矩阵理论

王 磊、刘克新

自动化科学与电气工程学院

教材与参考书

课程教材:

《矩阵基本理论与应用》王磊编著

北京航天航天大学出版社，2021.

参考书:

[1] Matrix Analysis 2nd Edition, R.A. Horn, C.R. Johnson, Cambridge University Press, 2013.

[2] 矩阵分析与应用（第二版）张贤达编著, 清华大学出版社, 2013.

考试成绩

平时作业+课堂随机测试 15%

要求:1. 只有每周一收作业；其余时间交作业者请于下周一交, 且算补交作业;

2. 大概3次左右课堂测试，对错不计入成绩。

矩阵论在XX中的应用/介绍报告1篇 15%

要求:1. 中文, 可理论分析、数值计算、或算法等;

2. 字数不超过800字或不超过2页A4纸;

3. 格式可参考科技论文;

注意:1. 期末考试前提交纸质版和电子版;

2. 抄袭和雷同者0分。

期末考试 70%

第一章 线性空间引论

- 线性空间
- 线性子空间
- 基与坐标
- 内积空间
- 直积与投影
- 应用：多项式插值

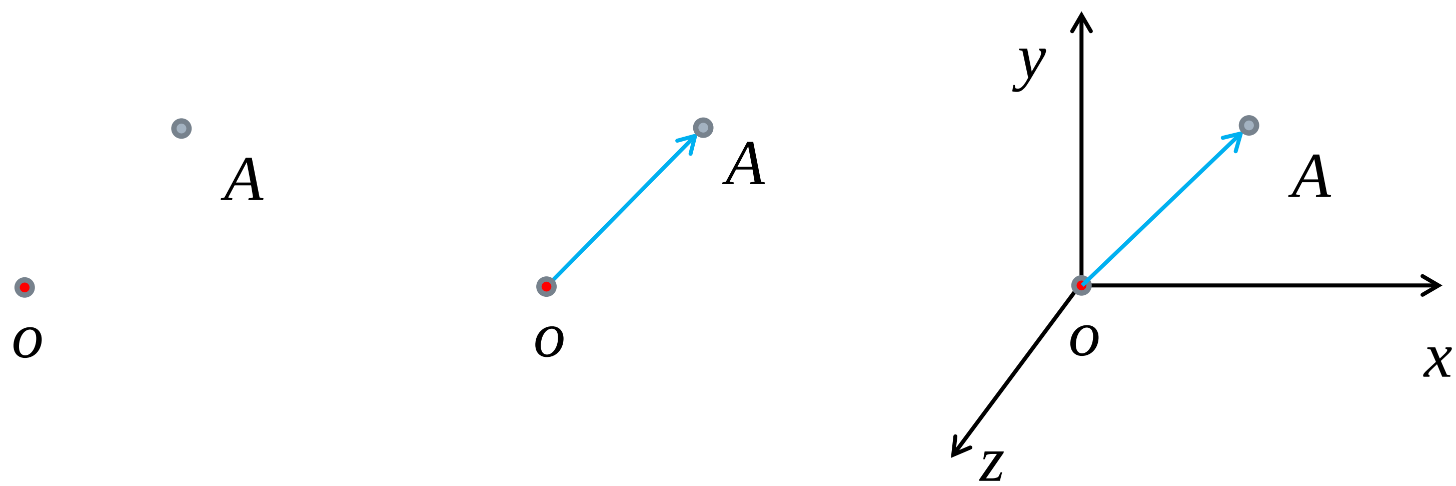
第一章 线性空间引论

线 性 空 间

从向量空间到线性空间（回顾）

以三维空间为例：

- 空间的任一点与向量一一对应；
- 空间的任一点与三元有序数组一一对应.



定义1.1.1（n维向量）若n维向量写成

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

的形式, 称为n维列向量; 若n维向量写成

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$$

的形式, 称为n维行向量. 这n个数称为该向量的n个分量, 其中α_i称为第i个分量.

设$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$,
$k\in\mathbb{R}$, 则有加法运算和数乘运算

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{bmatrix},k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\alpha_1\\k\alpha_2\\\vdots\\k\alpha_n\end{bmatrix}$$

设$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]^T$, $k \in \mathbb{R}$, 则有加法运算和数乘运算

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}, k\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} k\alpha_1 \\ k\alpha_2 \\ \vdots \\ k\alpha_n \end{bmatrix}$$

定义1.1.2（向量空间）设V是n维实向量的非空集合, 若V对向量的加法和数乘两种运算都封闭, 即对于任意向量 $\alpha, \beta \in V$和$k \in \mathbb{R}$, 都有$\alpha + \beta \in V$和$k\alpha \in V$则称集合V为向量空间.

例1.1.1 定义集合

$$V_1 = \{[0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T | \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

例1.1.1 定义集合

$V_1 = \{[0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T | \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$, 对集合$V_1$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha} = [0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta} = [0, \beta_2, \cdots, \beta_n]^T$, 以及任意$k \in \mathbb{R}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \in V_1, k\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ k\alpha_2 \\ \vdots \\ k\alpha_n \end{bmatrix} \in V_1$$

所以V_1对向量的加法和数乘运算封闭. 由向量空间定义知, V_1是向量空间.

例1.1.2 集合$V_2=\{[1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T|\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$，对集合$V_2$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}=[1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$，以及任意$k\in\mathbb{R}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}\notin V_2, k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\\k\alpha_2\\\vdots\\k\alpha_n\end{bmatrix}\notin V_2$$

所以集合V_2对向量的加法和数乘运算不封闭. 由向量空间定义知，V_2不是向量空间.

例1.1.2 集合$V_2=\{[1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T|\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$,

从向量空间到线性空间

定义1.1.3（数域） 设F是非空数集, 若F中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集, 即对四则运算封闭, 称该数集F为一个数域.

例如: 实数集:$\mathbb{R}$、复数集:$\mathbb{C}$、有理数集$\mathbb{Q}$;

自然数集$\mathbb{N}$、整数集$\mathbb{Z}$.

思考: 集合$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$是数域？

Need number filed here to define multiplication

定义（加群）设V是一个非空集合，若V中有一种规则，称之为加法运算" + "，使得任取 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$，都有$V$中唯一的元素与之对应，称为$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的和，记为$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，且这种加法满足如下性质:

（1）交换律: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$;

（2）结合律: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega})$;

（3）存在零元 $\boldsymbol{\theta}\in V$使得$\forall\boldsymbol{u}\in V$， $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{u}$;

（4）$\forall\boldsymbol{u}\in V$，存在负元$-\boldsymbol{u}$使得$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\theta}$;

称V在加法运算下构成一个加群，记为$(V,+)$.

定义1.1.4（线性空间）设$(V,+)$是一个加群，F是一个数域. 若有F对V的数乘规则，使得$\forall\lambda\in F$，$\boldsymbol{u}\in V$，有V中唯一元素与之对应，记为$\lambda\boldsymbol{u}$，且此规则满足以下性质：

（1）$\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}$，数乘对加法分配律；

（2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{u}$，数乘对数的加法分配律；

（3）$\lambda(\mu\boldsymbol{u})=(\lambda\mu)\boldsymbol{u}$， 数乘的结合律；

（4）$1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$；数乘的初始条件；

此时，V称为数域F上的线性空间，V中元素称为向量，F中元素称为标量.

当$F=\mathbb{R}$时，称为**实线性空间**；当$F=\mathbb{C}$时，称为**复线性空间**.

例1.1.3 设$V=\mathbb{R}^{+}$, $F=\mathbb{R}$, 定义V中加法运算为

$$x\oplus y=xy$$

定义V中元素与F中数的数乘为

$$k\cdot x=x^{k}$$

其中，$x,y\in V$, $k\in F$. 证明$(V,\oplus,\cdot)$是实线性空间.

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

（1）向量空间$\mathbb{R}^n(n \geq 1)$是线性空间的首个例子.

（2）矩阵空间: 设V为$\mathbb{C}$上所有$m \times n$矩阵构成的集合, 即$V=\{(a_{ij})_{m\times n} | a_{ij} \in \mathbb{C}\}$. 在矩阵加法和数乘运算下, 集合$V$构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 记为$\mathbb{C}^{m\times n}$. 类似的可定义$\mathbb{R}^{m\times n}$.

（3）正弦函数集合

$$S_{[x]}=\{a\sin(x+b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

在函数加法和乘法运算下 $S_{[x]}$构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

（4）一元多项式集合

$$P_n(x)=\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | a_i \in \mathbb{C}\}$$

集合$P_n(x)$构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 称为多项式空间.

（5）分别定义在区间$[a,b]$上全体多项式集合S_1, 全体可微函数集合S_2, 全体连续函数集合S_3, 全体可积函数集合S_4, 全体实函数集合S_5, 则

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset S_5$$

且这五个集合均为$\mathbb{R}$上的线性空间.

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

（6）设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解集构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 而非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解集则不构成$\mathbb{C}$上的线性空间.

（7）设S是所有双边序列集合, 其中双边序列

$$\{x_k | x_k \in \mathbb{R}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

若序列$\{y_k\}$是集合S中的元素, 定义$\{x_k\}$与$\{y_k\}$的和为$\{x_k + y_k\}$, 数乘$c\{x_k\}$为$\{cx_k\}$, 则S是$\mathbb{R}$上的线性空间, 我们称为离散时间信号空间.

注4: 设V是数域F上的线性空间, 有

（1）零向量是唯一的;

（2）任一向量的负向量是唯一的;

（3）对任意$k \in F$和$\boldsymbol{\alpha} \in V$,

$$0\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta},\ (-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha},\ k\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta};$$

（4）若$k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$, 则$k = 0$或$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$.

注5：线性空间中的两种运算—加法和数乘—合称为**线性运算**.

线性组合和线性表示: 若线性空间V中的向量$\boldsymbol{\alpha}$可由V中一组向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$通过线性运算获得, 即存在$k_i \in F$，$i = 1, \cdots, n$满足

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称向量$\boldsymbol{\alpha}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$的一个**线性组合**，或者说$\boldsymbol{\alpha}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$**线性表示**.

例1.1.5 试判断矩阵A^2是否可以由A和I线性表示，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

例1.1.5 试判断矩阵A^2是否可以由A和I线性表示，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解: 由于

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2A-I$$

因此, 矩阵A^2可以由A和I线性表示.

线 性 子 空 间

定义1.2.1（子空间） 设V是F上的线性空间, W是V的非空子集. 若W的向量关于V的加法和数乘运算也构成F上的线性空间, 则称W是V的子空间.

例1.2.1 取定矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

是$\mathbb{C}$上的线性空间. 注意到集合W是n维向量空间$\mathbb{C}^n$的子集, 故W是$\mathbb{C}^n$的子空间.

例1.2.2 线性空间V的仅由零向量组成的集合是V的一个子空间，称为零子空间，记为$\{\boldsymbol{\theta}\}$(注意与零元素$\boldsymbol{\theta}$的区别)；线性空间V本身也是V的一个子空间. 子空间V和$\{\boldsymbol{\theta}\}$称为V的平凡子空间.

例1.2.3 向量空间$\mathbb{R}^2$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

例1.2.4 $\mathbb{R}^3$ 中不通过原点的平面是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间吗？

定理1.2.1（子空间判别法）设V是F上的线性空间，W是V的一个非空子集. 以下命题等价：

（1）W是V的子空间.

（2）a $\forall k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in W$, 有$k\boldsymbol{\alpha} \in W$;

b $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 有$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$.

（3）$\forall k, l \in F$和$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 有$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} \in W$.

注1: 检验子空间首先观察零向量是否存在于W中.

例1.2.5 线性滤波器常用n阶线性差分方程描述. 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n}+a_{n-1}u_{k+n-1}+\cdots+a_1u_{k+1}+a_0u_k=0$$

该差分方程的解集$\tilde{S}$是线性空间吗？

例1.2.6 设W_1和W_2是V的子空间, 定义三个集合

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{且} x \in W_2\}$$

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{或} x \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$$

试判断它们是否是V的子空间.

在$\mathbb{R}^3$空间中,

（1） $W_1 = xoy$平面, $W_2 = yoz$平面；

（2） $W_1 = x$轴, $W_2 = yoz$平面

考察集合$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$, $W_1 \cup W_2$.

定理1.2.2（和空间与交空间）设W_1和W_2是数域F上线性空间V的子空间, 则集合

$$W_1 \cap W_2 \triangleq \{\alpha | \alpha \in (W_1 \cap W_2)\}$$

$$W_1 + W_2 \triangleq \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

是V的子空间, 分别称为W_1与W_2的交（或交空间）与和（或和空间）.

例1.2.7 取$V=\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义

$$W_1=\{A\in V|A^T=A\}$$

$$W_2=\{A\in V|A^T=-A\}$$

验证W_1和W_2是V的线性子空间, 且$V=W_1+W_2$.

子空间的表示方法:

子空间的表示方法:

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$F$上线性空间$V$的一向量组, 记

$$W=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n|k_i\in F,i=1,\cdots,n\}$$

定理1.2.3 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性空间$V$的一组向量, 由上式定义的集合$W$是$V$的一个线性子空间, 并称$W$是由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$张成（或生成）的子空间, 记为$\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

上述方法解决了抽象空间中子集的描述.

定义1.2.2（矩阵零空间） 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则矩阵$A$的**零空间（或核空间）**定义为齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解集, 记为

$$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

定义1.2.3（矩阵列空间） 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则矩阵$A$的**列空间（或值空间）**是由$A$的列的所有线性组合组成的集合, 即

$$R(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m | \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\}$$

若记$A = [\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]$, 则$R(A) = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$

例1.2.8 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$的零空间和列空间.

例1.2.8 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$的零空间和列空间.

解：$R(A)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1]^T$.

对矩阵A进行初等变换得

Important

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

由此, $A\boldsymbol{x}=0$的一个基础解系为$\boldsymbol{\beta}=[1,1,-1]^T$, 故 $N(A)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta})$.

思考: 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 其零空间和列空间有可能相同吗？若这两个空间相同, 则矩阵A具有何性质？

第一章 线性空间引论

基 与 坐 标

定义1.3.1（线性相关与线性无关）设V是F上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一组向量. 若向量方程

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\theta}, k_1,\cdots,k_n\in F$$

只有平凡解，即$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性无关；否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性相关.

思考：考察定义在$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$的线性空间$\mathbb{C}$，其中的向量i和1线性相关性.

例1.3.1 考查多项式空间$P_1(x)$, 并令$p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = 4 - x$. 由于$p_3 = 4p_1 - p_2$, 从而p_1, p_2, p_3是线性相关的.

例1.3.2 设信号子空间

$$\tilde{S} = \mathrm{span}(\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\})$$

其中$x_k = (-1)^k$, $y_k = 2^k$, $z_k = 3^k$. 试判断信号$\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$是否线性无关.

例1.3.2 设信号子空间

$$\tilde{S} = \mathrm{span}(\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\})$$

其中$x_k = (-1)^k$, $y_k = 2^k$, $z_k = 3^k$. 试判断信号$\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$是否线性无关.

$$\begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k \\ x_{k+1} & y_{k+1} & z_{k+1} \\ x_{k+2} & y_{k+2} & z_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = 0, \forall k$$

其中, 系数矩阵称为信号的Casorati矩阵, 行列式称为$\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$的Casorati行列式.

注1：线性无关向量组的任一子集是线性无关的；线性相关向量组的任一扩集仍是线性相关的.

注2：单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.

定理1.3.1 设线性空间V的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关, 而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$线性相关, 则$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示且表示法唯一.

定义1.3.2（极大线性无关组与秩） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性空间$V$的一组向量. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$中存在$r$个线性无关的向量$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$, 并且$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$中任一向量均可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示, 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大线性无关组, 数$r$称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的秩, 记为

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=r$$

例1.3.3 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的极大线性无关组, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\mathrm{i}-1\\0\end{bmatrix}$$

注4： 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大线性无关组不唯一.

定义1.3.4（基） 设V是数域F上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$中一组向量. 若

（1）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关;

（2）V中任一向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示;

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一个基底（或一组基）.

定义1.3.4（基） 设V是数域F上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$中一组向量. 若

（1）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关;

（2）V中任一向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示;

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的**一个基底（或一组基）**.

例1.3.4 单位矩阵I的n列可构成$\mathbb{R}^n$（或$\mathbb{C}^n$）的一组基. 特别地, 令$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是单位矩阵的$n$列, 则$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$称为$\mathbb{R}^n$的**标准基**.

思考:对于线性空间V,明确一个基的重要原因是什么?

思考:对于线性空间V,明确一个基的重要原因是什么?

定理1.3.2（唯一表示定理） 设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$是线性空间$V$的一组基，则$V$中任一向量$\boldsymbol{x}$都可由基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$唯一表示.

定义1.3.5（坐标）设$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$是数域$F$上线性空间$V$的一组基, 对任意向量$\boldsymbol{x} \in V$, 令

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

称有序数组$[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]^T \in F^n$是$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$下的坐标, 它由$\boldsymbol{x}$与基$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$唯一确定.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{线性空间}V & \Rightarrow & \text{基}\mathcal{B} & \Rightarrow & \text{向量的坐标} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\text{平面}\mathbb{R}^2 & \Rightarrow & \text{坐标系} & \Rightarrow & \text{点的坐标}
\end{array}
$$

$$\text{标准基}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$$

例1.3.6 证明$E_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$（$i,j=1,2$）是$\mathbb{R}^{2\times 2}$的一组基, 并求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$在该组基下的坐标.

定义1.3.6（过渡矩阵）设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$和$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$是数域$F$上线性空间$V$的两组基, 令

$$\boldsymbol{y}_i = a_{1i}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{x}_n = [\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

引入矩阵表示:

$$[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n] = [\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]A$$

其中$A = \left(a_{ij}\right) \in F^{n\times n}$, 称$A$是由基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$到基$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$的过渡矩阵（或变换矩阵）.

命题1.3.1（过渡矩阵的性质）设V是数域F上的线性空间, $A \in F^{n\times n}$是由基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$到基$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$的过渡矩阵, 则以下命题成立

（1）过渡矩阵A可逆（为什么）；

（2）由基$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$到基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$的过渡矩阵为$A^{-1}$;

（3）任取$\boldsymbol{x} \in V$, 设$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{y}_i$, 则

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

$$\left[f(0),f'(0),\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right]^T$$

在基$1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^n$下的坐标:

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

$$\left[f(0),f'(0),\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right]^T$$

在基$1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^n$下的坐标:

$$\left[f(x_0),f'(x_0),\cdots,\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right]^T$$

例1.3.7 设$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$[1, x - x_0, \cdots, (x - x_0)^n]$$

$$= [1, x, \cdots, x^n]\begin{bmatrix} 1 & -x_0 & \cdots & (-x_0)^n \\ 0 & 1 & \cdots & n(-x_0)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义1.3.7（维数） 在线性空间V中, 不同线性无关组中向量个数最大者叫作V的**维数**, 记为$\dim V$. 当$\dim V < \infty$, 称V为**有限维空间**, 否则称为**无限维空间**, 记$\dim V = \infty$.

定义1.3.7（维数） 在线性空间V中，不同线性无关组中向量个数最大者叫作V的**维数**，记为$\dim V$. 当$\dim V < \infty$，称V为**有限维空间**，否则称为**无限维空间**，记$\dim V = \infty$.

例1.3.8 离散时间信号空间

$$S = \{\{x_k\} = [\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots] | x_i \in \mathbb{R}\}$$

是$\mathbb{R}$上的无限维线性空间.

定义1.3.7（维数）在线性空间V中，不同线性无关组中向量个数最大者叫作V的**维数**，记为$\dim V$. 当$\dim V < \infty$，称V为**有限维空间**，否则称为**无限维空间**，记$\dim V = \infty$.

例1.3.9 求空间$\mathbb{C}$在实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$上的维数.

定理1.3.3（维数与基的关系） 设V是有限维线性空间, 则$\dim V = n$当且仅当V的任一基底的向量个数为n.

例1.3.9 求空间$\mathbb{C}$在实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$上的维数.

例1.3.10 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 求$N(A)$和$R(A)$的维数.

推论1.3.1（基扩充定理）n维线性空间中任意n个线性无关的向量均为V的一个基底, 且任一线性无关向量组$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$（$1 \leq r < n$）可扩充为$V$的一个基底.

注5：在构造子空间的一组基时, 优先利用“加法”原则, 尽量避免“减法”原则.

定理1.3.4（维数定理）设W_1和W_2是线性空间V的两个子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

this is important

例1.3.11 设$W_1 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1 = [2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = [0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1 + W_2)$和$\dim(W_1 \cap W_2)$.

例1.3.11 设$W_1 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1 = [2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = [0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1 + W_2)$和$\dim(W_1 \cap W_2)$.

解: 观察知$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$线性无关, 故有

$$\dim(W_1) = 3, \dim(W_2) = 2$$

再对如下矩阵进行初等变换, 得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例1.3.11 设$W_1 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1 = [2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = [0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1 + W_2)$和$\dim(W_1 \cap W_2)$.

解: 于是,

$$\dim(W_1 + W_2) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 4$$

由维数定理可知$\dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 4 = 1$.