现代控制理论

———输出调节理论

郑建英

北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院

Outline

非线性系统

- 非线性系统 $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$
- 自治非线性系统 $\dot{x}(t) = f(x(t))$
- 非线性控制系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\
y(t) &= h(x(t), u(t), t)
\end{aligned}
$$

- **自治非线性控制系统**

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\
y(t) &= h(x(t), u(t))
\end{aligned}
$$

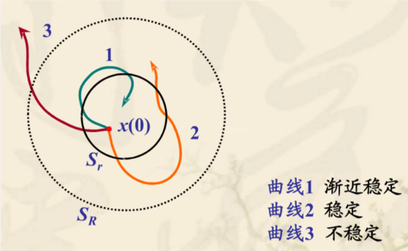
- 仿射非线性控制系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\
y(t) &= h(x(t))
\end{aligned}
$$

- 非线性状态反馈控制器 $u(t) = k(x(t), t)$

非线性系统

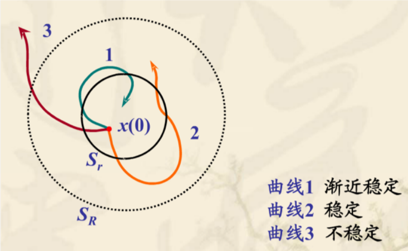
- 假设 $x=0$（即原点）是 $\dot{x}(t)=f(x(t),t)$ 的平衡点
  - 稳定：轨迹有界 —— 不稳定
  - 渐近稳定：轨迹收敛到零



  - 指数稳定：收敛于原点的速度比某个指数函数快
  - 一致稳定、一致渐进稳定: 独立于初始时间
  - 局部稳定与全局稳定

非线性系统

- 假设 $x = 0$（即原点）是 $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ 的平衡点
  - 稳定：轨迹有界 —— 不稳定
  - 渐近稳定：轨迹收敛到零



  - 指数稳定：收敛于原点的速度比某个指数函数快
  - 一致稳定、一致渐进稳定: 独立于初始时间
  - 局部稳定与全局稳定

非线性系统

非线性系统

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{指数稳定} \arrow[r] & \text{一致渐稳} \arrow[r] & \text{渐稳} \arrow[r] & \text{稳定} \\
\text{全局指数稳定} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \text{全局一致渐稳} \arrow[uur] \arrow[r] & \text{全局渐稳} \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}
$$

自治非线性系统 （一致性概念消失）

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{指数稳定} \arrow[dr] & & \\
\text{全局指数稳定} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{渐稳} \arrow[r] & \text{稳定} \\
 & \text{全局渐稳} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

非线性系统

线性时变系统（全局性概念消失）

$$\begin{tikzcd}
\text{指数稳定} \arrow[r, equal] & \text{一致渐稳} \arrow[r] \arrow[d] & \text{一致稳定} \arrow[d] \\
 & \text{渐稳} & \text{稳定}
\end{tikzcd}$$

线性时不变系统 （全局性、一致性概念消失）

$$\begin{tikzcd}
\text{指数稳定} \arrow[r, equal] & \text{渐稳} \arrow[r] & \text{稳定}
\end{tikzcd}$$

多变量向量函数的偏导数

多变量向量函数 $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(X_1,X_2) \\ \bar{f}_2(X_1,X_2) \end{bmatrix}$$

其中

$$X_1 \in \mathbb{R}^{n1}, X_2 \in \mathbb{R}^{n-n1}, Y_1 \in \mathbb{R}^{m1}, Y_2 \in \mathbb{R}^{m-m1},$$
$$\bar{f}_1 = (f_1,\dots,f_{m1}), \bar{f}_2 = (f_{m1+1},\dots,f_m)$$

偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$; $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_n)$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|(x_1=a_1,\dots,x_n=a_n)$

雅可比矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}$$

多变量向量函数的偏导数

多变量向量函数 $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(X_1, X_2) \\ \bar{f}_2(X_1, X_2) \end{bmatrix}$$

其中

$$X_1 \in \mathbb{R}^{n1}, X_2 \in \mathbb{R}^{n-n1}, Y_1 \in \mathbb{R}^{m1}, Y_2 \in \mathbb{R}^{m-m1},$$
$$\bar{f}_1 = (f_1, \ldots, f_{m1}), \bar{f}_2 = (f_{m1+1}, \ldots, f_m)$$

偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$; $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_n)$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|(x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n)$

雅可比矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}$$

多变量向量函数的偏导数

复合函数:

$$Z = g(Y_1, Y_2) \Rightarrow Z = g \circ f(X_1, X_2) = g(\bar{f}_1(X_1, X_2), \bar{f}_2(X_1, X_2))$$

复合函数的偏导数—**链式法则**

$$\frac{\partial Z}{\partial X_1} = \frac{\partial Z}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \frac{\partial Z}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial X_1}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial X_2} = \frac{\partial Z}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} + \frac{\partial Z}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2}$$

$f_c(x, k(x, v), v)$ 对 x 的偏导数:

$$\frac{\partial f_c}{\partial x} = \frac{\partial f_c}{\partial x} + \frac{\partial f_c}{\partial u}\frac{\partial k}{\partial x} \qquad ???$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial x} = \frac{\partial f_c(x, u, v)}{\partial x}|(x = x, u = k(x, v), v = v) + \frac{\partial f_c}{\partial u}\frac{\partial k}{\partial x} \qquad \surd$$

非线性系统

考虑自治非线性系统 $\dot{x}(t) = f(x(t))$。假设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的一个开邻域连续可微。

$$\textbf{雅可比矩阵}\quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \text{ — 线性化系统矩阵}$$

- ☞ 渐进稳定当 F 所有的特征根具有负实部
- ☞ 不稳定当 F 至少有一个特征根具有正实部
- ⋆ 当 F 存在零实部特征根时，无法判断自治系统的稳定性

例子

系统 $\dot{x} = ax^3$: $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} = 3ax^2\Big|_{x=0} = 0$，特征根为 0

1. $a < 0$, 渐近稳定（$V(x) = x^4$, $\dot{V}(x) = 4ax^6 < 0$ for $x \neq 0$）
2. $a = 0$, 稳定
3. $a > 0$, 不稳定（$V(x) = x^4$, $\dot{V}(x) = 4ax^6 > 0$ for $x \neq 0$ Chetaev's Theorem）

- ☞ Lyapunov 直接法或者**中心流形定理**

非线性系统

考虑自治非线性系统 $\dot{x}(t) = f(x(t))$。假设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的一个开邻域连续可微。

$$\textbf{雅可比矩阵} \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \text{ — 线性化系统矩阵}$$

- ☞ 渐进稳定当 F 所有的特征根具有负实部
- ☞ 不稳定当 F 至少有一个特征根具有正实部
- ⋆ 当 F 存在零实部特征根时，无法判断自治系统的稳定性

例子

系统 $\dot{x} = ax^3$: $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} = 3ax^2\Big|_{x=0} = 0$，特征根为 0

1. $a < 0$, 渐近稳定（$V(x) = x^4$, $\dot{V}(x) = 4ax^6 < 0$ for $x \neq 0$）
2. $a = 0$, 稳定
3. $a > 0$, 不稳定（$V(x) = x^4$, $\dot{V}(x) = 4ax^6 > 0$ for $x \neq 0$ Chetaev's Theorem）

- ☞ Lyapunov 直接法或者**中心流形定理**

中心流形定理

假设 F 有 n_1 个具有非零实部的特征根和 $n_2 = n - n_1$ 个具有零实部的特征根
$\Longrightarrow$ 存在非奇异函数 T 使得 $Tx = \mathrm{col}(y, z)$, 其中 $y \in \mathbb{R}^{n_1}$,$z \in \mathbb{R}^{n_2}$, 满足

$$\dot{y} = f_1(y, z),\ \dot{z} = f_2(y, z) \tag{1}$$

且

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial (y, z)}(0, 0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial (y, z)}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

A 的所有特征根具有非零实部，A_1 的所有特征根具有零实部

中心流形定理

定理 1 (中心流形定理)

对于系统 (1), 存在 $z=0$ *的一个开邻域* Z *和一个光滑函数* $\boldsymbol{y}: Z \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\boldsymbol{y}(0)=0$, *对于任意* $z \in Z$ *满足*

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial z} f_2(\boldsymbol{y}(z), z) = f_1(\boldsymbol{y}(z), z)$$

.

■ 不变中心流形

$$M = \{(y, z) \in \mathbb{R}^{n_1} \times Z | y = \boldsymbol{y}(z)\}$$

- M 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $n-2$ 维的超曲面 (特殊流形)
- 不变流形：$(y(0), z(0)) \in M \Rightarrow (y(t), z(t)) \in M$, t 充分小
- 中心流形：M 在原点处与中心子空间相切

中心流形定理

定理 2

考虑系统 *(1)*，当 A 的所有特征根具有负实部，则它的平衡点（即原点）稳定（渐近稳定、或不稳定）当且仅当 $\dot{z} = f_2(\boldsymbol{y}(z), z)$ 的平衡点是稳定（渐近稳定、或不稳定）。

定理 3 (稳定中心流形定理)

假设 A 的所有特征根具有负实部且 $\dot{z} = f_2(\boldsymbol{y}(z), z)$ 的平衡点是稳定。当 $\begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$ 充分小时，存在 $\delta, \lambda > 0$ 使得对任意 $t \geq 0$，有

$$\|y(t) - \boldsymbol{y}(z(t))\| \leq \delta e^{-\lambda t} \|y(0) - \boldsymbol{y}(z(0))\|$$

Outline

非线性系统局部输出调节问题

- 非线性受控系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), v(t))\\ e(t) &= h(x(t), u(t), v(t))\end{aligned}$$

  - 状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$，控制 $u(t) \in \mathbb{R}^m$，调节输出 $e(t) \in \mathbb{R}^p$
  - 外部输入 $v(t) \in \mathbb{R}^q$，可以描述**参考信号和干扰信号**，且满足

$$\dot{v}(t) = a(v(t))$$

- 闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= f_c(x_c(t), v(t))\\ \dot{v}(t) &= a(v(t))\\ e(t) &= h_c(x_c(t), v(t))\end{aligned}$$

非线性系统局部输出调节问题

- 非线性受控系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t))$$
$$e(t) = h(x(t), u(t), v(t))$$

  - 状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$，控制 $u(t) \in \mathbb{R}^m$，调节输出 $e(t) \in \mathbb{R}^p$
  - 外部输入 $v(t) \in \mathbb{R}^q$，可以描述**参考信号和干扰信号**，且满足

$$\dot{v}(t) = a(v(t))$$

- 闭环系统

$$\dot{x}_c(t) = f_c(x_c(t), v(t))$$
$$\dot{v}(t) = a(v(t))$$
$$e(t) = h_c(x_c(t), v(t))$$

非线性系统局部输出调节问题

- 状态反馈调节器 $u(t) = k(x(t), v(t))$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_c &= x \\ f_c(x_c, v) &= f(x, k(x, v), v) \\ h_c(x_c, v) &= h(x, k(x, v), v) \end{aligned}$$

- 输出反馈调节器

$$\begin{aligned} u(t) &= k(z(t)) \\ \dot{z}(t) &= g(z(t), y_m(t)) \\ y_m(t) &= h_m(x(t), u(t), v(t)) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_c &= \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\ f_c(x_c, v) &= \begin{bmatrix} f(x, k(z), v) \\ g(z, h_m(x, k(z), v)) \end{bmatrix} \\ h_c(x_c, v) &= h(x, k(z), v) \end{aligned}$$

- 涉及的函数均充分光滑，定义合理，在原点处值为零

非线性系统局部输出调节问题

- **非线性局部输出调节问题：** 设计状态反馈或者输出反馈调节器使得给定充分小的 $x_c(0)$ 和 $v(0)$, 闭环系统满足性质①② 或者性质②③

性质① $\begin{bmatrix} x_c(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ 存在且有界 $\Leftarrow$ 闭环系统的原点是稳定的

性质② $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$

性质③ $\dfrac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0)$ 的所有特征根具有负实部 $\Rightarrow$ 性质①

非线性系统局部输出调节问题

- **非线性局部输出调节问题：** 设计状态反馈或者输出反馈调节器使得给定充分小的 $x_c(0)$ 和 $v(0)$，闭环系统满足性质①② 或者**性质②③**

性质① $\begin{bmatrix} x_c(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ 存在且有界 $\Leftarrow$ 闭环系统的原点是稳定的

性质② $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

性质③ $\dfrac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0)$ 的所有特征根具有负实部 $\Rightarrow$ 性质①

- **假设条件**

① 外部输入系统是中性稳定 $\Rightarrow \dfrac{\partial a}{\partial v}(0)$ 所有的特征根具有零实部

- 原点 $v=0$ 是稳定的
- 在原点的某一个开领域内的点都是 Poisson 稳定

② $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0),\quad \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0,0)\right)$ 是可镇定的

③ $\left(\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h_m}{\partial x}(0,0,0) & \dfrac{\partial h_m}{\partial v}(0,0,0)\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0,0)\\ 0 & \dfrac{\partial a}{\partial v}(0)\end{bmatrix}\right)$ 是可观测的

点 v_0 是 Poisson 稳定：$v(t,v_0)$ 存在并且对于点 v_0 的任何一个邻居 V，存在 $T>0$，$t_1>T$，$t_2<-T$ 使得 $v(t_1,v_0)\in V$ 和 $v(t_2,v_0)\in V$

Outline

非线性系统输出调节的等价条件

定理 4

当假设条件①成立时，假设存在控制器使得闭环系统满足性质③。则输出调节问题有解当且仅当存在一个充分光滑的函数 $\boldsymbol{x}_c(v)$，具有 $\boldsymbol{x}_c(0)=0$，使得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_c}{\partial v} a(v) = f_c(\boldsymbol{x}_c(v), v) \tag{2}$$

$$0 = h_c(\boldsymbol{x}_c(v), v) \tag{3}$$

对于原点的某一开邻域内 V 的任意点 v 都成立

■$M=\{(x_c, v)\in \mathbb{R}^{n+q_m}\times V | x_c = \boldsymbol{x}_c(v)\}$ 零误差中心流形

非线性系统输出调节的等价条件

证明

第一步 闭环系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_c &= f_c(x_c, v) \\
\dot{v} &= a(v) \\
e &= h_c(x_c, v)
\end{aligned}
$$

雅可比矩阵：

特征根负实部

$$
\frac{\partial(f_c, a)}{\partial(x_c, v)}(0,0) = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0)} & \frac{\partial f_c}{\partial v}(0,0) \\ 0 & \boxed{\frac{\partial a}{\partial v}(0)} \end{bmatrix}
$$

特征根零实部

假设条件①+ 性质③+ 定理 1 $\Longrightarrow$ 存在一个充分光滑函数 $x_c(v)$，具有 $x_c(0)=0$，使得等式 (2) 对于原点的某一个开邻域 V 中的任意一点 v 成立

非线性系统输出调节的等价条件

证明

第一步 闭环系统:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_c &= f_c(x_c, v) \\
\dot{v} &= a(v) \\
e &= h_c(x_c, v)
\end{aligned}
$$

雅可比矩阵:

特征根负实部

$$
\frac{\partial(f_c, a)}{\partial(x_c, v)}(0,0) = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0)} & \frac{\partial f_c}{\partial v}(0,0) \\ 0 & \boxed{\frac{\partial a}{\partial v}(0)} \end{bmatrix}
$$

特征根零实部

假设条件①+ 性质③+ 定理 1 $\Longrightarrow$ 存在一个充分光滑函数 $\boldsymbol{x}_c(v)$，具有 $\boldsymbol{x}_c(0) = 0$，使得等式 (2) 对于原点的某一个开邻域 V 中的任意一点 v 成立

非线性系统输出调节的等价条件

■ **仅需证明** $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$ **当且仅当等式 (3) 成立**

第二步 **充分性**

- 根据定理 3，当 $\begin{bmatrix} x_c(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$ 充分小时，存在 $\delta, \lambda > 0$ 使得对任意 $t \geq 0$，有

$$\|x_c(t) - \boldsymbol{x}_c(v(t))\| \leq \delta e^{-\lambda t} \|x_c(0) - \boldsymbol{x}_c(v(0))\|$$

- 存在 L 使得对于原点附近的某一紧集中的任意点 $\begin{bmatrix} x_c \\ v \end{bmatrix}$ 有

$$\left\| \frac{\partial h_c}{\partial x_c}(x_c, v) \right\| < L$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \|e(t)\| &= \lim_{t\to\infty} \|h_c(x_c(t), v(t))\| \\
&= \lim_{t\to\infty} \|h_c(x_c(t), v(t)) - h_c(\boldsymbol{x}_c(v(t)), v(t))\| \\
&< L \lim_{t\to\infty} \|x_c(t) - \boldsymbol{x}_c(v(t))\| \\
&\leq L \lim_{t\to\infty} \delta e^{-\lambda t} \|x_c(0) - \boldsymbol{x}_c(v(0))\| = 0
\end{aligned}$$

■ **仅需证明** $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ **当且仅当等式 (3) 成立**

第三步 **必要性 (反证法)**

- 假设存在 $v_0 \in V$ 使得

  $$\lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|h_c(x_c(t, \boldsymbol{x}(v_0)), v(t, v_0))\| = 0$$

  成立，但 $\|h_c(\boldsymbol{x}(v_0), v_0)\| > 0$

- 存在 v_0 的一个开领域 $V_0 \subset V$ 以及 $R > 0$, 使得 $\|h_c(\boldsymbol{x}(v), v)\| > R$ 对任意 $v \in V_0$ 成立

- 中心流形定理$\Longrightarrow x_c(t, \boldsymbol{x}(v_0)) = \boldsymbol{x}(v(t, v_0))$
  v_0 足够小时 Poisson 稳定 $\Longrightarrow$ 对任意 $T > 0$，存在 $t_1 > T$ 使得 $v(t, v_0) \in V_0$

  $$\Longrightarrow \|h_c(x_c(t_1, \boldsymbol{x}(v_0)), v(t_1, v_0))\| = \|h_c(\boldsymbol{x}(v(t_1, v_0)), v(t_1, v_0))\| > R$$

  与假设矛盾

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), v(t)) \\
\dot{v} &= a(v) \\
e(t) &= h(x(t), u(t), v(t)) \\
u(t) &= k(x(t), v(t))
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad
\begin{aligned}
x_c &= x \\
\dot{x}_c &= f_c(x_c, v) = f(x, k(x, v), v) \\
\dot{v} &= a(v) \\
e &= h_c(x_c, v) = h(x, k(x, v), v)
\end{aligned}
$$

非线性系统状态反馈输出调节

定理 5

当假设条件①②成立时，状态反馈输出调节问题有解当且仅当存在两个充分光滑的函数 $\boldsymbol{x}(v)$ 和 $\boldsymbol{u}(v)$，具有 $\boldsymbol{x}(0)=0, \boldsymbol{u}(0)=0$，使得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} a(v) &= f(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v) \\ 0 &= h(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v) \qquad \text{非线性调节器方程} \end{aligned} \tag{4}$$

对于原点的某一开邻域内 V 的任意点 v 成立

证明

必要性 假设 $u = k(x, v)$ 使输出调节问题有解
定理 4 $\Longrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x}(v)$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} a(v) &= f(\boldsymbol{x}(v), k(\boldsymbol{x}(v), v), v) \\ 0 &= h(\boldsymbol{x}(v), k(\boldsymbol{x}(v), v), v)\end{aligned}$$

成立。令 $\boldsymbol{u}(v) = k(\boldsymbol{x}(v), v)$，则等式 (4) 成立

充分性 假设 $\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v)$ 对于任意 $v \in V$ 满足等式 (4)
假设条件② $\Longrightarrow$ 存在 K_x 使得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0,0)K_x$ 的所有特征根具有负实部

证明

必要性 假设 $u = k(x, v)$ 使输出调节问题有解
定理 4 $\Longrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x}(v)$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} a(v) &= f(\boldsymbol{x}(v), k(\boldsymbol{x}(v), v), v) \\ 0 &= h(\boldsymbol{x}(v), k(\boldsymbol{x}(v), v), v)\end{aligned}$$

成立。令 $\boldsymbol{u}(v) = k(\boldsymbol{x}(v), v)$，则等式 (4) 成立

充分性 假设 $\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v)$ 对于任意 $v \in V$ 满足等式 (4)
假设条件② $\Longrightarrow$ 存在 K_x 使得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0,0)K_x$ 的所有特征根具有负实部

非线性系统状态反馈输出调节

- 令 $k(x,v) = \boldsymbol{u}(v) + K_x(x - \boldsymbol{x}(v))$, 则

$$\frac{\partial f_c}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f(x,k(x,v),v)}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0)K_x$$

$\Longrightarrow$ 性质③成立

- 令 $\boldsymbol{x}_c(v) = \boldsymbol{x}(v)$, 则

$$\begin{aligned} k(\boldsymbol{x}_c(v),v) &= \boldsymbol{u}(v) + K_x(\boldsymbol{x}(v) - \boldsymbol{x}(v)) = \boldsymbol{u}(v) \\ \Longrightarrow f_c(\boldsymbol{x}_c(v),v) &= f(\boldsymbol{x}_c(v),k(\boldsymbol{x}_c(v),v),v) \\ &= f(\boldsymbol{x}(v),\boldsymbol{u}(v),v) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}a(v) = \frac{\partial \boldsymbol{x}_c}{\partial v}a(v) \\ h_c(\boldsymbol{x}_c(v),v) &= h(\boldsymbol{x}_c(v),k(\boldsymbol{x}_c(v),v),v) = h(\boldsymbol{x}(v),\boldsymbol{u}(v),v) = 0 \end{aligned}$$

定理 4 $\Longrightarrow$ 输出调节问题有解

非线性系统输出反馈输出调节

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u, v) \\
\dot{v} &= a(v) \\
e &= h(x, u, v) \\
u &= k(z) \\
\dot{z} &= g(z, y_m) \\
y_m &= h_m(x, u, v)
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
x_c &= \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\
\dot{x}_c &= f_c(x_c, v) = \begin{bmatrix} f(x, k(z), v) \\ g(z, h_m(x, k(z), v)) \end{bmatrix} \\
\dot{v} &= a(v) \\
e &= h_c(x_c, v) = h(x, k(z), v)
\end{aligned}
$$

非线性系统输出反馈输出调节

定理 6

当假设条件①成立时，假设闭环系统满足性质③。则基于输出反馈的输出调节问题有解当且仅当存在充分光滑的函数 $\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), \boldsymbol{z}(v)$，具有 $\boldsymbol{x}(0) = 0, \boldsymbol{u}(0) = 0, \boldsymbol{z}(0) = 0$，使得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} a(v) &= f(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v) \\ 0 &= h(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v) \quad \underline{\textbf{非线性调节器方程}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial v} a(v) &= g(\boldsymbol{z}(v), h_m(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), \boldsymbol{z}(v))) \\ \boldsymbol{u}(v) &= k(\boldsymbol{z}(v)) \qquad \underline{\textbf{内模方程}} \end{aligned}$$

证明关键： $x_c = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_c(v) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(v) \\ \boldsymbol{z}(v) \end{bmatrix}$

非线性系统输出反馈输出调节

定理 7

当假设条件①②③成立时，基于输出反馈的输出调节问题有解当且仅当存在两个充分光滑的函数 $\boldsymbol{x}(v)$ 和 $\boldsymbol{u}(v)$，具有 $\boldsymbol{x}(0) = 0, \boldsymbol{u}(0) = 0$，使得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} a(v) &= f(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v) \\ 0 &= h(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v) \end{aligned}$$

对于原点的某一开邻域内 V 的任意点 v 成立

非线性系统输出反馈输出调节

证明

- 必要性是显然的
- 充分性：
  - 假设条件①② $\Longrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v)$ 满足等式 (4)；且存在 $u = k(x, v)$ 满足 $\boldsymbol{u}(z) = k(\boldsymbol{x}(v), v)$ 解决状态反馈输出调节问题
  - 假设条件③ $\Rightarrow$ 存在 $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ 使得

$$A_L = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0,0) \\ 0 & \dfrac{\partial a}{\partial v}(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_m}{\partial x}(0,0,0) & \dfrac{\partial h_m}{\partial v}(0,0,0) \end{bmatrix}$$

所有特征根具有负实部

证明

- 必要性是显然的
- 充分性：
  - 假设条件①② $\Longrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v)$ 满足等式 (4)；且存在 $u = k(x, v)$ 满足 $\boldsymbol{u}(z) = k(\boldsymbol{x}(v), v)$ 解决状态反馈输出调节问题
  - 假设条件③ $\Rightarrow$ 存在 $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ 使得

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0) \\ 0 & \frac{\partial a}{\partial v}(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_m}{\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial h_m}{\partial v}(0,0,0) \end{bmatrix}$$

所有特征根具有负实部

- 令 $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$，$u = k(z) = k(z_1, z_2)$,

$$\dot{z} = g(z, y_m) = \begin{bmatrix} f(z_1, k(z_1, z_2), z_2) + L_1(y_m - h_m(z_1, k(z_1, z_2), z_2)) \\ a(z_2) + L_2(y_m - h_m(z_1, k(z_1, z_2), z_2)) \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x_c = \mathrm{col}[x, z_1, z_2]$$

$$f_c(x_c, v) = \begin{bmatrix} f(x, k(z_1, z_2), v) \\ f(z_1, k(z_1, z_2), z_2) + L_1(y_m - h_m(z_1, k(z_1, z_2), z_2)) \\ a(z_2) + L_2(y_m - h_m(z_1, k(z_1, z_2), z_2)) \end{bmatrix}$$

$$h_c(x_c, v) = h(x, k(z_1, z_2), v)$$

非线性系统输出反馈输出调节

- 令

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0),\ B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0), E = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0)$$

$$C_m = \frac{\partial h_m}{\partial x}(0,0,0),\ F_m = \frac{\partial h_m}{\partial v}(0,0,0), A_1 = \frac{\partial a}{\partial v}(0)$$

$$K_x = \frac{\partial k}{\partial x}(0,0),\ K_v = \frac{\partial k}{\partial v}(0,0), A_c = \frac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0)$$

$$\Longrightarrow A_c = \begin{bmatrix} A & BK_x & BK_v \\ L_1 C_m & A + BK_x - L_1 C_m & E + BK_v - L_1 F_m \\ L_2 C_m & -L_2 C_m & A_1 - L_2 F_m \end{bmatrix}$$

- 相似变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_x & BK_x & BK_v \\ 0 & A - L_1 C_m & E - L_1 F_m \\ 0 & -L_2 C_m & A_1 - L_2 F_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A + BK_x & * \\ 0 & A_L \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow A_c$ 所有特征根具有负实部

非线性系统输出反馈输出调节

- 令

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0),\ B=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0), E=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0)$$
$$C_m=\frac{\partial h_m}{\partial x}(0,0,0),\ F_m=\frac{\partial h_m}{\partial v}(0,0,0), A_1=\frac{\partial a}{\partial v}(0)$$
$$K_x=\frac{\partial k}{\partial x}(0,0),\ K_v=\frac{\partial k}{\partial v}(0,0), A_c=\frac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0)$$

$$\Longrightarrow A_c=\begin{bmatrix} A & BK_x & BK_v \\ L_1C_m & A+BK_x-L_1C_m & E+BK_v-L_1F_m \\ L_2C_m & -L_2C_m & A_1-L_2F_m \end{bmatrix}$$

- 相似变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK_x & BK_x & BK_v \\ 0 & A-L_1C_m & E-L_1F_m \\ 0 & -L_2C_m & A_1-L_2F_m \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} A+BK_x & * \\ 0 & A_L \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow A_c$ **所有特征根具有负实部**

非线性系统输出反馈输出调节

- $$\boldsymbol{z}(v) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(v) \\ v \end{bmatrix} \Longrightarrow k(\boldsymbol{z}(v)) = k(\boldsymbol{x}(v), v) = \boldsymbol{u}(v)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial v} a(v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} a(v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial v} a(v) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v) \\ a(v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}(v), k(\boldsymbol{z}(v)), v) \\ a(v) \end{bmatrix} \\ &= g(\boldsymbol{z}(v), h_m(\boldsymbol{x}(v), k(\boldsymbol{z}(v)), v)) \end{aligned}$$

定理 6 $\Longrightarrow$ 输出反馈输出调节问题有解

非线性系统误差输出反馈输出调节

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u, v) \\
\dot{v} &= a(v) \\
e &= h(x, u, v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= k(z) \\
\dot{z} &= g(z, e)
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
x_c &= \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\
\dot{x}_c &= f_c(x_c, v) = \begin{bmatrix} f(x, k(z), v) \\ g(z, h(x, k(z), v)) \end{bmatrix} \\
\dot{v} &= a(v) \\
e &= h_c(x_c, v) = h(x, k(z), v)
\end{aligned}
$$

$$
A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0),\ B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0),\ C = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0,0),\ A_1 = \frac{\partial a}{\partial v}(0)
$$

$$
F = \frac{\partial g}{\partial z}(0,0),\ G = \frac{\partial g}{\partial e}(0,0),\ K = \frac{\partial k}{\partial z}(0),
$$

$$
A_c = \frac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0) = \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & F \end{pmatrix}
$$

非线性系统误差输出反馈输出调节

定理 8

当假设条件①成立时，假设闭环系统满足性质③。则基于误差输出反馈的输出调节问题有解当且仅当存在充分光滑的函数 $\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), \boldsymbol{z}(v)$，具有 $\boldsymbol{x}(0)=0, \boldsymbol{u}(0)=0, \boldsymbol{z}(0)=0$，使得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} a(v) = f(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v)$$

$$0 = h(\boldsymbol{x}(v), \boldsymbol{u}(v), v) \quad \text{非线性调节器方程}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial v} a(v) = g(\boldsymbol{z}(v), 0)$$

$$\boldsymbol{u}(v) = k(\boldsymbol{z}(v)) \quad \text{内模方程}$$

非线性系统误差输出反馈输出调节

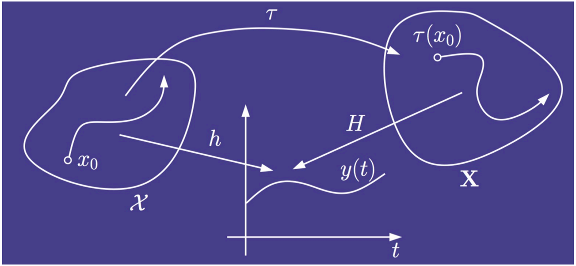
给定两个带输出的动态系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathcal{X} \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{X} = F(X), & X \in \mathbf{X} \\ Y = H(X), & Y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

如果存在映射 $\tau : \mathcal{X} \to \mathbf{X}$ 满足 $\tau(0) = 0$ 并使得对所有 $x \in \mathcal{X}$ 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x} f(x) &= F(\tau(x)) \\ h(x) &= H(\tau(x)) \end{aligned}$$

则称系统 $\{\mathcal{X}, f, h\}$ 可浸入系统 $\{\mathbf{X}, F, H\}$



非线性系统误差输出反馈输出调节

定理 9

当假设条件①成立时，则基于误差输出反馈的输出调节问题有解当且仅当

1) 存在映射 $\boldsymbol{x}(v):\mathcal{V}\to\mathbb{R}^n, \boldsymbol{u}(v):\mathcal{V}\to\mathbb{R}^m$，满足 $\boldsymbol{x}(0)=0, \boldsymbol{u}(0)=0$，使得非线性调节器方程成立，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}a(v) &= f(\boldsymbol{x}(v),\boldsymbol{u}(v),v)\\ 0 &= h(\boldsymbol{x}(v),\boldsymbol{u}(v),v)\end{aligned}$$

定理 9

2) 外部系统

$$\begin{aligned}\dot{v} &= a(v), \quad v \in \mathcal{V} \\ u &= \boldsymbol{u}(v),\end{aligned}$$

可浸入系统

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \phi(z), \quad v \in \mathcal{Z} \\ u &= \gamma(z)\end{aligned}$$

其中 $\phi(0) = 0, \gamma(0) = 0$, 并且矩阵 $\Phi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_0, \quad \Gamma = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right]_0$ 使矩阵对

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \Theta C & \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于某些矩阵 Θ 是可镇定的，而矩阵对

$$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

是可检测的

证明

■ 必要性： 假设控制器

$$u = k(z)$$
$$\dot{z} = g(z, e)$$

解决输出调节问题。则由定理 8 知，存在映射 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 使得非线性调节器方程和内模方程成立

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial v} a(v) = g(\boldsymbol{z}(v), 0)$$
$$\boldsymbol{u}(v) = k(\boldsymbol{z}(v)) \qquad \textbf{内模方程}$$

令 $\tilde{g}(z) = g(z, 0)$, 则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial v} a(v) = \tilde{g}(\boldsymbol{z})$$
$$\boldsymbol{u}(v) = k(\boldsymbol{z}(v))$$

则外部系统 $\begin{aligned} \dot{v} &= a(v), \quad v \in \mathcal{V} \\ u &= \boldsymbol{u}(v), \end{aligned}$ 可浸入系统 $\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{g}(z), \quad v \in \mathcal{Z} \\ u &= k(z) \end{aligned}$

非线性系统误差输出反馈输出调节

由性质③得，$A_c = \frac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0) = \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & F \end{pmatrix}$ 是 Hurwitz 稳定

$$\begin{aligned} A_c = \frac{\partial f_c}{\partial x_c}(0,0) &= \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & F \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & BK \\ 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & F \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ 是可镇定的

$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & BK \\ 0 & F \end{pmatrix}$ 是可检测的

证明

■ 充分性：

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \Theta C & \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 可镇定,} \quad \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} \text{ 可检测}$$

$$\Longrightarrow \text{存在 } L, M, N \text{ 使得 } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B\Gamma & BN \\ \Theta C & \Phi & 0 \\ MC & 0 & L \end{pmatrix} \text{ 是 Hurwitz 稳定}$$

构造调节器
$$\begin{cases} \dot{z}_0 = \varphi(z_0) + \Theta e \\ \dot{z}_1 = L z_1 + M e \\ u = \gamma(z_0) + N z_1 \end{cases}$$

可证明 L, M, N 使得 $\tilde{A}$ 是稳定的且上述调节器可以解决输出调节问题

非线性系统误差输出反馈输出调节

调节器可分解为两部分，稳定器和内模：