2021秋季　最优化方法第 1 次作业

提交日期：2021 年9月30 日周四课前

2021 年 9 月 13 日

1.2 (该练习的目的是提高你的建模技巧，同时熟悉利用计算机求解线性优化问题) 一个原油精练场有 8 百万桶原油 A 和 5 百万桶原油 B 用以安排下个月的生产. 可用这些资源来生产售价为 38 元/桶的汽油，或者生产售价为 33 元/桶的民用燃料油. 有三种生产过程可供选择，各自的生产参数如下：

	过程1	过程2	过程3
输入原油A	3	1	5
输入原油B	5	1	3
输出汽油	4	1	3
输出燃料油	3	1	4
成本(单位：元)	51	11	40

除成本外，所有的量均以桶为单位. 例如，对于第一个过程而言，利用 3 桶原油 A 和 5 桶原油 B 可以生产 4 桶汽油和 3 桶民用燃料油，成本为 51 元. 表格中的成本指总的成本(即原油成本和生产过程的成本). 将此问题建模成线性规划，其能使管理者极大化下个月的净利润. 请利用Lingo,Cplex或Matlab在计算机上求解此问题.

1.3 (熟悉二维优化问题的图解法，并安装和熟悉优化软件) 利用图解法和优化软件两种方法求解下列问题

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & (x_1-2)^2+(x_2-1)^2\\ \text{subject to} & x_1^2-x_2\le 0,\\ & x_1+x_2\le 2.\end{array}$$

2.1 (熟悉软件求解线性规划，理解标准形、图解法和最优值的顶点可达性质) 将下面的线性规划问题化成标准形，并分别用软件求解原始问题和标准形问题：

(c)

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & x_1+4x_2+x_3\\ \text{subject to}\quad & x_1-2x_2+x_3=4\\ & x_1-x_3=1\\ & x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{aligned}$$

2.2 (掌握将特殊问题等价表述成线性规划问题的技巧) 将下面的问题化成线性规划

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & |x|+|y|+|z|\\ \text{subject to}\quad & x+y\le 1\\ & 2x+z=3.\end{aligned}$$

2.3 (掌握将特殊问题等价表述成线性规划问题的技巧) 一类逐段线性函数$f(\boldsymbol{x})=\max\{\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}+d_1,\boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x}+d_2,\cdots,\boldsymbol{c}_p^T\boldsymbol{x}+d_p\}$，其中$\boldsymbol{c}_i\in\mathbb{R}^n, d_i\in\mathbb{R}, i=1,\cdots,p$. 针对这样的函数，考虑问题

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}}\quad & f(\boldsymbol{x})\\ \text{subject to}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

将此问题化成线性规划.

2.5 (理解退化基本可行解的判别、几何直观和与基的对应关系) 考虑问题

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3\\ \text{subject to}\quad & x_1+x_2+x_3\le 4\\ & x_1\le 2\\ & x_3\le 3\\ & 3x_2+x_3\le 6\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{aligned}$$

注意系数 c_1,c_2,c_3 尚未确定. 表示成标准形 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0}$ 后, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\0&3&1&0&0&0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\\6\end{pmatrix};$$

记 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列为 $\boldsymbol{a}_i$.

(a) 画出所给问题的可行域(三维空间中).

(b) 点 $(0,1,3,0,2,0,0)^T$ 是基本可行解吗？

(c) 点 $(0,1,3,0,2,0,0)^T$ 是退化基本可行解吗？如果是的话，找出可能的与其对应的基.

2.8 (深刻理解线性规划标准形问题与既约线性规划的关系及最优解唯一的充分条件) 已知有线性规划标准形问题的既约线性规划表述，不妨设满足条件的基本可行解 $\boldsymbol{x}^*$ 对应的基 $\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列，与其对应的既约线性规划如下

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{j=1}^{m} c_j y_{j0} + r_{m+1}x_{m+1} + \cdots + r_n x_n \\ \text{subject to} & (x_1 =) y_{10} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{1j}x_j \geq 0 \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & (x_m =) y_{m0} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{mj}x_j \geq 0 \\ & x_{m+1} \geq 0, \cdots, x_n \geq 0. \end{array} \tag{1}$$

如果与每个非基变量 x_j 对应的既约费用系数 $r_j > 0$，证明与其对应的基本可行解是问题(1)唯一的最优解.

2.9 (理解最优解判别条件对于非退化基本可行解不是必要的和退化基本可行解的特殊性) 举例说明退化基本可行解不用满足所有 $r_j \geq 0$ 也可以是最优的.

2.10 (熟悉单纯形法的计算并理解单纯形法的几何直观) 将下面的问题转化成标准形，用单纯形法求解，然后画出问题在 x_1, x_2 空间的可行域，并标明单纯形法的迭代路径.

(a)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

2.20 (直观理解单纯形法的最坏时间计算复杂度是指数的) 利用单纯形法求解问题(2.2.14)，其中初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$，要求每次迭代选既约费用系数最负的变量进基.

2.21 (理解单纯形法可能出现循环和防止其循环的Bland法则) 考虑Beale问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -\tfrac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \tfrac{1}{2}x_6 + 6x_7 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + \tfrac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
& x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \tfrac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\
& x_3 + x_6 = 1 \\
& x_1 \geq 0, \cdots, x_7 \geq 0.
\end{aligned}
$$

请以 x_1, x_2 和 x_3 为基变量的初始基本可行解为初始点，利用单纯形法求解该问题. 要求选取既约费用系数最小的变量进基；当有多个变量可以出基时，选择指标最小的变量出基. 请问您观察到了什么样的现象. 可以通过那些措施来解决该问题.