边，对 λ_2/λ_N 的影响尚未完全确定

例子：向 $\mathcal{G}_1$ 添加一条边得到 $\mathcal{G}_2$，但是 λ_2/λ_N 反而下降

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}_1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \lambda_2/\lambda_N = 0.4$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \lambda_2/\lambda_N = 0.397$$

离散时间一致性问题分析

$$\eta \triangleq 1 - \left(\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1 - \lambda_2/\lambda_N}{1 + \lambda_2/\lambda_N}\right)^2$$

- λ_2/λ_N : 拓扑结构的同步性能力
- $\lambda_2/\lambda_N \to 1$: 图趋于完整图 (任意两个顶点都有边)，任何可控的多智能体系统可以取得一致性
- $\mathcal{G}$ 增加或减少一条边，对 λ_2/λ_N 的影响尚未完全确定

  例子：向 $\mathcal{G}_1$ 添加一条边得到 $\mathcal{G}_2$，但是 λ_2/λ_N 反而下降

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}_1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \lambda_2/\lambda_N = 0.4$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \lambda_2/\lambda_N = 0.397$$

离散时间一致性问题分析

定理 6

当假设条件①③成立且 $\mathrm{rank}(B)=1$，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当且仅当

$$\prod_j |\lambda_j^u(A)| < \frac{1}{\min\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \max\limits_{j\in\{2,\ldots,N\}} |1-\omega\lambda_j|}.$$

定理 7

当假设条件①②成立且 $\mathrm{rank}(B)=1$，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当且仅当

$$\prod_j |\lambda_j^u(A)| < \frac{1+\lambda_2/\lambda_N}{1-\lambda_2/\lambda_N}.$$

- $\log\left(\Pi_j|\lambda_j^u(A)|\right) = \sum_j \log|\lambda_j^u(A)|$: 拓扑熵率，描述系统的不稳定性程度，系统镇定需要的最少信息率

定理 6 必要性证明:

1) 不失一般性，假设 (A, B) 是能控标准型的形式，即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中

$$\det(zI_n - A) = z^n + \alpha_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$a_0 = (-1)^n \det(A) = (-1)^n \Pi_i \lambda_i^u(A)$$

$$|a_0| = \Pi_i |\lambda_i^u(A)|$$

离散时间一致性问题分析

2) 令 $K=[-k_0,-k_1,\ldots,-k_{n-1}]$ 同时镇定 $(A,\lambda_i B)$。

$$A-\lambda_i BK=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0+\lambda_i k_0 & -\alpha_1+\lambda_i k_1 & \cdots & -\alpha_{n-1}+\lambda_i k_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(zI_n-A+\lambda_i BK\right)=z^n+\left(\alpha_{n-1}-\lambda_i k_{n-1}\right)z^{n-1}+\ldots+\left(\alpha_0-\lambda_i k_0\right)$$

3) $A-\lambda_i BK$ 稳定

$$\Longrightarrow |\alpha_0-\lambda_i k_0|<1\Rightarrow |1-\lambda_i k_0'|<\frac{1}{|\alpha_0|},\, i\in\{2,\ldots,N\},\ k_0'=k_0/\left|\alpha_0\right|$$

$$\Longrightarrow \min_{\omega\in\mathbb{R}}\max_{i\in\{2,\ldots,N\}}|1-\omega\lambda_i|\leq\max_{i\in\{2,\ldots,N\}}|1-\lambda_i k_0'|<\frac{1}{\prod_i\left|\lambda_i^u(A)\right|}$$

离散时间一致性问题分析

$\prod_j \left|\lambda_j^u(A)\right| < \frac{1}{\min\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \max\limits_{j\in\{2,\ldots,N\}} |1-\omega\lambda_j|}$ 的等价检验条件:

- 令 $\lambda_j = r_j \exp\left(\theta_j i\right), i^2 = -1$ 以及 $\Delta = 1/\left(\prod \left|\lambda_j^u(A)\right|\right)$
-

$$
\begin{aligned}
& \min_{\omega\in\mathbb{R}} \max_{j\in\{2,\ldots,N\}} |1-\omega\lambda_j| < \Delta \\
\Longleftrightarrow & \left\{\omega\in\mathbb{R} \middle| \max_{j\in\{2,\ldots,N\}} |1-\omega\lambda_j| < \Delta\right\} \neq \emptyset \\
\Longleftrightarrow & \cap_{j=2}^{N} \left\{\omega\in\mathbb{R} \middle| |1-\omega\lambda_j| < \Delta\right\} \neq \emptyset \\
\Longleftrightarrow & \cap_{j=2}^{N} \left\{\omega\in\mathbb{R} \middle| |1-\omega\lambda_j|^2 - \Delta^2 < 0\right\} \neq \emptyset \\
\Longleftrightarrow & \bigcap_{j=2}^{N} \left(\frac{\cos\theta_j - \sqrt{\Delta_m^2 - \sin^2\theta_j}}{r_j}, \frac{\cos\theta_j + \sqrt{\Delta_m^2 - \sin^2\theta_j}}{r_j} \right) \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

离散时间一致性问题分析

应用：编队控制

- 编队控制问题是指一组多智能体通过局部的相互作用，使它们在运动过程中保持预先指定的几何图形，向指定的目标运动
- 预先指定的几何图形—编队向量 $H = \left[H_1^T, H_2^T, \ldots, H_N^T\right]^T$
- 智能体 i, j 的期望相对距离：$H_i - H_j$
- 控制协议：

$$u_i(k) = K \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \left[(x_j(k) - H_j) - (x_i(k) - H_i)\right] \tag{5}$$

- 编队控制：存在控制增益 K 使得闭环系统满足

$$\lim_{k \to \infty} \|(x_i(k) - H_i) - (x_j(k) - H_j)\| = 0, \forall i, j \in \mathcal{N}$$

离散时间一致性问题分析

- 定义 $\bar{x}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(k)$ 和平均编队向量 $\bar{H} \triangleq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H_i$。令

$$\delta_i(k) \triangleq x_i(k) - H_i - (\bar{x}(k) - \bar{H})$$

$\Rightarrow$ 实现编队等价于 $\lim_{k\to\infty} \|\delta_i(k)\| = 0, \forall i \in \mathcal{N}$

- $\delta_i(k)$ 动态特性：

$$\delta(k+1) = (I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)\,\delta(k) + (I_N \otimes (A - I_n)) \begin{bmatrix} H_1 - \bar{H} \\ \vdots \\ H_N - \bar{H} \end{bmatrix}$$

- $\delta_i(k)$ 渐近稳定：

$$\Leftrightarrow (I_N \otimes (A - I_n)) \left(H_i - \bar{H}\right) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, N$$
$$\Leftrightarrow A\,(H_j - H_i) = H_j - H_i \ \forall i, j = 1, \ldots, N$$

- $\delta(k+1) = (I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)\,\delta(k)$

离散时间一致性问题分析

定理 8

给定编队向量 $H=\left[H_1^T,H_2^T,\ldots,H_N^T\right]^T$，当假设条件①②成立时，多智能体系统 *(1)* 在控制协议 *(5)* 下实现编队当下述条件成立

1. $A\left(H_j-H_i\right)=H_j-H_i \ \forall i,j=1,\ldots,N$
2. $1-\left(\dfrac{\lambda_N-\lambda_2}{\lambda_N+\lambda_2}\right)^2>\gamma_c.$

Outline

连续时间一致性控制

连续时间多智能体线性系统

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t),\ i \in \{1, \dots, N\} \tag{6}$$

- x_i: 第 i 个子系统的状态； u_i: 第 i 个子系统的输入
- 拓扑结构 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$

分布式线性一致性协议

$$u_i(t) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j(t) - x_i(t)) \tag{7}$$

一致性控制

存在控制增益 K 使得闭环系统满足

$$\lim_{t \to \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 = 0,\ \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$$

假设条件

① A 的所有特征根不在左半平面内； $[A|B]$ 是可控的

② $\mathcal{G}$ 包含一颗有向生成树

连续时间一致性问题分析

一致性控制问题等价于连续系统 $A-\lambda_i BK, i=2,\ldots,N$ 的共同镇定问题

定理 9

连续时间多智能体系统 *(6)* 在一致性协议 *(7)* 下取得一致性当且仅当假设条件①②成立。

- 参考文献
  C. Q. Ma and J. F. Zhang, "Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010.

- 当一个连续时间的多智能体系统的采样频率足够快时，其相应的离散化多智能体系统的不稳定特征根接近 1，则一致性条件 (4) 自动满足。

连续时间一致性问题分析

一致性控制问题等价于连续系统 $A-\lambda_i BK, i=2,\ldots,N$ 的共同镇定问题

定理 9

连续时间多智能体系统 *(6)* 在一致性协议 *(7)* 下取得一致性当且仅当假设条件①②成立。

- 参考文献
  C. Q. Ma and J. F. Zhang, "Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010.
- 当一个连续时间的多智能体系统的采样频率足够快时，其相应的离散化多智能体系统的不稳定特征根接近 1，则一致性条件 (4) 自动满足。

连续时间一致性问题分析

引理 10

当 (A, B) 可控时，连续时间代数 *Riccati* 方程

$$A^TP + PA - PBB^TP + I_n = 0$$

存在唯一正定解 P，且 $A - BB^TP$ 是 *Hurwitz*。进一步，对任意 $\sigma \geq 1/2, \omega \in \mathbb{R}$，矩阵 $A - (\sigma + i\omega)BB^TP(i^2 = -1)$ 也是 *Hurwitz*

证明:

- 假设存在 $\sigma \geq 1/2, \omega \in \mathbb{R}$ 使得 $A - (\sigma + i\omega)BB^TP$ 不是 Hurwitz，也就是 $A - (\sigma + i\omega)BB^TP$ 有某特征根 λ 不在左半平面，即 $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$.
- 令 $x \neq 0$ 是 λ 的一个特征向量，即 $\left[A - (\sigma + i\omega)BB^TP\right]x = \lambda x$

引理 10

当 (A, B) 可控时，连续时间代数 *Riccati* 方程

$$A^T P + PA - PBB^T P + I_n = 0$$

存在唯一正定解 P，且 $A - BB^T P$ 是 *Hurwitz*。进一步，对任意 $\sigma \geq 1/2, \omega \in \mathbb{R}$，矩阵 $A - (\sigma + i\omega)BB^T P (i^2 = -1)$ 也是 *Hurwitz*

证明:

- 假设存在 $\sigma \geq 1/2, \omega \in \mathbb{R}$ 使得 $A - (\sigma + i\omega)BB^T P$ 不是 Hurwitz，也就是 $A - (\sigma + i\omega)BB^T P$ 有某特征根 λ 不在左半平面, 即 $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$.
- 令 $x \neq 0$ 是 λ 的一个特征向量，即 $\left[A - (\sigma + i\omega)BB^T P\right] x = \lambda x$

连续时间一致性问题分析

- 令 $\epsilon = 2\sigma - 1 \geq 0$, $*$ 表示共轭转置, 则有

$$\left[A - (\sigma + i\omega)BB^T P\right]^* P + P\left[A - (\sigma + i\omega)BB^T P\right] + \epsilon PBB^T P + I$$
$$= A^T P + PA - 2\sigma PBB^T P + \epsilon PBB^T P + I$$
$$= A^T P + PA - PBB^T P + I = 0$$
$$\Rightarrow x^* \left[A - (\sigma + i\omega)BB^T P\right]^* Px + x^* P\left[A - (\sigma + i\omega)BB^T P\right] x + x^* \epsilon PBB^T Px + x^* Ix = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^* x^* Px + \lambda x^* Px + \epsilon x^* PBB^T Px + x^* Ix = 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{2Re\lambda x^* Px}_{\geq 0} + \underbrace{\epsilon x^* PBB^T Px}_{\geq 0} + \underbrace{x^* Ix}_{> 0} = 0$$

- 矛盾 $\Rightarrow$ 假设不成立，也就是对任意 $\sigma \geq 1/2, \omega \in \mathbb{R}$，矩阵 $A - (\sigma + i\omega)BB^T P$ 是 Hurwitz

连续时间一致性问题分析

- 令 $\epsilon = 2\sigma - 1 \geq 0$, $*$ 表示共轭转置, 则有

$$
\begin{aligned}
&\left[A - (\sigma + i\omega)BB^TP\right]^* P + P\left[A - (\sigma + i\omega)BB^TP\right] + \epsilon PBB^TP + I \\
&= A^TP + PA - 2\sigma PBB^TP + \epsilon PBB^TP + I \\
&= A^TP + PA - PBB^TP + I = 0 \\
&\Rightarrow x^*\left[A - (\sigma + i\omega)BB^TP\right]^* Px + x^*P\left[A - (\sigma + i\omega)BB^TP\right]x \\
&\qquad\qquad + x^*\epsilon PBB^TPx + x^*Ix = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^*x^*Px + \lambda x^*Px + \epsilon x^*PBB^TPx + x^*Ix = 0 \\
&\Rightarrow \underbrace{2Re\lambda x^*Px}_{\geq 0} + \underbrace{\epsilon x^*PBB^TPx}_{\geq 0} + \underbrace{x^*Ix}_{> 0} = 0
\end{aligned}
$$

- 矛盾 $\Rightarrow$ 假设不成立，也就是对任意 $\sigma \geq 1/2, \omega \in \mathbb{R}$，矩阵 $A - (\sigma + i\omega)BB^TP$ 是 Hurwitz

连续时间一致性问题分析

定理 9 充分性证明：（设计 K 使得 $A-\lambda_i BK, i=2,\ldots,N$ 是 Hurwitz）

1. 假设条件① $\Rightarrow A^TP+PA-PBB^TP+I_n=0$ 存在唯一正定解 P
2. 假设条件② $\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)>0, i=2,3,\cdots,N$

$$\delta \triangleq \min_{2\leq i\leq N}\left\{\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)\right\}$$

3. 令 $K=\delta^{-1}B^TP$

$$\Longrightarrow A-\lambda_i BK=A-\lambda_i\delta^{-1}BB^TP,\quad i=2,3,\cdots,N$$

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_i\delta^{-1}\right)\geq 1 \overset{\text{引理 9}}{\Longrightarrow} A-\lambda_i BK \text{ 是 Hurwitz}$$