P72，9，11，12，13，14，16，18
补充 1：对于任意的 $w\in C^n$，证明：ww^T 的特征根为 0（n-1 重）和 w^Tw（单重）
补充 2：对于任意的矩阵 $A\in C^{m\times n}$，$B\in C^{n\times m}$，证明 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.提示：两种思路，基于矩阵迹定义或者 72 页课后习题 14

9. 解：由已知 V是n维欧氏空间 $T\in\mathcal{L}(V)$

$\forall x,y\in V$ $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]$ 是V的一组标准正交基.

∴ $x=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]\cdot\alpha$ $y=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]\cdot\beta$.

∵ $(T(x),y)=(x,T(y))$ ∴ $(T([\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]\cdot\alpha),[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]\cdot\beta)=([\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n]\cdot\alpha,T([\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n]\beta))$ ①

设T在 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]$ 下的矩阵为A

即 $T([\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n])=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]A$

代入①式：$\beta^T[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]^T[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]A\alpha=\beta^TA^T[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]^T[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]\cdot\alpha$

∵ $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]^T=[\varepsilon_1^T,\varepsilon_2^T,\varepsilon_3^T\cdots\varepsilon_n^T]^T$

且 $\varepsilon_i^T\cdot\varepsilon_i=1.\ (i=1,2,\cdots n)$ $\varepsilon_i^T\cdot\varepsilon_j=0$ $(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots n)$

∴ $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]^T\cdot[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]=I$

∴ $\beta^T A\alpha=\beta^TA^T\alpha$ $(\forall\alpha,\beta)$ $\Rightarrow$ $A=A^T$

即证得T在V的一组标准正交基下的矩阵为对称矩阵.

11. 证明：$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$T_1(x)=\begin{bmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1x_1+b_1x_2\\a_2x_1+b_2x_2\end{bmatrix}$$

$$(T_1(x),y)=y^H\begin{bmatrix}a_1x_1+b_1x_2\\a_2x_1+b_2x_2\end{bmatrix}=a_1x_1y_1+b_1x_2y_1+a_2x_1y_2+b_2x_2y_2$$

$$(x,T_2(y))=T_2^H(y)\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=a_1x_1y_1+b_1x_2y_1+a_2x_1y_2+b_2x_2y_2$$

∴ $T_2^T(y)=[a_1y_1+a_2y_2\quad b_1y_1+b_2y_2]$

∴ $T_2(y)=\begin{bmatrix}a_1y_1+a_2y_2\\b_1y_1+b_2y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$

12. 解：已知该空间由n阶方阵属于特征值λ的全部特征向量和零向量构成 记为E(λ)

∴ 记 $E(\lambda)=\{x\in F^n|Ax=\lambda x\}$. 显然 $E(\lambda)\subset F^n$ 且 $E(\lambda)\neq\phi$.

① $\forall x,y\in E(\lambda)$ $Ax=\lambda x,\ Ay=\lambda y$ $\Rightarrow$ $A(x+y)=\lambda(x+y)$ $\Rightarrow$ $x+y\in E(\lambda)$

② $\forall k\in F,\ \forall x\in E(\lambda)$ $Ax=\lambda x$ $\Rightarrow$ $A(kx)=\lambda\cdot(kx)=\lambda\cdot kx$ $\Rightarrow$ $kx\in E(\lambda)$

~~③交换律~~ E(λ)空间满足线性性(可加性,齐次性).

∴ E(λ)空间是线性子空间

13. 设 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 是 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的特征值，则
$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$.

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$

可得 $\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\dots+(-1)^n|A|=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\dots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

同次幂的系数相同即 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$.

14. 设 $A\in C^{m\times n}$，$B\in C^{n\times m}$，对任意 $\lambda\in C$，试证：$\lambda^n|\lambda I_m-AB|=\lambda^m|\lambda I_n-BA|$

解：构造矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & BA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{bmatrix}$

$$\left|\lambda I-\begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & BA \end{bmatrix}\right|=\left|\lambda I-\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}\left(\lambda I-\begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}\right|\left|\left(\lambda I-\begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right|\left|\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\lambda I-\begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right|$$

$$\lambda^n\begin{vmatrix} I & -A \\ 0 & \lambda I-BA \end{vmatrix}=\lambda^n\begin{vmatrix} \lambda I-AB & -A \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$\lambda^m|(\lambda I-BA)|=\lambda^n|(\lambda I-AB)|$$

即 $\lambda^m|\lambda I_n-BA|=\lambda^n|\lambda I_m-AB|$.

P_{72} 16. 证明：必要性.

T可对角化 $\Rightarrow$ V可分解为T的一组不变子空间的直和.

设 $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 为V中的一组基 $V \in R^n$

A为T在V中的变换矩阵，因为T可对角化.

则 $T(\alpha) = \alpha A$ 其中 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ ~~λ为和 $\lambda_i \in R$.~~

$T(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i \quad (i = 1 \cdots n)$

$\alpha_i \in V$，且 $T(\alpha_i) = \lambda \alpha_i \in V$，T为一组不变子空间.

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关.

所以 $\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \cdots \lambda_n \alpha_n$ 也线性无关.

$\dim(T(\alpha_1) + \cdots T(\alpha_n)) = n = \dim(T)$

所以V可分解为T的一组不变子空间的直和.

充分性：

V可分解为T的一组不变子空间的直和 $\Rightarrow$ T可对角化.

设 $T(\alpha_i) = k_i \alpha_i \ (k_i \in R)$

且 $T(\alpha_1) + T(\alpha_2) + \cdots T(\alpha_n) = T$. 则 $T(\alpha_1) \cdots T(\alpha_n)$ 线性无关.

$k_1 \alpha_1 \cdots k_n \alpha_n$ 也线性无关. $k_i \in R$.

$\Rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关。$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为V中的一组基

$T(\alpha) = [T(\alpha_1) \cdots T(\alpha_n)] = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{bmatrix}$

令 $A = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{bmatrix}$ 因为T与A一一对应，所以T可对角化.

18. 解：因已知 $H(w) = I - 2ww^H$．（$w\in C^n$ 是单位向量）

(1) $H(w)\cdot H^H(w) = (I-2ww^H)\cdot(I^H - 2w\cdot w^H)$

$= I - 2ww^H - 2ww^H + 4ww^Hww^H = I$

设 $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ $\quad w^H = (\bar{w}_1\ \bar{w}_2 \cdots \bar{w}_n)$

∴ $ww^H = \begin{pmatrix} w_1\bar{w}_1 & w_1\bar{w}_2 & \cdots & w_1\bar{w}_n \\ w_2\bar{w}_1 & w_2\bar{w}_2 & \cdots & w_2\bar{w}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n\bar{w}_1 & w_n\bar{w}_2 & \cdots & w_n\bar{w}_n \end{pmatrix}$ ∴ ww^H 每两个行向量都线性相关

∴ $r(ww^H) = 1$．

∴ $(I - H(w))\cdot x = (I-(I-2ww^H))x = 2ww^Hx = 0$

该方程有解空间中有 $n-1$ 个线性无关的解向量

即 $N(ww^H) = n - \mathrm{rank}(ww^H) = n-1$

也即 $H(w)x = 1\cdot x$ 构成的特征子空间 $E(1) = \{x\in C^n \mid H(w)\cdot x = 1\cdot x\}$

$\dim(E(1)) = n-1$ ∴ $H(w)$ 特征值 1 对应的特征向量有 $n-1$ 个

又 $H(w)\cdot w = (I-2ww^H)w = w - 2w = -w$

∴ -1 也是 $H(w)$ 特征值 且为 1 重根

∴ $|H(w)| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1^{n-1}\cdot(-1) = -1$.

(2) $(H(w))^H = (I-2ww^H)^H = I^H - 2\cdot(w^H)^Hw^H = I - 2ww^H = H(w)$.

$H(w)^H\cdot H(w) = (I-2ww^H)(I-2ww^H) = I - 2ww^H - 2ww^H + 4ww^H = I$

又 $|H(w)| = -1$ ∴ $H(w)$ 可逆 ∴ $H(w)^H = (H(w))^{-1} = H(w)$.

(3). 充分性：

已知 $x^Hx = y^H\cdot y$，$x^H\cdot y = y^H\cdot x$.

w 取为 $\dfrac{e^{i\theta}}{\|x-y\|}\cdot(x-y)$ $\qquad w^H = \dfrac{e^{-i\theta}}{\|x-y\|}\cdot(x-y)^H$.

$H(w)\cdot x = (I-2ww^H)\cdot x = x - 2\cdot\dfrac{(x-y)(x^H-y^H)}{\|x-y\|^2}x = x - 2\dfrac{xx^H+yy^H-yx^H-xy^H}{(x-y)^H\cdot(x-y)}x$

$= x - 2\dfrac{xx^Hx+yy^Hx-yx^Hx-xy^Hx}{x^Hx+y^Hy-y^Hx-x^Hy} = x - \dfrac{(x-y)(x^Hx-y^Hx)}{2\cdot(x^Hx-y^Hx)}2$

$= x-(x-y) = y \Rightarrow \exists w$ 满足 $H(w)\cdot x = y$.

（w 是单位向量）

必要性：已知 $\exists$ 单位向量 w 使得 $H(w)\cdot x = y$

$$\therefore \quad y^H\cdot y = (H(w)\cdot x)^H\cdot(H(w)\cdot x) = x^H\cdot H(w)^H H(w)\cdot x = x^H\cdot x$$

$$\therefore \quad y^H\cdot x = (H(w)\cdot x)^H x = x^H\cdot H(w)^H\cdot x = x^H\cdot(H(w)\cdot x) = x^H\cdot y$$

补充1：$\forall w\in C^n \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$$w\cdot w^T = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\cdot(w_1^* \; w_2^* \cdots w_n^*) = \begin{pmatrix} w_1^2 & w_1w_2 & \cdots & w_1w_n \\ w_2w_1 & w_2^2 & \cdots & w_2w_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_nw_1 & w_nw_2 & \cdots & w_nw_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $w_2h_1 = w_1h_2 \;\cdots\; w_ih_j = w_jh_i \quad (i,j = 1,2,\cdots n.\; i\neq j)$

$\therefore$ 不存在 $k_1,k_2\neq 0$ $\quad k_1h_i+k_2h_j=0$ $\quad\therefore$ h_i,h_j 线性相关 $(i,j=1,2,\cdots n)$

$\therefore$ $rank(ww^T)=1.$

$\therefore$ $N(ww^T) = dim\{x\in C^n \mid ww^Tx=0\} = n-rank(ww^T) = n-1.$

即 $(0\cdot I-ww^T)x=0$ 解空间是 $n-1$ 维的

$\therefore$ ww^T 的特征根为 0，且为 $n-1$ 重根.

又 $ww^T\cdot w = (w^T\cdot w)\cdot w$ $\quad\therefore$ w^Tw 也是 ww^T 的特征根

$\therefore$ ww^T 特征根为 n 个 $\quad\therefore$ w^Tw 是单根.

补充2：$\forall A\in C^{m\times n}.\; B\in C^{n\times m}$

~~tr(AB)~~ AB 的主对角元素 $ab_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$

BA 的主对角元素 $ba_{ii} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_{ji}.$