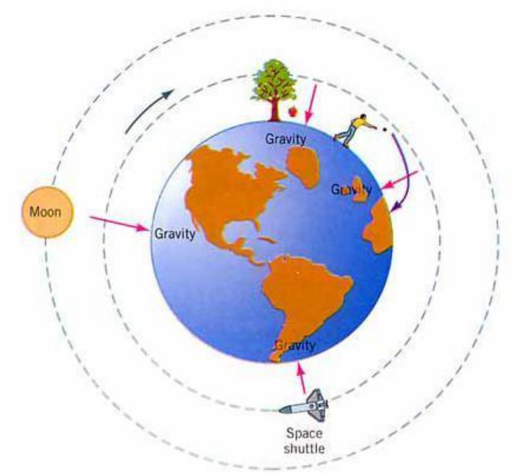
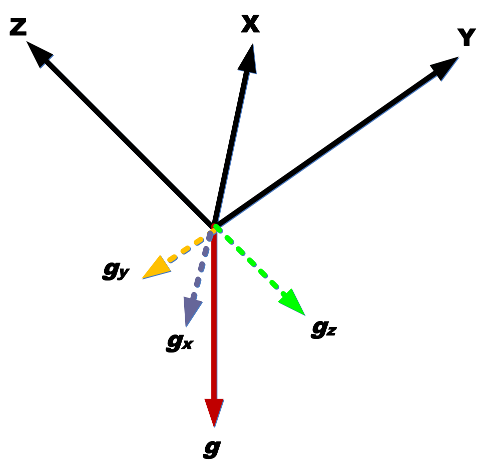
例3：加速度计无依托标定





$$\begin{cases} A_x = K_x a_x + b_x \\ A_y = K_y a_y + b_y \\ A_z = K_z a_z + b_z \end{cases}$$

(A_x, A_y, A_z) X、Y、Z轴向加速度真值

(a_x, a_y, a_z) X、Y、Z轴向测量值

(k_x, k_y, k_z) X、Y、Z轴向标度因数

(b_x, b_y, b_z) X、Y、Z轴向零位偏差

需求：对加速度计各轴向零位偏差进行标定。

难点：能否实现标度因数、零偏的同时标定

约束：$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = g$

例3：加速度计无依托标定

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = g$$

$$k_x^2 a_x^2 + 2k_x a_x b_x + k_y^2 a_y^2 + 2k_y a_y b_y + k_z^2 a_z^2 + 2k_z a_z b_z + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2 = 0$$

无法利用线性最小二乘求解

$$\frac{k_x^2 a_x^2 + 2k_x a_x b_x + k_y^2 a_y^2 + 2k_y a_y b_y + k_z^2 a_z^2 + 2k_z a_z b_z}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2} + \frac{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2} = 0$$

$$p_1 a_x^2 + p_2 a_x + p_3 a_y^2 + p_4 a_y + p_5 a_z^2 + p_6 a_z + 1 = 0$$

$$p_1 = \frac{k_x^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_2 = \frac{2k_x b_x}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_3 = \frac{k_y^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}$$

$$p_4 = \frac{2k_y b_y}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_5 = \frac{k_z^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_6 = \frac{2k_z b_z}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}$$

例3：加速度计无依托标定

$$p_1 a_x^2 + p_2 a_x + p_3 a_y^2 + p_4 a_y + p_5 a_z^2 + p_6 a_z + 1 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_x^2(0) & a_x(0) & a_y^2(0) & a_y(0) & a_z^2(0) & a_z(0) \\ a_x^2(1) & a_x(1) & a_y^2(1) & a_y(1) & a_z^2(1) & a_z(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_x^2(n) & a_x(n) & a_y^2(n) & a_y(n) & a_z^2(n) & a_z(n) \end{bmatrix}$$

$$p = \left(A^T A\right)^{-1} A^T Z \quad = -\left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

$$\begin{bmatrix} b_x^2 \\ b_y^2 \\ b_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4p_1/p_2^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1-4p_3/p_4^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1-4p_5/p_6^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g^2 \\ g^2 \\ g^2 \end{bmatrix}$$

例3：加速度计无依托标定

$$p_1 a_x^2 + p_2 a_x + p_3 a_y^2 + p_4 a_y + p_5 a_z^2 + p_6 a_z + 1 = 0$$

$$p_1 = \frac{k_x^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_2 = \frac{2k_x b_x}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_3 = \frac{k_y^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}$$

$$p_4 = \frac{2k_y b_y}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_5 = \frac{k_z^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_6 = \frac{2k_z b_z}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 4p_1 / p_2^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - 4p_3 / p_4^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 - 4p_5 / p_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x^2 \\ b_y^2 \\ b_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^2 \\ g^2 \\ g^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_x^2 \\ b_y^2 \\ b_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 4p_1 / p_2^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - 4p_3 / p_4^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 - 4p_5 / p_6^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g^2 \\ g^2 \\ g^2 \end{bmatrix}$$

例3：加速度计无依托标定

$$p_1 a_x^2 + p_2 a_x + p_3 a_y^2 + p_4 a_y + p_5 a_z^2 + p_6 a_z + 1 = 0$$

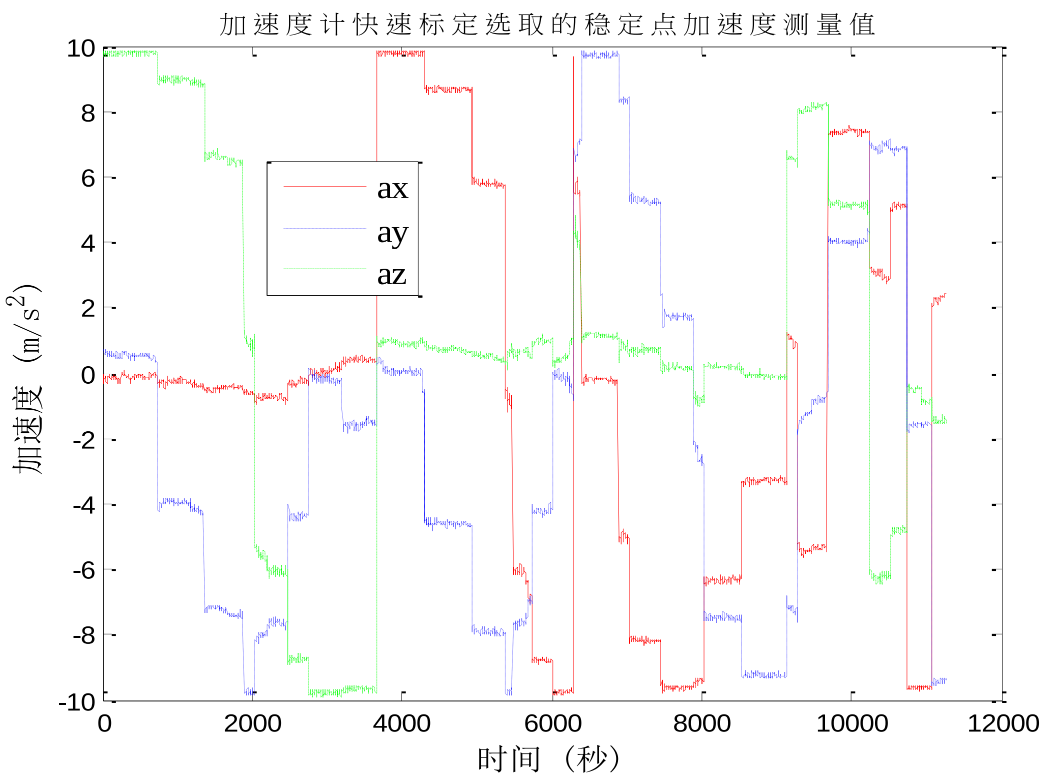
$$p_1 = \frac{k_x^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_2 = \frac{2k_x b_x}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_3 = \frac{k_y^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}$$

$$p_4 = \frac{2k_y b_y}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_5 = \frac{k_z^2}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}, p_6 = \frac{2k_z b_z}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2}$$

$$\begin{cases} k_x = \sqrt{p_1 \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2\right)} \\ k_y = \sqrt{p_3 \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2\right)} \\ k_y = \sqrt{p_5 \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_x = p_2 \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2\right) / 2k_x \\ b_y = p_4 \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2\right) / 2k_y \\ b_z = p_6 \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - g^2\right) / 2k_z \end{cases}$$

例3：加速度计无依托标定

加速度计标定结果



① 在空间旋转多个位置选取静止时刻点

② 根据上述简化模型，采用最小二乘方法进行求解，标定结果如下

陀螺仪标定时忽略地球自转误差，采集一段时间静止数据求取均值作为零偏值。

表 1 某次ADIS16365加速计标定结果

系数	kx	ky	kz	bx	by	bz
标定值	1.0002	0.9997	1.0003	-0.0310	0.0083	-0.0178

7.5 非线性最小二乘法

1）解的迭代计算分析

拟合残差 $r_i = z_i - f\left(t_i, x_1, x_2, \cdots x_n\right) = z_i - f\left(X, t_i\right)$

参数维数

$j = 1, 2, \cdots n$

$s = 1, 2, \cdots n$

第i次拟合围绕第k次迭代展开

$$f\left(X, t_i\right) \approx f\left(X^k, t_i\right) + \sum_j \frac{\partial f\left(X^k, t_i\right)}{\partial x_j}\left(x_j - x_j^k\right)$$

$$= f\left(X^k, t_i\right) + \sum_{j=1}^{n} J_{ij} \Delta x_j$$

观测次数

$i = 1, 2, \cdots m$

拟合残差表达变换

$$r_i = z_i - f\left(X, t_i\right)$$

$$= z_i - f\left(X^k, t_i\right) + f\left(X^k, t_i\right) - f\left(X, t_i\right)$$

$$\Delta z_i = z_i - f\left(X^k, t_i\right)$$

$$= \Delta z_i - \sum_{s=1}^{n} J_{is} \Delta x_s$$

注意此处Δz的定义
会影响最后解的形式

7.5 非线性最小二乘法

1）解的迭代计算分析

$$S=\sum_{i=1}^{m} r_i^2$$

$$r_i = z_i - f\left(X, t_i\right)$$

$$r_i = \Delta z_i - \sum_{s=1}^{n} J_{is}\Delta x_s$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_j} = 2\sum_{i=1}^{m} r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = -2\sum_{i=1}^{m} J_{ij}\left(\Delta z_i - \sum_{s=1}^{n} J_{is}\Delta x_s\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} J_{ij} J_{is}\Delta x_s = \sum_{i=1}^{m} J_{ij}\Delta z_i$$

$$\left(J^{\mathrm{T}} J\right)\Delta\mathbf{X} = J^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{Z}$$

$$S=\sum_{i=1}^{m} w_{ii} r_i^2$$

shift vector

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\mathbf{X} &= \left(J^{\mathrm{T}}\mathbf{W}J\right)^{-1} J^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\Delta\mathbf{Z}\\ \mathbf{X}^{k+1} &= \mathbf{X}^{k} + \Delta\mathbf{X}\end{aligned}}$$

2）解的迭代计算实现

收敛条件

$$\left|\frac{S^k - S^{k+1}}{S^k}\right| < 0.0001 \qquad 或 \qquad \left|\frac{x_j^k - x_j^{k+1}}{x_j^k}\right| < 0.0001$$

偏导的数值近似

$$\frac{\partial f\left(t_i, X^k\right)}{\partial x_j} \approx \frac{\delta f\left(t_i, X^k\right)}{\delta x_j}$$

Gauss–Newton algorithm 改进

$$\Delta\mathbf{X} = \left(J^{\mathrm{T}}\mathbf{W}J\right)^{-1} J^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\Delta\mathbf{Z}$$

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \alpha\Delta\mathbf{X}$$ 每步搜索α使得S^{k+1}最小,然后继续迭代

3）Levenberg-Marquardt

$$\Delta \mathbf{X} = \left(J^{\mathrm{T}} \mathbf{W} J \right)^{-1} J^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \Delta \mathbf{Z}$$

$J^{\mathrm{T}} J$ 接近奇异时，无法有效求解

$$\Delta \mathbf{X} = \left(J^{\mathrm{T}} \mathbf{W} J + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1} J^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \Delta \mathbf{Z}$$

λ的引入改变了原**ΔX**（**shift vector**）的长度与方向

非线性最小二乘内容可参见：

Optimal Estimation of Dynamic Systems 1.4~1.6

https://en.wikipedia.org/wiki/Non-linear_least_squares

机器视觉，张广军，科学出版社， p69~76

第一章设计作业

针对三轴加速度计标度因数、零偏的静态标定问题，请完成以下算法及Matlab程序设计：

1. 设计理想测量值及含噪声的观测量生成算法及程序；
2. 使用例3中给出方法，采用线性最小二乘法完成参数估计；
3. 使用非线性最小二乘法实现参数估计；
4. 比较分析不同测量值生成方案对估计参数精度的影响；
5. 分析初值不同取值对估计结果的影响；
6. 计算中对比递推最小二乘效果。

注：请不要使用Matlab中的现有非线性最小二乘函数。