

第一章作业

1. 试求出系统 $G(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$ 的可控标准形最小阶实现，可观标准形最小阶实现。

可控标准型最小阶实现： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$

可观标准型最小阶实现： $A = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$

2. 设一升降机做垂直的上下运动，控制升降的作用力为 $u(t)$ ，且作用力大小有限。已知其初始时刻高度与速度，建立最优控制问题模型，使得升降机最快到达地面，且到达地面时速度为零。

$$h(t) = v(t)$$

$$v(t) = -g + \frac{u(t)}{m}$$

初始条件： $v(0) = v_0, h(0) = h_0$

终端条件： $h(t_f) = 0$

容许控制： $0 \leq u(t) \leq M$

控制指标： $J = \int_0^{t_f} dt$

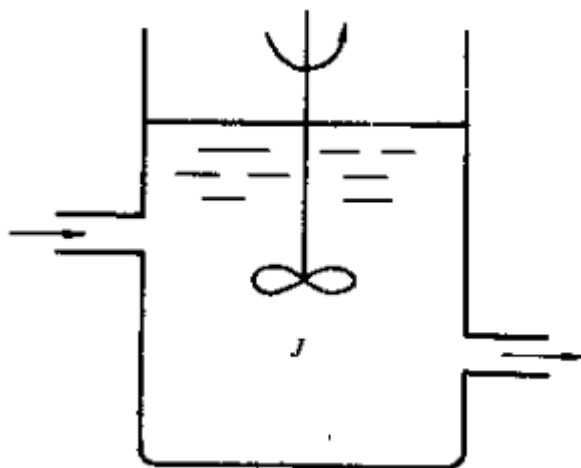
3. 设如下图所示的液体槽 J ，搅拌器使得液体一直处于完全混合状态。槽中液体初始温度为 0，现需将其温度经时间 t 后升高到 40 度。为此在入口处送入一定量的液体，温度为 $u(t)$ ，出口处流出等量的液体保证液面恒定。试寻找 $u(t)$ ，要求散失的热量最小。请建立上述问题的最优控制模型。

用 $x(t)$ 表示槽中完全混合的液体温度，由热力学定律，液体温度变化率与温差成正比，于是可以有

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) - x(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 40$$

散掉的热量可以用下式表示

$$J(u) = \int_0^1 [qx^2(t) + ru^2(t)] dt, \quad q, r \text{ 为可以设计的参数}$$



第二章作业

1. 系统由三个串联积分环节组成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = x_3, & x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_3 = u, & x_3(0) = 0 \end{cases}$$

取性能指标 $J = \frac{1}{2} \int_0^t u^2(t) dt$ ，求最优解使系统由初态转移至终端约束函数

$$x_1^2(1) + x_2^2(1) = 1。$$

解： $H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 u$

控制方程： $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u = -\lambda_3$

协态方程： $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = c_1 \\ \lambda_2 = -c_1 t + c_2 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} c_1 t^2 - c_2 t + c_3 \end{cases}$

状态方程： $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{120} c_1 t^5 + \frac{c_2}{24} t^4 - \frac{1}{6} c_3 t^3 \\ x_2 = -\frac{1}{24} c_1 t^4 + \frac{c_2}{6} t^3 - \frac{1}{2} c_3 t^2 \\ x_3 = -\frac{1}{6} c_1 t^3 + \frac{c_2}{2} t^2 - c_3 t \end{cases}$

$$\text{横截条件: } \lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial x(t_f)} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(1) = 2x_1(1)v \\ \lambda_2(1) = 2x_2(1)v \\ \lambda_3(1) = 0 \end{cases}$$

将状态方程带入横截条件和终端约束，得到方程

$$\begin{cases} c_1 = 2\left(-\frac{1}{120}c_1 + \frac{c_2}{24} - \frac{1}{6}c_3\right)v \\ c_2 - c_1 = 2\left(-\frac{1}{24}c_1 + \frac{c_2}{6} - \frac{1}{2}c_3\right)v \\ 0 = \frac{1}{2}c_1 - c_2 + c_3 \\ \left(-\frac{1}{120}c_1 + \frac{c_2}{24} - \frac{1}{6}c_3\right)^2 + \left(-\frac{1}{24}c_1 + \frac{c_2}{6} - \frac{1}{2}c_3\right)^2 = 1 \end{cases}$$

可以利用 matlab 软件求出解，并代入 $J = \frac{1}{2} \int_0^t u^2(t) dt$ 选取最优解。

2. 系统状态方程为 $\dot{x} = -x + u$, $x(0) = 10$ ，终端状态为 $x(1) = 0$ 。取定性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt, \text{ 求最优控制 } u^*(t) \text{ 和最优轨迹 } x^*(t)。$$

$$\text{解: } H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda(-x + u)$$

$$\text{控制方程: } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u = -\lambda$$

$$\text{协态方程: } \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda, \lambda = c_1 e^t$$

$$\text{状态方程: } \dot{x} = -x + u, x = c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}c_1 e^t$$

$$\text{代入初值, } c_2 = \frac{10e}{e - e^{-1}} \quad c_1 = \frac{20}{e^2 - 1}$$

3. 系统状态方程为 $\dot{x} = -x^3 + u$, $x(0) = 1$ ，性能指标为 $J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$ ，试列出

其对应的两点边值问题。

$$\text{解: } H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x^3 + u)$$

$$\text{控制方程: } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u = -\lambda$$

协态方程: $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x + 3x^2\lambda$

状态方程: $\dot{x} = -x^3 + u \Rightarrow \dot{x} = -x^3 - \lambda$

横截条件 $\lambda(1) = 0$, $x(0) = 1$

4. 系统状态方程为 $\dot{x} = -x + u$, $x(0) = 1$, 性能指标为 $J = \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$, 求最优解

$u^*(t)$ 及 $x^*(t)$ 。

解: $H = (x^2 + u^2) + \lambda(-x + u)$

控制方程: $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{2}\lambda$

协态方程: $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x + \lambda$

状态方程: $\dot{x} = -x + u = -x - \frac{1}{2}\lambda$

横截条件 $\lambda(1) = 0$, $x(0) = 1$

拉氏变换

$$sX(s) - x(0) = -X(s) - \frac{1}{2}\lambda(s)$$

$$s\lambda(s) - \lambda(0) = -2X(s) + \lambda(s)$$

得到

$$X(s) = \frac{x(0) - \frac{1}{2}\lambda(s)}{s+1} \quad , \quad \text{代入得到 } s\lambda(s) - \lambda(0) = \frac{-2x(0) + \lambda(s)}{s+1} + \lambda(s)$$

$$\lambda(s) = \frac{(s+1)\lambda(0) - 2x(0)}{s^2 - 2} = \frac{s+1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}\lambda(0) - \frac{2}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}x(0)$$

$$X(s) = \frac{s-1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}x(0) - \frac{1}{2} \frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}\lambda(0)$$

反变换得

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t})x(0) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}\right]\lambda(0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} \right] x(0) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t} \right] \lambda(0)$$

$$\text{令 } t=1 \quad \lambda(0) = \frac{2e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}}}$$

因此

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t} \right] \frac{2e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}}}$$

$$u = -\frac{1}{2}\lambda, \text{ 代入即可。}$$

第三章作业

$$1. \quad \min J = t_f$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \\ \dot{x}_2 &= u, \quad x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0, \\ |u| &\leq 1 \end{aligned}$$

求最优控制。

$$\text{解: } H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \lambda_1 = c_1$$

$$\text{协态方程: } \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \quad \lambda_2 = c_1 t + c_2$$

H 的极小值由 $\lambda_2 u$ 决定, 所以

$$u = \begin{cases} 1, & \lambda_2 \leq 0 \\ -1, & \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{所以 } u = \begin{cases} 1, & \lambda_2 \leq 0 \\ -1, & \lambda_2 > 0 \end{cases}, \text{ 当 } u=1, \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 + c_3 t + c_4 \\ x_2 = t + c_3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + b_1,$$

$$\text{当 } u=-1, \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}t^2 + c_5 t + c_6 \\ x_2 = -t + c_5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + b_2$$

所以开关线为: $x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|$ 。设切换点时间为 t_1 , 将初始条件代入, 求得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}, t_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + 1, \text{ 所以 } u = \begin{cases} -1, & t \leq \sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \\ 1, & t > \sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \end{cases}$$

$$2. \min_u J = \int_0^{t_f} dt$$

$$s.t., \quad \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u$$

$$\dot{x}_2(t) = u$$

$$\text{且有 } \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \quad |u| \leq 1, \text{ 求最优控制。}$$

$$\text{解: } H = 1 + \lambda_1(-x_1 + u) + \lambda_2 u = 1 - \lambda_1 x_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)u$$

$$\text{协态方程: } \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = c_1 e^{-t} \\ \dot{\lambda}_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = c_2 \end{cases} \quad H \text{ 的极值由 } (\lambda_1 + \lambda_2)u \text{ 决定, 所以 } u = -\text{sgn}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\text{当 } u = 1, \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1 \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_3 e^{-t} + 1 \\ x_2 = c_4 t \end{cases} \Rightarrow x_1 = b_1 e^{-x_2} + 1$$

$$\text{当 } u = -1, \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1 \\ \dot{x}_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_5 e^{-t} - 1 \\ x_2 = -c_5 t \end{cases} \Rightarrow x_1 = b_2 e^{x_2} - 1$$

$$\text{开关线 } \text{sgn}(x_2) e^{|x_2|} - \text{sgn}(x_2)$$

$$3. \min_u J = \int_0^{t_f} dt$$

$$s.t., \quad \dot{x}_1 = -x_2 \quad \dot{x}_2 = -\varpi_0^2 x_1 - 2\xi \varpi_0 x_2 + u$$

$$\text{且有 } \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \quad |u| \leq 1, \text{ 求最优控制。}$$

$$\text{解: } H = 1 + \lambda_1(-x_2) + \lambda_2(-\varpi_0^2 x_1 - 2\xi \varpi_0 x_2 + u)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \varpi_0^2 \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_1 + 2\xi \varpi_0 \lambda_2 \end{aligned},$$

协态方程

同样可以根据砰砰控制，取最优控制为边界值 ± 1 ，可以根据公式计算出微分方程组的解。

本例中未知参数过多，具体的开关线轨线的形式可以根据实际问题具体分析，提供一个例子，参考论文《关于简谐振荡器的时间最优控制有关结果的补充与扩展》。

4. 存在恢复力时，无阻尼运动的最小时间控制。如果忽略阻尼，考虑恢复力，则无阻尼运动方程为

$$\ddot{y} + y = u$$

若令

$$y = x_1, \dot{x}_1 = x_2$$

则无阻尼运动的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t), x(t_0) = x_0\end{aligned}$$

无阻尼运动的最小时间控制问题如下：

$$\begin{aligned}\min_u J &= \int_{t_0}^{t_f} dt \\ s.t. \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u, x(t_0) = x_0 \\ |u| &\leq 1\end{aligned}$$

解：参考第三章作业第三题的例子。

5.系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad |u| \leq 1$$

寻求时间最优控制函数，使系统由任意初始状态到达下列终端状态：

$$x_1(t_f) = 2 \quad x_2(t_f) = 1$$

同时，求出开关曲线的方程,并绘出开关曲线的图形。

解：哈密顿函数 $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = c_1$$

$$\text{协态方程 } \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

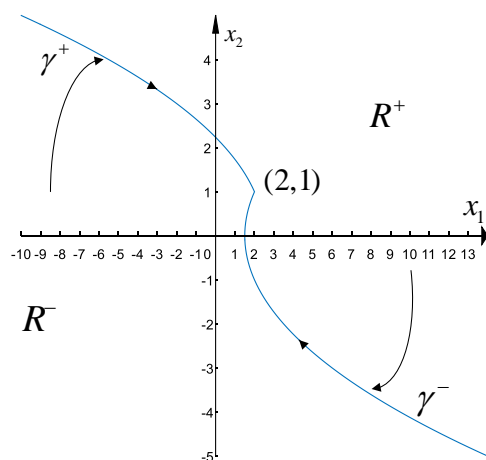
$$\text{H 的极值由 } \lambda_2 u \text{ 决定, 所以 } u = \begin{cases} 1, & \lambda_2 \leq 0 \\ -1, & \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

$$u = 1, \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 + c_3 t + c_4 \\ x_2 = t + c_3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + b_1$$

$$u = -1, \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}t^2 + c_5 t + c_6 \\ x_2 = -t + c_5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + b_2$$

$$\text{将终端条件代入得到 } b_1 = \frac{3}{2}, b_2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{所以开关线方程为曲线 } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}, & x_2 \geq 1 \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{5}{2}, & x_2 < 1 \end{cases}$$



6. 设已知系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \quad |u| \leq 1 \end{cases}$$

寻求最优控制 $u^*(t)$, 使系统由任意初始状态 (ξ_1, ξ_2) 到达原点, 并使性能指标

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} [k + |u(t)|] dt$$

最小。其中，加权系数 $k > 0$ ，末端时间 t_f 是自由的。

解：参考课堂中的例题

第四章作业

1.
$$\min J = \int_0^\infty (x_2^2 + 0.1u^2)dt$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

求最优控制。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P = 0, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = 0.2$$

代入黎卡提方程 $-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q = 0$

$$K = \begin{bmatrix} 0.3413 & 0.6325 \\ 0.6325 & 1.7117 \end{bmatrix}, \quad u = -R^{-1}B^T KX = -1.7064x_1 - 3.1623x_2$$

2. 线性系统的状态方程

$$\dot{x}(t) = -u(t), \quad x(0) = 1$$

性能泛函

$$J = \int_0^\infty (x^2(t) + u^2(t))dt$$

求最优控制。

$$A = 0, B = -1, P = 0, Q = 2, R = 2$$

代入黎卡提方程 $-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q = 0$

$$k=2, \quad u = -R^{-1}B^T KX = x$$

3.
$$\min J = \sum_{k=0}^2 (x_k^2 + u_k^2)$$

$$x_{k+1} = x_k + u_k$$

求最优控制。

$$A = 1, B = 1, P(3) = 0, Q(k) = 2, R(k) = 2$$

代入黎卡提方程 $K(k) = Q(k) + A^T(k)[K^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1}A(k)$

$$\text{得到 } K(k) = 2 + \frac{2K(k+1)}{2+K(k+1)}$$

$$K(3) = P(3) = 0, \text{ 推出 } K(2) = 2, K(1) = 3, K(0) = \frac{16}{5}$$

$$U(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]X(k)$$

$$U(0) = -\frac{3}{5}X(0), \quad U(1) = -\frac{1}{2}X(1) = -\frac{1}{2}(X(0) + U(0)) = -\frac{1}{5}X(0), \quad U(2) = 0$$

4. 给定一阶系统 $\dot{x}(t) = u(t)$, $x(1) = 3$, 性能泛函为

$$J = x^2(5) + \frac{1}{2} \int_0^5 u^2(t) dt$$

求最优控制 u^* 。

$$A = 0, B = 1, P = 2, Q = 0, R = 1$$

代入黎卡提方程 $\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t)$

$$\dot{K}(t) = K(t)^2 \quad K(5) = P = 2 \text{ 解出 } K(t) = \frac{-1}{t-5.5}$$

$$u = -R^{-1}B^TKX = \frac{x(t)}{t-5.5}$$

关于简谐振荡器的时间最优控制 有关结果的补充与扩展*

张 忠 兴

(自动控制教研室)

【主题词与范畴号】最佳控制(0502—1903), 振荡器(1104)

张忠兴: 关于简谐振荡器的时间最优控制有关结果的补充与扩展, 华东工学院学报, 总第32期(1985)第56—67页

【摘要】 对于简谐振荡器的时间最优控制的现有结果, 本文作了补充与扩展。推得了最优时间, 各开关切换时间以及开关切换次数的计算式, 并以解析形式给出了时间最优控制序列相应轨线的递推公式。本文还给出了算例。

Optimal Control, Oscillators,

Zhang Zhongxing, The Supplement and Extension of Existing Results for Time—Optimal Control Problem of the Harmonic Oscillator, J. of East China Inst. of Techno., Sum NO., 32(1985) PP.56—67

【ABSTRACT】 The existing results for time—optimal control of the harmonic oscillator are supplemented and extended. The formulae for optimal time, switch time points and the number of switchings are derived. In addition, the recursive formulae for trajectory associated with the optimal control sequence are given in analytical manner. A numerical example is worked out.

一、引 言

众所周知, 二阶环节是极为重要的控制对象。二阶积分器与简谐振荡器为其两个特例。对于二阶积分器的时间最优控制问题, 已有完备结果^{[1]—[5]}。但对于简谐振荡器的时间最优控制问题, 现有结果并不完备^{[1]—[5]}。尚无最优时间、各开关切换时间以及开关切换次数的计算式, 另外在最优轨线方面也没有给出一般计算结果。本文试图在这些方面做些工作。

为便于阅读, 本文仍按文献中常采用的顺序进行叙述: 问题→最优解必要条件与性质→最优解的求解→最优控制律。文中符号除必要补充外基本上与文献[1]与[3]中的相同。

二、问题与结果

1. 简谐振荡器的时间最优控制问题的提法

• 1984年12月29日收到

设：①受控系统为无阻尼简谐振荡器

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

②端点条件

$$\begin{aligned} x(0) &= (x_1(0), x_2(0))' = (\xi_1, \xi_2)' \\ x(t_1) &= 0, t_1 \text{ 不固定} \end{aligned} \quad (2)$$

③控制约束：

$$|u(t)| \leq 1 \quad (3)$$

④性能指标：

$$J = t_1 = \int_0^{t_1} (1) dt \quad (4)$$

题目的目的在于求解最优控制 $u^*(t)$ 及相应最优轨线 $x^*(t)$ ，使 $J = t_1 = \min$ 。

II. 最优解必要条件与性质

1. 最优解必要条件

问题的Hamilton函数为

$$H = 1 + \lambda_1(t)\omega x_2(t) + \lambda_2(t)[- \omega x_1(t) + u(t)] \quad (5)$$

程. 依时间最优控制问题的基本理论，列写最优解 $u^*(t)$ ， $x^*(t)$ ， t_1 所应满足的必要条件方程。

①正则方程边值问题

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (6b)$$

②H对 u 取最小值条件为

$$u = -\text{sgn}(\lambda_2(t)) \quad (7)$$

③终端时刻条件

$$H(t_1) = 1 + \lambda_1(t_1)\omega x_2(t_1) + \lambda_2(t_1)[- \omega x_1(t_1) + u(t_1)] = 0 \quad (8)$$

2. 最优解性质

①由最小值原理之推论 $\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t}$ 以及H函数不显含t之特点,并用(8)式,不难证

明,H函数沿最优轨线恒为0,

$$\text{即} \quad H(t) \equiv 0 \quad (9)$$

(对此性质,在如下求解过程中并不采用)。

②由协态方程(6b)不难看出,它与状态方程(6a)具有相同系统系数阵。若记 $\lambda_1(0) = \pi_1, \lambda_2(0) = \pi_2$, 则可得

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))' = \phi(t, 0) \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$\text{其中} \quad \phi(t, 0) = e^{At} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (10b)$$

$$\text{求出} \quad \lambda_2(t) = a\omega \sin(\omega t + \alpha) \quad (11a)$$

$$\text{其中} \quad a = \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2}, \alpha = -\text{Arctg} \frac{\pi_2}{\pi_1} \quad (11b)$$

这里提供了 $\lambda_2(t)$ 的形状信息。

③关于最优控制 $u(t)$

可以判断问题为平凡问题,所以最优控制 $u(t)$ 为 bang-bang 控制,由(7)与(11)确定。根据基本理论^{[1],[3]},以及对问题的具体分析,知:

(1) 若最优控制 $u(t)$ 存在,则一定唯一。

(2) 最优控制 $u(t)$ 为分段连续的恒值函数,在 ± 1 两个恒值之间进行切换。

(3) 因特征值为虚数,故开关次数无上限(准确说法见第四节说明),无法直接分离出可能的最优控制序列。

(4) 但每隔不大于 $\frac{\pi}{\omega}$ 秒的时间,要切换一次。下面我们正是从此性质着手研究来确定 $u(t)$ 的。

III. 最优解的求解

1. 将相平面 $(\omega x_1, \omega x_2)$ 分成曲型区域

①最优轨线的一般研究

设 $t \in (0, t_1) \subset [0, t_1]$, $u(t) \equiv \Delta = \pm 1$, 求解(1)式得

$$\begin{cases} \omega x_1 - \Delta = \rho \cos(-\omega t + \text{Arctg} \frac{\omega \xi_2}{\omega \xi_1 - \Delta}) \\ \omega x_2 = \rho \sin(-\omega t + \text{Arctg} \frac{\omega \xi_2}{\omega \xi_1 - \Delta}) \end{cases} \quad (12a)$$

$$\text{其中} \quad \rho = \sqrt{(\omega\xi_1 - \Delta)^2 + (\omega\xi_2)^2} \quad (12b)$$

$$\text{消去得} \quad (\omega x_1 - \Delta)^2 + (\omega x_2)^2 = \rho^2 \quad (13)$$

可见, 当 $u = \Delta = +1$ 时, 相应最优轨线为以

$(1, 0)$ 为圆心, 以 $\rho_+ = \sqrt{(\omega\xi_1 - 1)^2 + (\omega\xi_2)^2}$ 为半径的圆族; 当 $u = \Delta = -1$ 时, 则为以 $(-1, 0)$ 为圆心, 以 $\rho_- = \sqrt{(\omega\xi_1 + 1)^2 + (\omega\xi_2)^2}$ 为半径的圆族。如图 1 所示, 二者行进方向均为顺时针。

由 (12a) 可求得状态 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ 顺时针转移到 $(\omega x_1, \omega x_2)$ 所需要的时间为

$$\omega t = \text{Arctg} \frac{\omega\xi_2}{\omega\xi_1 - \Delta} - \text{Arctg} \frac{\omega x_2}{\omega x_1 - \Delta} \quad (14)$$

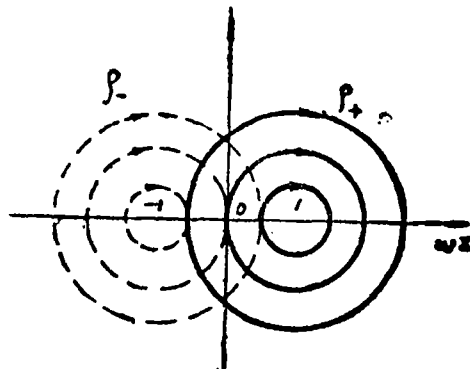


图 1

其中 $\text{Arctg}(\cdot)$ 的取值范围决定于 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ 与 $(\omega x_1, \omega x_2)$ 本身及相对的位置, 下面再确定。

② 开关曲线的确定

由上述可见, 仅当 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ 落在如下两条轨线上时 (见图 2):

$$\gamma_+^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2); (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1, x_2 \leq 0\} \quad (15a)$$

$$\gamma_-^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2); (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1, x_2 \geq 0\} \quad (15b)$$

才可用无切换的控制 $u(t) = +1$, 或 $u(t) = -1$, 以 $t_1 \leq \frac{\pi}{\omega}$ 的时间, 使状态沿 γ_+^0 或 γ_-^0 转移

到 $(\omega x_1(t_1), \omega x_2(t_1)) = 0$ 。其转移时间分别为

$$\omega t_1 = \text{Arctg} \frac{\omega\xi_2}{\omega\xi_1 - 1} \in [0, \pi] \quad (16a)$$

$$\omega t_1 = \text{Arctg} \frac{\omega\xi_2}{\omega\xi_1 + 1} \in [0, \pi] \quad (16b)$$

可见, γ_+^0 与 γ_-^0 为两条特殊的最优轨线。

若 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2) \in \gamma_+^0$ 或 γ_-^0 时, 情况又将如何呢? 为此先作如下曲线族:

$$\gamma_+^j = \{(\omega x_1, \omega x_2); (\omega x_1 - (2j+1))^2 + (\omega x_2)^2 = 1, x_2 \leq 0\} \quad (17)$$

记其与横轴围成的半圆区域为 M_j , $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\gamma_-^j = \{(\omega x_1, \omega x_2); (\omega x_1 + (2j+1))^2 + (\omega x_2)^2 = 1, x_2 \geq 0\} \quad (18)$$

记其与横轴围成的半圆区域为 N_j , $j = 0, 1, 2, \dots$

不难看出, 当 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2) \in \gamma_{+}^j$ 时, 即满足 (17) 式, 则可用控制 $u=+1$, 使状态从 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ 开始沿某条 ρ_{+} 转移到 γ_{+}^{j-1} 其切换时间准确地为 $\frac{\pi}{\omega}$ 秒 (由 (16) 式并考虑到 γ_{+}^j 与 γ_{-}^{j-1} 上, 关于 $(1, 0)$ 中心对称)。当 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2) \in \gamma_{-}^j$ 时, 即满足 (18) 式, 则有与上类同的结论 (只是极性反号)。记

$$\gamma = \left[\bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_{+}^j \right] \cup \left[\bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_{-}^j \right], \quad (19)$$

称之为开关曲线^[1]。它将相平面分成如下区域 (见图 2) :

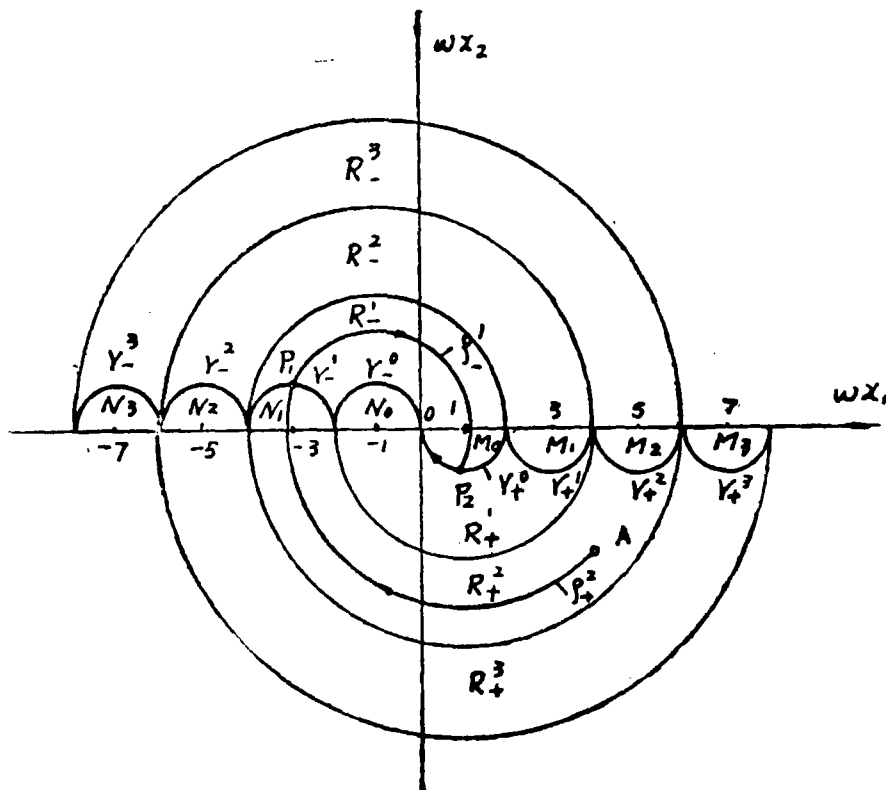


图 2

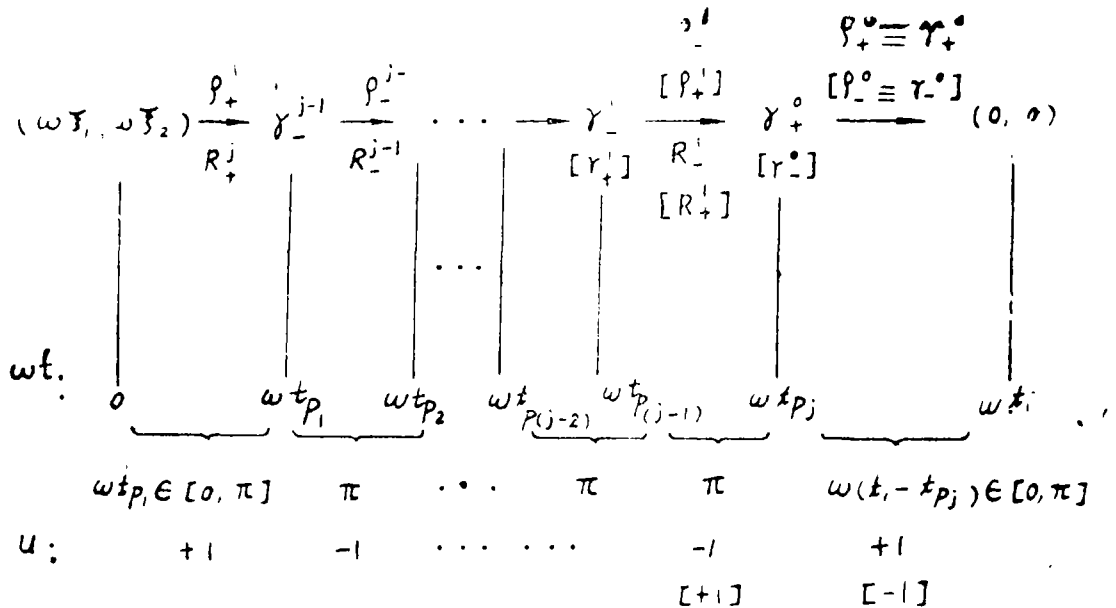
$$R_{+}^j = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (2j-1)^2 \leq (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 \leq (2j+1)^2, x_2 \leq 0\} + N_{j-1} - M_j \quad (20)$$

$$R_{-}^j = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (2j-1)^2 \leq (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 \leq (2j+1)^2, x_2 \geq 0\} + M_{j-1} - N_j \quad (21)$$

以上二式中, $j=1, 2, \dots$ 。

2. 初始状态 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ 落在每一区域中的最优解的确定

①当 $(\omega\xi_1, \omega\xi_2) \in R_{+}^j$ 时, 控制过程可示意如下 (参看图 2 中的点 $A \in R_{+}^2$);



其中主要表示 j 为偶数的情况；若 j 为奇数，则其中相应量应改为 () 中所示者。显然 j 的物理意义为开关切换次数 其数值可由 (20) 式确定。为

$$2j-1 \leq \rho_{+}^j \leq 2j+1$$

或
$$\frac{1}{2}(\rho_{+}^j - 1) \leq j \leq \frac{1}{2}(\rho_{+}^j + 1), \text{ 且 } j = \text{正整数} \quad (22)$$

其中 ρ_{+}^j 可由 (13) 式确定。其上标表所在区域之编号。另外， ρ_{+}^j, ρ_{-}^j (这里规定下标 $+1 \equiv +, -1 \equiv -$) 表示曲线族 ρ 中的某一条，且所属区域 R_{+}^j, R_{-}^j 表示在箭头之下。参看图 2，考虑到 γ_{+}^j 与 γ_{-}^{j-1} ， γ_{-}^j 与 γ_{+}^{j-1} 分别关于 $(1, 0)$ ， $(-1, 0)$ 中心对称，由 (17)，(18) 式可求得 ρ_{+}^j, ρ_{-}^j 半径之大小 (见本节表 1 之说明—(26) 式)；且可推出各切换时刻 $\omega t_{p_k}, k=1, 2, \dots, j$ 对应的状态 $(\omega x_1(t_{p_k}), \omega x_2(t_{p_k}))$ 的递推公式 (见 (26c) 式)。

注意到各段时间 $\leq \frac{\pi}{\omega}$ 秒之事实，由 (14) 式得：

$$\omega t_{p1} = \text{Arc tg} \frac{\omega \xi_2}{\omega \xi_1 - 1} - \text{arc tg} \frac{\omega x_2(t_{p1})}{\omega x_1(t_{p1}) - 1} \quad (23a)$$

$$\omega(t_1 - t_{p1}) = \text{Arc tg} \frac{\omega x_2(t_{p1})}{\omega x_1(t_{p1}) + (2j-1)} \quad (23b)$$

而
$$\omega(t_{p2} - t_{p1}) = \dots = \omega(t_{pj} - t_{p(j-1)}) = \pi \quad (23c)$$

这里 $\text{Arc tg}(\cdot)$ 取值区域定为 $[0, \pi]$ ，以下同。

由 (23) 式可得最优时间为

$$\omega t_1 = \omega t_{p1} + (j-1)\pi + \omega(t_{p1} - t_{pj}) \quad (24)$$

如上诸式中的 $\omega x_1(t_{p1})$, $\omega x_2(t_{p1})$ 为第一次切换点之状态, 是两个重要的量, 可由中心在 $(1, 0)$ 处, 半径为 ρ_+^j 的圆 ρ_+^j (共用一个符号) 与 γ_{-}^{j-1} 的交点确定。可得

$$\begin{cases} \omega x_1(t_{p1}) = -\frac{1}{4j}[(\omega \xi_1 - 1)^2 + (\omega \xi_2)^2 - 1] - (j-1) \\ \omega x_2(t_{p1}) = \sqrt{1 - [\omega x_1(t_{p1}) + (2j-1)]^2} \end{cases} \quad (25)$$

至此各切换时刻及其相应状态与最优时间即可完全计算出来。

$(\omega \xi_1, \omega \xi_2) \in R_+^j$ 时的最优轨线由曲线 ρ_+^j , ρ_-^{j-1} , \dots, ρ_-^1 (或 ρ_+^1), γ_+^0 (或 γ_-^0) 所组成。

②当 $(\omega \xi_1, \omega \xi_2) \in R_-^j$ 时, 控制过程与上类同。不过要将如上各量之下标及控制极性反号。其时, 开关机换次数亦为 j , 有与①相对应的结果。见表1及(27)式, 此处从略。

下面我们将以上结果概括成如下最优控制律。

IV. 最优控制律

在简谐振荡器的时间最优控制问题中, 最优控制律可以表示成如下两种形式:

1. 解析形式一如表1所示 (见下页)。

(说明1)

①当 $(\omega \xi_1, \omega \xi_2) \in R_+^j$ 时, 有如下表达式与递推公式:

$$\rho_+^j: (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = (\omega \xi_1 - 1)^2 + (\omega \xi_2)^2 = (\rho_+^j)^2 \quad (26a)$$

$$\rho_{(-1)}^{j-k}: \begin{cases} (\omega x_1 - (-1)^k)^2 + (\omega x_2)^2 = [\rho_{(-1)}^{j-k}]^2 \\ = [\omega x_1(t_{pk}) - (-1)^k]^2 + [\omega x_2(t_{pk})]^2 \end{cases} \quad (26b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega x_1(t_{pk}) = (-1)^{k-1}(\omega x_1(t_{p1}) + 2(k-1)) \\ \omega x_2(t_{pk}) = (-1)^{k-1}\omega x_2(t_{p1}) \end{array} \right\} \in \gamma_{(-1)}^{j-k} \quad (26c)$$

以上 $k=1, 2, \dots, j$

$$\text{且} \begin{cases} \omega x_1(t_{p1}) = -\frac{1}{4j}[(\omega \xi_1 - 1)^2 + (\omega \xi_2)^2 - 1] - (j-1) \\ \omega x_2(t_{p1}) = \sqrt{1 - [\omega x_1(t_{p1}) + (2j-1)]^2} \end{cases} \in \gamma_{-}^{j-1} \quad (26d)$$

②当 $(\omega \xi_1, \omega \xi_2) \in R_-^j$ 时, 有如下表达式与递推公式:

$$\rho_-^j: (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = (\omega \xi_1 + 1)^2 + (\omega \xi_2)^2 = (\rho_-^j)^2 \quad (27a)$$

$$\rho_{(-1)}^{j-k}: \begin{cases} (\omega x_1 - (-1)^{k-1})^2 + (\omega x_2)^2 = [\rho_{(-1)}^{j-k}]^2 \\ = [\omega x_1(t_{pk}) - (-1)^{k-1}]^2 + [\omega x_2(t_{pk})]^2 \end{cases} \quad (27b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega x_1(t_{pk}) = (-1)^{k-1}(\omega x_1(t_{p1}) - 2(k-1)) \\ \omega x_2(t_{pk}) = (-1)^{k-1}\omega x_2(t_{p1}) \end{array} \right\} \in \gamma_{(-1)}^{j-k} \quad (27c)$$

表1

初始状态 ($\omega \xi_1, \omega \xi_2$)	最优控制 $u(t)$	最优轨线 ($\omega x_1, \omega x_2 \in$)	开关时间 $\omega t p_k$	最优时间 t_1
r_{-0}	$u = +1$	$t \in [0, t_1]$	—	$\omega t_1 = \text{Arctg} \frac{\omega \xi_2}{\omega \xi_1 - 1}$
r_{-0}	$u = -1$	$t \in [0, t_1]$	—	$\omega t_1 = \text{Arctg} \frac{\omega \xi_2}{\omega \xi_1 + 1}$
R_+^j	$+1$	$t \in [0, t p_1]$	$\omega t p_1 = \text{Arctg} \frac{\omega \xi_2}{\omega \xi_1 - 1} - \text{arctg} \frac{\omega x_2(t p_1)}{\omega x_1(t p_1) - 1}$	$\omega t_1 = \omega t p_1 + (j-1)\pi + \omega(t_1 - t p_j)$
	-1	$t \in (t p_1, t p_2]$	$\omega(t p_2 - t p_1) = \pi$	
	\vdots	\vdots	\vdots	
	$(-1)^k$	$t \in (t p_k, t p_{k+1})$	$\omega(t p_j - t p_{j-1}) = \pi$	
	\vdots	\vdots	$\omega(t_1 - t_j) = \text{Arctg} \frac{\omega x_2(t p_1)}{\omega x_1(t p_1) + (2j-1)}$	
R_+^j	-1	$t \in [0, t p_1]$	$\omega t p_1 = \text{Arctg} \frac{\omega \xi_2}{\omega \xi_1 - 1} - \text{arctg} \frac{\omega x_2(t p_1)}{\omega x_1(t p_1) + 1}$	$\omega t_1 = \omega t p_1 + (j-1)\pi + \omega(t_1 - t p_j)$
	$+1$	$t \in (t p_1, t p_2]$	$\omega(t p_2 - t p_1) = \pi$	
	\vdots	\vdots	\vdots	
	$(-1)^{k-1}$	$t \in (t p_k, t p_{k+1})$	$\omega(t p_j - t p_{j-1}) = \pi$	
	\vdots	\vdots	$\omega(t_1 - t p_j) = \text{Arctg} \frac{\omega x_2(t p_1)}{\omega x_1(t p_1) - (2j-1)}$	

$$\text{且 } \left\{ \begin{array}{l} \omega x_1(t_{p1}) = \frac{1}{4j} [(\omega \xi_1 + 1)^2 + (\omega \xi_2)^2 - 1] + (j+1) \\ \omega x_2(t_{p1}) = -\sqrt{1 - [\omega x_1(t_{p1}) - (2j-1)]^2} \end{array} \right\} \in \gamma_{-j-1} \quad (27d)$$

(说明2)符号约定:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{+1}^{j-k} \equiv \rho_{+}^{j-k}, \quad \rho_{-1}^{j-k} \equiv \rho_{-}^{j-k} \\ \gamma_{+1}^{j-k} \equiv \gamma_{+}^{j-k}, \quad \gamma_{-1}^{j-k} \equiv \gamma_{-}^{j-k} \\ \rho_{+1}^0 \equiv \rho_{+}^0 \equiv \gamma_{+}^0, \quad \rho_{-1}^0 \equiv \rho_{-}^0 \equiv \gamma_{-}^0 \end{array} \right. \quad (28)$$

2. 综合形式一如表2所示。

表2

初 始 状 态 ($\omega \xi_1, \omega \xi_2$)	最优控制综合函数形式 $u = u(\omega x_1, \omega x_2)$
$\in \mathbf{r}_+^0$ 即 $(\omega \xi_1 - 1)^2 + (\omega \xi_2)^2 = 1, \omega \xi_2 \leq 0$	$u = +1 \quad (\omega x_1, \omega x_2) \in \mathbf{r}_+^0$
$\in \mathbf{r}_-^0$ 即 $(\omega \xi_1 + 1)^2 + (\omega \xi_2)^2 = 1, \omega \xi_2 \geq 0$	$u = -1 \quad (\omega x_1, \omega x_2) \in \mathbf{r}_-^0$
$\in \mathbf{R}_+^j$	$u = \begin{cases} +1 & (\omega x_1, \omega x_2) \in \rho_+^j \\ -1 & (\omega x_1, \omega x_2) \in \rho_-^{j-1} \\ \vdots & \\ -1 \text{ (或 } +1) & (\omega x_1, \omega x_2) \in \rho_-^1 \text{ (或 } \rho_+^1) \\ +1 \text{ (或 } -1) & (\omega x_1, \omega x_2) \in \mathbf{r}_+^0 \text{ (或 } \mathbf{r}_-^0) \end{cases}$
$\in \mathbf{R}_-^j$	$u = \begin{cases} +1 & (\omega x_1, \omega x_2) \in \rho_-^j \\ -1 & (\omega x_1, \omega x_2) \in \rho_+^{j-1} \\ \vdots & \\ +1 \text{ (或 } -1) & (\omega x_1, \omega x_2) \in \rho_+^1 \text{ (或 } \rho_-^1) \\ -1 \text{ (或 } +1) & (\omega x_1, \omega x_2) \in \mathbf{r}_-^0 \text{ (或 } \mathbf{r}_+^0) \end{cases}$

其中主要表示了 j =偶数的结果。若 j =奇数, 则相应量取 [] 所示者。其中 $\rho_{\pm}^k \in \mathbf{R}_{\pm}^k$,

$\rho_k \in R_k$ 。若记 $R_+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_+^j$, $R_- = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_-^j$, 则最优控制律可简化成

$$u = \begin{cases} +1 & \forall (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_+ \cup R_+ \\ -1 & \forall (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_- \cup R_- \end{cases} \quad (29)$$

三、算 例

〔例〕 在本问题中, 设 $(\omega \xi_1, \omega \xi_2) = (0, -4)$, 试求最优控制, 最优轨线, 最优时间以及开关切换次数与相应时刻与状态。

解 ①首先判断 $(\omega \xi_1, \omega \xi_2)$ 所属区域 R_+^j

而 $\rho_+^j = \sqrt{(\omega \xi_1 - 1)^2 + (\omega \xi_2)^2} = \sqrt{17}$

又 $2j-1 \leq \rho_+^j \leq 2j+1$

或 $\frac{1}{2}(\rho_+^j - 1) \leq j \leq \frac{1}{2}(\rho_+^j + 1)$

得 $j=2$

所以 $(\omega \xi_1, \omega \xi_2) \in R_+^2$

②控制过程示意图解, 读者可按上述内容自行写出。

③开关切换次数 $j=2$

开关时刻为 $\omega t_{p1}, \omega t_{p2}$ 。首先算出第一次切换点的状态 $(\omega x_1(t_{p1}), \omega x_2(t_{p1})) \in \gamma_-^1$,

$$\begin{cases} \omega x_1(t_{p1}) = -\frac{1}{4j}[(\rho_+^j)^2 - 1] - (j-1) = -3 \\ \omega x_2(t_{p1}) = \sqrt{1 - [\omega x_1(t_{p1}) + (2j-1)]^2} = 1 \end{cases}$$

由此可得

$$\omega t_{p1} = \text{Arc tg} \frac{\omega \xi_2}{\omega \xi_1 - 1} - \text{arc tg} \frac{\omega x_2(t_{p1})}{\omega x_1(t_{p1}) - 1}$$

$$= \text{Arc tg } 4 + \text{arc tg} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

其中 $\text{Arctg}(\cdot) \in (0, \pi)$

且 $\omega(t_{p2} - t_{p1}) = \pi$

$$\omega(t_1 - t_{p2}) = \text{Arc tg} \frac{\omega x_2(t_{p1})}{\omega x_1(t_{p1}) + (2j-1)} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \omega t_1 = \omega t_{p1} + \pi + \omega(t_1 - t_{p2}) = 2\pi$

④再计算第 k 次切换点状态 $(\omega x_1(t_{pk}), \omega x_2(t_{pk})) \in \gamma_{-1}^k$, 其中 $j=2; k=1, 2$ 。

有如下递推公式,

$$\begin{cases} \omega x_2(t_{p,k}) = (-1)^{k-1} \omega x_2(t_{p,1}) \\ \omega x_1(t_{p,k}) = (-1)^{k-1} [\omega x_1(t_{p,1}) + 2(k-1)] \end{cases}$$

$k=1$ 时, 已有

$$\begin{cases} \omega x_2(t_{p,1}) = 1 \\ \omega x_1(t_{p,1}) = -3 \end{cases} \in \gamma_{(-1)}^{-1,1} \equiv \gamma_{-1}^{-1}$$

$k=2$ 时, 算得

$$\begin{cases} \omega x_2(t_{p,2}) = -1 \\ \omega x_1(t_{p,2}) = 1 \end{cases} \in \gamma_{(-1)}^{-1,2} \equiv \gamma_{+}^0$$

⑤有了为上的准备工作后, 即可得最优解如下,

(1) 最优控制

$$u(t) = \begin{cases} +1 & \omega t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ -1 & \omega t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \\ +1 & \omega t \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \end{cases}$$

(2) 最优轨线

$$(\omega x_1, \omega x_2) \in \begin{cases} \rho_{+}^{-2}; (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = (\rho_{+}^{-2})^2 = 17 \in \mathbb{R}_{+}^2 \\ \omega t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \rho_{-}^{-1}; (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = (\rho_{-}^{-1})^2 = 5 \in \mathbb{R}_{-}^{-1} \\ \omega t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \\ \rho_{+}^0 \equiv \gamma_{+}^0; (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1 \\ \omega t \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \end{cases}$$

不难用作图法验证如上计算结果正确。当 $(\omega \xi_1, \omega \xi_2)$ 离坐标原点越远时, 即 j 越大时, 用作图法解题就越困难。但是, 若根据本算例提供的解题步骤计算, 还是比较简单的, 而且所得结果也较完备。

四、说 明

本文对于简谐振荡器时间最优控制问题作了进一步的探讨, 对现有结果作了补充与扩展。推得了与初始状态相对应的最优时间, 各开关切换时间以及开关切换次数的计算式, 並用了初等的解析方法导出了与时间最优控制相应的轨线的递推公式。这些结果特别适用于上

机计算（也适合微机控制），同时也适合手算。此点由上节列举的算例清楚看到。

须指出，文献中的结论“开关次数无上限”之说并不全面。诚然对于整个相平面 $(\omega x_1, \omega x_2)$ 而言，确是如此。但对于某一具体的初始状态 $(\omega \xi_1, \omega \xi_2)$ 而言，应说：

“开关次数为一定数，由(22)式计算。”

关于最优控制律的实现，根据(23)式，不妨采用晶体管时间（继电器）元件，如图3所示^[6]。

需用三组，时间整定值分别由(23a, b, c)式决定。不过与(23c)式相对应的一组，还要与

其他类型的逻辑电路相配合，才可起到 $(j-1)$

个 $\frac{\pi}{\omega}$ 秒的延时作用。当然，其中要加一些整定

端，以与 j 的数值相配。图3所示的时间元件的

时间整定值由下式确定^[6]：

$$t = (R_1 + R_2)C \ln \frac{E_c}{E_c - U_{cw}}$$

其中 U_{cw} 为稳压管 D_2 的稳压值。通常实测时，可用mS表测定 t 值。

最优控制律的具体实现回路，本文不准备细述。可以肯定，如上实现方法要比[1]的非线性模拟方法实用些且更精确些。

至此，对于二阶积分器与简谐振荡器（特征值分别为 $S_{1,2} = 0, \pm j\omega$ ）的时间最优控制问题，已有完备的结果。然而，对于一般的二阶环节 $(S_{1,2} = \sigma \pm j\omega)$ 的时间最优控制问题，至今尚未解决^[1-4]。本文方法可能对此有所启迪。另外，在实际的动力学系统中，控制对象大多数为二阶环节。因此，这一般问题的解决又将有助于时间（bang—bang）最优控制理论的实际应用。

本文写于81年，主要内容已收入82年为本院学生所编的《最优控制系统》教学讲义。82年又修改成文，曾于本院学术报告会上宣读过。这次重新作了整理、充实与修改。

本文81年、82年的初稿承蒙徐金梁付教授审阅，笔者深表谢意。

参 考 文 献

- [1] Athans, M. & P. L. Falb, Optimal Control, N. Y. Mc Graw—Hill, 1966.
- [2] Sage, A. P. & C. C. White, Optimum Systems Control, N. J. Prentice—Hall, 1977.
- [3] 秦寿康、张正方：最优控制，国防出版社，1979.
- [4] 王照林等：现代控制理论基础，国防出版社，1981.
- [5] 谢绪澄：现代控制理论基础，辽宁出版社，1980.
- [6] 张忠兴：35KV线路JSGC—3型晶体管速断过流保护及三相一次自动重合闸装置生产蓝图与说明书，

原水利电力部南京水利电力仪表厂，1974年。

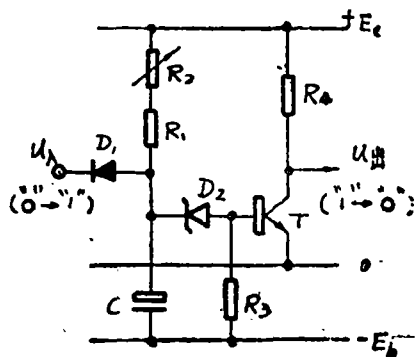


图 3