北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

王磊

自动化科学与电气工程学院

第四章 矩阵分析

- 向量范数
- 矩阵范数
- 相容范数
- 矩阵扰动分析
- 特征值估计
- 矩阵级数
- 矩阵函数
- 函数矩阵
- 应用：主元分析法

向 量 范 数

定义4.1.1（向量范数） 设 V 是数域 F 上的线性空间，若对任意向量 $\boldsymbol{x} \in V$, $\|\boldsymbol{x}\|$ 是以 $\boldsymbol{x}$ 为自变量的实值函数，且满足以下三条性质：

（1）正定性(或非负性)：$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ 时有 $\|\boldsymbol{x}\| = 0$;

（2）齐次性：$\forall k \in F, \in V, \|k\boldsymbol{x}\| = |k|\|\boldsymbol{x}\|$;

（3）三角不等式：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F$,

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|;$$

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数，V 是数域 F 上的赋范线性空间，记为 $(V, \|\cdot\|)$.

注1: 定义4.1.1中的三条性质称为范数的三条公理, 即只要满足范数公理的实值函数均可定义为向量的范数.

注2: 三角不等式的等价形式:

$$\forall x, y \in V, \left|\|x\| + \|y\|\right| \leq \|x - y\|$$

思考: 内积空间是赋范线性空间吗？

思考：内积空间是赋范线性空间吗？

分析：判断内积空间是否为赋范线性空间只需判断内积空间是否定义了符合范数三条公理的实值函数. 显然, 内积空间定义的向量长度符合这一要求.

因此, 内积空间是赋范线性空间. 实际上, 内积空间的长度定义不仅满足范数的三条公理, 还满足平行四边形法则；而赋范线性空间并不一定满足这一法则.

例4.1.1 $\forall \boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\in\mathbb{C}^n$, 定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

则$\|\boldsymbol{x}\|_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{x}\|_2$均是向量x的范数, 分别称为1-范数、∞ –范数和2-范数（或欧几里得范数）.

同一线性空间可定义不同的范数.

例4.1.2 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，$V$中任意向量$\alpha$在这组基下的坐标为$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$. 由此, 可定义$\alpha$的范数为

$$\|\alpha\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

例4.1.2 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，$V$中任意向量$\alpha$在这组基下的坐标为$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$. 由此，可定义$\alpha$的范数为

$$\|\alpha\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

思考：例4.1.2定义的范数是2-范数吗？

例4.1.3 设$1 \le p \le \infty$, 对任意向量

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$$

定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则$\|\boldsymbol{x}\|_p$是向量$\boldsymbol{x}$的范数，称为p −范数.

注3:当$p = 1,2$时, $\|x\|_p$分别是例4.1.1中的1-范数和2-范数.

注3: 当$p=\infty$时, $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$. 当$0<p<1$时, 此时$\|x\|_p$不满足三角不等式.

注4: 范数证明常涉及两个重要的不等式, 分别为

（1）Holder不等式: 设$p,q>1$且对任意$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\in\mathbb{C}^n$和$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T\in\mathbb{C}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

（2）Minkowski不等式:

$\forall \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T \in \mathbb{C}^n$以及$p \geq 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

例4.1.4 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正定Hermite矩阵, 对任意向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 定义$\|\boldsymbol{x}\|_A = \sqrt{\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}}$, 则$\|\boldsymbol{x}\|_A$是向量范数, 常称为加权范数或椭圆范数.

注5: 例4.1.4提供了一种借助已有向量范数构造新的向量范数方法. 实际上, 我们可利用定义式(4.1.6)构造更一般的向量范数（见习题2）.

【应用】:系统稳定性分析. 我们常采用二次型Lyapunov函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H P \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_P^2$$

研究线性系统乃至非线性系统的稳定性, 其中, P 是正定实对称矩阵.

【应用】:模式分类. 模式分类常通过已知类型属性的观测样本判断未知样本的类型属性，其基本思想是根据未知样本的模式向量$\boldsymbol{x}$与已知样本的模式向量$\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_M$相似度来判断未知样本的类型属性. 最简单的方法就是用向量间的距离来度量模式向量的相似度，比如经典的欧几里得距离，就是采用向量的2-范数:

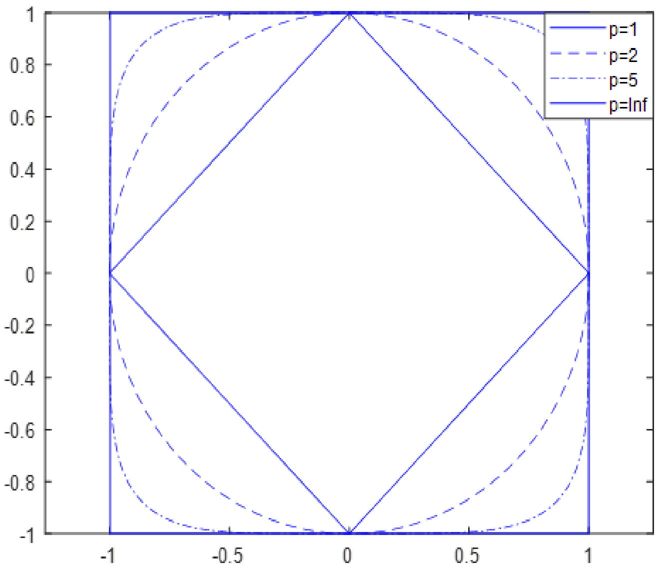
$$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}_i)=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}_i\|_2=\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}_i)^H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}_i)}$$

思考：范数的本质是什么？

思考：范数的本质是什么？

定理4.1.1 线性空间V中任一范数$\|\boldsymbol{x}\|$都是其坐标的连续函数.

例4.1.5 画出$\mathbb{R}^n$空间不同范数下的“单位圆”.



例4.1.5 画出$\mathbb{R}^n$空间不同范数下的“单位圆”.

注6: 赋范线性空间中的单位圆具有重要意义. 在几何上, 它们相当于实数轴上的单位闭区间或其端点, 或三维空间中的单位球或球面. 因此, 它们都是有界闭集. 连续的函数在有界闭集上一定有最大值和最小值, 这是高等数学课程中的一个重要结论.

研究赋范线性空间上的连续函数或变换的一个重要技巧就是设法将函数的定义域限制或转移到单位圆上.

定义4.1.2（范数等价）设V是数域F上的有限维线性空间，$\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$和$\|\boldsymbol{x}\|_\beta$是$V$中任意两个向量范数. 若存在正数$k_1$和$k_2$使得$\forall \boldsymbol{x} \in V$，都有

$$k_1\|\boldsymbol{x}\|_\beta \le \|\boldsymbol{x}\|_\alpha \le k_2\|\boldsymbol{x}\|_\beta$$

则称$\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$与$\|\boldsymbol{x}\|_\beta$是**等价**的.

定义4.1.2（范数等价） 设V是数域F上的有限维线性空间，$\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$和$\|\boldsymbol{x}\|_\beta$是$V$中任意两个向量范数. 若存在正数$k_1$和$k_2$使得$\forall \boldsymbol{x} \in V$，都有

$$k_1\|\boldsymbol{x}\|_\beta \leq \|\boldsymbol{x}\|_\alpha \leq k_2\|\boldsymbol{x}\|_\beta$$

则称$\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$与$\|\boldsymbol{x}\|_\beta$是**等价**的.

定理4.1.2 有限维线性空间中的任意向量范数都是等价的.

命题4.1.1（范数等价的性质） 设V是数域F上的有限维线性空间，向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$与$\|\boldsymbol{x}\|_\beta$等价，则

（1）自反性：$1 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_\alpha \le \|\boldsymbol{x}\|_\alpha \le \|\boldsymbol{x}\|_\alpha$；

（2）对称性：$\frac{1}{k_1}\|\boldsymbol{x}\|_\alpha \le \|\boldsymbol{x}\|_\beta \le \frac{1}{k_2}\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$；

（3）传递性：若$\|\boldsymbol{x}\|_\beta$与$\|\boldsymbol{x}\|_\gamma$等价，则向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$与$\|\boldsymbol{x}\|_\gamma$等价.

赋范线性空间中范数等价性结论是后续向量序列和矩阵序列的收敛性证明的重要基础理论.

矩 阵 范 数

定义4.2.1（矩阵的向量范数） 对任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，定义$\|A\|$是对应以$A$为自变量的实值函数，且满足以下三条性质：

（1）正定性(或非负性): $\|A\| \geq 0$, 当且仅当$A = 0$时有$\|A\| = 0$;

（2）齐次性: $\forall k \in \mathbb{C}, \|kA\| = |k|\|A\|$;

（3）三角不等式: $\forall A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|;$$

则称$\|A\|$是矩阵A的向量范数.

例4.2.1 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则

$$\|A\|_{v1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{v\infty}=\max_{\forall i,j}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{v2}=(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_{vp} = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

均为矩阵A的向量范数.

$$\|A\|_{vp} = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p})^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

均为矩阵A的向量范数.

类似于上一节, 对于矩阵的向量范数, 我们同样有以下结论.

定理4.2.1 矩阵$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$的任一向量范数均是$A$元素的连续函数;

定理4.2.2 线性空间$\mathbb{C}^{m\times n}$的任意两个向量范数是等价的，即对$\|A\|_{v\alpha}$和$\|A\|_{v\beta}$存在正整数k_1和k_2使得对任意矩阵$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 有

$$k_1\|A\|_{v\beta}\le\|A\|_{v\alpha}\le k_2\|A\|_{v\beta}$$

定理4.2.2 线性空间$\mathbb{C}^{m\times n}$的任意两个向量范数是等价的，即对$\|A\|_{v\alpha}$和$\|A\|_{v\beta}$存在正整数k_1和k_2使得对任意矩阵$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 有

$$k_1\|A\|_{v\beta}\le\|A\|_{v\alpha}\le k_2\|A\|_{v\beta}$$

尽管矩阵可视为拉直的向量, 但矩阵和向量还是有所不同, 典型的是矩阵有乘法运算. 因此, 在考虑范数时须兼顾矩阵的乘法运算.

定义4.2.2（矩阵范数）对任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，定义$\|A\|$是对应以$A$为自变量的实值函数，且满足以下四条性质：

（1）正定性：$\|A\| \geq 0$，当且仅当$A=0$时有$\|A\|=0$；

（2）齐次性：$\forall k \in \mathbb{C}, \|kA\| = |k|\|A\|$；

（3）三角不等式：$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$；

（4）矩阵乘法的相容性：$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$（须矩阵乘积有意义）.

则称$\|A\|$是矩阵A的矩阵范数.

注1: 若反向性质（4）中矩阵乘法相容性的不等式，即$\|AB\| \geq \|A\|\|B\|$，此时幂零矩阵（对于n阶复方阵A，存在正整数k使得$A^k = 0$，则称A为幂零矩阵）的矩阵范数将是0,这与矩阵范数的正定性要求矛盾.

矩阵乘法相容性的不等式实际上保证了矩阵幂级数的收敛性（设$\|A\| \leq 1$，则根据矩阵乘法相容性得当$k \to \infty, \|A^k\| \to 0$）.

思考:设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n},\|A\|_{v\infty}=\max\limits_{\forall i,j}|a_{ij}|$是矩阵范数吗?

思考：设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\|A\|_{v\infty}=\max\limits_{\forall i,j}|a_{ij}|$是矩阵范数吗？

考察$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$,

则

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

例4.2.2 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 证明:

$$\|A\|_{v2}=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\mathrm{tr}(A^{H}A)\right)^{\frac{1}{2}}$$

是A的矩阵范数.

例4.2.2 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 证明:

$$\|A\|_{v2}=(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}=(\mathrm{tr}(A^HA))^{\frac{1}{2}}$$

是A的矩阵范数.

注2: $\|A\|_{v2}$范数称为Frobenious范数, 简称为$F-$范数, 并常记为$\|A\|_F$.

定理4.2.3 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，则

（1）$\|UA\|_F=\|AV\|_F=\|UAV\|_F=\|A\|_F$，其中$U$和$V$是酉矩阵；

（2）$\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{\beta}_i\|_2^2$，其中矩阵$A$按列分块，记为$A=[\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$； 或$\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{\alpha}_i\|_2^2$，其中矩阵$A$按行分块；

（3）$\|A\boldsymbol{x}\|\le\|A\|_F\|\boldsymbol{x}\|_2$

注3: 定理4.2.2性质（1）称为F –范数的酉不变性.

思考:如何根据已有的矩阵范数构造新的矩阵范数?

思考:如何根据已有的矩阵范数构造新的矩阵范数?

例4.2.3 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\|\cdot\|$是某一给定矩阵范数. 定义

$$\|A\|_m = \|P^{-1}AP\|$$

则$\|\cdot\|_m$是矩阵范数, 其中P是n阶可逆矩阵.

相 容 范 数

定义4.3.1（向量范数与矩阵范数相容）若对$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$与矩阵范数$\|A\|_m$满足

$$\|A\boldsymbol{x}\|_v \le \|A\|_m \|\boldsymbol{x}\|_v$$

则称向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$与矩阵范数$\|A\|_m$相容.

定义4.3.1（向量范数与矩阵范数相容） 若对$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$与矩阵范数$\|A\|_m$满足

$$\|A\boldsymbol{x}\|_v \leq \|A\|_m \|\boldsymbol{x}\|_v$$

则称向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$与矩阵范数$\|A\|_m$相容.

思考:给定矩阵范数, 是否存在与之相容的向量范数？反之, 给定向量范数, 是否存在与之相容的矩阵范数？

例4.3.1 由定理4.2.3可知, 对任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\|A\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|A\|_F \|\boldsymbol{x}\|_2$. 由此, 向量2−范数和矩阵$F$ −范数是相容的.

定理4.3.1 设$\|A\|_m$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的一个矩阵范数, 则必存在$\mathbb{C}^n$上与之相容的向量范数.

定理4.3.2 设$\|\boldsymbol{x}\|_v$是$\mathbb{C}^n$上的一个向量范数，对任意$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，定义

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_v=1} \|A\boldsymbol{x}\|_v$$

则$\|A\|$是一个与$\|\boldsymbol{x}\|_v$相容的矩阵范数，称其是从属于向量范数$\|\cdot\|_v$的算子范数或由向量范数$\|\cdot\|_v$诱导的矩阵范数（或简称诱导范数）.

注1: 我们常用到算子范数有如下等价定义式:

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_v \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}$$

常见的向量范数有$\|\boldsymbol{x}\|_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{x}\|_2$, 则从属于它们的算子范数分别记为$\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$, 并分别称为列和范数、行和范数和谱范数.

定理4.2.3 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$, $\sigma_{\max}(A)$是矩阵A的最大奇异值, 则从属于向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{x}\|_2$的算子范数分别为

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|,(\text{列和范数})$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,(\text{行和范数})$$

定理4.2.3

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^HA)}=\sigma_{\max}(A),\text{(谱范数)}$$

注2: 由定理4.2.3知, $\|A\|_F$与$\|\boldsymbol{x}\|_2$是相容的, 而$\|A\|_2$作为从属于$\|\boldsymbol{x}\|_2$的算子范数, 自然也是相容的, 所以相容于同一向量范数的矩阵范数有多个. 事实上, 我们总有$\|A\|_2\le\|A\|_F$.

注3: 若存在常数M使得对任一向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有$\|A\boldsymbol{x}\|_v \le M\|\boldsymbol{x}\|_v$, 则$\|A\|_v \le M$, 即从属于范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$的算子范数$\|A\|_v$是使不等式$\|A\boldsymbol{x}\|_v \le M\|\boldsymbol{x}\|_v$成立的最小常数.

例4.3.2 设$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, 分别计算$\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$和$\|A\|_F$.

例4.3.2 设$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 2 & 3\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, 分别计算$\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$和$\|A\|_F$.

解: $\|A\|_1=5,\quad \|A\|_\infty=5,$

$\|A\|_F=\sqrt{23}, \|A\|_2=\sqrt{15}.$

注: $\|A\|_1, \|A\|_\infty$容易计算; $\|A\|_2$计算复杂, 对矩阵元素变化比较敏感.

注4: 设$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$是Hermite矩阵$A$的$n$个特征值, 则由谱范数证明过程知

$$\lambda_n \leq R(\boldsymbol{x}) \leq \lambda_1$$

其中$R(\boldsymbol{x})$的定义为

$$R(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x}}, \forall \boldsymbol{x} \neq 0$$

称$R(\boldsymbol{x})$为Hermite矩阵A的Rayleigh商.

推论4.3.1 设$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$是Hermite矩阵$A$的$n$个特征值, 则

$$\lambda_1 = \max_{\forall \boldsymbol{x} \neq 0} R(\boldsymbol{x}), \lambda_n = \min_{\forall \boldsymbol{x} \neq 0} R(\boldsymbol{x})$$

基于Rayleigh商, 有如下著名的**极大极小定理**或**极小极大定理**.

定理4.3.4 设$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$是Hermite矩阵$A$的$n$个特征值, V_i是$\mathbb{C}^n$中i维子空间,则$\forall i = 1, \cdots, n$

$$\lambda_i = \max_{\forall V_i} \min_{\boldsymbol{x} \in V_i, \boldsymbol{x} \neq 0} R(\boldsymbol{x})$$

$$\lambda_i = \min_{\forall V_{n-i+1}} \max_{\substack{\boldsymbol{x} \in V_{n-i+1}, \\ \boldsymbol{x} \neq 0}} R(\boldsymbol{x})$$

【应用】: 利用极大极小定理可研究Hermite矩阵特征值的扰动问题（讨论Hermite矩阵元素发生变化时相应矩阵特征值的变化范围）.

定理4.3.5 设A和E均为n阶Hermite复方阵, 则对$i=1,\cdots,n$, 有

$$\lambda_i(A)+\lambda_n(E)\le\lambda_i(A+E)\le\lambda_i(A)+\lambda_1(E)$$

式中, $\lambda_i(A)$是矩阵A的第i大特征值.

定理4.3.6 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\|A\|$是某一矩阵范数. 若$\|A\| < 1$, 证明$I - A$非奇异, 且

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{1 - \|A\|}$$