# 现代控制理论

## ——多智能体系统协调控制

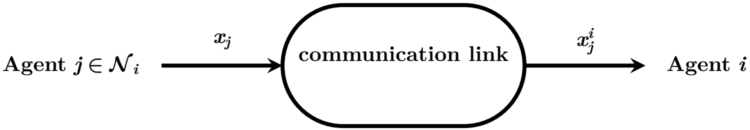
郑建英

北京航空航天大学　自动化科学与电气工程学院

# 带丢包的多智能体系统

# 一致性问题分析

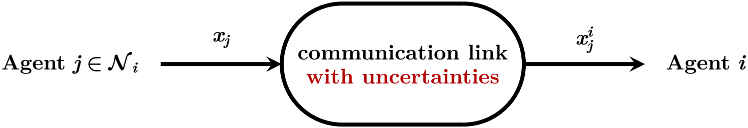
# 带丢包的多智能体系统



# 带丢包的多智能体系统


**通信网络不确定性:** 丢包、时滞、量化、切换拓扑、噪声等

# 带丢包的多智能体系统




**通信网络不确定性:** 丢包、时滞、量化、切换拓扑、噪声等

## ■ 随机通信:

- 丢包 $\rightarrow$ 伯努利过程

  1) 数据丢失: $x_j^i = 0$
  2) 未丢失: $x_j^i = x_j$

☞ **对一致性的影响?**

# 带丢包的多智能体系统

## 离散时间多智能体线性系统

$$x_i(k+1) = Ax_i(k) + Bu_i(k),\ i \in \{1, \dots, N\} \tag{1}$$

- $x_i$: 第 $i$ 个子系统的状态
- $u_i$: 第 $i$ 个子系统的输入
- 拓扑结构 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$
  - ⋆ $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathbb{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
  - ⋆ 邻接矩阵 $\mathcal{A} = [a_{ji}]$: $a_{ji} = 1$ if $(i, j) \in \mathcal{E}$; 否则 $a_{ji} = 0$
  - ⋆ Laplacian 矩阵 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, $\mathcal{D} = \mathrm{diag}\left\{\sum_{j=1}^N a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}\right\}$

    —特征根 $\lambda_i, i = 1, \dots, n$: $0 = |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|$

    —无向图：$\mathcal{L}$ 对称，半正定 $\Longrightarrow \lambda_i \geq 0$

# 带丢包的多智能体系统

**分布式线性一致性协议**

$$u_i(k) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k)) \tag{2}$$

- **通信网络存在丢包，由独立同分布伯努利过程 $\epsilon_{ij}(k)$ 刻画**
  - $\epsilon_{ij}(k) = 1$ 无丢包; $\epsilon_{ij}(k) = 0$ 有丢包
  - $P(\epsilon_{ij}(k) = 0) = p_{ij}$, $P(\epsilon_{ij}(k) = 1) = 1 - p_{ij}$
  - $p_{ij} \in [0, 1]$: 丢包率

**均方一致性控制**

存在控制增益 $K$ 使得对所有 $i, j \in \{1, \dots, N\}$，闭环系统满足

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{E}\left\{\|x_i(k) - x_j(k)\|^2\right\} = 0$$

**研究目标：** **保证 $K$ 存在的一致性条件和设计 $K$**

# 带丢包的多智能体系统

**假设条件**

① $A$ 的所有特征根不在单位圆内；$[A|B]$ 是可控的

② $\mathcal{G}$ 包含一颗有向生成树 $\Longleftrightarrow \lambda_2 \neq 0$

# 带丢包的多智能体系统

**假设条件**

① $A$ 的所有特征根不在单位圆内；$[A|B]$ 是可控的

② $\mathcal{G}$ 包含一颗有向生成树 $\Longleftrightarrow \lambda_2 \neq 0$

**分两种情形讨论:**

- **每个时刻通信信道的丢包情况是相同的**

  **假设** ③ $\epsilon_{ij}(k) = \epsilon(k)$, 其中 $\epsilon(k)$ 是丢包率为 $p$ 的独立同分布伯努利过程

- **每个时刻通信信道的丢包情况是不全同的**

# 带丢包的多智能体系统

**假设条件**

① $A$ 的所有特征根不在单位圆内；$[A|B]$ 是可控的

② $\mathcal{G}$ 包含一颗有向生成树 $\Longleftrightarrow \lambda_2 \neq 0$

**分两种情形讨论:**

- **每个时刻通信信道的丢包情况是相同的**

  **假设** ③ $\epsilon_{ij}(k) = \epsilon(k)$, 其中 $\epsilon(k)$ 是丢包率为 $p$ 的独立同分布伯努利过程

- **每个时刻通信信道的丢包情况是不全同的**

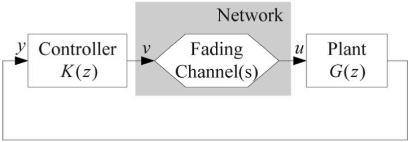
**参考文献**

L. Xu, J. Zheng, N. Xiao and L. Xie, "Mean square consensus of multi-agent systems over fading networks with directed graphs", *Automatica*, 2018.

J. Zheng, L. Xu, L. Xie and K. You, "Consensusability of discrete-time multi-agent systems with communication delay and packet dropouts", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018.

# 网络化控制系统的均方镇定条件

**网络化控制系统：** 通过实时通信网络形成闭环回路




**带丢包的网络化控制系统**

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ u(k) &= \Xi(k)Kx(k) \qquad \Rightarrow \qquad x(k+1) = (A + B\Xi(k)K)x(k) \\ \Xi(k) &= \operatorname{diag}\{\xi_1(k), \xi_2(k), \ldots, \xi_m(k)\} \end{aligned}$$

- 伯努利过程 $\xi_i$：

$$\mu_i \triangleq \mathbb{E}\{\xi_i(k)\} > 0,\ \sigma_{ij} \triangleq \mathbb{E}\{(\xi_i(k) - \mu_i)(\xi_j(k) - \mu_j)\} > 0$$

- 均值：$\Pi \triangleq \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$；协方差：$\Sigma \triangleq [\sigma_{ij}]_{i,j=1,2,\ldots,m}$
- 均方镇定：存在 $K$ 使得对任意 $x(0)$，有 $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[x(k)x'(k)] = 0$

### 引理 1

$x(k+1)=(A+B\Xi(k)K)u(k)$ 是均方稳定的当且仅当存在 $P>0$ 使得

$$P>(A+B\Pi K)'P(A+B\Pi K)+K'(\Sigma\odot(B'PB))K, \tag{3}$$

其中 $\odot$ 表示 *Hadamard* 积

- $$A\odot B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

# 网络化控制系统的均方镇定条件

**引理 1**

$x(k+1)=(A+B\Xi(k)K)u(k)$ 是均方稳定的当且仅当存在 $P>0$ 使得

$$P > (A+B\Pi K)'P(A+B\Pi K)+K'(\Sigma\odot(B'PB))K, \qquad (3)$$

其中 $\odot$ 表示 *Hadamard* 积

- $\xi_i=\xi_j=\xi, i,j=1,\ldots,m \implies x(k+1)=(A+\xi(k)BK)x(k)$ 是均方稳定的当且仅当存在 $P>0$ 使得

$$P > (A+\mu BK)'P(A+\mu BK)+\sigma^2 K'B'PBK$$

- 当 $\Sigma=0$, 引理 1 与线性时不变系统的稳定性判据一致

# 网络化控制系统的均方镇定条件

**证明:**

- $$\mu_i = \mathbb{E}\left\{\xi_i(k)\right\},\ \sigma_{ij} = \mathbb{E}\left\{\left(\xi_i(k) - \mu_i\right)\left(\xi_j(k) - \mu_j\right)\right\}$$
  $$\Rightarrow \mathbb{E}\left\{\xi_i(k)\xi_j(k)\right\} = \mu_i\mu_j + \sigma_{ij}$$

- 令 $X(k) = \mathbb{E}\left[x(k)x'(k)\right]$

$$\begin{aligned}
X(k+1) &= \mathbb{E}\left\{[A + B\Xi(k)K]x(k)x'(k)[A + B\Xi(k)K]'\right\} \\
&= AX(k)A' + \mathbb{E}\left\{Ax(k)x'(k)\Xi(k)B'\right\} + \mathbb{E}\left\{B\Xi(k)Kx(k)x'(k)A'\right\} \\
&\qquad + \mathbb{E}\left\{B\Xi(k)Kx(k)x'(k)K'\Xi(k)B'\right\} \\
&= AX(k)A' + AX(k)K'\mathbb{E}\{\Xi(k)\}B' + B\mathbb{E}\{\Xi(k)\}KX(k)A' \\
&\qquad + B\mathbb{E}\left\{\Xi(k)KX(k)K'\Xi(k)\right\}B' \\
&= AX(k)A' + AX(k)K'\Pi B' + B\Pi KX(k)A' \\
&\qquad + B\mathbb{E}\left\{\Xi(k)KX(k)K'\Xi(k)\right\}B'
\end{aligned}$$

# 网络化控制系统的均方镇定条件

- 令 $Y = KX(k)K'$。则

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\Xi(k)\,Y\Xi(k)\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix}\xi_1 & & & \\ & \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1 & & & \\ & \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_m\end{bmatrix}\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix}\xi_1^2 y_{11} & \xi_1\xi_2 y_{12} & \cdots & \xi_1\xi_m y_{1m}\\ \xi_2\xi_1 y_{21} & \xi_2^2 y_{22} & \cdots & \xi_2\xi_m y_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_m\xi_1 y_{m1} & \xi_m\xi_2 y_{m2} & \cdots & \xi_m^2 y_{mm}\end{bmatrix}\right\}\\
&= \begin{bmatrix}(\mu_1^2+\sigma_{11})y_{11} & (\mu_1\mu_2+\sigma_{12})y_{12} & \cdots & (\mu_1\mu_m+\sigma_{1m})y_{1m}\\ (\mu_2\mu_1+\sigma_{21})y_{21} & (\mu_2^2+\sigma_{22})y_{22} & \cdots & (\mu_2\mu_m+\sigma_{2m})y_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\mu_m\mu_1+\sigma_{m1})y_{m1} & (\mu_m\mu_2+\sigma_{m2})y_{m2} & \cdots & (\mu_m^2+\sigma_{mm})y_{mm}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# 网络化控制系统的均方镇定条件

$$
= \begin{bmatrix} \mu_1^2 y_{11} & \mu_1\mu_2 y_{12} & \cdots & \mu_1\mu_m y_{1m} \\ \mu_2\mu_1 y_{21} & \mu_2^2 y_{22} & \cdots & \mu_2\mu_m y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_m\mu_1 y_{m1} & \mu_m\mu_2 y_{m2} & \cdots & \mu_m^2 y_{mm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} y_{11} & \sigma_{12} y_{12} & \cdots & \sigma_{1m} y_{1m} \\ \sigma_{21} y_{21} & \sigma_{22} y_{22} & \cdots & \sigma_{2m} y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} y_{m1} & \sigma_{m2} y_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} y_{mm} \end{bmatrix}
$$

$$
= \mathrm{diag}\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}\, Y \mathrm{diag}\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} + \Sigma \odot Y
$$

$$
= \Pi\, Y \Pi + \Sigma \odot Y
$$

$$
\Rightarrow B\mathbb{E}\left\{\Xi(k) K X(k) K' \Xi(k)\right\} B' = B\left(\Pi K X(k) K' \Pi + \Sigma \odot \left(K X(k) K'\right)\right) B'
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow X(k+1) = {} & A X(k) A' + A X(k) K' \Pi B' + B \Pi K X(k) A' \\
& + B\left(\Pi K X(k) K' \Pi + \Sigma \odot \left(K X(k) K'\right)\right) B' \\
= {} & (A + B\Pi K) X(k) (A + B\Pi K)' + B(\Sigma \odot (K X(k) K')) B'
\end{aligned}
$$

# 网络化控制系统的均方镇定条件

令 $B=[b_1 \quad b_2\cdots b_m]$，$K=[k_1' \quad k_2'\cdots k_m']'$。则

$$KX(k)K'=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{bmatrix}X[k_1' \quad k_2'\cdots k_m']=\begin{bmatrix}k_1Xk_1' & k_1Xk_2' & \dots & k_1Xk_m'\\ k_2Xk_1' & k_2Xk_2' & \dots & k_2Xk_m'\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_mXk_1' & k_mXk_2' & \dots & k_mXk_m'\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B(\Sigma\odot(KX(k)K'))B'$$

$$=[b_1 \quad b_2\cdots b_m]\begin{bmatrix}\sigma_{11}k_1Xk_1' & \sigma_{12}k_1Xk_2' & \dots & \sigma_{1m}k_1Xk_m'\\ \sigma_{21}k_2Xk_1' & \sigma_{22}k_2Xk_2' & \dots & \sigma_{2m}k_2Xk_m'\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{m1}k_mXk_1' & \sigma_{m2}k_mXk_2' & \dots & \sigma_{mm}k_mXk_m'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1'\\b_2'\\\vdots\\b_m'\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}b_ik_iXk_j'b_j'$$

$$\Rightarrow X(k+1)=(A+B\Pi K)X(k)(A+B\Pi K)'+B(\Sigma\odot(KX(k)K'))B'$$

$$=(A+B\Pi K)X(k)(A+B\Pi K)'+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}b_ik_iXk_j'b_j'$$

# 网络化控制系统的均方镇定条件

**充分性证明:**

- 令 $P>0$ 使不等式 (3) 成立。选取 $V(X(k))=\operatorname{tr}\{X(k)P\}$。则有:

$$
\begin{aligned}
V(X(k+1)) &= \operatorname{tr}\{(A+B\Pi K)X(k)(A+B\Pi K)'P\} \\
&\quad + \operatorname{tr}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}b_ik_iX(k)k_j'b_j'P\right\} \\
&= \operatorname{tr}\{X(k)(A+B\Pi K)'P(A+B\Pi K)\} \qquad (\operatorname{tr} MN = \operatorname{tr} NM) \\
&\quad + \operatorname{tr}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}X(k)k_j'b_j'Pb_ik_i\right\} \\
&= \operatorname{tr}\{X(k)\left[(A+B\Pi K)'P(A+B\Pi K)+K'(\Sigma\odot(B'PB))K\right]\} \\
&< \operatorname{tr}\{X(k)P\} = V(X(k))
\end{aligned}
$$

- Lyapunov 定理 $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} X(k)=0$

# 网络化控制系统的均方镇定条件

**必要性证明:**

- 令 $\Psi = (A+B\Pi K)\otimes(A+B\Pi K)+\sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}(b_i k_i)\otimes(b_j k_j)$

$$\Rightarrow \mathrm{vec}(X(k+1)) = \Psi \mathrm{vec}(X(k))$$

$$\text{均方稳定} \Rightarrow \rho(\Psi) < 1 \Rightarrow \rho(\Psi') < 1$$

- 定义序列 $\{\hat{X}(k)\}_{k\geq 0}$ 满足

$$\hat{X}(k+1) = (A+B\Pi K)'\hat{X}(k)(A+B\Pi K) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} k_i' b_i' \hat{X}(k) b_j k_j$$

$$\mathrm{vec}(\hat{X}(k+1)) = \Psi' \mathrm{vec}(\hat{X}(k))$$

$$\rho(\Psi') < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \hat{X}(k) = 0$$

# 网络化控制系统的均方镇定条件

- 选择 $\hat{X}(0) > 0,\ P(k) = \sum_{s=0}^{k} \hat{X}(s)$。则有

$$
\begin{aligned}
P(k+1) =& \hat{X}(0) + (A + B\Pi K)' P(k)(A + B\Pi K) \\
& + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} k_i' b_i' P(k) b_j k_j \\
>& (A + B\Pi K)' P(k)(A + B\Pi K) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} k_i' b_i' P(k) b_j k_j \\
=& (A + B\Pi K)' P(k)(A + B\Pi K) + K'(\Sigma \odot (B' P(k) B))K
\end{aligned}
$$

$\{\hat{X}(k)\}_{k\geq 0}$ 收敛 $\Rightarrow$ 存在 $P > 0$ 使得 $P(k) \to P$ 且满足不等式 (3)

**情形 1：每个时刻通信信道的丢包情况是相同的**

**闭环系统**

$$
\begin{aligned}
x_i(k+1) &= Ax_i(k) + BK\sum_{j\in\mathcal{N}_i} \epsilon(k)(x_j(k) - x_i(k)),\ i = 1,\dots,N \\
&= Ax_i(k) + BK\sum_{j=1,\dots,N} a_{ij}\epsilon(k)(x_j(k) - x_i(k)),\ i = 1,\dots,N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_N(k+1) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix} + \epsilon(k) \begin{bmatrix} -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_1} a_{1j} & BKa_{12} & \dots & BKa_{1N} \\ BKa_{21} & -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_2} a_{2j} & \dots & BKa_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ BKa_{N1} & BKa_{N2} & \dots & -BK\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_N} a_{Nj} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}
$$

令 $X(k) = \begin{bmatrix} x_1'(k) & x_2'(k) & \dots & x_N'(k) \end{bmatrix}'$

$$
\Longrightarrow X(k+1) = (I_N \otimes A - \epsilon(k)\mathcal{L} \otimes BK)X(k)
$$

**误差系统**

- 选择 $r=[r_i]$ 满足 $r'\mathcal{L}=0$ 和 $r'\mathbf{1}_N=1$。令

$$\delta_i(k)=x_i(k)-\sum_{j=1}^{N} r_j x_j(k)$$

$$\delta(k)=[\delta_1'(k) \quad \cdots \quad \delta_N'(k)]'$$

$$\Longrightarrow \delta(k+1)=(I_N\otimes A-\epsilon(k)\mathcal{L}\otimes BK)\delta(k)$$

- 存在 $S, Y$ 使得 $\Phi=\begin{bmatrix} 1_N & Y \end{bmatrix}$, $\Phi^{-1}=\begin{bmatrix} r' \\ S \end{bmatrix}$ 满足

$$\Phi^{-1}\mathcal{L}\Phi=\operatorname{diag}\{0,\lambda_2,\ldots,\lambda_N\}$$

- 令 $\hat{\delta}(k)=\left(\Phi^{-1}\otimes I_n\right)\delta(k)$

☞ 多智能体系统 (1) 的均方一致性控制问题等价于

$$\hat{\delta}_i(k+1)=(A-\epsilon(k)\lambda_i BK)\hat{\delta}_i(k), i=2,\ldots,N$$

**的共同均方镇定问题**

## 引理 2

当假设条件①成立时，存在临界值 $\gamma_c \in [0,1)$，使得修正代数 *Riccati* 不等式

$$P > A'PA - \gamma A'PB\left(B'PB\right)^{-1}B'PA \tag{4}$$

存在正定解 $P$ 当且仅当 $\gamma > \gamma_c$。

### 定理 3

当假设条件①②③成立时，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当

$$\eta \triangleq (1-p)\left(1-\min_{\omega\in\mathbb{R}}\max_{i=2,\ldots,N}|1-\omega\lambda_i|^2\right) > \gamma_c, \tag{5}$$

其中 $\gamma_c$ 是使修正代数 *Riccati* 不等式 *(4)* 存在正定解的 $\gamma$ 的临界值。

## 定理 3

当假设条件①②③成立时，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得一致性当

$$\eta \triangleq (1-p)\left(1-\min_{\omega\in\mathbb{R}}\max_{i=2,\ldots,N}|1-\omega\lambda_i|^2\right) > \gamma_c, \tag{5}$$

其中 $\gamma_c$ 是使修正代数 *Riccati* 不等式 *(4)* 存在正定解的 $\gamma$ 的临界值。进而，令

$$\omega^* = \arg\min_{\omega\in\mathbb{R}}\max_{i=2,\ldots,N}|1-\omega\lambda_i|^2,$$

以及 $P>0$ 是 $\gamma=\eta$ 时修正代数 *Riccati* 不等式 *(4)* 的正定解。则控制增益

$$K = \omega^*(B'PB)^{-1}B'PA$$

使得多智能体系统 *(1)* 取得一致性。

**证明：**

1. $\eta > \gamma_c \overset{\text{引理 2}}{\Longrightarrow}$ 当 $\gamma = \eta$ 时修正代数 Riccati 不等式 (4) 存在正定解，记为 $P$
2. 令 $\delta_i = 1 - \omega^* \lambda_i$. 显然，$|\delta_i|^2 < 1 - \dfrac{\eta}{1-p}$ for all $i \in \{2, \ldots, N\}$

**证明:**

1. $\eta > \gamma_c \overset{\text{引理 2}}{\Longrightarrow}$ 当 $\gamma = \eta$ 时修正代数 Riccati 不等式 (4) 存在正定解，记为 $P$
2. 令 $\delta_i = 1 - \omega^* \lambda_i$. 显然，$|\delta_i|^2 < 1 - \dfrac{\eta}{1-p}$ for all $i \in \{2, \dots, N\}$
3. $\mu = 1 - p, \sigma^2 = p(1-p)$, $K = \omega^*(B'PB)^{-1}B'PA \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&(A-\mu\lambda_i BK)^H P(A-\mu\lambda_i BK) + \sigma^2\lambda_i^H\lambda_i K'B'PBK \\
&= A'PA + \left[(\mu^2+\sigma^2)\lambda_i^H\lambda_i\omega^{*2} - \mu\lambda_i\omega^* - \mu\lambda_i^H\omega^*\right]A'PB(B'PB)^{-1}B'PA \\
&= A'PA + (1-p)\left[\lambda_i^H\lambda_i\omega^{*2} - \lambda_i\omega^* - \lambda_i^H\omega^*\right]A'PB(B'PB)^{-1}B'PA \\
&= A'PA + (1-p)\left(|\delta_i|^2 - 1\right)A'PB(B'PB)^{-1}B'PA \\
&\leq A'PA - \eta A'PB(B'PB)^{-1}B'PA \\
&< P
\end{aligned}
$$

4. 由引理 1，$A - \xi(k)\lambda_i BK$ 是均方稳定，也就是在设计的控制增益 $K$ 下，多智能体系统 (1) 取得了均方一致性

# 带丢包的多智能体系统一致性控制分析

**情形 2：每个时刻通信信道的丢包情况是不全同的**

**闭环系统**

$$
\begin{aligned}
x_i(k+1) &= Ax_i(k) + BK\sum_{j\in\mathcal{N}_i} \epsilon_{ij}(k)(x_j(k)-x_i(k)),\ i=1,\ldots,N \\
&= Ax_i(k) + BK\sum_{j=1,\ldots,N} a_{ij}\epsilon_{ij}(k)(x_j(k)-x_i(k)),\ i=1,\ldots,N
\end{aligned}
$$

**动态系统特性**

$$
\begin{aligned}
X(k+1) &= (I_N\otimes A + \mathcal{L}(k)\otimes BK)X(k) \\
\delta(k+1) &= (I_N\otimes A + \mathcal{L}(k)\otimes BK)\delta(k)
\end{aligned}
$$

其中，当 $i\neq j$，$\mathcal{L}_{ij}(k) = -a_{ij}\epsilon_{ij}(k)$；$\mathcal{L}_{ii}(k) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\epsilon_{ij}(k)$.

**分析困难：** $\epsilon_{ij}(k)$ 与 $\mathcal{L}$ 深度耦合

# 边拉普拉斯矩阵

$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$

- 关联矩阵 (incidence matrix) $E$——表示顶点与边的关系

  **无向图：** $E \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$

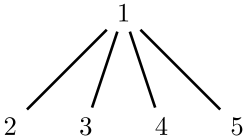
# 边拉普拉斯矩阵

$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$

- 关联矩阵 (incidence matrix) $E$——表示顶点与边的关系

  **无向图：** $E \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$

☞ 定义 1：当某个顶点 $i$ 与某条边 $k$ 关联时，$E_{ik} = 1$; 否则，$E_{ik} = 0$




$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 边拉普拉斯矩阵

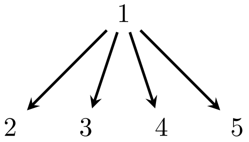
$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$

- 关联矩阵 (incidence matrix) $E$——表示顶点与边的关系

**无向图：** $E \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$

☞ 定义 2: 为每一条边指定一个方向，且

$$[E]_{ik} = \begin{cases} +1, \ \text{if } i \text{ is the initial node of edge } k \\ -1, \ \text{if } i \text{ is the terminal node of edge } k \\ 0, \ \text{otherwise} \end{cases}$$




$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# 边拉普拉斯矩阵

$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$

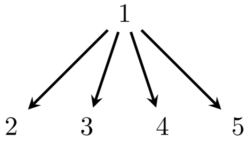
- 关联矩阵 (incidence matrix) $E$——表示顶点与边的关系

  **无向图：** $E \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{E}|}$

☞ 定义 2: 为每一条边指定一个方向，且

$$[E]_{ik} = \begin{cases} +1, & \text{if } i \text{ is the initial node of edge } k \\ -1, & \text{if } i \text{ is the terminal node of edge } k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = EE'$




$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# 边拉普拉斯矩阵

$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$

- 关联矩阵 (incidence matrix) $E$——表示顶点与边的关系

  **无向图：** $E \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$

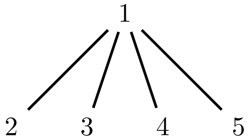
☞ 定义 2: 为每一条边指定一个方向，且

$$[E]_{ik} = \begin{cases} +1, \text{ if } i \text{ is the initial node of edge } k \\ -1, \text{ if } i \text{ is the terminal node of edge } k \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

- 拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = EE'$
- **边拉普拉斯矩阵** $\mathcal{L}_e = E'E$

⋆ $\mathcal{L}_e$ 和 $\mathcal{L}$ 具有相同的非零特征根

# 边拉普拉斯矩阵




$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

特征根：$\{0, 1, 1, 1, 5\}$

$\{1, 1, 1, 5\}$

# 边拉普拉斯矩阵

**有向图**

压缩边集合 $\bar{\mathcal{E}} = \left\{e_1, \dots, e_{|\bar{\mathcal{E}}|}\right\}$:

- $(i,j) \in \mathcal{E}, (j,i) \notin \mathcal{E}$—$(i,j)$ 单向边，放入 $\bar{\mathcal{E}}$
- $(i,j) \in \mathcal{E}, (j,i) \in \mathcal{E}$— $(i,j)$ 或 $(j,i)$ 双向边，视为同一条边，只择其一放入 $\bar{\mathcal{E}}$

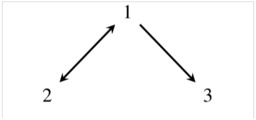
压缩关联矩阵 $E \in \mathbb{R}^{|V| \times |\bar{\mathcal{E}}|}$

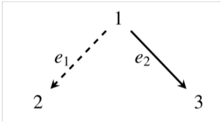
- $e_s = (i,j) \in \bar{\mathcal{E}}$，则当 $l = i$，有 $[E]_{ls} = 1$; 当 $l = j$，有 $[E]_{ls} = -1$; 否则 $[E]_{ls} = 0$
- 无向图的关联矩阵定义 2 是压缩关联矩阵的特例

压缩入关联矩阵 $\bar{E} \in \mathbb{R}^{|V| \times |\bar{\mathcal{E}}|}$

- $e_s = (i,j) \in \bar{\mathcal{E}}$ 是双向边，则当 $l = i$，有 $[\bar{E}]_{ls} = 1$; 当 $l = j$，有 $[\bar{E}]_{ls} = -1$；否则 $[\bar{E}]_{ls} = 0$
- $e_s = (i,j) \in \bar{\mathcal{E}}$ 是单向边，则当 $l = j$，有 $[\bar{E}]_{ls} = -1$；否则，$[\bar{E}]_{ls} = 0$

# 边拉普拉斯矩阵




$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = \bar{E}E'$
- 压缩边拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}_e = E'\bar{E}$

⋆ $\mathcal{L}_e$ 和 $\mathcal{L}$ 具有相同的非零特征根

# 边拉普拉斯矩阵

## 包含一颗有向生成树的图

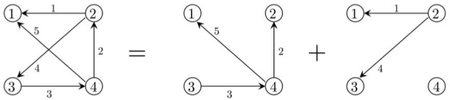



Fig. 2. A graph can be represented (not necessarily in a unique way) as a tree and edges that complete its cycles

令 $\bar{E} = \left[\bar{E}_t, \bar{E}_r\right]$， $E = [E_t, E_r]$，其中 $\bar{E}_t, E_t$ 对应有向生成树上的边，$\bar{E}_r, E_r$ 对应剩下的边

- 存在矩阵 $T$ 使得 $E_r = E_t T$
- 令 $R = [I, T], M = E_t'\bar{E}$，$\theta$ 是 $E$ 的零空间的一组正交基，则有 $\mathcal{L}_e$ 相似于

$$\begin{bmatrix} MR' & M\theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{(|\bar{\mathcal{E}}|-N+1)\times(|\bar{\mathcal{E}}|-N+1)} \end{bmatrix}$$

- 当 $(i,j)$ 是双向边，假设 $\epsilon_{ij}(k)=\epsilon_{ji}(k)$
- 定义边 $e_s=(i,j)\in\overline{\mathcal{E}}$ 的状态:

$$z_s = x_i - x_j$$

- 令 $\zeta_s=\epsilon_{ji}$ 描述边 $e_s$ 的丢包情况，其丢包率为 $p_s$

☞

$$\begin{aligned} u_i(k) &= K\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\epsilon_{ij}(k)\left(x_j(k)-x_i(k)\right) \\ &= -K\sum_{l=1}^{|\bar{\mathcal{E}}|}\zeta_l(k)[\bar{E}]_{il}z_l(k) \end{aligned}$$

☞ 对任意 $e_s=(i,j)\in\overline{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned} z_s(k+1) &= Ax_i(k)+Bu_i(k)-Ax_j(k)-Bu_j(k) \\ &= Az_s(k)+B\left[u_i(k)-u_j(k)\right] \\ &= Az_s(k)-BK\sum_{l=1}^{|\bar{\varepsilon}|}\zeta_l(k)\left([\bar{E}]_{il}-[\bar{E}]_{jl}\right)z_l(k) \end{aligned}$$

# 带丢包的多智能体系统一致性控制分析

- $$\begin{aligned}[\mathcal{L}_e]_{sl} &= \left[E'\bar{E}\right]_{sl} = \sum_{q=1}^{N}[E]_{qs}[\bar{E}]_{ql} \\ &= [E]_{is}[\bar{E}]_{il} + [E]_{js}[\bar{E}]_{jl} = [\bar{E}]_{il} - [\bar{E}]_{jl}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_s(k+1) = Az_s(k) - BK\sum_{l=1}^{|\bar{\mathcal{E}}|}\zeta_l(t)\,[\mathcal{L}_e]_{sl}\,z_l(k)$$

- 令 $Z(k) = \left[z_1'(k), \ldots, z_{|\overline{\mathcal{E}}|}'(k)\right]'$, $\zeta(k) = \mathrm{diag}\left\{\zeta_1(k), \ldots, \zeta_{|\overline{\mathcal{E}}|}(k)\right\}$

$$\Rightarrow Z(k+1) = \left(I_{|\overline{\mathcal{E}}|} \otimes A - \mathcal{L}_e\zeta(k) \otimes BK\right) Z(k)$$

**均方一致性问题等价于 $Z(k)$ 系统的均方镇定问题**

- 令 $Z(k)=[Z_t'(k),Z_r'(k)]'$，其中 $Z_t$ 对应有向生成树上的边状态，$Z_r$ 是剩下的边状态

**引理 4**

当假设条件②成立，存在矩阵 $T$，使得 $Z_r=(T'\otimes I)\,Z_t$

**证明：**

对任意 $e_s=(i,j)\in\overline{\mathcal{E}}$:

$$z_s=x_i-x_j=E_{is}x_i+E_{js}x_j=\sum_l E_{ls}x_l=\sum_l E_{sl}'x_l$$

$$\Rightarrow Z=(E'\otimes I)\,X$$

$$\Rightarrow [Z_t',Z_r']'=\left([E_t,E_r]'\otimes I\right)X$$

$$\Rightarrow Z_t=(E_t'\otimes I)\,X,Z_r=(E_r'\otimes I)\,X$$

当假设条件②成立，存在矩阵 $T$，使得 $E_r=E_tT$

$$\Rightarrow Z_r=((T'E_t')\otimes I)\,X=(T'\otimes I)\,(E_t'\otimes I)\,X=(T'\otimes I)\,Z_t$$

# 带丢包的多智能体系统一致性控制分析

$$\mathcal{L}_e = E'\bar{E} = \begin{bmatrix} E'_t \\ E'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_t & \bar{E}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_t\bar{E}_t & E'_t\bar{E}_r \\ E'_r\bar{E}_t & E'_r\bar{E}_r \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Z_t(k+1) \\ Z_r(k+1) \end{bmatrix} = \left( I_{|\bar{\mathcal{E}}|} \otimes A - \left\{ \begin{bmatrix} E'_t\bar{E}_t & E'_t\bar{E}_r \\ E'_r\bar{E}_t & E'_r\bar{E}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_t(k) & \\ & \zeta_r(k) \end{bmatrix} \right\} \otimes BK \right) \begin{bmatrix} Z_t(k) \\ Z_r(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Z_t(k+1) &= (I \otimes A) Z_t(k) - \left( [E]'_t [\bar{E}]_t \zeta_t(k) \otimes BK \right) Z_t(k) \\ &\qquad - \left( [E]'_t [\bar{E}]_r \zeta_r(k) \otimes BK \right) Z_r(k) \\ &= (I \otimes A) Z_t(k) - \left[ \left( [E]'_t [\bar{E}]_t \zeta_t(k) \ + [E]'_t [\bar{E}]_r \zeta_r(k) T' \right) \otimes BK \right] Z_t(k) \\ &= \left( I \otimes A - M\zeta(k) R' \otimes BK \right) Z_t(k) \end{aligned}$$

(P26 $R = [I, T], M = E'_t\bar{E}$)

**均方一致性问题等价于 $Z_t(k)$ 系统的均方镇定问题**

# 带丢包的多智能体系统一致性控制分析

$\zeta(k)$ 的均值：$\Lambda = \mathrm{diag}\{1- \ p_1, \ldots, 1 - p_{|\bar{\mathcal{E}}|}\}$
$\zeta(k)$ 的协方差 $\Sigma = [\sigma_{ij}] \in \mathbb{R}^{|\bar{\mathcal{E}}| \times |\bar{\mathcal{E}}|}$, 其中当 $i \neq j$,
$\sigma_{ij} = \mathbb{E}\left\{\left(\zeta_i - p_i + 1\right)\left(\zeta_j - p_j + 1\right)\right\}$；$\sigma_{ii} = p_i\left(1 - p_i\right)$.

## 定理 5

当假设条件②成立，多智能体系统 *(1)* 在一致性协议 *(2)* 下取得均方一致性当且仅当存在 $K$ 和 $P > 0$ 满足

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} > & \left(I \otimes A + (M\Lambda R') \otimes (BK)\right)' \mathcal{P} \left(I \otimes A + (M\Lambda R') \otimes (BK)\right) \\
& + \left(R' \otimes K\right)' G \left(R' \otimes K\right)
\end{aligned}
$$

其中，$G = (\Sigma \otimes \mathbf{1}\mathbf{1}') \odot ((M \otimes B)'\mathcal{P}(M \otimes B))$