P137 页，习题 13、16、17、19、20-(2)、22、24

13. A、B均为复方阵，复数λ和非零向量$x\in C^n$，$Ax=\lambda Bx$

A、B均为Hermite矩阵，B是正定矩阵.

将B进行Cholesky分解 $B=GG^T$（G是下三角矩阵）

$\therefore Ax=\lambda GG^Tx \Rightarrow G^{-1}Ax=\lambda G^Tx \Rightarrow G^{-1}A[(G^T)^{-1}G^T]x=\lambda G^Tx$

$\Rightarrow [G^{-1}A(G^{-1})^T][G^Tx)=\lambda(G^Tx)$

令 $\begin{cases} S=G^{-1}A(G^{-1})^T \\ y=G^Tx \end{cases}$ 得S是实对称矩阵 $\therefore Sy=\lambda y$

16、由已知 方程组 $Ax=b$ $\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $\quad \alpha_1=(3,1,1)^T$ $\quad y_1=\alpha_1$ $\quad z_1=\frac{y_1}{\|y_1\|}=(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}})^T$

$\alpha_2=(3,1,2)^T$ $\quad y_2=\alpha_2-(\alpha_2,z_1)z_1=(3,1,2)^T-\frac{12}{\sqrt{11}}(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}})^T$

$=(-\frac{3}{11},-\frac{1}{11},\frac{10}{11})^T$ $\quad z_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{10}}(-\frac{3}{11},-\frac{1}{11},\frac{10}{11})^T$

$\alpha_3=(4,9,-6)^T$ $\quad y_3=\alpha_3-(\alpha_3,z_1)z_1-(\alpha_3,z_2)z_2=(4,9,-6)^T-\frac{15}{\sqrt{11}}(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}})^T$

$+\frac{81}{11}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{10}}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{10}}(-\frac{3}{11},-\frac{1}{11},\frac{10}{11})^T=(-\frac{253}{110},\frac{\overset{759}{\cancel{894}}}{110},\frac{0}{110})^T$ $\quad \therefore z_3=\frac{y_3}{\|y_3\|}=(-0.3162,0.9487,0)^T$

$\therefore [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[z_1,z_2,z_3]\begin{bmatrix} \|y_1\| & (\alpha_2,\overset{z_1}{\cancel{y_1}}) & (\alpha_3,\overset{z_1}{\cancel{y_1}}) \\ 0 & \|y_2\| & (\alpha_3,z_2) \\ 0 & 0 & \|y_3\| \end{bmatrix}=QR.$

$\therefore QRx=b \Rightarrow Rx=Q^{-1}b=Q^Hb$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3.3166 & 3.6181 & 4.5227 \\ 0 & 0.9535 & -7.7230 \\ 0 & 0 & 7.2732 \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} 0.9045 & 0.3015 & 0.3015 \\ -0.2860 & -0.0953 & 0.9535 \\ -0.3162 & 0.9487 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.412 \\ 8.6766 \\ -7.2733 \end{pmatrix}$$

$\therefore x_3\approx -1.000$ $\quad \cancel{x_2=17.1994 \quad x_1=-16.6720}$

$x_2\approx 1.000$

$x_1\approx 1.000.$

17. 解:

对A进行QR分解: ∃正交矩阵Q和上三角矩阵R, 使得 $A=QR$

$$\|Ax-b\|_2 = (Ax-b)^T(Ax-b) = (QRx-b)^T(QRx-b) = (x^TR^TQ^T-b^T)(QRx-b) = x^TR^TQ^TQRx - x^TR^TQ^Tb - b^TQRx + b^Tb$$

$$= x^TR^TRx - x^TR^TQ^Tb - b^TQRx + b^Tb$$

$$\frac{\partial\|Ax-b\|_2}{\partial x} = 2R^TRx - R^TQ^Tb - R^TQ^Tb = 0$$

$$\Rightarrow R^TRx = R^TQ^Tb \Rightarrow Rx = Q^Tb \Rightarrow x = R^{-1}Q^Tb.$$

19. 证: 由矩阵A的秩为1可知, A的特征值为0 ($n-1$重) 和 $tr(A)$.

故矩阵A的特征多项式为: $f_A(\lambda) = \lambda^{n-1}\cdot(\lambda - tr(A))$

∴ 最小多项式只能为 $\lambda^{i-1}(\lambda - tr(A))$, $i=2,\cdots,n$.

考查 $f_A(A) = A\cdot(A - tr(A))$

由 $A = P^{-1}\begin{bmatrix} tr(A) & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}P$, 有 $A^2 = P^{-1}\begin{bmatrix} tr^2(A) & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}P$

$$\therefore f_A(A) = P^{-1}\begin{bmatrix} tr^2(A) & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}P - tr(A)\cdot P^{-1}\begin{bmatrix} tr(A) & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}P$$

$$= P^{-1}\begin{bmatrix} tr^2(A) & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}P - P^{-1}\begin{bmatrix} tr^2(A) & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}P$$

$= 0.$

故 $m_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\cdot\lambda$.

(2) $$|A+\lambda I| = \begin{vmatrix} -1+\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1+\lambda \end{vmatrix} = (-1+\lambda)^3$$

可能是 $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^3$

$(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ $(A-I)^2 = 0$ ∴最小多项式 $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$

补题22.

证明：设$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$. 下面对友矩阵的2种形式分别进行证明.

由设I_n为n阶单位阵，对I_n按列分块得$I_n=(e_1,e_2,\dots,e_n)$. 则向量组$e_1,\dots,e_n$线性无关

(1) 当$A=\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \\ -a_0 & \cdots\ -a_{n-1} \end{pmatrix}$时：有$A=\begin{pmatrix} 0\ 1\ 0 \cdots 0 \\ * \end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 0 \cdots 0 \\ * \end{pmatrix}$ $\cdots$ $A^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 \cdots 0\ 1 \\ * \end{pmatrix}$

则$e_1^TA=\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}=e_2^T$ $e_1^TA^2=e_3^T$ $\cdots$ $e_1^TA^{n-1}=e_n^T$.

由$e_1^T,\dots,e_n^T$线性无关可得$e_1^T, e_1^TA,\dots,e_1^TA^{n-1}$线性无关

∴不存在不全为零的$b_0,\dots,b_n\in C$，使得$b_0e_1^T+\cdots+b_{n-1}e_1^TA^{n-1}=0$

即不存在不全为零的$b_0,\dots,b_{n-1}\in C$使$e_1^T(b_0+b_1A+\cdots+b_{n-1}A^{n-1})=0$

∴不存在次数为$n-1$的多项式为矩阵A的零化多项式.

又∵$f(\lambda)$次数为n且$f(\lambda)$为首一多项式 $f(\lambda)$是A的特征多项式

∴$f(\lambda)$为A的最小多项式

(2) 与(1)的过程类似. 当$A=\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & -a_0 \\ I_{n-1} & \vdots \\ & -a_{n-1} \end{pmatrix}$时 有$Ae_1=e_2, A^2e_1=e_3,\dots,A^{n-1}e_1=e_n$.

$e_1,\dots,e_n$线性无关 则不存在不全为零的$b_0,\dots,b_{n-1}\in C$使$(b_0+b_1A+\cdots+b_{n-1}A^{n-1})e_1=0$

∴不存在次数为$n-1$的多项式为A的零化多项式

∴$f(\lambda)$为A的最小多项式.

24. A、B为单纯矩阵. 则对于A、B分别有P_1和P_2. 使得下式成立.

$P_1^{-1}AP_1=diag(\lambda_{11},\lambda_{12},\dots,\lambda_{1n})$. λ_{1i}是矩阵A的特征值 $i=1,2,\dots,n$.

$P_2^{-1}AP_2=diag(\lambda_{21},\lambda_{22},\dots,\lambda_{2n})$ λ_{2i}是矩阵B的特征值. $i=1,2,\dots,n$.

则分别有$A=P_1diag(\lambda_{11},\lambda_{12},\dots\lambda_{1n})P_1^{-1}$; $B=P_2diag(\lambda_{21},\lambda_{22},\dots,\lambda_{2n})P_2^{-1}$.

因为$AB=BA$. 则有

$P_1\Lambda_1P_1^{-1}\cdot P_2\Lambda_2P_2^{-1}=P_2\Lambda P_2^{-1}P_1\Lambda_1P_1^{-1}$.

令$P_1=P_2$. 则上式可写为$P_1\Lambda_1\Lambda_2P_1^{-1}=P_1\Lambda_2\Lambda_1P_1^{-1}$.

Λ_1, Λ_2均为对角阵. 故$\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1$.

所以. 存在同一矩阵P. 使得$P^{-1}AP$和$P^{-1}BP$同时为对角阵.