线性系统理论

(Linear System Theory)

程鹏 教授 编写

北京航空航天大学内部讲义

参考书：

一、矩阵方面：

1.(日)须田信英等，曹长修译 ：

《自动控制中的矩阵理论》 科学出版社 1979

2.黄琳 ：

《系统与控制理论中的线性代数》，科学出版社 1984,2017.

3.韩京清，许可康 ，何关钰：

《线性系统理论的代数基础》，辽宁科技出版社1987

二、线性系统理论方面：

1. T.KAILATH：*Linear Systems*
1985年有中译本，李清泉等译：凯拉斯：《线性系统》。

2. C.T.CHEN: *Linear System Theory and Design*

(王纪文、毛剑琴等译)：

《线性系统理论与设计》，1988年中译本

3. 郑大钟：

《线性系统理论》清华大学出版社，1992、2002

其余见篇末文献。

课程的地位与目的

本课程是**控制科学与工程一级学科**研究生的**公共学位课**和**基础及学科理论核心课**。

通过本课程学习，要求学生掌握线性系统的**一般概念**和研究线性系统分析与综合设计的**一般方法**，为进一步学习其它控制理论奠定**坚实的基础**。

本课程理论性强，用到较多数学工具，因此，对培养学生的抽象思维、逻辑思维，提高学生运用数学知识处理控制问题的能力具有重要作用。

一、控制论产生的背景

社会背景

现代社会的生产和管理对于高度自动化水平的需要

社会一旦有技术上的需要，则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进。

—— 恩格斯

直接原因

二战期间，维纳参加了火炮控制和电子计算机的研制工作。1943年，维纳、毕格罗和罗森布鲁特三人共同发表了《行为、目的和目的论》，首先提出了“控制论”这个概念，第一次把只属于生物的有目的的行为赋予机器，阐明了控制论的基本思想。1948年维纳发表了著名的《控制论—关于在动物和机器中控制和通讯的科学》”Cybernetics-or control and communication in the animal and the machine”，控制论诞生。

二、我国古老的自动装置

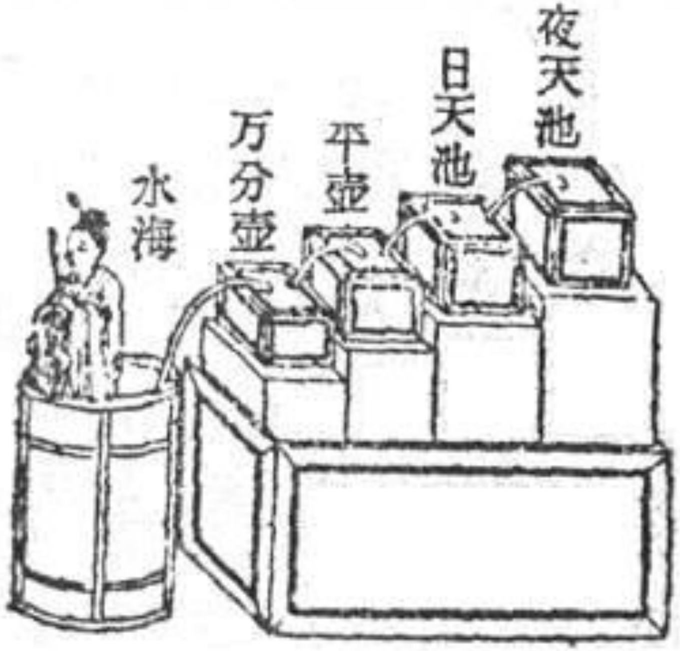


圖 64 唐代吕才刻漏

（采圖書集成）

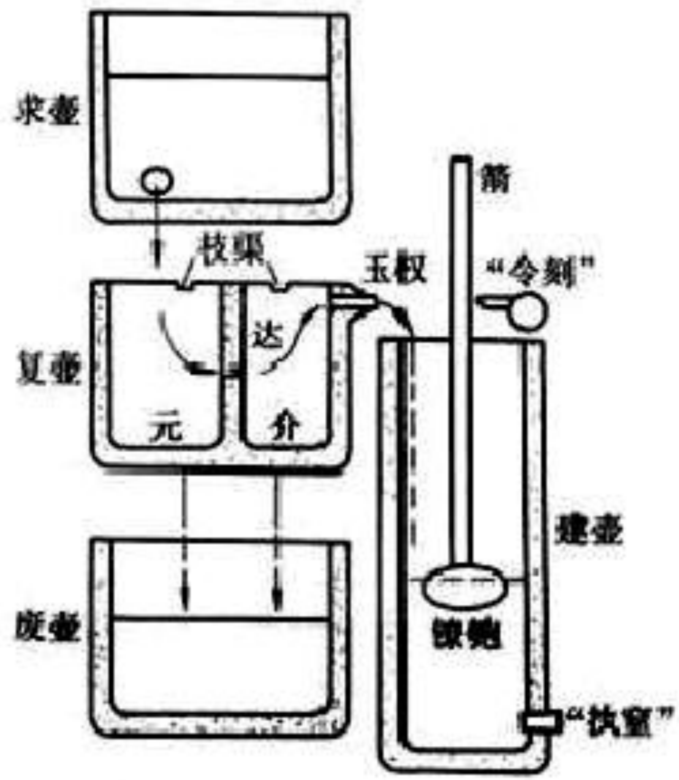
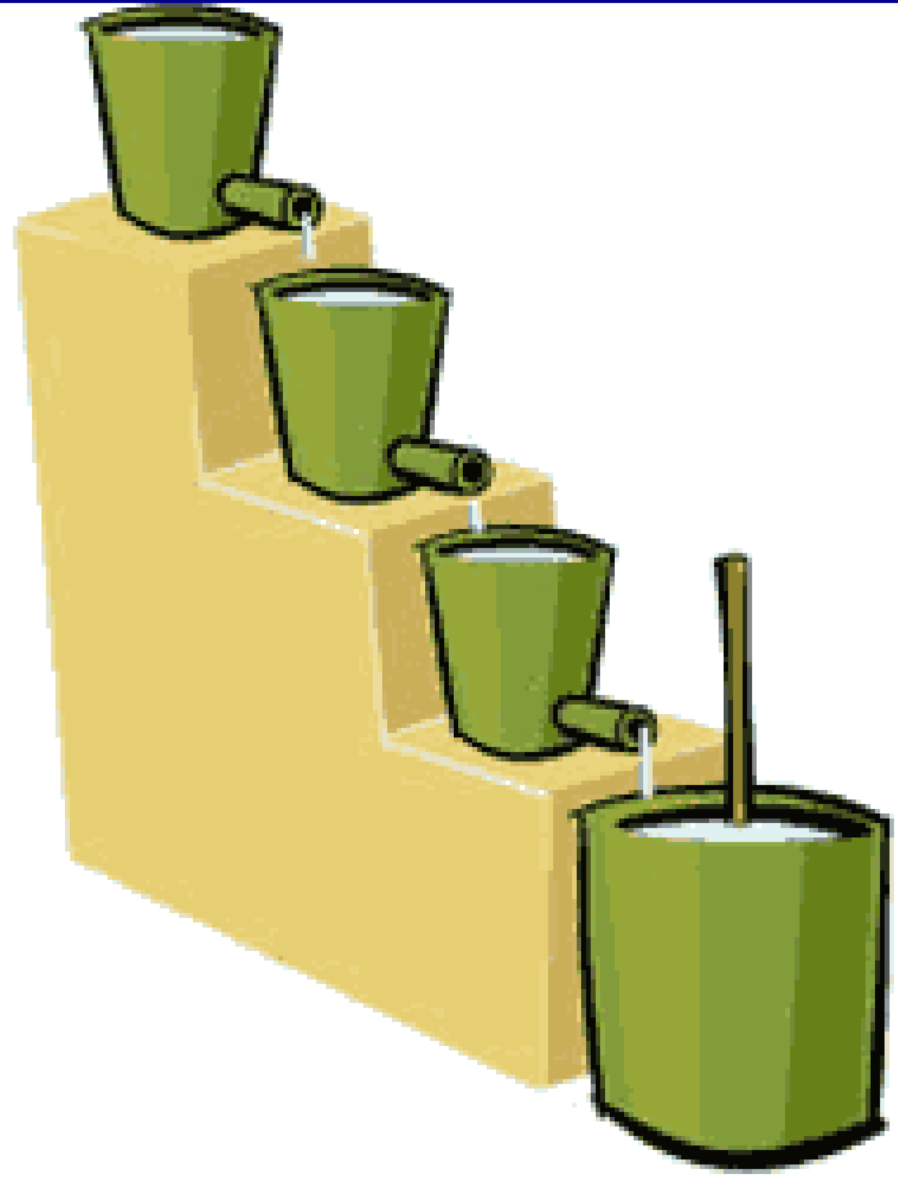
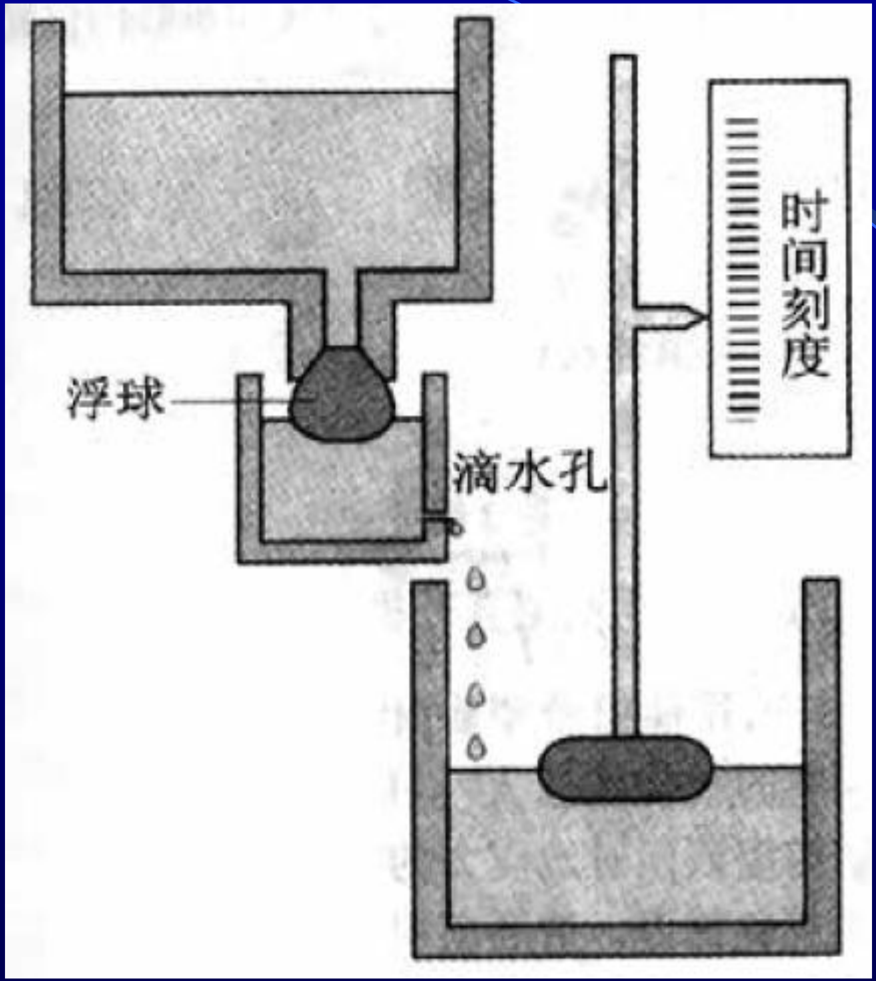


图 3 沈括玉壶浮漏原理图

（水钟）




浮球
滴水孔
时间刻度

指南车

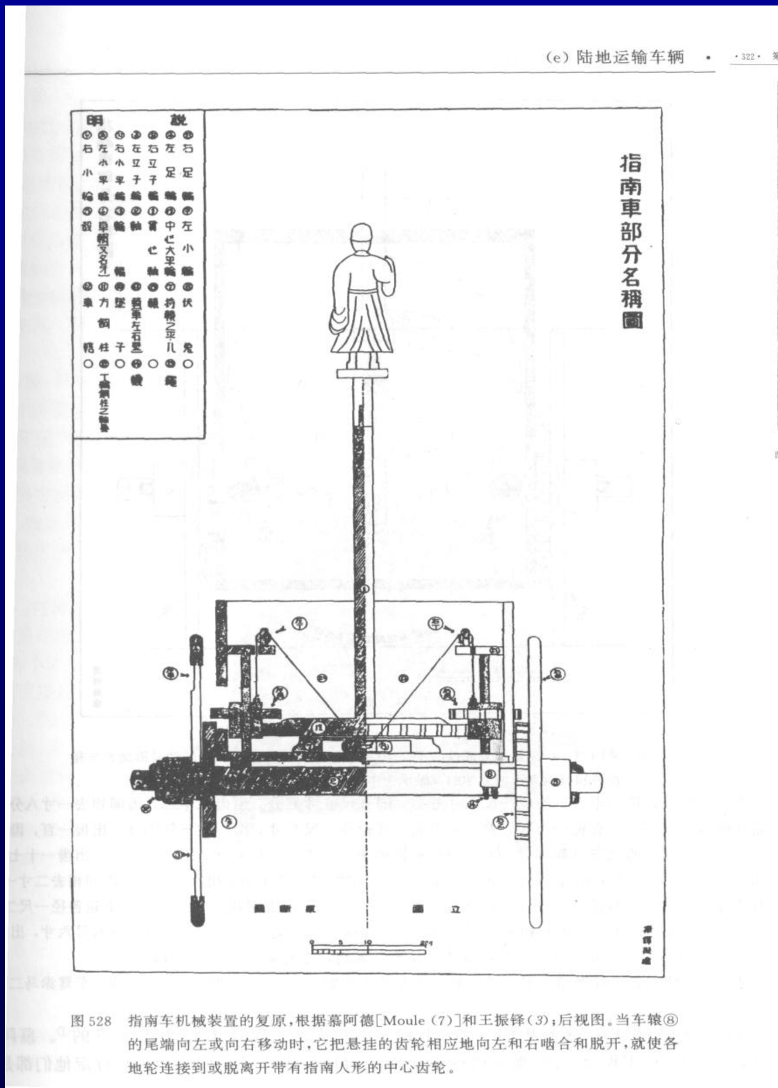


图 528 指南车机械装置的复原，根据慕阿德[Moule (7)]和王振铎(3)；后视图。当车辕⑧的尾端向左或向右移动时，它把悬挂的齿轮相应地向左和右啮合和脱开，就使各地轮连接到或脱离开带有指南人形的中心齿轮。

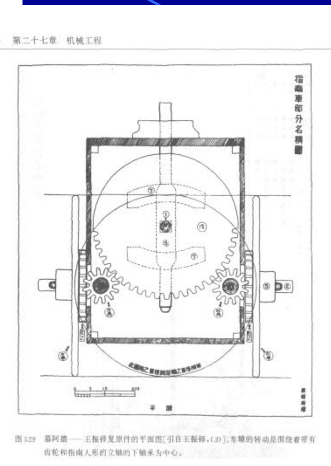


图 529 慕阿德——王振铎复原件的平面图[引自王振铎，(3)]。车辕的转动是围绕着带有齿轮和指南人形的立轴的下轴承为中心。

喷射飞机始祖”万户”(约十四世纪末)

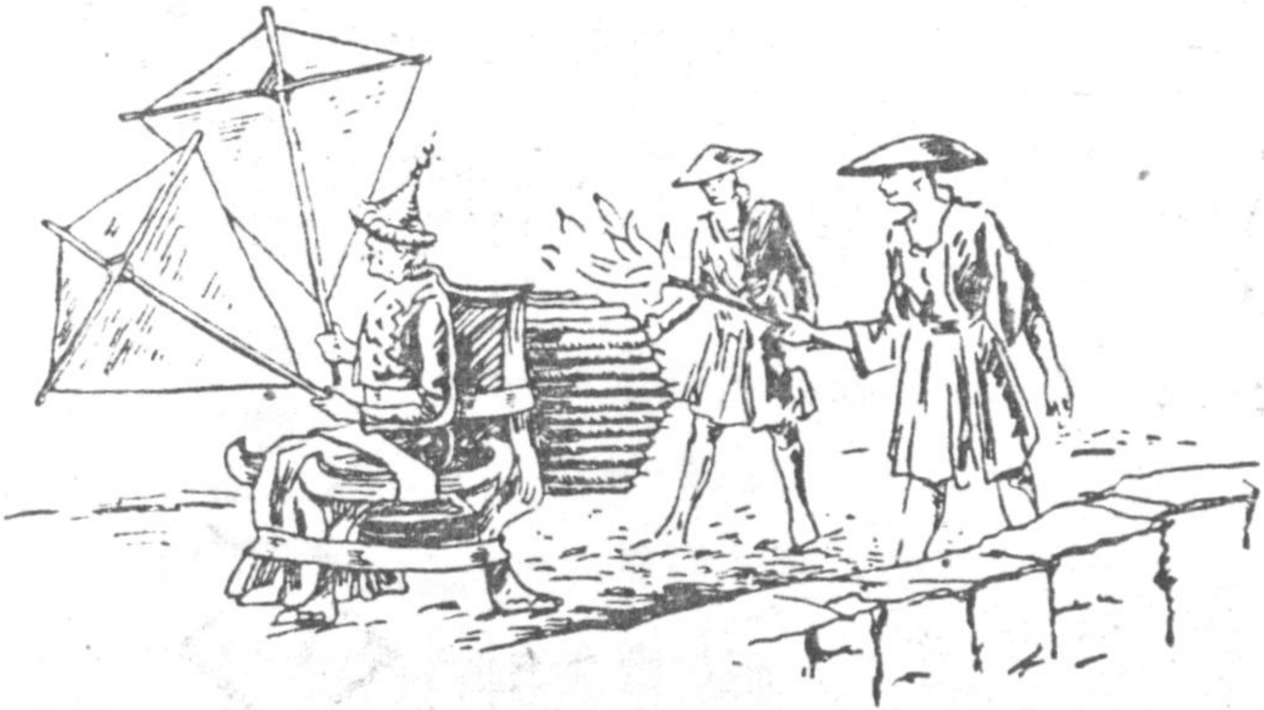


圖 84 噴射飛机的始祖

(采 Zim: Rockets and Jets)

三、近代科学技术史上自动装置

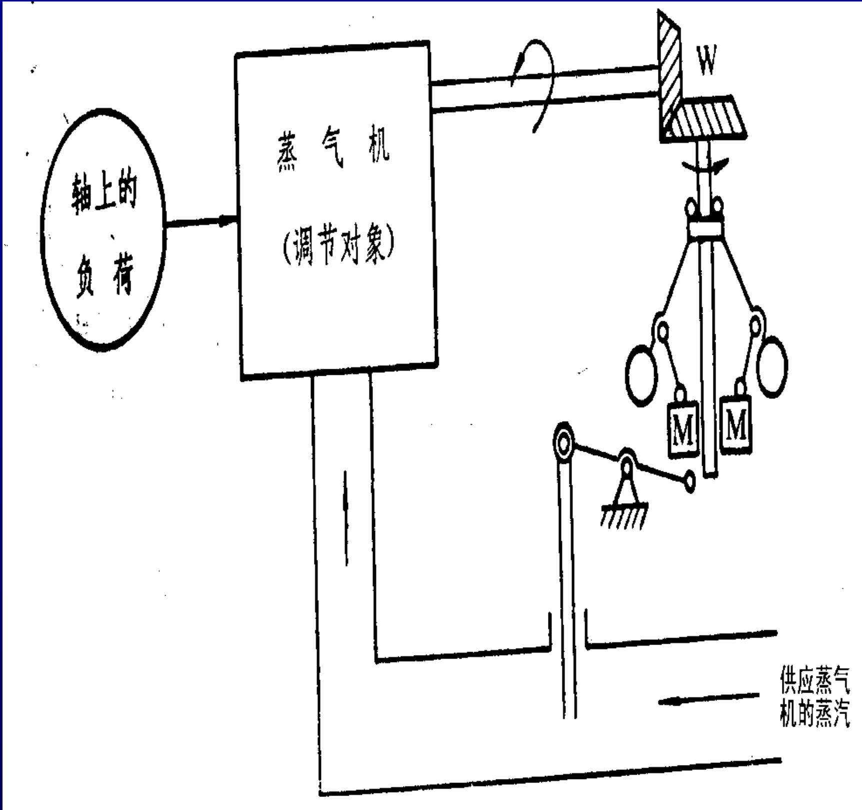
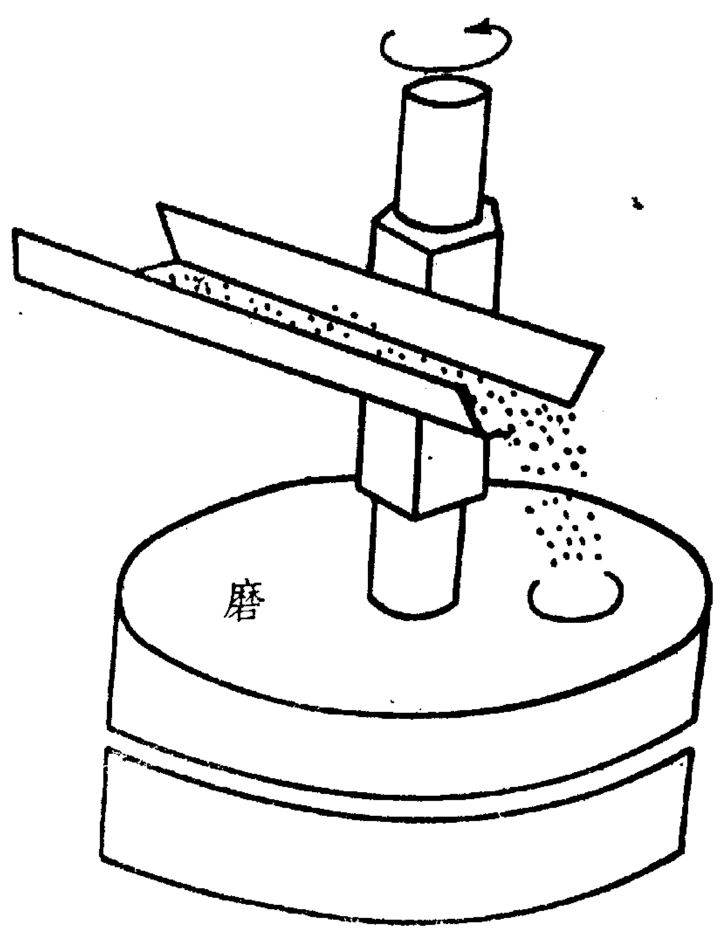


图1·3 蒸气机轴转速的离心式调节器



温度控制系统

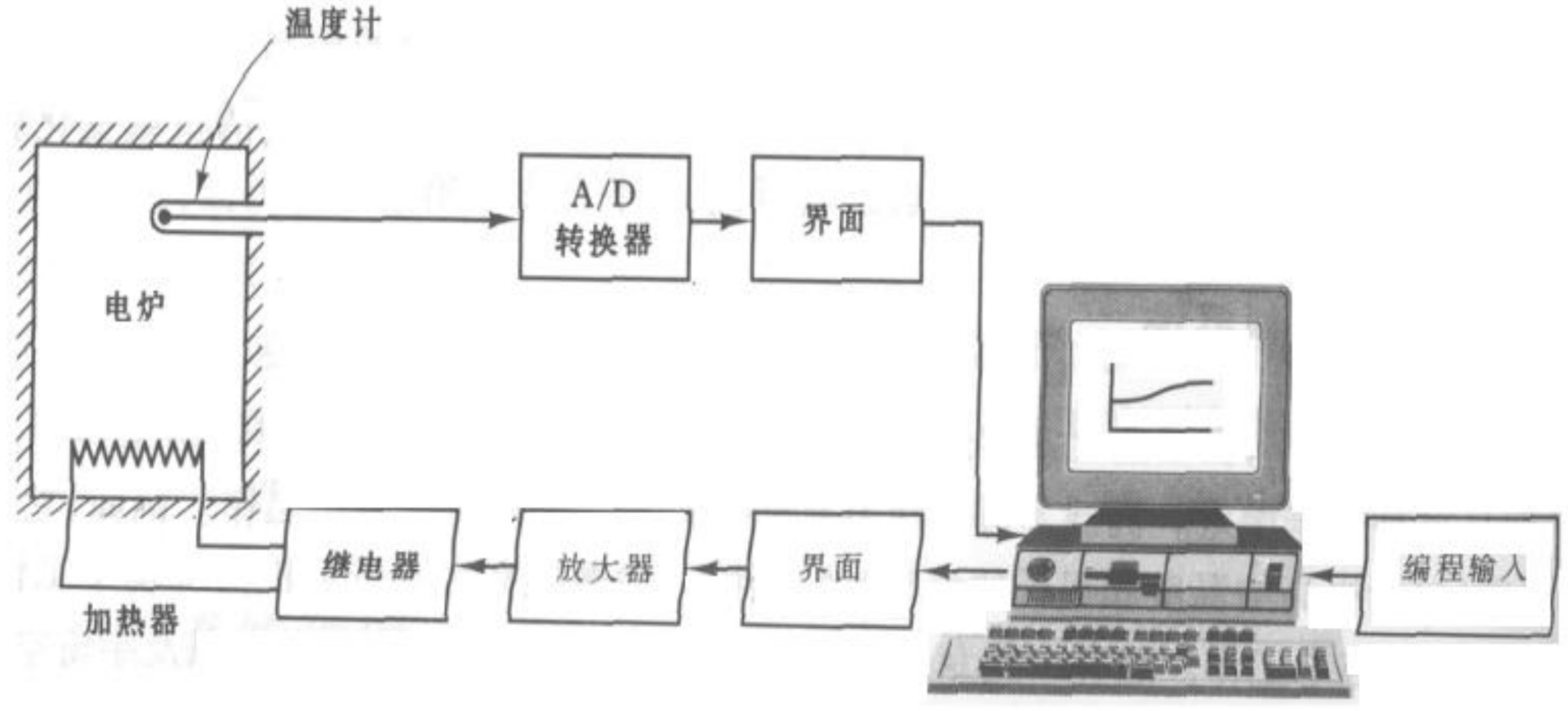
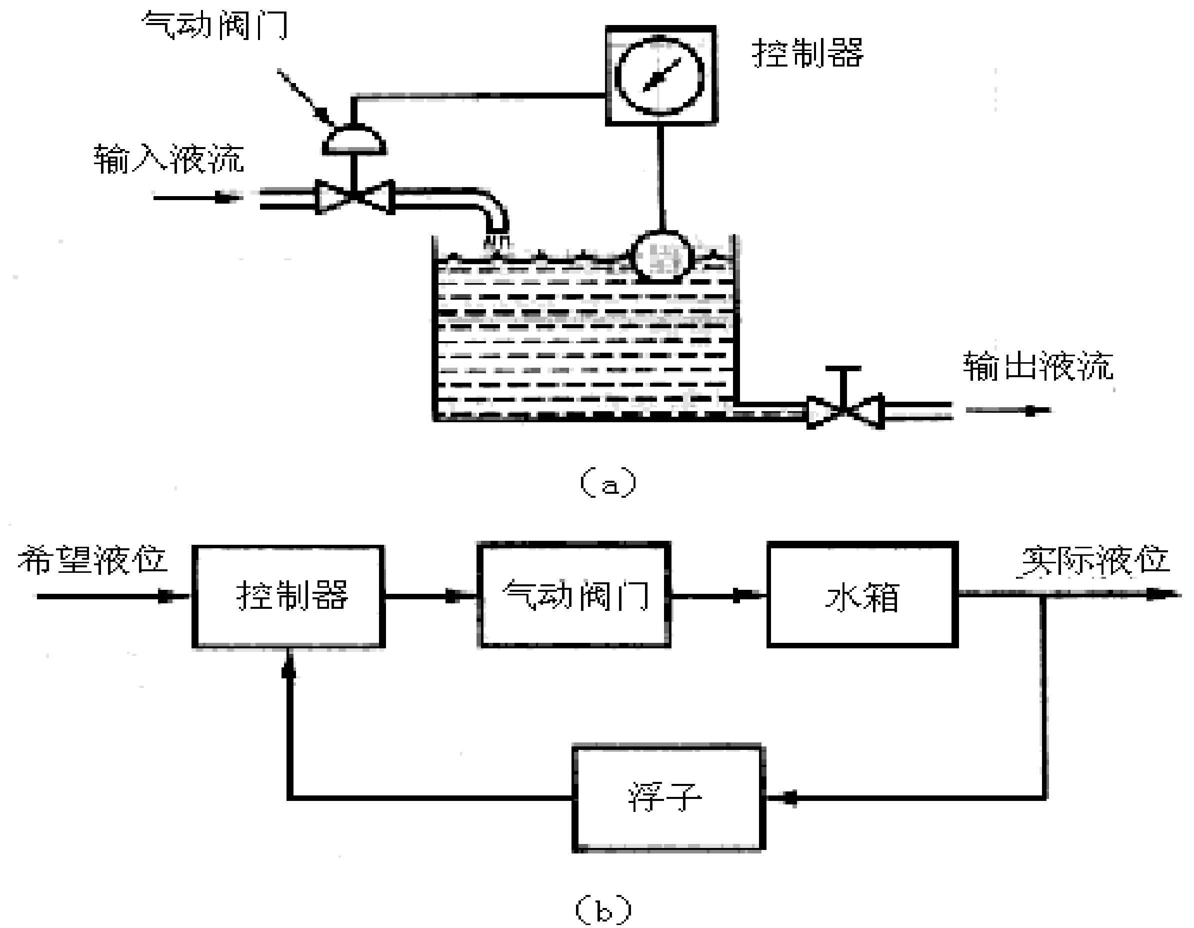


图 1-3　温度控制系统

水位控制系统



(a) 液位控制系统； (b) 方框图

四、控制论的基本概念和方法

1、什么是控制?

为了改善某个对象的功能，需要获得并使用信息，以这种信息为基础而选出的，加于该对象上的作用。

受控对象(研究对象)是系统。动态系统（连续变量、离散事件）

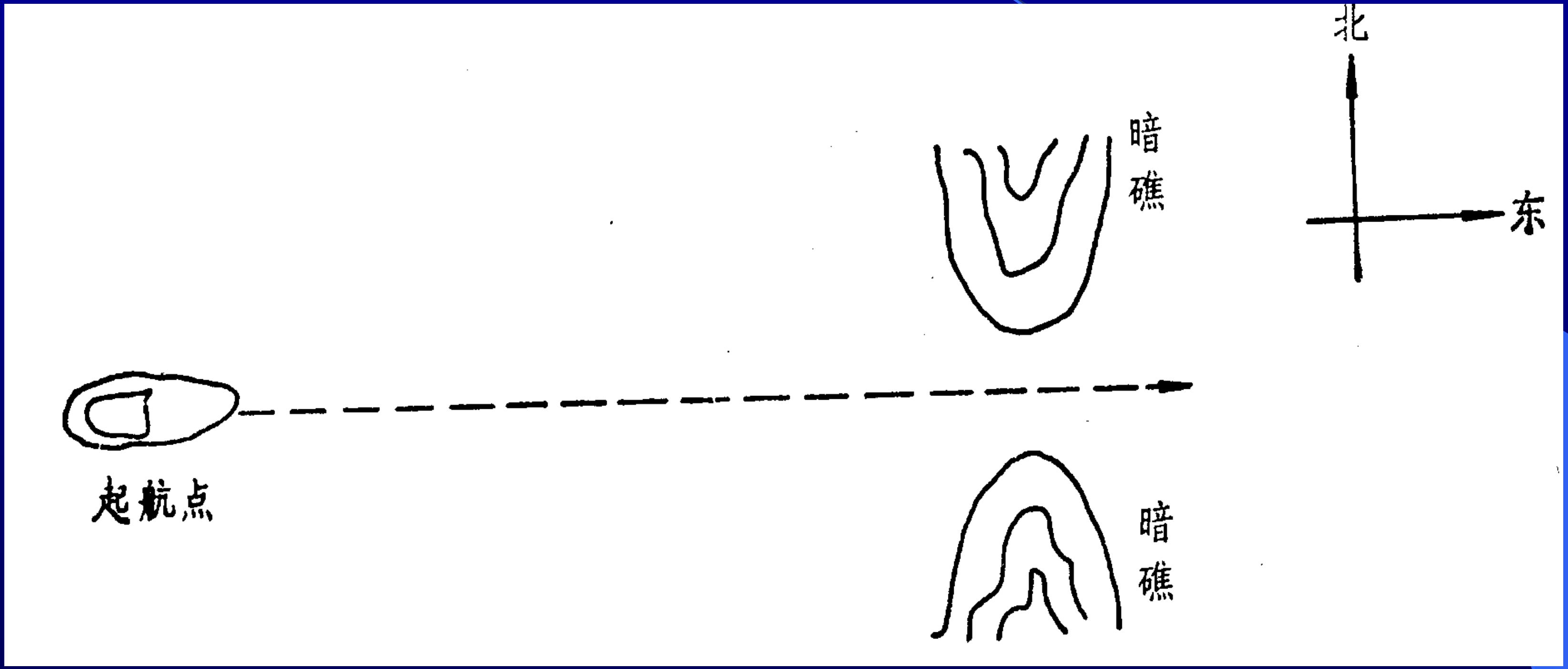
2、反馈

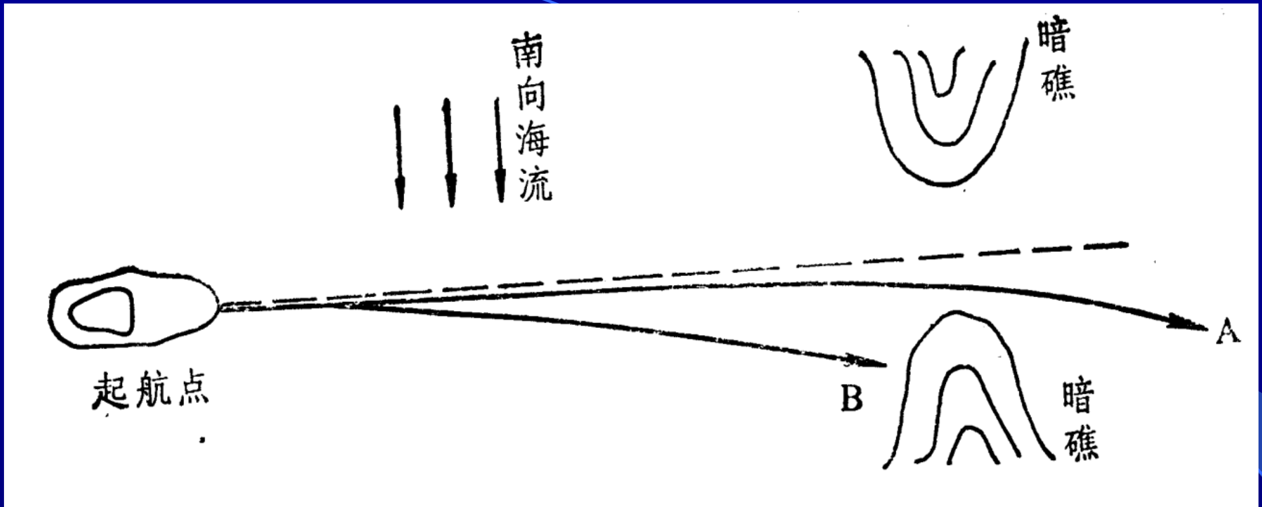
“一切有目的的行为都可以看作需要负反馈的行为。”

——《行为、目的和目的论》

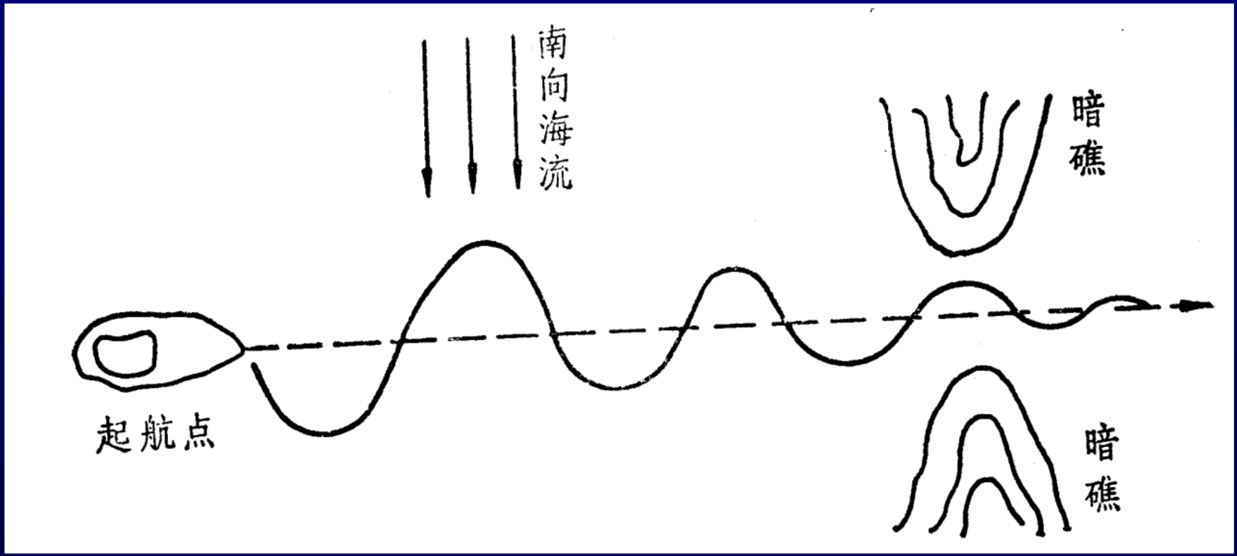
突破了动物与机器之间的界限

简单例子





无负反馈时的航线

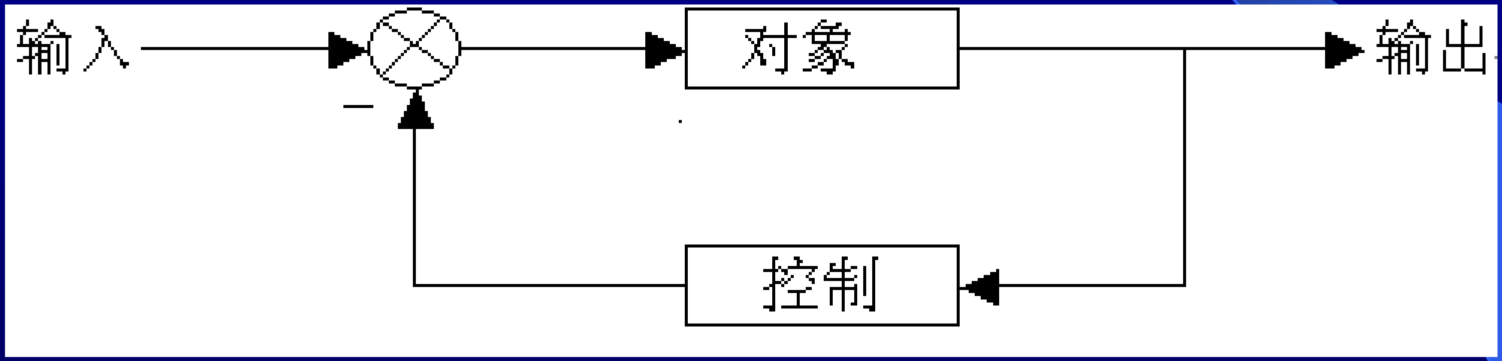


有负反馈时的航线

控制思想（基本动作原理）

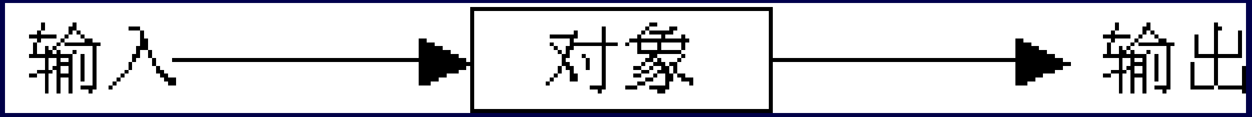
1、按偏差进行补偿的系统

特点：系统中至少有一个将输出量加以回输的闭环回路，是具有反馈的闭环系统。

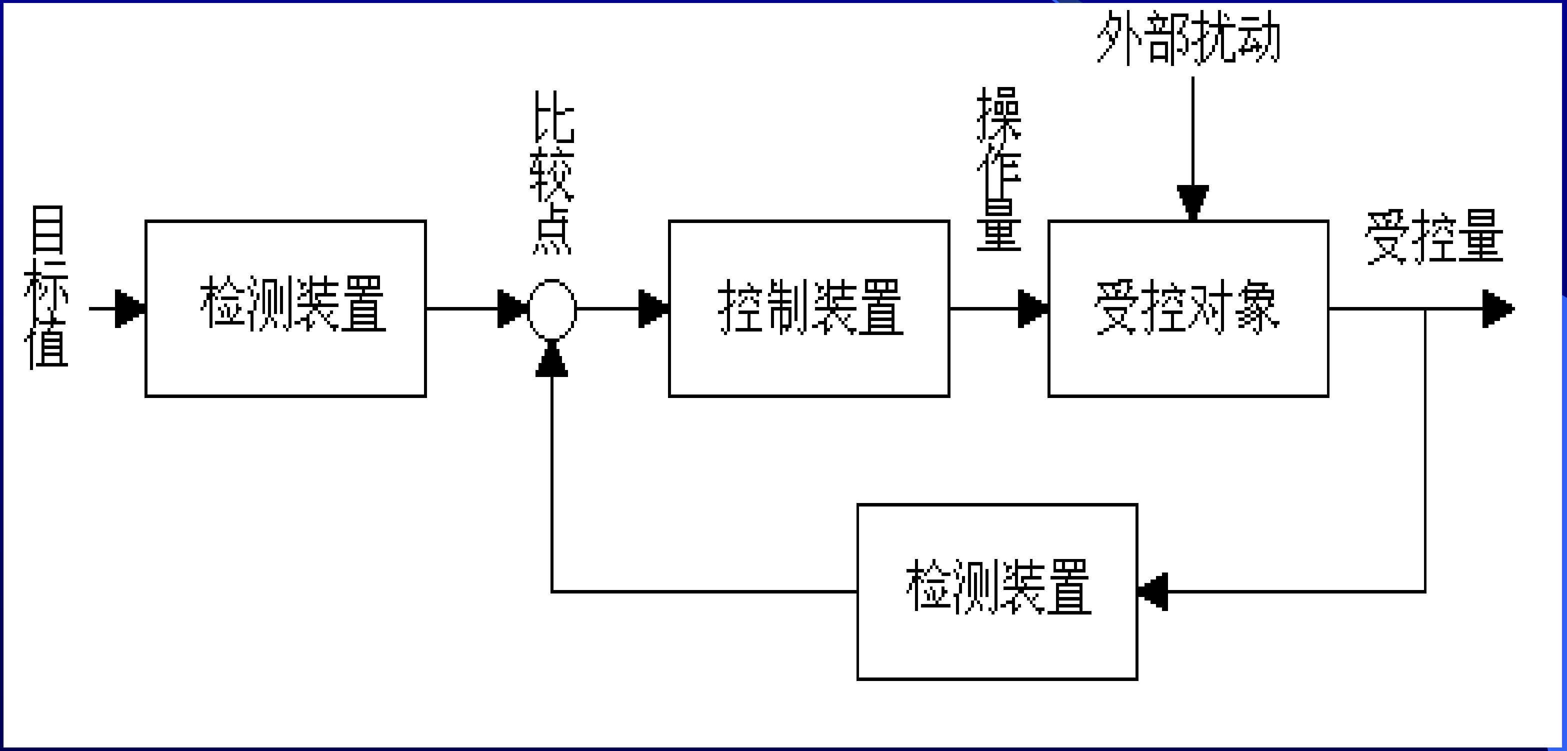


2、按扰动/进行调节的系统

特点：输入量按负荷的变化而成比例的改变以趋近目标值，是开环系统，抗干扰能力差。



一般自动控制系统的结构图



五、控制论的主要分支

- 工程控制论

控制论在工程技术方面（机械的、电机的和电子的自动控制系统）上的运用。又称自动控制理论，或简称控制理论（control theory）

– 我国著名科学家钱学森1954年在美国出版了《工程控制论》一书。

发展的几个阶段：

四十至五十年代：经典控制理论

六十至七十年代：现代控制理论

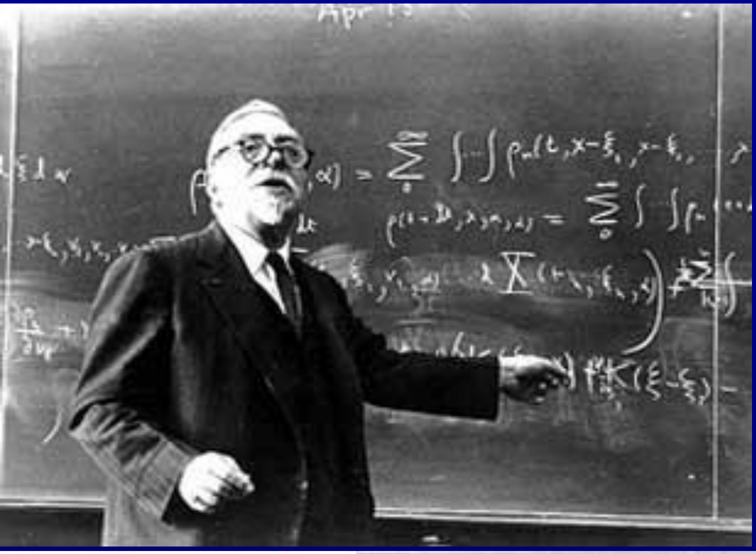
七十年代以后：大系统控制理论

九十年代以后：复杂系统控制理论

21世纪信息技术与控制理论

。。。。。。

Two 'Classical' Books



- N. Wiener (1948). *Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine.*

- H.S.Tsien (1954). Engineering Cybernetics.

经典控制理论
Classical Control Theory

- 1932, Nyquist stability criterion(稳定性判据)
- 1940s, Bode plot (Bode 图)
- 1948, Evans root locus (Evans根轨迹法)

现代控制理论
Modern Control Theory

- 1958, Pontryagin 最大值原理
- 1960s, Bellman 动态规划
- 1960s, Kalman 线性系统一般理论

- 生物控制论
- 社会控制论

  人口控制
- 经济控制
- 智能控制论

六、线性系统的主要内容和学派

- **主要内容**：研究线性系统状态的运动规律和改变这种运动规律的可能性和方法，以建立和揭示系统结构、参数、行为和性能间的确定的和定量的关系。
- **研究对象**：(线性的)模型系统，不是物理系统
- **主要学派**
  - 状态空间几何理论 Wonham
  - 状态空间代数理论 Kalman
  - 多变量复频率域方法 Rosenbrock, Wolovich
- **研究工具**：微分方程、线性代数、矩阵论

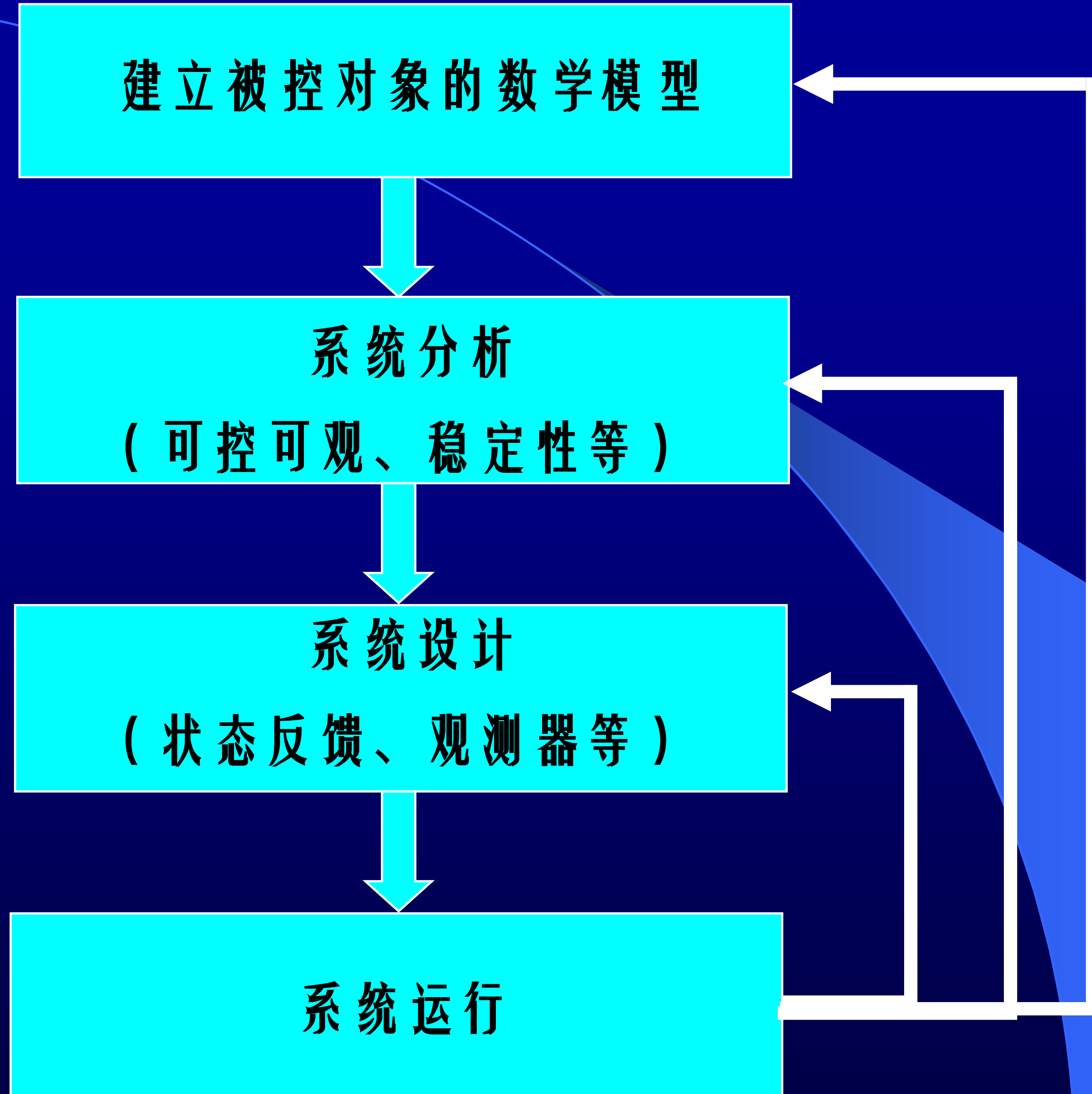
工程控制问题的主要研究方法与步骤

1. **建立描述物理系统状态的数学模型** 通过实验、物理定律和数学方程等来得到。一般由微/差分方程、偏微分方程或代数方程等构成。

2. **基于模型的系统分析** 包括 定性分析和定量分析。

3. **系统设计** 通过设计控制器或改变控制律来改善系统的性能指标。

4. **系统运行**


建立被控对象的数学模型
系统分析
（可控可观、稳定性等）
系统设计
（状态反馈、观测器等）
系统运行

关于作业

- **Normally, 1 assignment per Chapter.**
- ***NO LATE ASSIGNMENT***
- ***Collaboration is OK, but copying is NOT!***

课程主要章节的计划学时分配

第一章	线性系统的基本概念	8学时
第二章	线性系统的可控性、可观测性	8学时
第三章	线性时不变系统的标准形和实现	8学时
第四章	状态反馈设计	10学时
第五章	输出反馈、观测器和动态补偿器	6学时
第六章	时变线性系统	0学时
第七章	系统稳定性分析	8学时

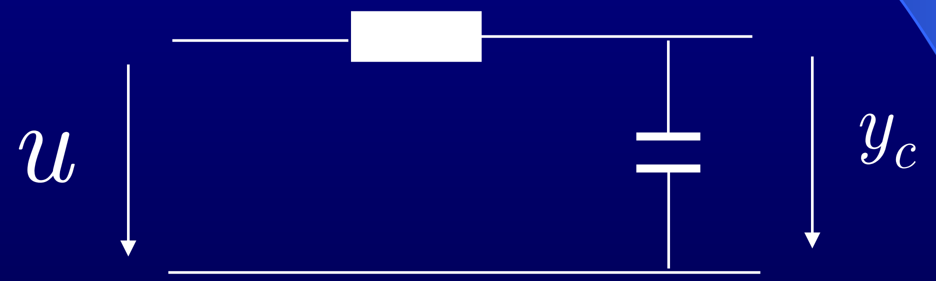
根据实际情况，各章所用学时会稍微有所调整。

第一章

线性系统的基本概念

线性系统理论研究对象是由物理系统中抽象出的线性模型系统。系统可用框图表示：

考虑一个简单的R-C电路：



根据物理定律可写出它的数学模型：

$$\dot{y}_c = -\frac{1}{\tau} y_c + \frac{1}{\tau} u \qquad \tau = RC$$

控制系统的数学描述常用的方法有：

输入/输出描述，状态空间描述

- 输入/输出描述的是系统的外部特性。在工程上简便易行，得到广泛应用；
- 状态空间描述包括了系统的内外部特性，是一种全面的描述方法。由于获得了系统的全面信息，故可设计出性能良好的系统。但在许多情况下，实现系统的状态空间描述是困难的。

§1—1　系统的输入—输出描述

一、输入 / 输出描述

系统的输入/输出描述：不知道系统的内部结构信息，唯一可测量的量是系统的输入和输出信号。此时可将系统视为一个“黑箱”：

通过向该黑箱施加各种类型的输入并测量与之相应的输出，然后从这些输入/输出关系中得出系统的重要特性。

一个系统可有多个输入和多个输出。为简洁，可用向量表示输入和输出：

$$u=[u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_p]^T \in \mathbf{R}^p,$$

$$\mathbf{y}=[y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_q]^T \in \mathbf{R}^q$$

于是可引入多变量和单变量系统的定义：

定义1—1 当且仅当$p = q = 1$时，系统称为**单变量系统**。否则称为**多变量系统**。

经典控制论就主要讨论单变量系统。

二、初始松弛的概念

问题：

在什么样的条件下，由输入可以唯一地确定输出？

这个问题的意义是：如果一个只有输入和输出可测量的系统，即输入—输出系统，对相同的输入有不同的输出，那么对其描述就没有意义。

例

考察简单的二阶系统：

$$\ddot{y}_c + 2\dot{y}_c + y_c = u \quad t \ge t_0 = 0$$

其确定定解的条件是

$$\dot{y}_c(0)、y_c(0)$$

由于只有输入和输出可以测量， 若其初始条件 $\dot{y}_c(0)$不能确定，则由输入 u 就不能唯一确定输出。从工程应用的角度，由于u 一般是控制量，这意味着此时无法知道输出中哪些部分是由控制引起的，哪些是由初始条件（储能）引起的，因而无法判断控制u 对系统的影响。

在经典传递函数描述中，总假定系统的初始条件为零，这样，就可以由**输入唯一地确定输出**：

$$y_c(t)=\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \Leftrightarrow y_c=Hu=h*u$$

从能量的角度看，

$$\dot{y}_c(0)、y_c(0)$$

表示从 $-\infty$ 到t=0这个时间段内系统的储能。

对于一个任意的物理系统，假定其在$-\infty$处的储能为零，或者说，在$-\infty$ 处于松弛状态或静止状态总是合理的。这样就引入了初始松弛的概念：

定义： 称 $-\infty$ 时松弛或静止的系统为初始松弛系统或简称为松弛系统。

根据前面的分析，对于一个松弛系统，自然就有

$$\mathbf{y}=\mathbf{Hu} \qquad (1\text{—}1)$$

其中，**H**是某一算子，通过它由系统的输入**唯一地**确定了系统的输出。为方便，式（1—1）也可用下面等价的写法表示：

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{Hu}_{(-\infty,+\infty)} \qquad \forall t\in(-\infty,+\infty) \qquad (1-2)$$

一般地，$u_{(t_1,t_2)}$ 表示一个定义在（t_1, t_2)上的函数。

关于算子H:

传递函数是最容易理解的（线性）算子：

$$y(s) = H(s)u(s)$$

它将复数域上的信号 $u(s)$ 映射成复数域中的信号 $y(s)$，可记为：

$$H : u(s) \to H(s)u(s)$$

在实数域上，算子 H 是卷积运算：

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$H : u \to Hu := h * u$$

$$H : u \rightarrow Hu := h * u$$

即： $y(t) = Hu = Hu_{[0,t]} = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0,t]$

其中，$h(t)$为脉冲响应函数。在许多控制论的分支中（例如自适应控制等），这样的算子表达方式是常见的。

三、 线性系统

1 线性系统的定义

定义1—2 一个松弛系统称为线性的，当且仅当对于任何输入 $\mathbf{u}^1$ 和 $\mathbf{u}^2$，以及任何实数（或复数） α_1 和 α_2 ，有

$$\mathbf{H}(\alpha_1\mathbf{u}^1+\alpha_2\mathbf{u}^2)=\alpha_1\mathbf{H}\mathbf{u}^1+\alpha_2\mathbf{H}\mathbf{u}^2 \qquad (1-3)$$

否则称为非线性系统。

（1—3）还可以等价地写成：

可加性: $$\mathbf{H}(\mathbf{u}^1+\mathbf{u}^2)=\mathbf{H}\mathbf{u}^1+\mathbf{H}\mathbf{u}^2$$

叠加原理

齐次性: $$\mathbf{H}(\alpha\mathbf{u}^1)=\alpha\mathbf{H}\mathbf{u}^1$$

讨论：

1. 满足叠加原理是一个系统是否为线性系统的唯一判别准则。
2. 叠加原理一般限制为有限项和。若不引入附加的假设，一般不能推广到无穷项的和。
3. 在下面的分析中将会看到，叠加原理将导致系统分析的简化。

例1： 考虑$Laplace$变换：

$$\mathcal{L}: x(t) \to X(s) \qquad X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

试证明$Laplace$变换是一个线性系统。

证明： 显然。

例2： 考虑如下微分方程决定的系统：

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = f(t),$$

$$t \geq 0, x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

证明这是一个线性系统。事实上，因为

$$x(t) = Hf = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

则易于验证

$$H(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 H f_1 + \alpha_2 H f_2, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{R}$$

例： 考虑单变量系统：

$$y(t)=f(u)=\begin{cases}\dfrac{u^2(t)}{u(t-1)}, & \text{if} \quad u(t-1)\neq 0\\[2mm] 0, & \text{if} \quad u(t-1)=0\end{cases}$$

容易验证，该系统满足齐次性，但不满足可加性，因此，不是线性系统。

2 线性松弛系统的脉冲响应

首先引入 δ 函数或脉冲函数的概念。

1）脉动函数($Pulse\ function$)：

$$\delta_\Delta(t-t_1)=\begin{cases}0 & t<t_1\\ \dfrac{1}{\Delta} & t_1\le t<t_1+\Delta\\ 0 & t\ge t_1+\Delta\end{cases}$$

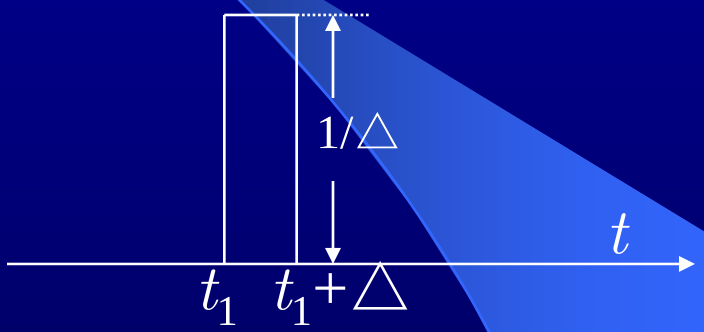
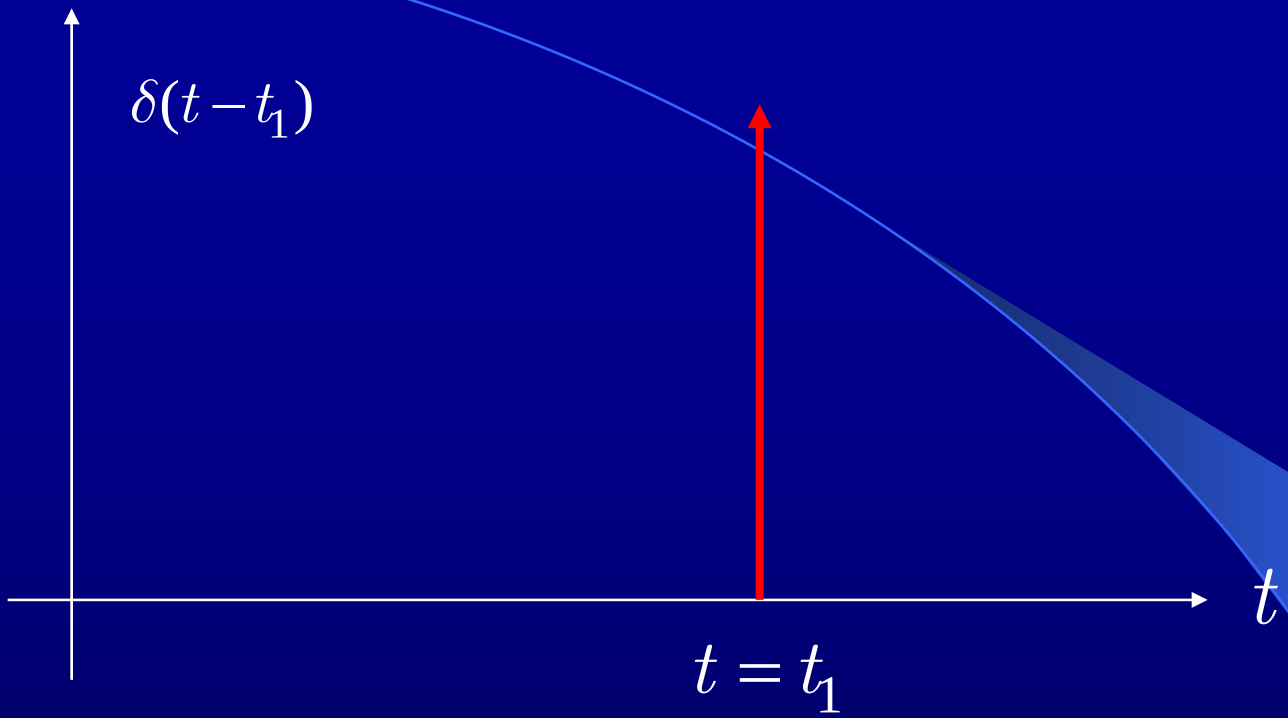


图1—2

其极限形式就是脉冲函数($Impulse\ function,\ or\ Dirac\ function$)，简称$\delta$ 函数：

$$\delta(t-t_1)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t-t_1)$$



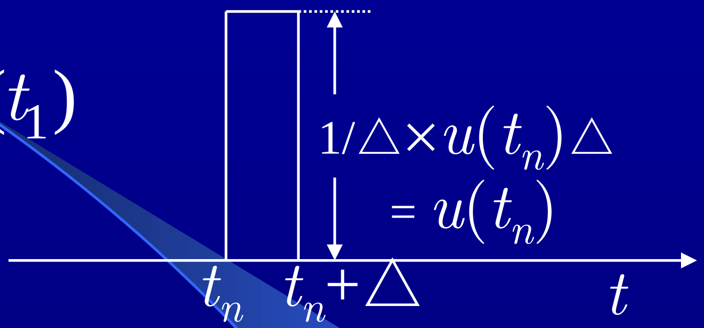
$2)$ δ **函数：** 在 t_1 时刻产生的一个作用时间无限短、幅值无穷大，且满足

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \delta(t-t_1)dt = 1$$

的信号。

- δ 函数的重要性质：采样性，即对在t_1连续的任何函数 $f(t)$，有

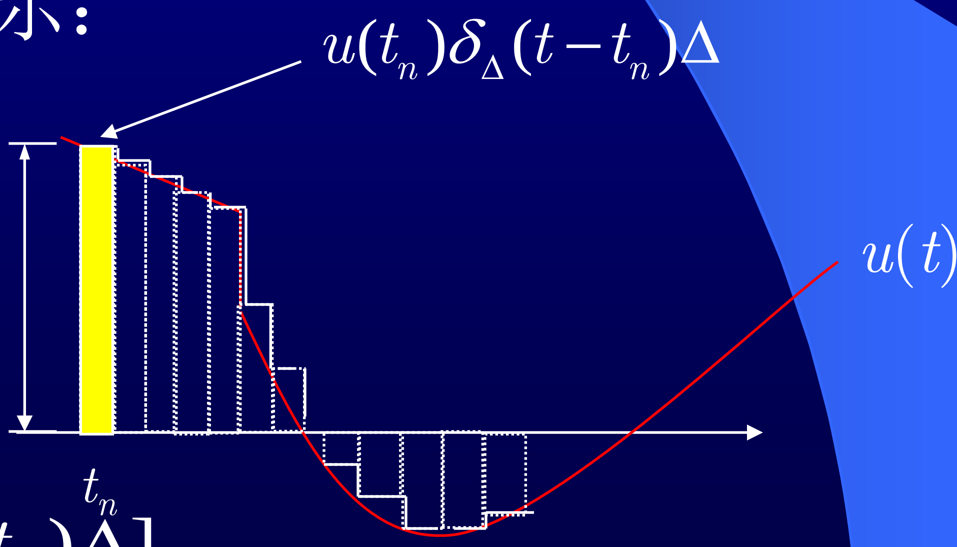
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_1)dt = f(t_1)$$



- 用$\delta_\Delta(t-t_n)$近似表示信号：每一连续或分段连续的输入$u(\cdot)$均可用一系列脉动函数来近似，如图所示：

$$u(t_n)\delta_\Delta(t-t_n)\Delta = u(t_n),$$

$$\forall t \in [t_n, t_n+\Delta)$$



因此，

$$u(t) \approx \sum_n \delta_\Delta(t-t_n)[u(t_n)\Delta]$$

3）线性系统 **y=Hu** 的脉冲响应函数：

$$y = Hu \approx H[\sum_n \delta_\Delta(t-t_n)u(t_n)\Delta]$$

$$=(\text{可加性})\sum_n H\delta_\Delta(t-t_n)u(t_n)\Delta$$

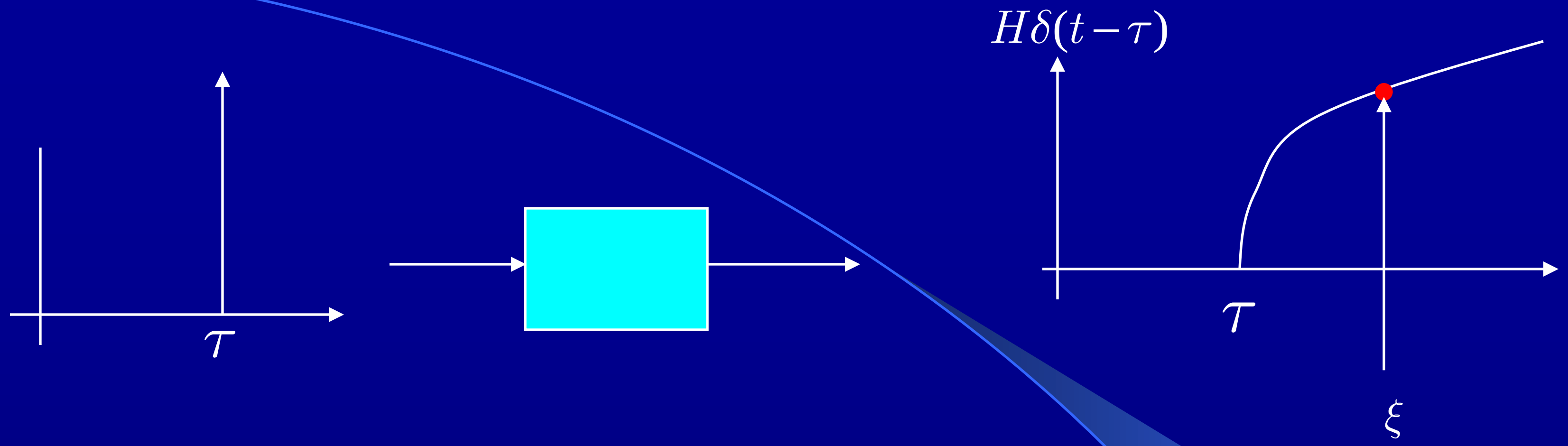
$$=\sum_n [H\delta_\Delta(t-t_n)]u(t_n)\Delta \qquad (1-7)$$

令 $t_n=\tau$ 当 $\Delta \to 0$ 时，求和号变成了积分号，

$\delta_\Delta(t-t_n)$变成了 $\delta(t-\tau)$，（1—7）式成为

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} [H\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau \qquad (1\text{-}8)$$

$H\delta(t-\tau)$ 称为系统**脉冲响应函数**，它的物理意义是在 τ 时刻对松弛系统施加一个脉冲函数而得到的系统的输出：



故脉冲响应可表示为下列双变量的函数：

$$H\delta(t-\tau)=g(\cdot,\tau) \qquad (1-9)$$

$g(\cdot,\tau)$中的变量 τ 表示δ 函数加于系统的时刻，而第一个变量为观测输出的时刻，可写成：

$$H\delta(t-\tau)=g(\xi,\tau) \qquad (1-9-1)$$

其中，ξ 是观测时刻。利用式（1-9-1）可将（1-8）改写为

$$y(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\tau)u(\tau)d\tau$$

或 $$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (1-10)$$

例： 若$H(s)=1/(s+1)$，求系统在$\delta(\xi-\tau)$作用下的单位脉冲响应。

4) 脉冲响应矩阵：若一个初始松弛的线性系统，具有 p 个输入端和 q 个输出端，则（1—10）式可相应地推广为

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

其中

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\begin{bmatrix} g_{11}(t,\tau) & g_{12}(t,\tau)\cdots g_{1p}(t,\tau) \\ g_{21}(t,\tau) & g_{22}(t,\tau)\cdots g_{2p}(t,\tau) \\ \vdots & g_{ij}(t,\tau)\cdots \\ g_{q1}(t,\tau) & g_{q2}(t,\tau)\cdots g_{qp}(t,\tau) \end{bmatrix}_{q\times p}$$

这里，$g_{ij}(t,\tau)$ 的物理意义是：只在第 j 个输入端于时刻τ 加脉冲信号，而其它输入端不加信号，此时在第i个输出端于时刻t 的响应：

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \mathbf{y} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_j(\xi-\tau) \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \longleftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$g_{ij}(t,\tau)$$

例2： 考虑如下微分方程决定的系统：

$$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=f(t),$$

$$t\geq 0,\ x(0)=\dot{x}(0)=0$$

$$f \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow x$$

证明这是一个线性系统。事实上，因为

$$x(t)=Hf=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

则易于验证

$$H(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1 Hf_1+\alpha_2 Hf_2,\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathrm{R}$$

通过计算得到

$$h(t-\tau)=e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}$$

线性系统脉冲响应矩阵表示 $\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$

四、因果性

定义：若系统在时刻t的输出只取决于时刻 t 和在 t 之前的输入，而不取决于 t 之后的输入则称系统具因果性。

任何实际的物理系统都是具有因果性的。通俗地说，任何实际物理过程，结果总不会在引起这种结果的原因发生之前产生，即未来的输入（**原因**）对过去和现在的输出（**结果**）无影响。

1. 有因果性的松弛系统：输入和输出关系：

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{u}_{(-\infty,t]} \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \quad (1-12)$$

即：t 时刻的输出而只取决于 t 和在 t 之前的输入。

2. 具线性和因果性的松弛系统： 必有

$$\mathbf{G}(t,\tau)=0 \quad \forall t<\tau, \tau\in(-\infty,+\infty) \quad (1-13)$$

故具线性和因果性的松弛系统的输入—输出描述为：

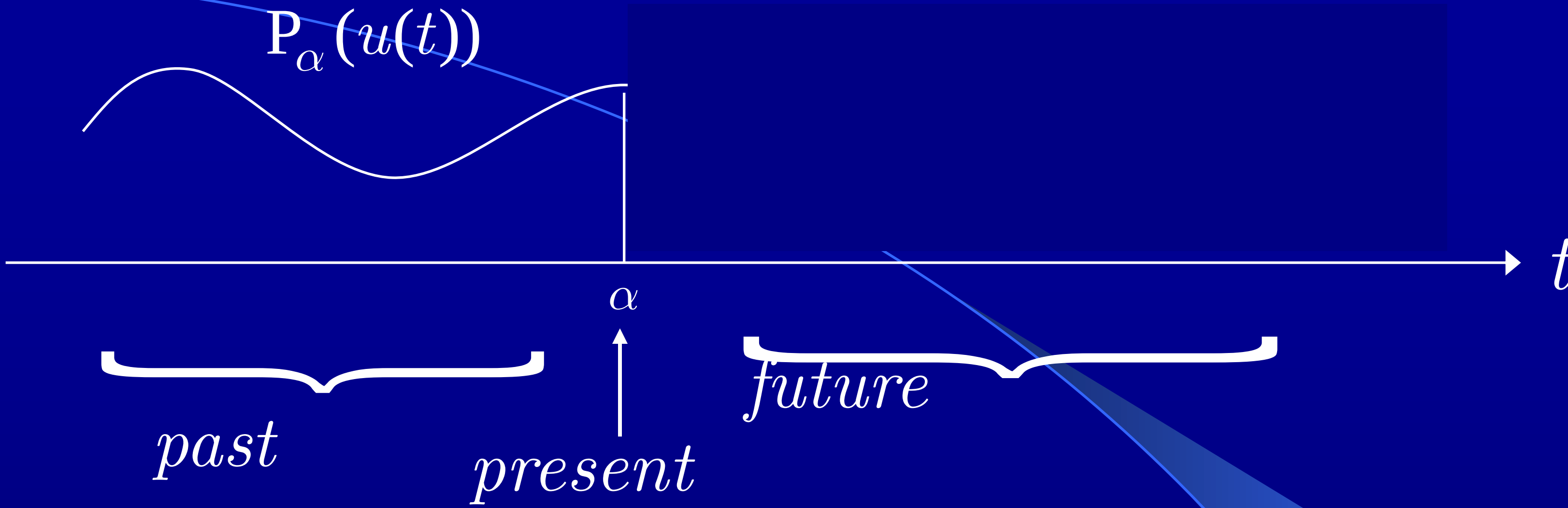
$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau+\underbrace{\int_{t}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{=0}$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (1-14)$$

例： 在数学上通常引入**截断算子**表示因果性。定义截断算子如下：

$$y(t)=P_{\alpha}(u(t))=\begin{cases}u(t), & t\le\alpha\\ 0, & t>\alpha\end{cases}$$

如下图所示：

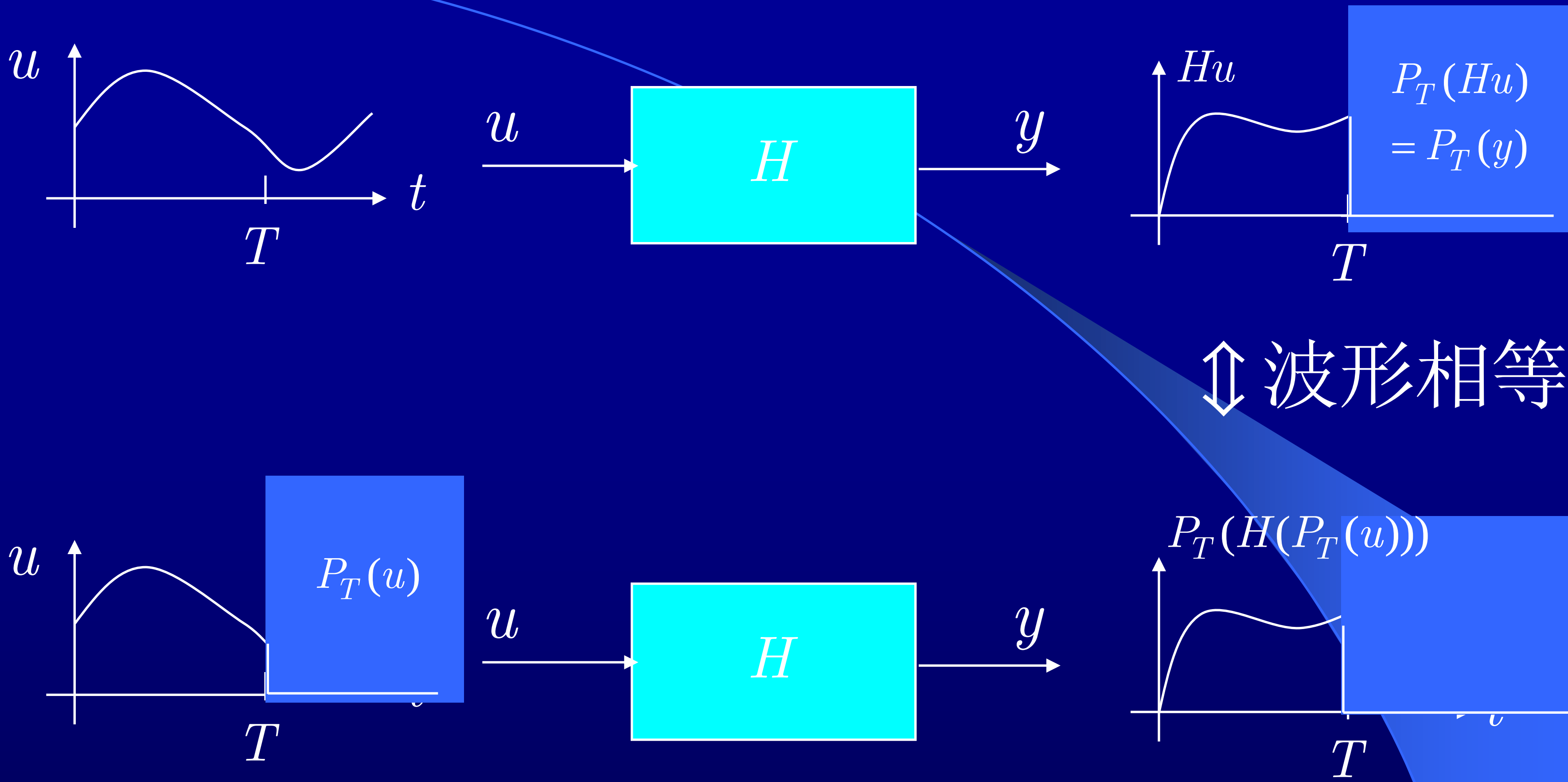


说明因果性可用截断算子来表示，即**H**表示的系统是因果的，系指如下关系成立：

$$\forall T \quad P_T(Hu) = P_T(HP_Tu) \qquad \text{(*)}$$

$$\Leftrightarrow \forall T \quad P_T(y) = P_T(HP_Tu)$$

(*)式左端的输入比右边多了 $t > T$ 的一段，而输出在两边 $t \leq T$ 是一样的，这说明 $t > T$ 的输入对 $t \leq T$ 的输出无影响，即未来的输入对过去和现在的输出无影响——这恰恰就是因果性。



$$\forall T \quad P_T(Hu) = P_T(HP_Tu) \qquad (*)$$

未来的输入(是零或非零)对过去和现在的输出均无影响

五、 t_0 时刻的松弛性

1. t_0时刻松弛系统的定义：

定义1—3 系统在时刻 t_0 称为松弛的，当且仅当$t \geq t_0$时的输出 $\mathbf{y}$ 仅唯一地由 $t \geq t_0$时的输入 $\mathbf{u}$ 所决定，即$\mathbf{y}_{[t0,+\infty)}$仅唯一地由$\mathbf{u}_{[t0,+\infty)}$决定。

若已知系统在 t_0时松弛，则输入/输出关系可以写成

$$\mathbf{y}_{[t_0,+\infty)} = \mathbf{H}\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)}$$

定义： 线性系统在时刻t_0称为松弛的，当且仅当

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \forall t \in [t_0, +\infty)}$$

特别，若系统还是因果系统，则有

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,\forall t\in[t_0,+\infty)$$

例: 考虑系统

$$\dot{y}_c=-\frac{1}{\tau_0}y_c+u \quad ,y_c(t_0)=0,$$

其解为

$$y_c(t)=\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-\tau)}u(\tau)d\tau,\quad \forall t\in[t_0,+\infty)$$

这显然是一个在 t_0 时刻松弛的线性因果系统，因为 $y_c(t),\forall t\in[t_0,+\infty)$ 完全由 $u(t),\forall t\in[t_0,+\infty)$ 决定。

例： 考虑系统

$$\dot{y}_c = -\frac{1}{\tau_0} y_c + u \quad , y_c(t_0) \neq 0 \text{ 已知},$$

$$u \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_c$$

其解为

$$y_c(t) = e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-t_0)} y_c(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-\tau)} u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$$

尽管这个系统的输出可以被唯一地确定，但却不是一个在 t_0 时刻松弛的系统，因为 $y_c(t), \forall t \in [t_0, +\infty)$ 不能完全由 $u(t), \forall t \in [t_0, +\infty)$ 来决定。

例： 若一个线性系统满足 $\mathbf{u}_{(-\infty,t_0)} \equiv 0$，则系统必定在 t_0 时刻松弛。事实上，

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{=0} + \int_{t_0}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \forall t \geq t_0 \Leftrightarrow \mathbf{y}_{[t_0,+\infty)} = \mathbf{H}\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)}$$

这就是 t_0 时刻松弛的定义。

但 $\mathbf{u}_{(-\infty,t_0)} \equiv 0$ 仅是系统必定在t_0时刻松弛的充分条件，而不是必要条件。

例： 考虑一个单位延迟系统

$$y(t) = Hu = u(t-1), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

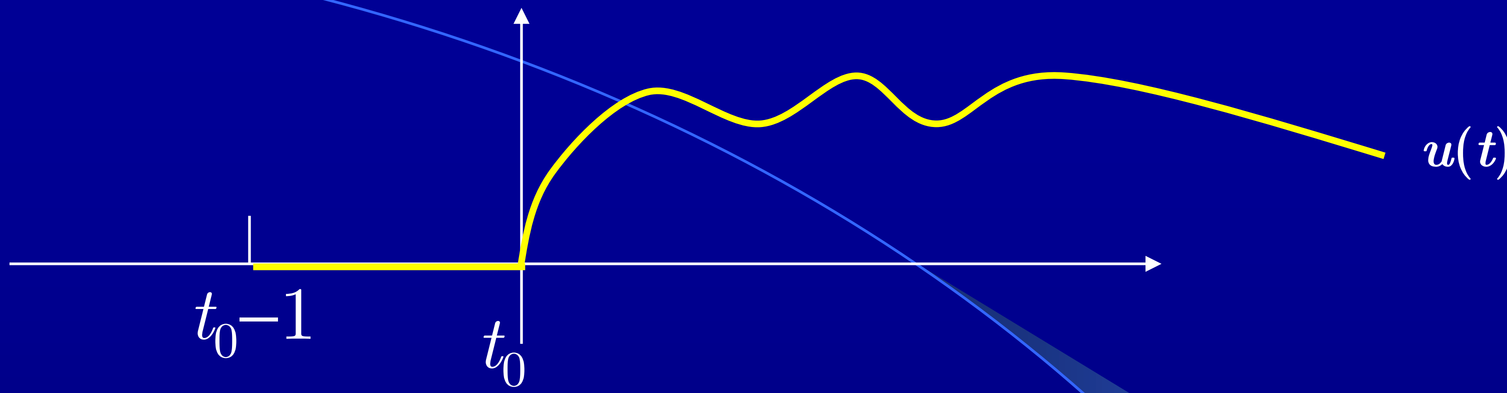
容易验证 H 是一个线性算子。虽然可以有

$$u(t) \neq 0, \forall t \in (-\infty, t_0 - 1)$$

但若

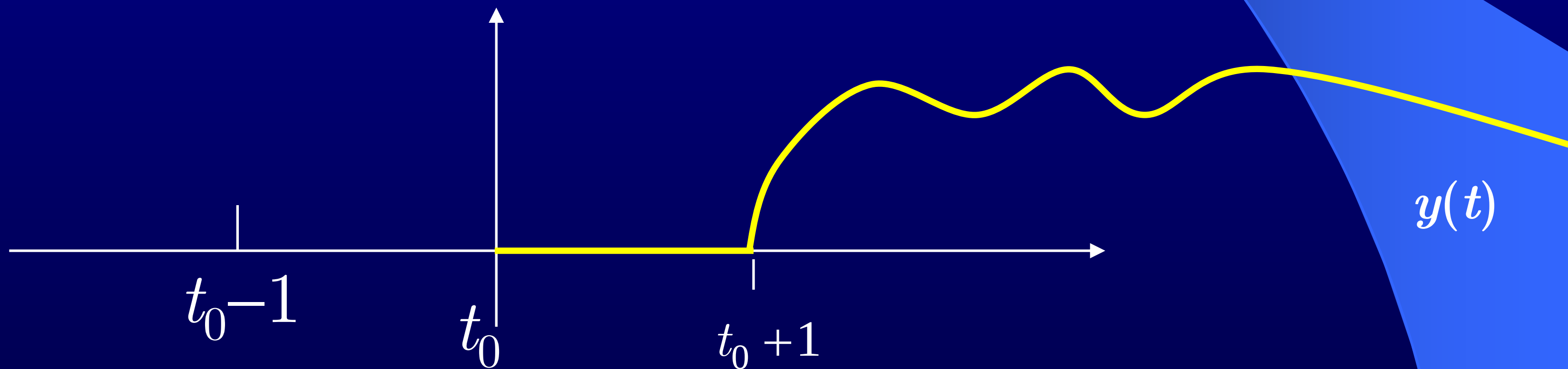
$$u(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0 - 1, t_0) \qquad (s-1)$$

则系统在t_0时刻是松弛的。事实上，为了由$u_{[t_0,+\infty)}$唯一地确定 $y_{[t_0,+\infty)}$ ，只要知道$u_{[t_0-1,t_0)}$恒为零即可。



$$y(t)=Hu=u(t-1),t\geq t_0$$

$$\Downarrow$$



显然，若 $u_{[t_0-1.t_0)}$ 非零，则 $y_{[t_0,t_0+1)}$，从而，$y_{[t_0,+\infty)}$ 不能唯一地被 $u_{[t_0,+\infty)}$ 确定。

2. t_0时刻是松弛线性系统的判断

定理1—1 由下式描述的系统

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

在t_0是松弛的，必要且只要 $\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)}\equiv \mathbf{0}$ 隐含着 $\mathbf{y}_{[t_0,+\infty)}\equiv \mathbf{0}$。

证明：必要性：若系统在t_0时刻是松弛的，则输出当$t\geq t_0$ 时由

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,\forall t\in[t_0,+\infty)$$

给出。显然，$\mathbf{u}_{[t_0,\infty)} \equiv 0 \Rightarrow$

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \equiv 0, \forall t \in [t_0, +\infty)$$

充分性：我们要证明：若

$$\mathbf{u}_{[t_0,\infty)} \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{y}_{[t_0,\infty)} \equiv 0$$

则系统在t_0时刻是松弛的。事实上，由于

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \forall t \in [t_0, +\infty)$$

其中，第一个积分表示的是在$t \geq t_0$时，$\mathbf{u}_{(-\infty,\, t0)}$对$\mathbf{y}(t)$的贡献；第二个积分表示的是在$t \geq t_0$时，$\mathbf{u}_{[t0,\, +\infty)}$对$\mathbf{y}(t)$的贡献。

由$\mathbf{u}_{[t_0,\infty)}\equiv 0 \Rightarrow \mathbf{y}_{[t_0,\infty)}\equiv 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \equiv 0,\quad \forall t\in[t_0,+\infty)$

知在$t\geq t_0$时，$\mathbf{u}_{(-\infty,\ t0)}$对$\mathbf{y}(t)$的贡献为零，即

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\equiv 0}+\int_{t_0}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=\int_{t_0}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,\ \forall t\in[t_0,+\infty)$$

证完。

定理1表明，若一个系统是线性系统，为了确定其是否在t_0时刻松弛，无须知道系统t_0时刻以前的历史。

下面的推论将给出判断t_0松弛的一个实用条件。

推论1—1 若系统脉冲响应阵$\mathbf{G}(t,\tau)$可以分解成

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{M}(t)\mathbf{N}(\tau)$$

且 $\mathbf{M}(t)$ 中每一个元素在 $(-\infty,+\infty)$ 上是**解析的**(注1)，

则系统在t_0松弛的一个充分条件是对于某个固定的正数ε，$\mathbf{u}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$意味着 $\mathbf{y}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$ 。

注： 由于ε只是一个固定的正数，故推论较定理1-1在工程意义上是可以操作的。

例: 考虑系统 $u \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_c$

若

$$y_c(t)=\int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}u(\tau)d\tau,\forall t\in[t_0,+\infty)$$

利用矩阵指数的性质，$\mathbf{G}(t,\tau)$ 可分解成

$$\Rightarrow G(t,\tau)=M(t)N(\tau)=e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}\tau},\quad \forall t\in[t_0,+\infty)$$

这里，$\mathbf{M}(t)=e^{\mathbf{A}t}$ 是解析函数。

3. 复习：实变量解析函数

定义： $f(t)$称为在(a,b)上是解析的，若$f(t)$在该区间具有任意阶的连续导数，且对于(a,b)中任一点t_0，存在一个 ε_0 ，使得对 $(t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0)$ 中所有t，$f(t)$可表示成t_0处的泰劳级数:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}f^{(n)}(t_0)$$

例： 多项式、指数函数、正弦函数等均是实数域上的解析函数。

定理： 若函数 f 在 开区间**D**上解析，已知 f 在**D**中任意小的非零区间上恒为零，则函数在**D**上恒为零。
（利用所谓解析开拓的方法可以证明）

推论1—1 若系统脉冲响应阵$\mathbf{G}(t,\tau)$ 可以分解成

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{M}(t)\mathbf{N}(\tau)$$

且 $\mathbf{M}(t)$ 中每一个元素在 $(-\infty,+\infty)$ 上是**解析的**，

则系统在t_0松弛的一个充分条件是对于某个固定的正数ε，$\mathbf{u}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$意味着 $\mathbf{y}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$ 。

推论的证明：只要证明由 $\mathbf{u}_{[t_0,\infty)}\equiv 0$ 意味着 $\mathbf{y}_{[t_0,\infty)}\equiv 0$，即

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{M}(t)\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau=0,\ \forall t\ge t_0$$

就可以了。为此，令 $\mathbf{u}_{[t_0,\infty)}\equiv 0$，则

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=\mathbf{M}(t)\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,\quad \forall t\in[t_0,+\infty)$$

因 $u_{[t_0,\infty)}=0\Rightarrow u_{[t_0,t_0+\varepsilon)}=0\Rightarrow y_{[t_0,t_0+\varepsilon)}=0\Rightarrow$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{M}(t)\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau=0,\forall t\in[t_0,t_0+\varepsilon)$$

由于 $$\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau:=\mathbf{c}$$

是一个常向量，则由$\mathbf{M}(t)$为解析函数的假设蕴涵$\mathbf{y}(t)$在 $[t_0,+\infty)$ 也是解析的。又由假设，$\mathbf{u}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$ 可推得 $\mathbf{y}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$，于是由上式

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{M}(t)\mathbf{c}\equiv 0,\forall t\in[t_0,t_0+\varepsilon)\quad\text{(A.2)}$$

再由解析开拓的原理知：

$$\mathbf{y}(t) \equiv 0 \forall t \geq t_0 \Leftrightarrow \mathrm{M}(t) \int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{N}(\tau)\mathrm{u}(\tau) d\tau \equiv 0 \forall t \geq t_0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{G}(t,\tau)\mathrm{u}(\tau) d\tau \equiv 0, \forall t \in [t_0, +\infty)$$

即 $\mathbf{u}_{[t_0,\infty)} \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{y}_{[t_0,\infty)} \equiv 0$。

证完。

例：设系统描述如下：

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

其中**A**、**B**均为适当维数的常量矩阵。其解为

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)}_{\int_{-\infty}^{t_0}} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

若$\mathbf{x}(t_0)=0$，即系统在t_0时刻的储能为零，则系统是t_0时刻松弛的，此时

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \text{蕴涵} \quad u_{[t_0,+\infty)} \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{X}_{[t_0,+\infty)} \equiv 0$$