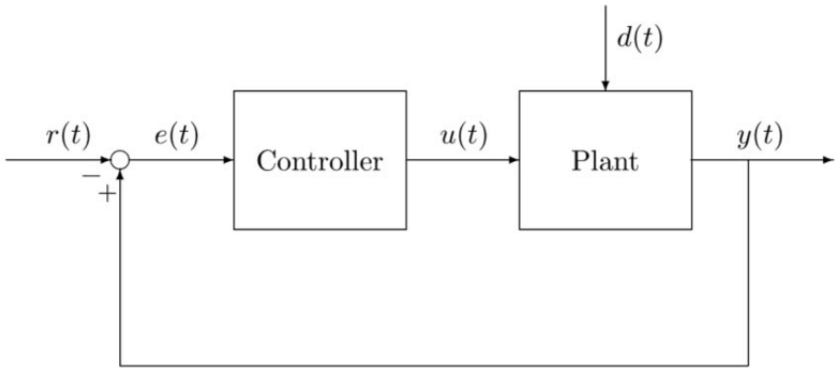
现代控制理论

——输出调节理论

郑建英

北京航空航天大学　自动化科学与电气工程学院

输出调节问题



输出调节问题（也称作伺服控制问题)

- 当扰动信号和参考输入信号由一个**自治微分方程**产生

$$\dot{r}(t) = A_{1r}r(t), r(0) = r_0, \dot{d}(t) = A_{1d}d(t), d(0) = d_0,$$

  其中，r_0, d_0 是任意初始状态 — **外系统和外信号**

- 设计**一种**反馈控制律确保闭环系统渐进稳定且被控系统的输出渐近跟踪**一类**参考信号以及渐近抑制**一类**干扰信号

☞**参考教材**

“Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications” Jie Huang

本节基本内容

1. 线性系统输出调节问题描述
2. 状态反馈线性输出调节
3. 输出反馈线性输出调节
4. 线性鲁棒输出调节

Outline

1. 线性系统输出调节问题描述
2. 状态反馈线性输出调节
3. 输出反馈线性输出调节
4. 线性鲁棒输出调节

线性系统输出调节问题描述

- 考虑一个**线性时不变系统**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ev(t), x(0) = x_0, t \geq 0 \\ e(t) &= Cx(t) + Du(t) + Fv(t) \end{aligned} \tag{1}$$

  - 状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$，控制 $u(t) \in \mathbb{R}^m$，调节输出 $e(t) \in \mathbb{R}^p$
  - 外部输入 $v(t) \in \mathbb{R}^q$，可以描述**参考信号和干扰信号**，且满足

$$\dot{v}(t) = A_1 v(t), v(0) = v_0, t \geq 0 \tag{2}$$

  - 复合系统：以 $\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$ 为复合状态

- **输出调节问题**：寻找控制器 $u(t)$ 使得
  1) 当 $v(t) \equiv 0$ 时，闭环系统是渐近稳定
  2) 对任意初始条件 x_0, v_0，闭环系统满足 $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$

线性系统输出调节问题描述

- 考虑一个**线性时不变系统**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ev(t), x(0) = x_0, t \geq 0 \\ e(t) &= Cx(t) + Du(t) + Fv(t) \end{aligned} \quad (1)$$

■ 状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$，控制 $u(t) \in \mathbb{R}^m$，调节输出 $e(t) \in \mathbb{R}^p$

■ 外部输入 $v(t) \in \mathbb{R}^q$，可以描述**参考信号和干扰信号**，且满足

$$\dot{v}(t) = A_1 v(t), v(0) = v_0, t \geq 0 \quad (2)$$

■ 复合系统：以 $\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$ 为复合状态

- **输出调节问题**：寻找控制器 $u(t)$ 使得
  1) 当 $v(t) \equiv 0$ 时，闭环系统是渐近稳定
  2) 对任意初始条件 x_0, v_0，闭环系统满足 $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

线性系统输出调节问题描述

1. **状态反馈** $u = K_x x + K_v v$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK_x)x(t) + (E + BK_v)v(t) \\ e(t) &= (C + DK_x)x(t) + (F + DK_v)v(t) \end{aligned} \tag{3}$$

2. **动态测量输出反馈**

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= G_1 z(t) + G_2 y_m(t) \\ u &= Kz \end{aligned}$$

其中，测量输出 $y_m(t) = C_m x(t) + D_m u(t) + F_m v(t)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ G_2 F_m \end{bmatrix} v(t) \\ e(t) &= \begin{bmatrix} C & DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + Fv(t) \end{aligned} \tag{4}$$

- 动态调节输出反馈：$y_m(t) = e(t)$

线性系统输出调节问题描述

1. **状态反馈** $u = K_x x + K_v v$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK_x)x(t) + (E + BK_v)v(t) \\ e(t) &= (C + DK_x)x(t) + (F + DK_v)v(t) \end{aligned} \tag{3}$$

2. **动态测量输出反馈**

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= G_1 z(t) + G_2 y_m(t) \\ u &= Kz \end{aligned}$$

其中，测量输出 $y_m(t) = C_m x(t) + D_m u(t) + F_m v(t)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ G_2 F_m \end{bmatrix} v(t) \\ e(t) &= \begin{bmatrix} C & DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + Fv(t) \end{aligned} \tag{4}$$

■ 动态调节输出反馈： $y_m(t) = e(t)$

线性系统输出调节问题描述

闭环系统（统一写法）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c v(t) \\
\dot{v}(t) &= A_1 v(t) \\
e(t) &= C_c x_c(t) + D_c v(t)
\end{aligned}
$$

线性系统输出调节问题

设计 K_x, K_v 或者 G_1, G_2, K 使得

1) A_c 是 Hurwitz 稳定
2) $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

- 状态反馈：$x_c = x$

$$A_c = A + BK_x, \quad B_c = E + BK_v, \quad C_c = C + DK_x, \quad D_c = F + DK_v$$

- 输出反馈：$x_c = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$

$$A_c = \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} E \\ G_2 F_m \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} C & DK \end{bmatrix}, \quad D_c = F$$

线性系统输出调节问题描述

闭环系统（统一写法）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c v(t) \\
\dot{v}(t) &= A_1 v(t) \\
e(t) &= C_c x_c(t) + D_c v(t)
\end{aligned}
$$

线性系统输出调节问题

设计 K_x, K_v 或者 G_1, G_2, K 使得

1) A_c 是 Hurwitz 稳定

2) $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$

- 状态反馈：$x_c = x$

$$
A_c = A + BK_x, \quad B_c = E + BK_v, \quad C_c = C + DK_x, \quad D_c = F + DK_v
$$

- 输出反馈：$x_c = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$

$$
A_c = \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} E \\ G_2 F_m \end{bmatrix}
$$

$$
C_c = \begin{bmatrix} C & DK \end{bmatrix}, \quad D_c = F
$$

线性系统输出调节问题描述

闭环系统（统一写法）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c v(t) \\
\dot{v}(t) &= A_1 v(t) \\
e(t) &= C_c x_c(t) + D_c v(t)
\end{aligned}
$$

线性系统输出调节问题

设计 K_x, K_v 或者 G_1, G_2, K 使得

1) A_c 是 Hurwitz 稳定
2) $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

- 状态反馈：$x_c = x$

$$A_c = A + BK_x, \quad B_c = E + BK_v, \quad C_c = C + DK_x, \quad D_c = F + DK_v$$

- 输出反馈：$x_c = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$

$$
A_c = \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} E \\ G_2 F_m \end{bmatrix}
$$

$$
C_c = \begin{bmatrix} C & DK \end{bmatrix}, \quad D_c = F
$$

线性系统输出调节问题描述

闭环系统（统一写法）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c v(t) \\
\dot{v}(t) &= A_1 v(t) \\
e(t) &= C_c x_c(t) + D_c v(t)
\end{aligned}
$$

线性系统输出调节问题

设计 K_x, K_v 或者 G_1, G_2, K 使得

1) A_c 是 Hurwitz 稳定
2) $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

假设条件

1. A_1 的特征根无负实部
2. $[A, B]$ 是可镇定
3. $\left(\begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \right)$ 是可检测

输出调节的等价条件

假设 A_c 稳定：

1. $X_cA_1 = A_cX_c + B_c$ 是一个 Syvester 方程式
   A_c 稳定, A_1 的特征根无负实部 (假设条件①)
   $\Longrightarrow$ 存在唯一解 X_c

Syvester 方程式 $AX + XB = C$ 存在唯一解 X 的充要条件是
A 和 $-B$ 无共同特征根

2. 定义新变量 $\bar{x} = x_c - X_cv$
   则
$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A_cx_c(t) + B_cv(t) - X_cA_1v(t)\\ &= A_cx_c(t) - A_cX_cv(t) = A_c\bar{x}(t)\end{aligned}$$
$$e(t) = C_c\bar{x}(t) + (C_cX_c + D_c)v(t)$$

3. A_c 稳定 $\Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 0$
$$\begin{aligned}\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) &= C_c \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) + (C_cX_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\\ &= (C_cX_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\end{aligned}$$
   $\Longrightarrow$ 对于任意 $v(0)$, $\lim e(t) = 0$ 当且仅当

输出调节的等价条件

假设 A_c 稳定:

1. $X_cA_1 = A_cX_c + B_c$ 是一个 Syvester 方程式
   A_c 稳定, A_1 的特征根无负实部 (假设条件①)
   $\Longrightarrow$ 存在唯一解 X_c

   > Syvester 方程式 $AX + XB = C$ 存在唯一解 X 的充要条件是
   > A **和** $-B$ **无共同特征根**

2. 定义新变量 $\bar{x} = x_c - X_cv$
   则
$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A_cx_c(t) + B_cv(t) - X_cA_1v(t)\\ &= A_cx_c(t) - A_cX_cv(t) = A_c\bar{x}(t)\\ e(t) &= C_c\bar{x}(t) + (C_cX_c + D_c)v(t)\end{aligned}$$

3. A_c 稳定 $\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 0$
$$\begin{aligned}\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) &= C_c \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) + (C_cX_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\\ &= (C_cX_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\end{aligned}$$
   $\Longrightarrow$ 对于任意 $v(0)$, $\lim e(t) = 0$ 当且仅当

输出调节的等价条件

假设 A_c 稳定:

1. $X_cA_1 = A_cX_c + B_c$ 是一个 Syvester 方程式
   A_c 稳定, A_1 的特征根无负实部 (假设条件①)
   $\Longrightarrow$ **存在唯一解** X_c

2. 定义新变量 $\bar{x} = x_c - X_cv$
   则
$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A_cx_c(t) + B_cv(t) - X_cA_1v(t)\\ &= A_cx_c(t) - A_cX_cv(t) = A_c\bar{x}(t)\\ e(t) &= C_c\bar{x}(t) + (C_cX_c + D_c)v(t)\end{aligned}$$

3. A_c 稳定 $\Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 0$
$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = C_c \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) + (C_cX_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\\ &\qquad = (C_cX_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\end{aligned}$$
$\Longrightarrow$ 对于任意 $v(0)$, $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$ 当且仅当
$$C_cX_c + D_c = 0$$

输出调节的等价条件

假设 A_c 稳定:

1. $X_c A_1 = A_c X_c + B_c$ 是一个 Syvester 方程式
   A_c 稳定, A_1 的特征根无负实部 (假设条件①)
   $\Longrightarrow$ **存在唯一解** X_c

2. 定义新变量 $\bar{x} = x_c - X_c v$
   则
$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A_c x_c(t) + B_c v(t) - X_c A_1 v(t) \\ &= A_c x_c(t) - A_c X_c v(t) = A_c \bar{x}(t) \\ e(t) &= C_c \bar{x}(t) + (C_c X_c + D_c) v(t)\end{aligned}$$

3. A_c 稳定 $\Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 0$
$$\begin{aligned}\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) &= C_c \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) + (C_c X_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t) \\ &= (C_c X_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\end{aligned}$$
$\Longrightarrow$ 对于任意 $v(0)$, $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$ 当且仅当
$$C_c X_c + D_c = 0$$

输出调节的等价条件

假设 A_c 稳定:

1. $X_c A_1 = A_c X_c + B_c$ 是一个 Syvester 方程式
   A_c 稳定, A_1 的特征根无负实部 (假设条件①)
   $\Longrightarrow$ **存在唯一解** X_c

2. 定义新变量 $\bar{x} = x_c - X_c v$
   则
$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A_c x_c(t) + B_c v(t) - X_c A_1 v(t) \\ &= A_c x_c(t) - A_c X_c v(t) = A_c \bar{x}(t) \\ e(t) &= C_c \bar{x}(t) + (C_c X_c + D_c) v(t) \end{aligned}$$

3. A_c 稳定 $\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 0$
$$\begin{aligned} \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) &= C_c \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) + (C_c X_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t) \\ &= (C_c X_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 对于任意 $v(0)$, $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ 当且仅当
$$C_c X_c + D_c = 0$$

输出调节的等价条件

假设 A_c 稳定:

1. $X_cA_1 = A_cX_c + B_c$ 是一个 Syvester 方程式
   A_c 稳定, A_1 的特征根无负实部 (假设条件①)
   $\Longrightarrow$ **存在唯一解** X_c

2. 定义新变量 $\bar{x} = x_c - X_cv$
   则
$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A_cx_c(t) + B_cv(t) - X_cA_1v(t)\\ &= A_cx_c(t) - A_cX_cv(t) = A_c\bar{x}(t)\\ e(t) &= C_c\bar{x}(t) + (C_cX_c + D_c)v(t)\end{aligned}$$

3. A_c 稳定 $\Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 0$
$$\begin{aligned}\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) &= C_c \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) + (C_cX_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\\ &= (C_cX_c + D_c) \lim_{t\to\infty} v(t)\end{aligned}$$
   $\Longrightarrow$ 对于任意 $v(0)$, $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$ 当且仅当
$$C_cX_c + D_c = 0$$

输出调节的等价条件

定理 1

假设存在 K_x, K_v 或者 G_1, G_2, K 使得 A_c 是稳定，则对应的控制器解决输出调节问题当且仅当方程式

$$
\begin{aligned}
X_c A_1 &= A_c X_c + B_c \\
0 &= C_c X_c + D_c
\end{aligned}
$$

有唯一解 X_c

Outline

状态反馈线性输出调节

控制器 $$u(t) = \underbrace{K_x x(t)}_{\text{反馈控制}} + \underbrace{K_v v(t)}_{\text{前馈控制}}$$

闭环系统
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK_x)x(t) + (E + BK_v)v(t) \\ \dot{v}(t) &= A_1 v(t) \\ e(t) &= (C + DK_x)x(t) + (F + DK_v)v(t) \end{aligned}}$$

- 假设条件② $\Longrightarrow$ 设计 K_x 使得 $A + BK_x$ 稳定
  则基于状态反馈的输出调节问题有解当且仅当存在 X_c, K_v 满足

$$\begin{aligned} X_c A_1 &= (A + BK_x)X_c + E + BK_v \\ 0 &= (C + DK_x)X_c + F + DK_v \end{aligned} \tag{5}$$

- 缺点：X_c 和 K_v 依赖 K_x

状态反馈线性输出调节

- 线性变换：

$$\begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_x & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ K_v \end{bmatrix}$$

定理 2

当假设条件①②成立时，选择 K_x 使得 $A + BK_x$ 稳定，则基于状态反馈的输出调节问题有解当且仅当存在 X, U 满足

$$\begin{aligned} XA_1 &= AX + BU + E, \quad \text{线性调节器方程} \\ 0 &= CX + DU + F, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $K_v = U - K_x X$

- 反馈控制用于镇定闭环系统，前馈控制用于抵消稳态误差

状态反馈线性输出调节

■ 线性变换:

$$\begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_x & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ K_v \end{bmatrix}$$

定理 2

当假设条件①②成立时，选择 K_x 使得 $A + BK_x$ 稳定，则基于状态反馈的输出调节问题有解当且仅当存在 X, U 满足

$$\begin{aligned} XA_1 &= AX + BU + E, \quad \textbf{线性调节器方程} \\ 0 &= CX + DU + F, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $K_v = U - K_x X$

■ 反馈控制用于镇定闭环系统，前馈控制用于抵消稳态误差

状态反馈线性输出调节

■ **当外部信号 v 是常值，即** $A_1 = 0$, 方程 (5) 和方程 (6) 分别简化为:

$$\begin{aligned} 0 &= (A + BK_x)X_c + E + BK_v \\ 0 &= (C + DK_x)X_c + F + DK_v \end{aligned} \tag{7}$$

和

$$\begin{aligned} 0 &= AX + BU + E, \\ 0 &= CX + DU + F, \end{aligned} \tag{8}$$

- 方程 (7) $\Longrightarrow$ 对任意常值 v, $X_c v$ 是闭环系统的一个平衡点且对应调节输出为 0，且 $\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} x_c(t) = X_c v}$ (稳态)
- 方程 (8) $\Longrightarrow$ 对任意常值 v, 在控制 Uv 下，Xv 是闭环系统的一个平衡点且对应调节输出为 0，且

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} x_c(t) = X_c v = Xv \\ &\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} (K_x x(t) + K_v v) = (K_x X + K_v)v = Uv \end{aligned}$$

■ **Q: 一般情况下, $x_c(t)$ 和 $u(t)$ 在 t 趋于无穷时什么表现?**

状态反馈线性输出调节

■ **当外部信号** v **是常值，即** $A_1 = 0$**,** 方程 (5) 和方程 (6) 分别简化为：

$$
\begin{aligned}
0 &= (A + BK_x)X_c + E + BK_v \\
0 &= (C + DK_x)X_c + F + DK_v
\end{aligned}
\tag{7}
$$

和

$$
\begin{aligned}
0 &= AX + BU + E, \\
0 &= CX + DU + F,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

- 方程 (7) $\Longrightarrow$ 对任意常值 v, $X_c v$ 是闭环系统的一个平衡点且对应调节输出为 0，且 $\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} x_c(t) = X_c v}$ (稳态)
- 方程 (8) $\Longrightarrow$ 对任意常值 v, 在控制 Uv 下，Xv 是闭环系统的一个平衡点且对应调节输出为 0，且

$$
\lim_{t\to\infty} x_c(t) = X_c v = Xv
$$

$$
\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} (K_x x(t) + K_v v) = (K_x X + K_v)v = Uv
$$

■ **Q: 一般情况下,** $x_c(t)$ **和** $u(t)$ **在** t **趋于无穷时什么表现?**

矩阵向量化

- 符号： $\mathrm{vec}(\cdot)$

$$\mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}'$$

- Kronecker 积: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$
-

$$\begin{aligned} AXB = C &\Longleftrightarrow \mathrm{vec}(AXB) = \mathrm{vec}(C) \\ &\Longleftrightarrow (B' \otimes A)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(C) \end{aligned}$$

☞ $AXB = C$ 存在唯一解 X 当且仅当 $B' \otimes A$ 是满秩

状态反馈线性输出调节

- 线性调节器方程 (6) 写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} A_1 - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$$

两边向量化

$$Qx = b$$

其中

$$Q = A_1' \otimes \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - I \otimes \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$x = \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix}\right), b = \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}\right)$$

- 假设 A_1 写成 Jordan 形式 ($\lambda_i, i = 1, \ldots, k$ 是 A_1 的特征根)

$$A_1 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

■ 线性调节器方程 (6) 写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} A_1 - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$$

两边向量化

$$Qx = b$$

其中

$$Q = A_1' \otimes \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - I \otimes \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$x = \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix}\right), b = \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}\right)$$

■ 假设 A_1 写成 Jordan 形式 ($\lambda_i, i = 1, \ldots, k$ 是 A_1 的特征根)

$$A_1 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

状态反馈线性输出调节

- 令 $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 则

$$Q = A_1' \otimes \mathcal{I} - I \otimes \mathcal{A}$$

为分块对角矩阵, 第 i 个对角块形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda_i \mathcal{I} - \mathcal{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathcal{I} & \lambda_i \mathcal{I} - \mathcal{A} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \mathcal{I} - \mathcal{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{I} & \lambda_i \mathcal{I} - \mathcal{A} \end{bmatrix}$$

- Q 满秩当且仅当其任意对角块满秩，即对任意 λ_i 有

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + p$$

状态反馈线性输出调节

- 令 $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 则

$$Q = A_1' \otimes \mathcal{I} - I \otimes \mathcal{A}$$

为分块对角矩阵, 第 i 个对角块形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda_i\mathcal{I} - \mathcal{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathcal{I} & \lambda_i\mathcal{I} - \mathcal{A} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\mathcal{I} - \mathcal{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{I} & \lambda_i\mathcal{I} - \mathcal{A} \end{bmatrix}$$

- Q 满秩当且仅当其任意对角块满秩，即对任意 λ_i 有

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + p$$

状态反馈线性输出调节

定理 3

对任意 E, F, 线性调节器方程有唯一解当且仅当下述假设成立:

假设条件④ 对 A_1 的任何一个特征根 λ, 满足

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} = n+p$$

传输零点条件

定理 4

当假设条件①②④成立, 则基于状态反馈的输出调节问题有解

状态反馈线性输出调节

定理 3

对任意 E, F, 线性调节器方程有唯一解当且仅当下述假设成立:

假设条件④ 对 A_1 的任何一个特征根 λ, 满足

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} = n+p$$

传输零点条件

定理 4

当假设条件①②④成立, 则基于状态反馈的输出调节问题有解

Outline

输出反馈线性输出调节

控制器

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= G_1 z(t) + G_2 y_m(t) \\
u &= Kz
\end{aligned}
$$

闭环系统

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ G_2 F_m \end{bmatrix} v(t) \\
\dot{v}(t) &= A_1 v(t) \\
e(t) &= \begin{bmatrix} C & DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + F v(t)
\end{aligned}
}
$$

- 在假设条件①下，假设存在 (G_1, G_2, K) 使得 A_c 稳定。则输出反馈输出调节问题有解当且仅当

$$
\begin{aligned}
X_c A_1 &= \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix} X_c + \begin{bmatrix} E \\ G_2 F_m \end{bmatrix} \\
0 &= \begin{bmatrix} C & DK \end{bmatrix} X_c + F
\end{aligned}
$$

存在唯一解 X_c

输出反馈线性输出调节

控制器
$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= G_1 z(t) + G_2 y_m(t)\\ u &= Kz\end{aligned}$$

闭环系统
$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{z}(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A & BK\\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}E\\ G_2 F_m\end{bmatrix} v(t)\\ \dot{v}(t) &= A_1 v(t)\\ e(t) &= \begin{bmatrix}C & DK\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix} + Fv(t)\end{aligned}}$$

■ 在假设条件①下，假设存在 (G_1, G_2, K) 使得 A_c 稳定。则输出反馈输出调节问题有解当且仅当

$$\begin{aligned}X_c A_1 &= \begin{bmatrix}A & BK\\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K\end{bmatrix} X_c + \begin{bmatrix}E\\ G_2 F_m\end{bmatrix}\\ 0 &= \begin{bmatrix}C & DK\end{bmatrix} X_c + F\end{aligned}$$

存在唯一解 X_c

输出反馈线性输出调节

- $$X_c = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \Longrightarrow XA_1 = AX + BKZ + E$$
$$\begin{aligned} ZA_1 &= G_2 C_m X + (G_1 + G_2 D_m K)Z + G_2 F_m \\ &= G_1 Z + G_2 (C_m X + D_m KZ + F_m) \\ 0 &= CX + DKZ + F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = KZ \Longrightarrow XA_1 &= AX + BU + E \\ 0 &= CX + DU + F \\ ZA_1 &= G_1 Z + G_2 (C_m X + D_m U + F_m) \end{aligned} \tag{9}$$

- 在假设条件①下，假设存在 (G_1, G_2, K) 使得 A_c 稳定。则输出反馈输出调节问题有解当且仅当方程式 (9) 存在唯一解 (X, U, Z)

输出反馈线性输出调节

- $$X_c = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} XA_1 &= AX + BKZ + E \\ ZA_1 &= G_2C_mX + (G_1 + G_2D_mK)Z + G_2F_m \\ &= G_1Z + G_2(C_mX + D_mKZ + F_m) \\ 0 &= CX + DKZ + F \end{aligned}$$

$$U = KZ \Longrightarrow \begin{aligned} XA_1 &= AX + BU + E \\ 0 &= CX + DU + F \\ ZA_1 &= G_1Z + G_2(C_mX + D_mU + F_m) \end{aligned} \tag{9}$$

- 在假设条件①下，假设存在 (G_1, G_2, K) 使得 A_c 稳定。则输出反馈输出调节问题有解当且仅当方程式 (9) 存在唯一解 (X, U, Z)

输出反馈线性输出调节

■ $$X_c = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \Longrightarrow XA_1 = AX + BKZ + E$$

$$\begin{aligned} ZA_1 &= G_2C_mX + (G_1 + G_2D_mK)Z + G_2F_m \\ &= G_1Z + G_2(C_mX + D_mKZ + F_m) \\ 0 &= CX + DKZ + F \end{aligned}$$

$$U = KZ \Longrightarrow \begin{aligned} XA_1 &= AX + BU + E \\ 0 &= CX + DU + F \\ ZA_1 &= G_1Z + G_2(C_mX + D_mU + F_m) \end{aligned} \tag{9}$$

■ 在假设条件①下，假设存在 (G_1, G_2, K) 使得 A_c 稳定。则输出反馈输出调节问题有解当且仅当方程式 (9) 存在唯一解 (X, U, Z)

输出反馈线性输出调节

- 如何构造 (G_1, G_2, K)

☞Luenburger 观测器

第一步 开环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_m = \begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + D_m u$$

第二步 假设条件③

$$\Longrightarrow u = \begin{bmatrix} K_x & K_v \end{bmatrix} z$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + L(y_m - \begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} z - D_m u)$$

第三步

$$K = \begin{bmatrix} K_x & K_v \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K - L(\begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} + D_m K) \qquad (10)$$

$$G_2 = L$$

- 如何构造 (G_1, G_2, K)

☞Luenburger 观测器

第一步 开环系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{v}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & E\\ 0 & A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ v(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y_m = \begin{bmatrix}C_m & F_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ v(t)\end{bmatrix} + D_m u$$

第二步 假设条件③

$$\Longrightarrow u = \begin{bmatrix}K_x & K_v\end{bmatrix} z$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix}A & E\\ 0 & A_1\end{bmatrix} z + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix} u + L(y_m - \begin{bmatrix}C_m & F_m\end{bmatrix} z - D_m u)$$

第三步

$$K = \begin{bmatrix}K_x & K_v\end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix}A & E\\ 0 & A_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix} K - L(\begin{bmatrix}C_m & F_m\end{bmatrix} + D_m K) \qquad (10)$$

$$G_2 = L$$

输出反馈线性输出调节

■ 如何构造 (G_1, G_2, K)

☞Luenburger 观测器

第一步 开环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_m = \begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + D_m u$$

第二步 假设条件③

$$\Longrightarrow u = \begin{bmatrix} K_x & K_v \end{bmatrix} z$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + L(y_m - \begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} z - D_m u)$$

第三步

$$K = \begin{bmatrix} K_x & K_v \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K - L(\begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} + D_m K) \tag{10}$$

$$G_2 = L$$

输出反馈线性输出调节

- 如何构造 (G_1, G_2, K)

☞Luenburger 观测器

第一步 开环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_m = \begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + D_m u$$

第二步 假设条件③

$$\Longrightarrow u = \begin{bmatrix} K_x & K_v \end{bmatrix} z$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + L(y_m - \begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} z - D_m u)$$

第三步

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} K_x & K_v \end{bmatrix} \\ G_1 &= \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K - L(\begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix} + D_m K) \qquad (10) \\ G_2 &= L \end{aligned}$$

输出反馈线性输出调节

定理 5

当假设条件①②③成立时，(G_1, G_2, K) *(10)* 或者 (K_x, K_v, L) 解决输出调节问题当且仅当

$$
\begin{aligned}
XA_1 &= AX + BU + E \\
0 &= CX + DU + F
\end{aligned}
$$

有唯一解 X, U

定理 6

当假设条件①②③④成立，则基于动态输出反馈的输出调节问题有解

输出反馈线性输出调节

定理 5

当假设条件①②③成立时，(G_1, G_2, K) *(10)* 或者 (K_x, K_v, L) 解决输出调节问题当且仅当

$$
\begin{aligned}
XA_1 &= AX + BU + E \\
0 &= CX + DU + F
\end{aligned}
$$

有唯一解 X, U

定理 6

当假设条件①②③④成立，则基于动态输出反馈的输出调节问题有解

定理 5 证明：

- 必要性是显然的
- 充分性：
  - 假设条件② $\Rightarrow$ 存在 K_x 使得 $A+BK_x$ 稳定
  - 假设条件③ $\Rightarrow$ 存在 $L=\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ 使得

$$A_L=\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_m & F_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A-L_1C_m & E-L_1F_m \\ -L_2C_m & A_1-L_2F_m \end{bmatrix}$$

是稳定的

输出反馈线性输出调节

- 假设 X, U 满足线性调节器方程

$$\Longrightarrow K_v = U - K_x X,\ K = \begin{bmatrix} K_x & K_v \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_c = \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & BK_x & BK_v \\ 0 & A + BK_x & E + BK_v \\ 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m & -C_m & -F_m \end{bmatrix}$$

- 相似变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_x & BK_x & BK_v \\ 0 & A - L_1 C_m & E - L_1 F_m \\ 0 & -L_2 C_m & A_1 - L_2 F_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A + BK_x & * \\ 0 & A_L \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_c \text{ 稳定}$$

输出反馈线性输出调节

- 假设 X, U 满足线性调节器方程

$$\Longrightarrow K_v = U - K_x X,\ K = \begin{bmatrix} K_x & K_v \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_c = \begin{bmatrix} A & BK \\ G_2 C_m & G_1 + G_2 D_m K \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & BK_x & BK_v \\ 0 & A + BK_x & E + BK_v \\ 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m & -C_m & -F_m \end{bmatrix}$$

- 相似变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_x & BK_x & BK_v \\ 0 & A - L_1 C_m & E - L_1 F_m \\ 0 & -L_2 C_m & A_1 - L_2 F_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A + BK_x & * \\ 0 & A_L \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_c \text{ 稳定}$$

输出反馈线性输出调节

- 令 $Z = \begin{bmatrix} X \\ I \end{bmatrix}$

  欲证明 $G_1 Z = ZA_1 - L(C_m X + D_m U + F_m)$

$$
\begin{aligned}
G_1 Z &= \begin{bmatrix} (A + BK_x)X + E + BK_v \\ A_1 \end{bmatrix} - L((C_m + D_m K_x)X + F_m + D_m K_v) \\
&= \begin{bmatrix} AX + B(K_x X + K_v) + E \\ A_1 \end{bmatrix} - L(C_m X + D_m(K_x X + K_v) + F_m) \\
&= \begin{bmatrix} AX + BU + E \\ A_1 \end{bmatrix} - L(C_m X + D_m U + F_m) \\
&= \begin{bmatrix} X \\ I \end{bmatrix} A_1 - L(C_m X + D_m U + F_m) \\
&= ZA_1 - L(C_m X + D_m U + F_m)
\end{aligned}
$$

因而方程式 (9) 成立，即 (K_x, K_v, L) 解决了输出调节问题

输出反馈线性输出调节

- 令 $Z=\begin{bmatrix} X \\ I \end{bmatrix}$

  欲证明 $G_1 Z = ZA_1 - L(C_m X + D_m U + F_m)$

$$
\begin{aligned}
G_1 Z &= \begin{bmatrix} (A+BK_x)X + E + BK_v \\ A_1 \end{bmatrix} - L((C_m + D_m K_x)X + F_m + D_m K_v) \\
&= \begin{bmatrix} AX + B(K_x X + K_v) + E \\ A_1 \end{bmatrix} - L(C_m X + D_m (K_x X + K_v) + F_m) \\
&= \begin{bmatrix} AX + BU + E \\ A_1 \end{bmatrix} - L(C_m X + D_m U + F_m) \\
&= \begin{bmatrix} X \\ I \end{bmatrix} A_1 - L(C_m X + D_m U + F_m) \\
&= ZA_1 - L(C_m X + D_m U + F_m)
\end{aligned}
$$

因而方程式 (9) 成立，即 (K_x, K_v, L) 解决了输出调节问题

Outline

1. 线性系统输出调节问题描述
2. 状态反馈线性输出调节
3. 输出反馈线性输出调节
4. 线性鲁棒输出调节

线性鲁棒输出调节

- **不确定线性时不变系统：**

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + (E + \Delta E)v(t), x(0) = x_0, t \geq 0$$
$$e(t) = (C + \Delta C)x(t) + (D + \Delta D)u(t) + (F + \Delta F)v(t)$$

■ 外部输入 $v(t)$ 满足 $\dot{v}(t) = A_1 v(t), v(0) = v_0, t \geq 0$
■ **标称参数：** A, B, E, C, D, F
■ **不确定参数：** $\Delta A, \Delta B, \Delta E, \Delta C, \Delta D, \Delta F$

令 $\omega = \text{vec}\left(\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B & \Delta E \\ \Delta C & \Delta D & \Delta F \end{bmatrix}\right)$。则可采用如下记法

$$A_\omega = A + \Delta A,\ B_\omega = B + \Delta B,\ E_\omega = E + \Delta E$$
$$C_\omega = C + \Delta C,\ D_\omega = D + \Delta D,\ F_\omega = F + \Delta F$$
$$A_0 = A,\ B_0 = B,\ E_0 = E,\ C_0 = C,\ D_0 = D,\ F_0 = F$$

- **不确定线性时不变系统：**

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + (E + \Delta E)v(t), x(0) = x_0, t \geq 0$$
$$e(t) = (C + \Delta C)x(t) + (D + \Delta D)u(t) + (F + \Delta F)v(t)$$

■ 外部输入 $v(t)$ 满足 $\dot{v}(t) = A_1 v(t), v(0) = v_0, t \geq 0$
■ **标称参数：** A, B, E, C, D, F
■ **不确定参数：** $\Delta A, \Delta B, \Delta E, \Delta C, \Delta D, \Delta F$

令 $\omega = \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B & \Delta E \\ \Delta C & \Delta D & \Delta F \end{bmatrix}\right)$。则可采用如下记法

$$A_\omega = A + \Delta A,\ B_\omega = B + \Delta B,\ E_\omega = E + \Delta E$$
$$C_\omega = C + \Delta C,\ D_\omega = D + \Delta D,\ F_\omega = F + \Delta F$$
$$A_0 = A,\ B_0 = B,\ E_0 = E,\ C_0 = C,\ D_0 = D,\ F_0 = F$$

线性鲁棒输出调节

- 不确定线性时不变系统重写为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_\omega x + B_\omega u + E_\omega v\\ e &= C_\omega x + D_\omega u + F_\omega v\end{aligned}$$

- 动态状态反馈

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e\\ u &= K_1 x + K_2 z\end{aligned} \tag{11}$$

- 动态输出反馈

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e\\ u &= K z\end{aligned} \tag{12}$$

- **动态状态反馈**

$$\dot{z} = \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e$$
$$u = K_1 x + K_2 z$$

闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_{c\omega} x_c + B_{c\omega} v \\ \dot{v} &= A_1 v \\ e &= C_{c\omega} x_c + D_{c\omega} v \end{aligned} \tag{13}$$

其中，$x_c = \mathrm{col}(x, z)$，

$$A_{c\omega} = \begin{bmatrix} A_\omega + B_\omega K_1 & B_\omega K_2 \\ \mathcal{G}_2(C_\omega + D_\omega K_1) & \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 D_\omega K_2 \end{bmatrix}, \quad B_{c\omega} = \begin{bmatrix} E_\omega \\ \mathcal{G}_2 F_\omega \end{bmatrix},$$
$$C_{c\omega} = \begin{bmatrix} C_\omega + D_\omega K_1 & D_\omega K_2 \end{bmatrix}, \qquad D_{c\omega} = F_\omega$$

线性鲁棒输出调节

- **动态输出反馈**

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e \\
u &= K z
\end{aligned}
$$

闭环系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_c &= A_{c\omega} x_c + B_{c\omega} v \\
\dot{v} &= A_1 v \\
e &= C_{c\omega} x_c + D_{c\omega} v
\end{aligned}
$$

其中，$x_c = \mathrm{col}(x, z)$，

$$
\begin{aligned}
A_{c\omega} &= \begin{bmatrix} A_\omega & B_\omega K \\ \mathcal{G}_2 C_\omega & \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 D_\omega K \end{bmatrix}, & B_{c\omega} &= \begin{bmatrix} E_\omega \\ \mathcal{G}_2 F_\omega \end{bmatrix}, \\
C_{c\omega} &= \begin{bmatrix} C_\omega & D_\omega K \end{bmatrix}, & D_{c\omega} &= F_\omega
\end{aligned}
$$

- 采用 $(A_{c0}, B_{c0}, C_{c0}, D_{c0})$ 或 (A_c, B_c, C_c, D_c) 来表示由标称系统和控制器构成的闭环系统

线性鲁棒输出调节

- 性质 1：闭环系统 (13) 在 $\omega = 0$ 处是渐近稳定，即 A_{c0} 是 Hurwitz
- 性质 2：存在 $\omega = 0$ 的一个开邻域 W 使得对任意的 x_{c0} 和 v_0 以及所有的 $\omega \in W$, 闭环系统 (13) 的轨迹满足

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} \left(C_{c\omega} x_c(t) + D_{c\omega} v(t)\right) = 0$$

（在后续分析中，假设对任意 $\omega \in W$, $A_{c\omega}$ 是稳定）

- **线性鲁棒输出调节问题：** 设计控制器 (11) 或 (12) 使得闭环系统满足性质 1 和性质 2
- **假设条件⑤** (C, A) 是可检测的

线性鲁棒输出调节

引理 7

当假设条件①成立时，假设控制器 *(11)* 或 *(12)* 使得闭环系统 *(13)* 满足性质 *1*。则以下表述是等价的：

1. 闭环系统 *(13)* 满足性质 *2*;
2. 控制器解决了线性鲁棒输出调节反馈问题;
3. 存在 $\omega = 0$ 的一个开领域 W，满足对 $\omega \in W$, $A_{c\omega}$ 是稳定。则对任意 $\omega \in W$，存在唯一解 $X_{c\omega}$ 满足

$$\begin{aligned} X_{c\omega}A_1 &= A_{c\omega}X_{c\omega} + B_{c\omega} \\ 0 &= C_{c\omega}X_{c\omega} + D_{c\omega} \end{aligned} \tag{14}$$

引理 8

不存在静态状态反馈控制器解决线性鲁棒输出调节问题。

线性鲁棒输出调节

引理 7

当假设条件①成立时，假设控制器 *(11)* 或 *(12)* 使得闭环系统 *(13)* 满足性质 *1*。则以下表述是等价的：

1. 闭环系统 *(13)* 满足性质 *2*；
2. 控制器解决了线性鲁棒输出调节反馈问题；
3. 存在 $\omega = 0$ 的一个开领域 W，满足对 $\omega \in W$，$A_{c\omega}$ 是稳定。则对任意 $\omega \in W$，存在唯一解 $X_{c\omega}$ 满足

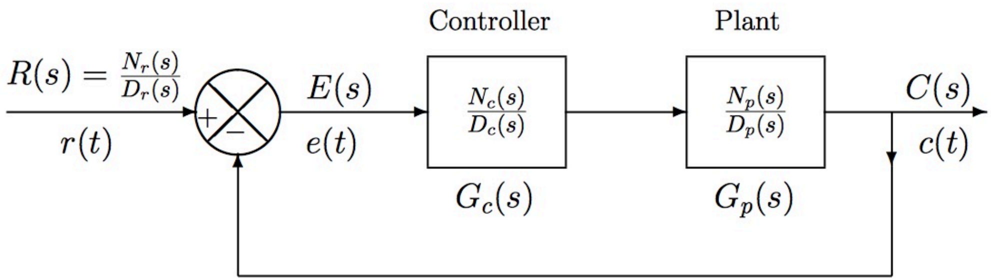
$$\begin{aligned} X_{c\omega} A_1 &= A_{c\omega} X_{c\omega} + B_{c\omega} \\ 0 &= C_{c\omega} X_{c\omega} + D_{c\omega} \end{aligned} \tag{14}$$

引理 8

不存在静态状态反馈控制器解决线性鲁棒输出调节问题。

内模原理

任何一个能良好地抵消外部扰动或跟踪参考输入信号的反馈控制系统，其反馈回路必须包含一个与外部输入信号相同的动力学模型。这个内部模型称为内模。



设计控制器 $G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$ 使得 $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}(r(t) - c(t)) = 0$

$$
\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - G_p(s)G_c(s)E(s) \\
&= \frac{1}{1+G_p(s)G_c(s)}R(s) = \frac{D_p(s)D_c(s)}{D_p(s)D_c(s)+N_p(s)N_c(s)}\frac{N_r(s)}{D_r(s)}
\end{aligned}
$$

假设 $R(s)$ 的极点在右半平面，则设计 $D_c(s)$ 和 $N_c(s)$ 使得

1. $D_p(s)D_c(s) + N_p(s)N_c(s)$ 的根在左半平面
2. $D_r(s)$ 是 $D_p(s)D_c(s)$ 的因式

以实现精确跟踪

线性鲁棒输出调节

当 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ 有如下形式

$$\mathcal{G}_1 = T\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & G_1 \end{bmatrix} T^{-1}, \mathcal{G}_2 = T\begin{bmatrix} S_3 \\ G_2 \end{bmatrix},$$

其中，S_1, S_2, S_3 是任意维度合适的矩阵，T 是任意维度与 $\mathcal{G}_1$ 相同的非奇异矩阵，且

$$\boldsymbol{G_1} = \textbf{block diag } \underbrace{[\boldsymbol{\beta_1}, \ldots, \boldsymbol{\beta_p}]}_{\boldsymbol{p}\textbf{ -tuple}}, \quad \boldsymbol{G_2} = \textbf{block diag } \underbrace{[\boldsymbol{\sigma_1}, \ldots, \boldsymbol{\sigma_p}]}_{\boldsymbol{p}\textbf{ -tuple}}$$

满足

1. (β_i, σ_i) 是能控的
2. β_i 的特征多项式包含 A_1 的极小多项式

我们称 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ **是** A_1 **的内模**以及**动态补偿器** $\dot{z} = \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e$ **是复合受控系统的内模**

线性鲁棒输出调节

给定任意方阵 M:

- 特征多项式 $p_M(t) = \det(tI - M) = \Pi_{i=1}^{n}(t - \lambda_i)$
- 凯莱-哈密顿定理: $p_M(M) = 0$
- 极小多项式 $f(t)$: 满足 $f(M) = 0$ 的最低次首一多项式
- 极小多项式的根是 M 的特征值

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{特征多项式}\, p_M(t) = (t-1)^3$$

$$\text{极小多项式}\, f(t) = (t-1)^2 \text{ 满足 } f(M) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

线性鲁棒输出调节

构造 A_1 的内模:

令 A_1 的极小多项式为

$$\alpha_m(\lambda) = \lambda^{n_m} + \alpha_1 \lambda^{(n_m-1)} + \cdots + \alpha_{(n_m-1)}\lambda + \alpha_{n_m}$$

选择

$$\beta_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_{n_m} & -\alpha_{(n_m-1)} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, p$$

则

- $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ 是 A_1 的内模
- (G_1, G_2) 是 A_1 的**最小内模**（即 β_i 的特征多项式、极小多项式和 A_1 的极小多项式相同）

当假设条件①和④成立时，对所有的 $\lambda \in \sigma(G_1)$,

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + p$$

线性鲁棒输出调节

动态补偿器 $\dot{z} = \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e$ 和受控系统共同组成了增广系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\omega x + B_\omega u + E_\omega v \\ \dot{z} &= \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e, \\ e &= C_\omega x + D_\omega u + F_\omega v \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_\omega & 0 \\ \mathcal{G}_2 C_\omega & \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\omega \\ \mathcal{G}_2 D_\omega \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E_\omega \\ \mathcal{G}_2 F_\omega \end{bmatrix} v \\ e &= C_\omega x + D_\omega u + F_\omega v \end{aligned} \tag{15}$$

欲证明结论:

原受控系统的鲁棒输出调节问题转化成了增广系统的镇定问题

线性鲁棒输出调节

动态状态反馈

$$\dot{z} = G_1 z + G_2 e$$
$$u = K_1 x + K_2 z$$

增广系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\omega & 0 \\ G_2 C_\omega & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\omega \\ G_2 D_\omega \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E_\omega \\ G_2 F_\omega \end{bmatrix} v$$
$$e = C_\omega x + D_\omega u + F_\omega v$$

原受控系统的鲁棒输出调节问题等价于设计 $u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ 使得

1. $A_c = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ G_2 (C + DK_1) & G_1 + G_2 DK_2 \end{bmatrix}$ 是 Hurwitz
2. 对任意 ω 满足 $A_{c\omega}$ 稳定，则存在唯一解 $X_{c\omega}$ 满足

$$X_{c\omega} A_1 = A_{c\omega} X_{c\omega} + B_{c\omega}$$
$$0 = C_{c\omega} X_{c\omega} + D_{c\omega}$$

线性鲁棒输出调节

考虑矩阵对 $\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ G_2 C & G_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ G_2 D \end{bmatrix} \right)$ **的可镇定性**

令

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & 0 & B \\ G_2 C & G_1 - \lambda I & G_2 D \end{bmatrix}$$

- 假设条件② $\Rightarrow \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n \ \forall \lambda \in \overline{\mathcal{C}}_+$
- $\det(G_1 - \lambda I) \neq 0 \ \forall \lambda \notin \sigma(G_1)$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank} M(\lambda) = n + n_z \quad \forall \lambda \notin \sigma\left(G_1\right) \text{ and } \forall \lambda \in \overline{\mathcal{C}}_+$$

- $M(\lambda) = M_1(\lambda) M_2(\lambda)$, 其中

$$M_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & G_1 - \lambda I \end{bmatrix}, \quad M_2(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & 0 & B \\ C & 0 & D \\ 0 & I_{n_z} & 0 \end{bmatrix}$$

(G_1, G_2) 能控 $\Rightarrow$ 对任意 $\lambda \in \mathcal{C}$，$M_1(\lambda)$ 的秩为 $n + n_z$
假设条件①④ $\Rightarrow$ 对任意 $\lambda \in \sigma(G_1)$, $M_2(\lambda)$ 的秩为 $n + n_z + p$

线性鲁棒输出调节

考虑矩阵对 $\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ G_2 C & G_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ G_2 D \end{bmatrix}\right)$ **的可镇定性**

令

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} A-\lambda I & 0 & B \\ G_2 C & G_1-\lambda I & G_2 D \end{bmatrix}$$

- 假设条件② $\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I & B \end{bmatrix} = n \ \forall\, \lambda \in \overline{\mathcal{C}}_+$
- $\det(G_1 - \lambda I) \neq 0 \ \forall\, \lambda \notin \sigma(G_1)$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank} M(\lambda) = n + n_z \quad \forall \lambda \notin \sigma\left(G_1\right) \text{ and } \forall \lambda \in \overline{\mathcal{C}}_+$$

- $M(\lambda) = M_1(\lambda) M_2(\lambda)$, 其中

$$M_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & G_1 - \lambda I \end{bmatrix}, \quad M_2(\lambda) = \begin{bmatrix} A-\lambda I & 0 & B \\ C & 0 & D \\ 0 & I_{n_z} & 0 \end{bmatrix}$$

(G_1, G_2) 能控 $\Rightarrow$ 对任意 $\lambda \in \mathcal{C}$， $M_1(\lambda)$ 的秩为 $n + n_z$
假设条件①④ $\Rightarrow$ 对任意 $\lambda \in \sigma(G_1)$, $M_2(\lambda)$ 的秩为 $n + n_z + p$

线性鲁棒输出调节

由 Syvester's 不等式

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n \leq \mathrm{rank}AB \leq \min\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\}$$

得，

$$\begin{aligned} n + n_z \geq \mathrm{rank}\, M(\lambda) &\geq (n + n_z) + (n + n_z + p) - (n + n_z + p) \\ &= n + n_z \quad \forall \lambda \in \sigma\left(G_1\right) \end{aligned}$$

结合 $\mathrm{rank}\, M(\lambda) = n + n_z \quad \forall \lambda \notin \sigma\left(G_1\right)$ and $\forall \lambda \in \overline{\mathcal{C}}_+$

$$\Longrightarrow \mathrm{rank}\, M(\lambda) = n + n_z \quad \forall \lambda \in \overline{\mathcal{C}}_+$$

$\Longrightarrow$ 假设条件①②④下，$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ G_2 C & G_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ G_2 D \end{bmatrix}\right)$ 是可镇定的

则存在 (K_1, K_2) 使得

$$A_c = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ G_2\left(C + DK_1\right) & G_1 + G_2 DK_2 \end{bmatrix}$$

是 Hurwitz 稳定的

线性鲁棒输出调节

$\sigma(A_1) \cap \sigma(A_c) = \emptyset \Rightarrow$ 存在唯一的 $X_c = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}$ 满足

$$X_c A_1 = A_c X_c + B_c = A_c X_c + \begin{bmatrix} E \\ G_2 F \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} XA_1 &= (A + BK_1)X + BK_2 Z + E, \\ ZA_1 &= G_1 Z + G_2 \left[(C + DK_1)X + DK_2 Z + F \right] \end{aligned}$$

假设 $p = 1$, 则

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_{n_m} & -\alpha_{(n_m-1)} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性鲁棒输出调节

令 $z_i, i = 1, \ldots, n_m$ 表示 Z 的第 i 行

$$ZA_1 = G_1 Z + G_2 \left[(C + DK_1)X + DK_2 Z + F\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} z_1 A_1 \\ z_2 A_1 \\ \vdots \\ z_{n_m-1} A_1 \\ z_{n_m} A_1 + a_{n_m} z_1 + \cdots + a_1 z_{n_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n_m} \\ (C + DK_1)X + DK_2 Z + F \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow z_i = z_1 A_1^{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n_m$$

$$\Longrightarrow (C + DK_1)X + DK_2 Z + F = z_1 \left(A_1^{n_m} + \alpha_1 A_1^{n_m - 1} + \cdots + \alpha_{n_m} I\right)$$

$$= z_1 \alpha_m(A_1) = 0$$

$$\Longrightarrow X_c A_1 = A_c X_c + B_c$$

$$0 = \begin{bmatrix} C + DK_1 & DK_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} + F = C_c X_c + D_c$$

线性鲁棒输出调节

采用上述思路，可以证明对于任意稳定的 $A_{c\omega}$，存在唯一的 $X_{c\omega}$ 使得

$$\begin{aligned} X_{c\omega}A_1 &= A_{c\omega}X_{c\omega} + B_{c\omega} \\ 0 &= C_{c\omega}X_{c\omega} + D_{c\omega} \end{aligned}$$

因而控制器 (K_1, K_2, G_1, G_2) 解决了线性鲁棒输出调节问题

线性鲁棒输出调节

定理 9

当假设条件①②④成立时，动态状态反馈控制器 *(11)* 解决了线性鲁棒输出调节问题

动态输出反馈

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e \\
u &= Kz
\end{aligned}
$$

假设条件①②④⇒ 存在动态状态反馈控制器 (K_1, K_2, G_1, G_2) 解决线性鲁棒输出调节问题

$$
\begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ G_2(C + DK_1) & G_1 + G_2 DK_2 \end{bmatrix} \text{ 是稳定的}
$$

假设条件⑤⇒ 存在 L 使得$A - LC$ 是稳定的

$$
\begin{aligned}
\text{令} \quad \dot{z} &= \mathcal{G}_1 z + \mathcal{G}_2 e \\
&= \begin{bmatrix} A + BK_1 - L(C + DK_1) & (B - LD)K_2 \\ 0 & G_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} L \\ G_2 \end{bmatrix} e \\
u &= Kz = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} z
\end{aligned}
$$

容易看出，$(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ 是 A_1 的内模

线性鲁棒输出调节

$$A_c = \begin{bmatrix} A & BK \\ \mathcal{G}_2 C & \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 DK \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK_1 & BK_2 \\ LC & A + BK_1 - LC & BK_2 \\ G_2 C & G_2 DK_1 & G_1 + G_2 DK_2 \end{bmatrix}$$

相似于

$$\begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 & BK_1 \\ G_2 (C + DK_1) & G_1 + G_2 DK_2 & G_2 DK_1 \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

因而 A_c 是稳定的
类似地，可以证明方程式 (14) 存在解，即 $(K, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ 解决了线性鲁棒输出调节反馈问题。

定理 10

当假设条件①②④⑤成立时，动态输出反馈控制器 *(12)* 解决了线性鲁棒输出调节问题。