



第三章 极小值原理实例应用



实例一：机械手转台最短时间控制

随着现代经济和工业的发展，各行各业对自动化装置的自动化程度要求不断提高。机械手是现代工业装配现场应用最广泛的自动化机械之一，它综合运用了机械与精密仪器、微电子与计算机、自动控制、信息处理以及人工智能等学科的众多研究成果。机械手装配速度直接影响着整个生产过程的效率，其工作效率的提高对于生产效率的提高具有重要作用，设计合理的机械手控制方案将有效提高机械手的工作效率。本实例利用极小值原理设计最优控制律来实现机械手转台的最短时间控制。

。





三自由度机械手的结构如图所示，从图中可以看出机械手是通过伸出去的机械臂夹持重物，并通过底座回转产生竖直方向的上升和下降运动。

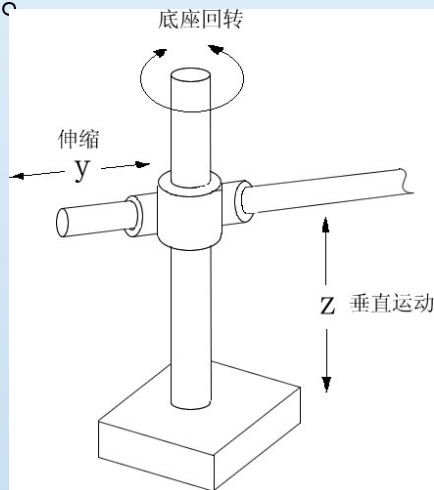


图 三自由度机械手结构



机械手夹持固定重量的重物后，其简化模型如图所示。

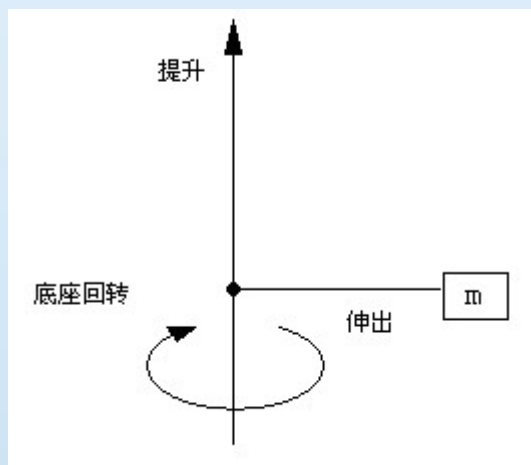


图 机械手夹持重物后的简化模型





设机械手转动惯量为 I ，横杆夹持重物质量为 m ，并假设夹持重物后横杆长度与纵杆高度不再变化，最大回转力矩为 M_{\max} ，质心初始柱面坐标为 (θ_0, y_0, z_0) ，目标坐标为 (θ_1, y_0, z_0) ，初始速度与到达目标坐标的速度均为0。

运动方程如下

$$\ddot{\theta}(I + my_0^2) = M$$





令 $\theta = x_1, \dot{\theta} = x_2$ 则 $\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = \frac{M}{I + my_0^2}$$

初始条件 $x_1(t_0) = \theta_0, x_2(t_0) = 0$

终端条件 $x_1(t_f) = \theta_1, x_2(t_f) = 0$

控制约束 $\left| \frac{M}{I + my_0^2} \right| \leq \left| \frac{M_{\max}}{I + my_0^2} \right|$

性能指标 $J = \int_{t_0}^{t_f} dt$





取哈密顿函数为

$$H = F + \lambda^T f = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)\frac{M}{I + my_0^2}$$

协态方程为

$$\dot{\lambda}_1 = 0$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$$

积分得

$$\lambda_1(t) = c_1$$

$$\lambda_2(t) = -c_1 t + c_2$$

由哈密顿得最优控制为

$$M = -\text{sgn}[\lambda_2(t)]M_{\max}$$





当 $M = M_{\max}$ 时，解得

$$x_2(t) = \frac{M_{\max}}{I + my_0^2} t + x_{20}$$

$$x_1(t) = \frac{M_{\max}}{2(I + my_0^2)} t^2 + x_{20}t + x_{10}$$

可得相轨迹方程为

$$x_1(t) = \frac{I + my_0^2}{2M_{\max}} x_2^2(t) + c$$





当 $M = -M_{\max}$ 时，解得

$$x_2(t) = -\frac{M_{\max}}{I + my_0^2} t + x_{20}$$

$$x_1(t) = -\frac{M_{\max}}{2(I + my_0^2)} t^2 + x_{20}t + x_{10}$$

可得相轨迹方程为

$$x_1(t) = -\frac{I + my_0^2}{2M_{\max}} x_2^2(t) + c'$$





得到相轨迹图

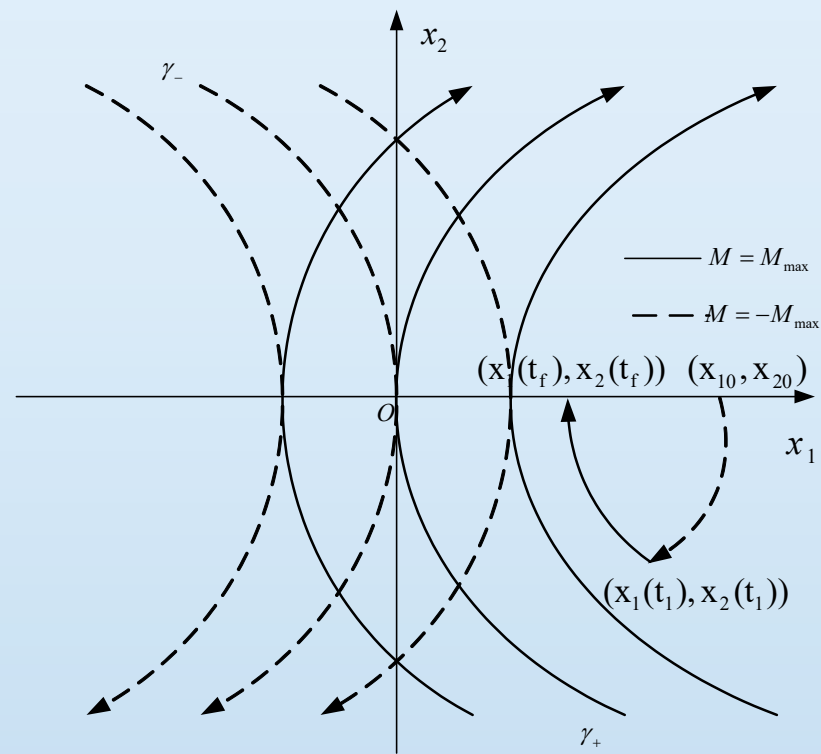


图 最短时间相轨迹



初始状态与终端状态分别为 $(x_{10}, x_{20}), (x_1(t_f), x_2(t_f))$, 切换状态为 $(x_1(t_1), x_2(t_1))$

$$x_1(t_1) = -\frac{I + my_0^2}{2M_{\max}} x_2^2(t_1) + x_{10} + \frac{I + my_0^2}{2M_{\max}} x_{20}^2 = -\frac{I + my_0^2}{2M_{\max}} x_2^2(t_1) + \theta_0$$

$$x_1(t_1) = \frac{I + my_0^2}{2M_{\max}} x_2^2(t_1) + x_1(t_f) - \frac{I + my_0^2}{2M_{\max}} x_2^2(t_f) = \frac{I + my_0^2}{2M_{\max}} x_2^2(t_1) + \theta_1$$

解方程得

$$x_1(t_1) = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}, \quad x_2(t_1) = -\sqrt{\frac{(\theta_0 - \theta_1)M_{\max}}{I + my_0^2}}$$





又由 $x_1(t_1) = -\frac{M_{\max}}{2(I + my_0^2)}t_1^2 + x_{20}t_1 + x_{10}$ 及初始条件得

$$x_1(t_1) = -\frac{M_{\max}}{2(I + my_0^2)}t_1^2 + x_{20}t_1 + x_{10} = -\frac{M_{\max}}{2(I + my_0^2)}t_1^2 + \theta_0$$

进而有

$$t_1 = \sqrt{\frac{(\theta_0 - \theta_1)(I + my_0^2)}{M_{\max}}}$$

$$\frac{M_{\max}}{2(I + my_0^2)}(t_f - t_1)^2 - \sqrt{\frac{(\theta_0 - \theta_1)M_{\max}}{I + my_0^2}}(t_f - t_1) + \frac{\theta_0 - \theta_1}{2} = 0$$





解得

$$t_f = 2\sqrt{\frac{(\theta_0 - \theta_1)(I + my_0^2)}{M_{\max}}}$$

控制输入为

$$M = \begin{cases} -M_{\max} & 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{(\theta_0 - \theta_1)(I + my_0^2)}{M_{\max}}} \\ M_{\max} & \sqrt{\frac{(\theta_0 - \theta_1)(I + my_0^2)}{M_{\max}}} \leq t \leq 2\sqrt{\frac{(\theta_0 - \theta_1)(I + my_0^2)}{M_{\max}}} \end{cases}$$





假设 $(I + my_0^2) = 1$, $M_{\max} = 1$, $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$, 则 $\ddot{\theta} = M$ 。仿真结构图如下:

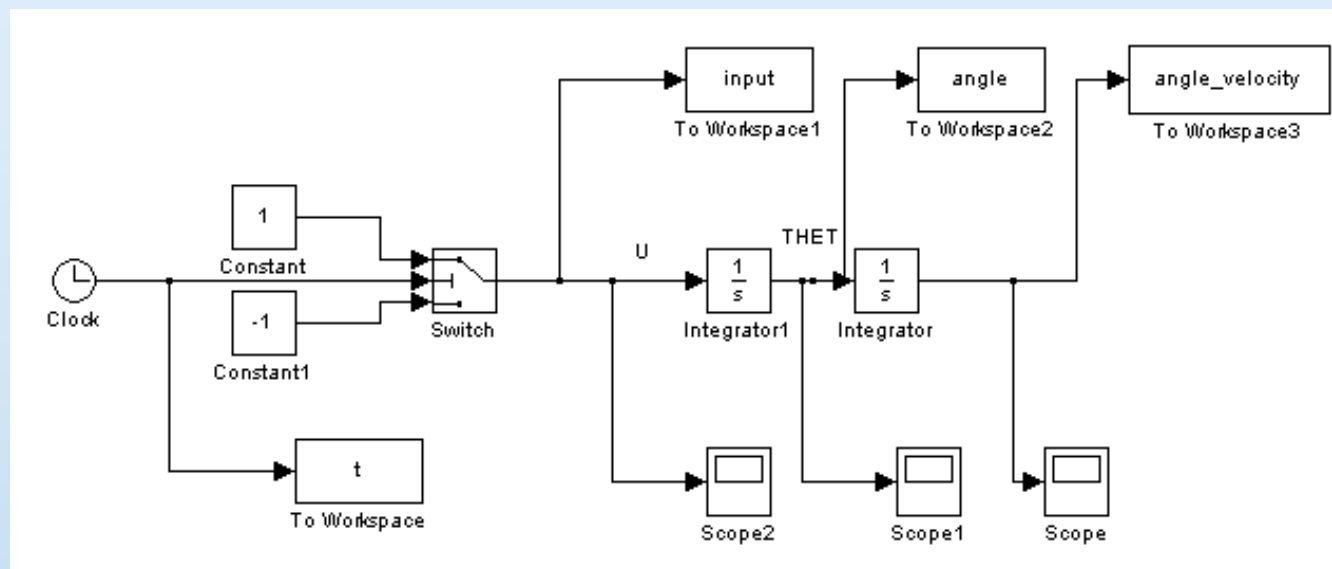


图 仿真结构图



控制输入如下图所示：

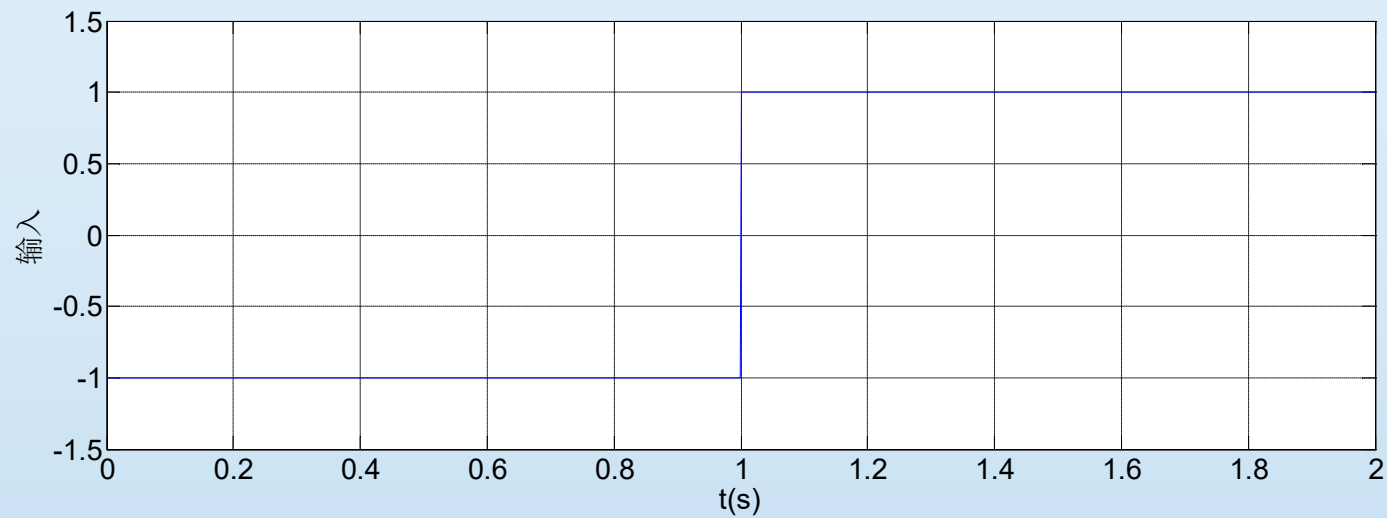


图 输入信号曲线





输出的角度信号为:

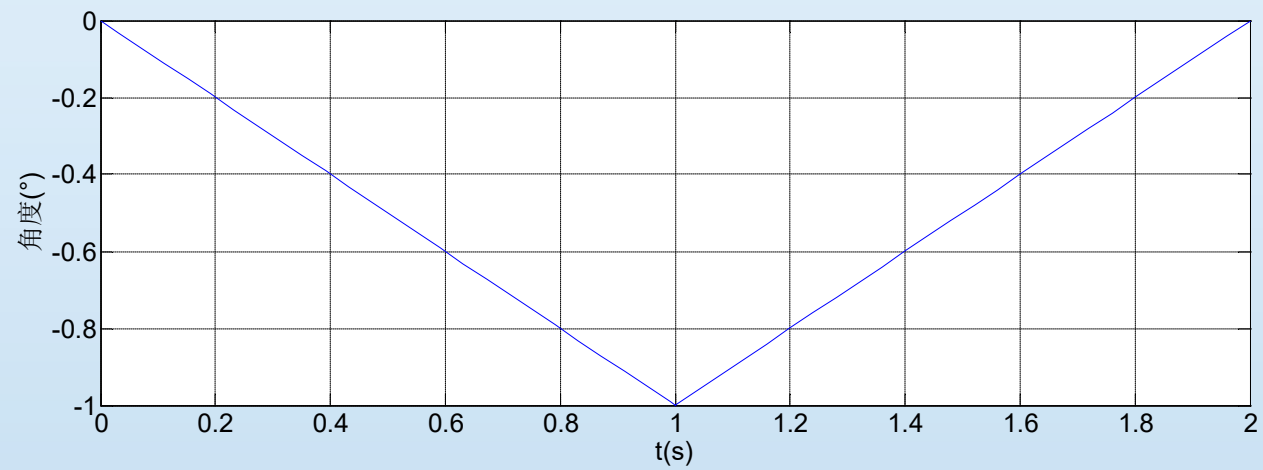


图 输出角度曲线





输出的角速度信号为:

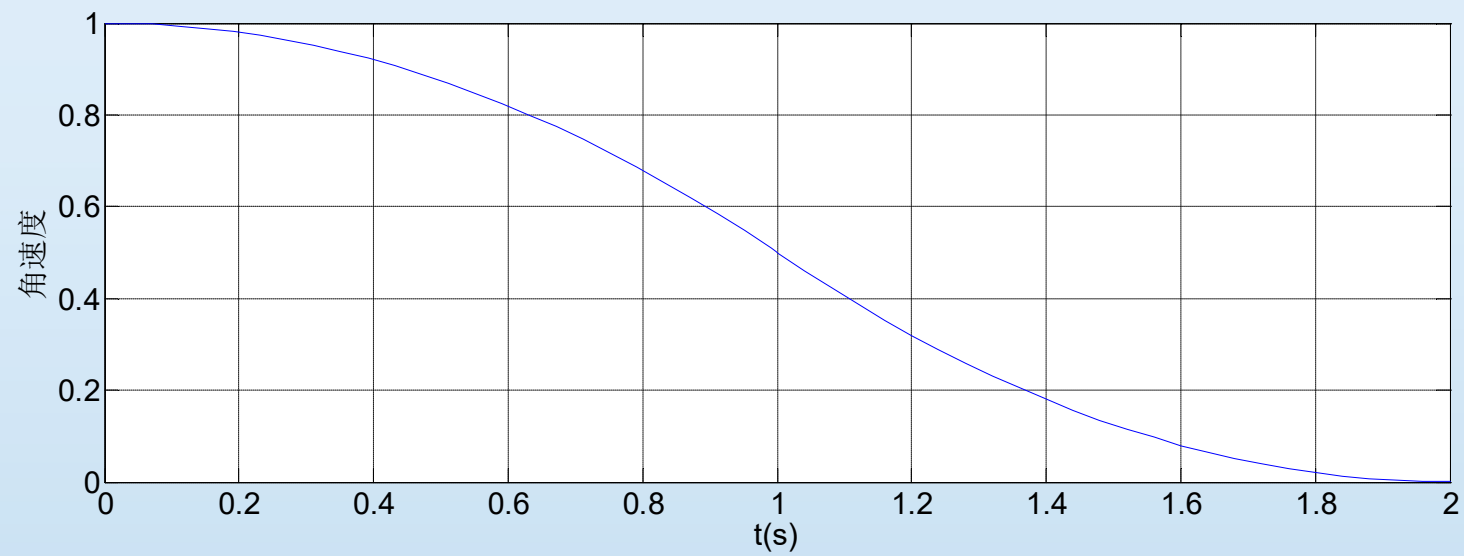


图 输出角速度曲线





实例二：鱼塘管理

资源管理是管理科学的一个重要方向，鱼塘管理是资源管理问题中的一个经典问题。本实例首先介绍鱼塘管理问题的数学模型，而后利用极小值原理求解鱼塘的最优收益问题，并完成了相关设计的验证与分析。





设所有鱼塘的鱼都具有相同的生物学特性，不需考虑它们年龄的差别，那么鱼群的简单数学模型是：

$$\frac{dx}{dt} = rx - \frac{rx^2}{K} - u(t)$$

其中， $x(t)$ 为 t 时刻鱼的总数， $u(t)$ 为捕捞速度， K 为鱼塘的容纳量， $\frac{dx}{dt}$ 表示鱼的增长率， rx 表示自然繁殖与鱼群总数成正比， r 为系数， $\frac{rx^2}{K}$ 表示鱼塘有一定容量，当鱼总数增加时鱼塘的这个容量对鱼繁殖存在影响。



鱼塘的最优管理问题是获取最优管理策略——确定捕捞速度 $u(t)$ 使鱼塘的总收益最大。

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left[V - \frac{c}{x} \right] u dt$$

其中， δ 为贴现率， V 为鱼的单价， $\frac{c}{x}$ 为捕一条鱼的平均费用。





考虑到捕捞能力 E ，由捕捞天数、拉网次数、网眼大小等因素所决定，即

$$u(t) = Ex(t)$$

因此上述方程可以整理为另外一种形式：

$$\frac{dx}{dt} = rx - \frac{rx^2}{K} - Ex$$

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [VEx - CE] dt$$





约束条件为

$$0 \leq E \leq \bar{E}$$

\bar{E} 为保护鱼群容许的最大捕捞能力。

于是，鱼塘的最优管理问题是在容许的最大能力约束下，获取捕捞效力 E 使鱼塘的总收益 J 最大。





设在鱼群模型中 $F(x) = rx - \frac{rx^2}{k}$, 那么鱼群模型可以改写为:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - Ex$$

则鱼塘管理问题的目标函数为总收益, 即

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [VEx - CE] dt, 0 \leq E \leq \bar{E}$$

构造哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H(x, \lambda, u, t) &= e^{-\delta t} [VEx - CE] + \lambda [F(x) - Ex] \\ &= \left\{ e^{-\delta t} [Vx - C] \right\} E + \lambda F(x) \end{aligned}$$





从上式可以得出最优控制策略为

$$u^* = E = \begin{cases} E_{\max} & , \quad \text{当 } e^{-\delta t}[Vx - C] - \lambda x > 0 \text{ 时} \\ 0 & , \quad \text{当 } e^{-\delta t}[Vx - C] - \lambda x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

其中 E_{\max} 为允许的最大捕捞效力。

由 $e^{-\delta t}[Vx - C] - \lambda x = 0$ 可以解出 $\lambda = e^{-\delta t}[V - \frac{C}{x}]$ 。这相当于

沿奇异弧运动，沿着这条奇异弧对 t 求导数可以得到

$$\frac{d\lambda}{dt} = \delta e^{-\delta t} \left[\frac{C}{x} - V \right] + e^{-\delta t} \frac{C}{x^2} [F(x) - Ex]$$





由协态方程可得

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -e^{-\delta t}VE - \lambda[F'(x) - E]$$

$$\delta e^{-\delta t} \left[\frac{C}{x} - V \right] + e^{-\delta t} \frac{C}{x^2} [F(x) - Ex] = -e^{-\delta t}VE - \lambda[F'(x) - E]$$

解得

$$\delta = F' + \frac{CF(x)}{x(Vx - C)}$$





当 $F(x) = rx - \frac{rx^2}{K}$ 时

$$\delta = r - \frac{2rx}{K} + \frac{C(rx - \frac{rx^2}{K})}{x(Vx - C)}$$

等价于

$$(\delta - r)(Vx - C) + \frac{2rx}{K}(Vx - C) - C(r - \frac{rx}{K}) = 0$$

它是对 x 的二次代数方程。设它的一个正实根为 \bar{x} ，那么 \bar{x} 就是鱼的最优总数。





如果初始时刻鱼的总数不等于最优总数 \bar{x} ，并且对捕捞效力具有约束 $0 \leq E \leq E_{\max}$ ，可采取以下管理方法： $x(0) < \bar{x}$ 时，先取 $E = 0$ ，这时鱼的总数将增加，当鱼的总数增加到 $x = \bar{x}$ 时，取 $\bar{E} = \frac{F(\bar{x})}{\bar{x}}$ 便可使以 $x(t)$ ，保持在最优总数 \bar{x} ；当 $x(0) > \bar{x}$ 时，则先取 $E = \bar{E}$ ，这时鱼的总数将减少，当减少到 $x = \bar{x}$ 时，取 $\bar{E} = \frac{F(\bar{x})}{\bar{x}}$ ，使以 $x(t)$ ，保持在最优总数 \bar{x} 。





综合以上讨论，我们得到使鱼塘的鱼保持最优总数的管理策略是

$$E = \begin{cases} 0 & \text{当 } x < \bar{x} \text{ 时} \\ \frac{F(\bar{x})}{\bar{x}} & \text{当 } x < \bar{x} \text{ 时} \\ E_{\max} & \text{当 } x < \bar{x} \text{ 时} \end{cases}$$

采用这样的管理策略即可使鱼的总数保持在最优值 \bar{x} ，又可对市场提供较稳定的供应量，并且使鱼塘总收入最大，如图所示



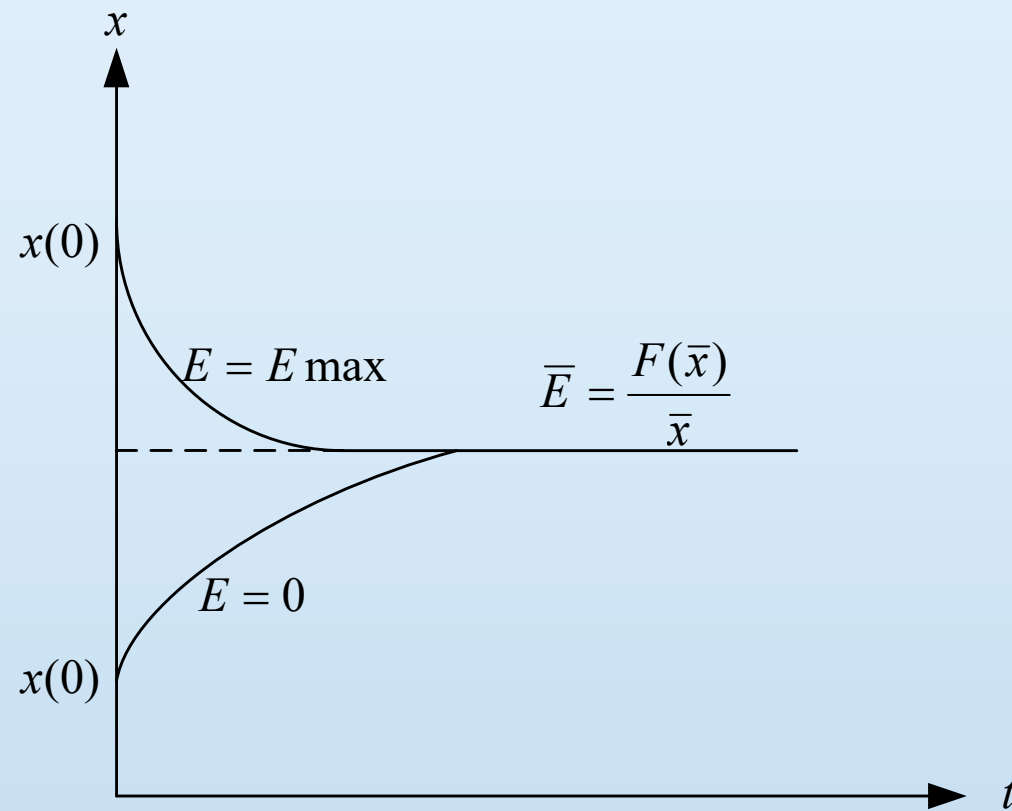


图 鱼塘的鱼保持最优总数的管理策略



实例三：最优导引率

在现有的自寻的导弹中，大都采用比例导引法。假设导弹和目标在同一平面内运动，按比例导引制导律，假设导弹的速度向量的旋转角速度 $\dot{\theta}$ 垂直于瞬时的弹目视线，并且正比于导弹与目标之间的视线角速率 \dot{q} ，假设目标的法向加速度为零，那么可得：

$$\dot{\theta} = N\dot{q}$$





其中, θ 为导弹速度与基准方向的夹角, q 为导弹与目标连线与基准方向的夹角, 称为视线角, \dot{q} 是视线角速率, N 是比例常数, 称为导航比, 通常为3~6。比例导引的实质是使导弹向着 \dot{q} 减小的方向运动, 抑制视线旋转, 也就是使导弹的相对速度对准目标, 保证导弹向着前置碰撞点飞行。

比例导引法是经典的导引方法。下面我们从最优控制理论的观点来研究自寻的导弹的最优导引规律问题。





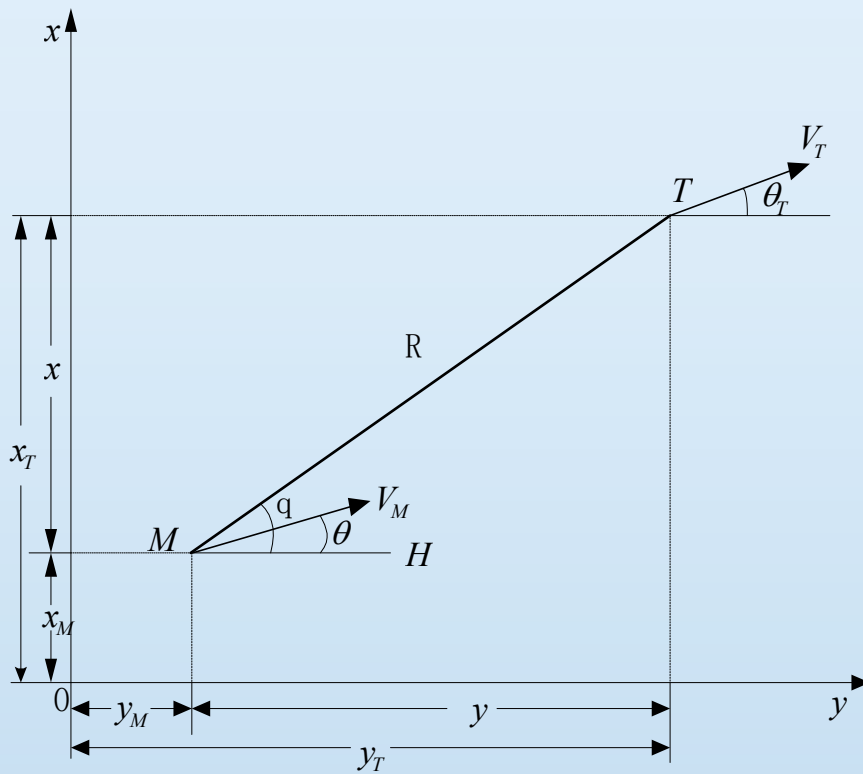
首先建立导弹运动状态方程，导弹与目标的运动关系是非线性的，如果把导弹与目标的运动方程相对于理想弹道线性化，可得导弹运动的线性状态方程。假设导弹和目标在同一平面内运动，如图所示。选 oxy 为固定坐标。导弹速度向量与 oy 轴成 θ 角，目标速度向量与 oy 轴成 θ_T 角。





导弹与目标的连线 MT 与 oy 轴成 q 角。假定导弹以尾追的方式攻击目标。坐标轴 ox 和 oy 的方向可以任意选择，使上述角度都比较小。再假定导弹和目标均匀速飞行，也就是说 V_M 和 V_T 均为恒值。使用相对坐标状态变量，设 x 为导弹与目标在 ox 轴方向上的距离偏差， y 为导弹与目标在 oy 轴方向上的距离偏差，即





$$\begin{cases} x = x_T - x_M \\ y = y_T - y_M \end{cases}$$



将上式对 t 求导，并根据导弹和目标的关系可得

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_T - \dot{x}_M = V_T \sin \theta_T - V_M \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{y}_T - \dot{y}_M = V_T \cos \theta_T - V_M \cos \theta \end{cases}$$





假定 θ 和 θ_T 比较小, 因此 $\sin \theta_T \approx \theta_T, \sin \theta \approx \theta, \cos \theta_T \approx 1, \cos \theta \approx 1$, 则

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_T - \dot{x}_M = V_T \theta_T - V_M \theta \\ \dot{y} = \dot{y}_T - \dot{y}_M = V_T - V_M \end{cases}$$





以 x_1 表示 x , x_2 表示 \dot{x} , 则

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = V_T \dot{\theta}_T - V_M \dot{\theta}$$

其中, $V_T \dot{\theta}_T$ 表示目标的横向加速度, $V_M \dot{\theta}$ 表示导弹横向加速度, 分别以 a_T 和 a_M 表示, 那么

$$\dot{x}_2 = a_T - a_M$$





导弹的横向加速度 a_M 为控制量。一般将控制信号加给舵机，舵面偏转后产生弹体攻角 α ，而后产生横向加速度 a_M 。如果忽略舵机和弹体的惯性，而且假设控制量的单位与加速度单位相同，则可用控制量 u 来表示 a_M ，也就是令

$$u = -a_M$$





因此可以得到

$$\dot{x}_2 = a_T + u$$

这样可得导弹运动状态方程为：

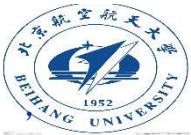
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u + a_T$$

可写成矩阵的形式：

$$\dot{X} = AX + Bu + Da_T$$





公式中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

如果不考虑目标机动，即 $a_T = 0$ ，则在这种情况下，可以得到：

$$\dot{X} = AX + Bu$$





接下来考虑速度方程

$$\dot{y} = -(V_M - V_T)$$

其中, $V_c = V_M - V_T$ 表示导弹相对目标的接近速度。由于视线角度的值都比较小, y 可近似表示导弹与目标之间的距离。设 t_f 为导弹与目标的遭遇时刻(即导弹与目标相碰撞或两者之间距离最短的时刻), 则在某一瞬时 t , 导弹与目标的距离 y 可近似用下式表示:

$$y(t) = (V_M - V_T)(t_f - t) = V_C(t_f - t)$$





又考虑到对于导弹制导来说，最基本的要求是脱靶量越小越好，因此，应该选择最优控制量 u ，使得下面的指标函数为最小。

$$J = [x_T(t_f) - x_M(t_f)]^2 + [y_T(t_f) - y_M(t_f)]^2$$

然而，当要求一个反馈形式的控制时，按上式列出的问题很难求解。所以我们以 $t=t_f$ 时刻，即 $y(t_f) = V_C(t_f - t_f) = 0$ 时的 $x_1(t_f)$ 值作为脱靶量，要求其值越小越好。另外，由于舵偏角受到限制，导弹结构能够承受的最大载荷也受到限制，所以控制信号 u 也应该受到限制。鉴于上述分析，我们选择以下形式的性能指标函数

:

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) C X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (X^T Q X + u^T R u) dt$$





式中

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) C X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} R u^2 dt$$

给定初始条件 $x(t_0)$ ，应用最优控制理论求出使 J 为最小的 u





根据上述分析，完整最优控制问题可描述为

运动方程： $\dot{X} = AX + Bu$

性能指标函数为：

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) C X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (X^T Q X + u^T R u) dt$$

其中，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$





给出 $t = t_0$ 时刻, x_1 和 x_2 的初值, 采用极小值原理可求得最优控制为

$$u^*(t) = \frac{\left(c_1(t_f - t) + \frac{c_1 c_2 (t_f - t)^2}{2R} \right) x_1 + \left(c_2 + c_1(t_f - t)^2 + \frac{c_1 c_2 (t_f - t)^3}{3R} \right) x_2}{R \left(1 + \frac{c_2(t_f - t)}{R} + \frac{c_1(t_f - t)^3}{3R} + \frac{c_1 c_2 (t_f - t)^4}{12R^2} \right)}$$





在指标函数中，如不考虑导弹的相对运动速度 x_2 项，则可令 $c_2 = 0$ 。 $u^*(t)$ 变成

$$u^*(t) = -\frac{c_1(t_f - t)x_1 + c_1(t_f - t)^2 x_2}{R \left(1 + \frac{c_1(t_f - t)^3}{3R} \right)}$$

以 c_1 除上式的分子和分母，得

$$u^*(t) = -\frac{3(t_f - t)x_1 + 3(t_f - t)^2 x_2}{\frac{3R}{c_1} + (t_f - t)^3}$$





为了使脱靶量为最小，应选取无穷(足够)大的 c_1 ，则

$$u^*(t) = -3 \left[\frac{x_1}{(t_f - t)^2} + \frac{x_2}{t_f - t} \right]$$

得

$$\operatorname{tg} q = \frac{x_1}{y} = \frac{x_1}{V_c (t_f - t)}$$

当 q 比较小时， $\operatorname{tg} q = q$ ，则

$$q = \frac{x_1}{V_c (t_f - t)}$$

$$\dot{q} = \frac{x_1 + (t_f - t)\dot{x}_1}{V_c (t_f - t)^2} = \frac{1}{V_c} \left[\frac{x_1}{(t_f - t)^2} + \frac{x_2}{t_f - t} \right]$$





代入。可得 $u^*(t) = -3V_c \dot{q}$

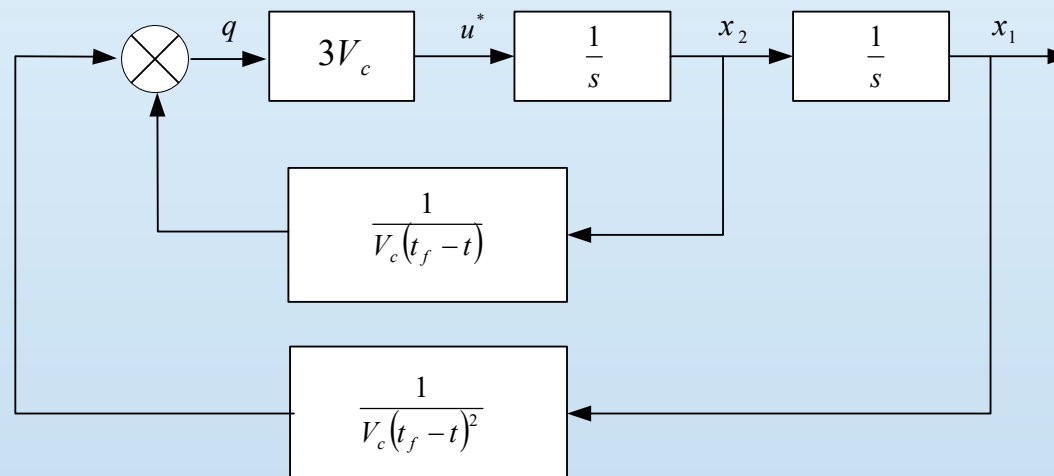
上式中， u 的单位是加速度的单位。把 u 与导弹速度向量的旋转角速度联系起来，则有

$$u = -V_M \dot{\theta}$$
$$\dot{\theta} = \frac{3V_c}{V_M} \dot{q}$$



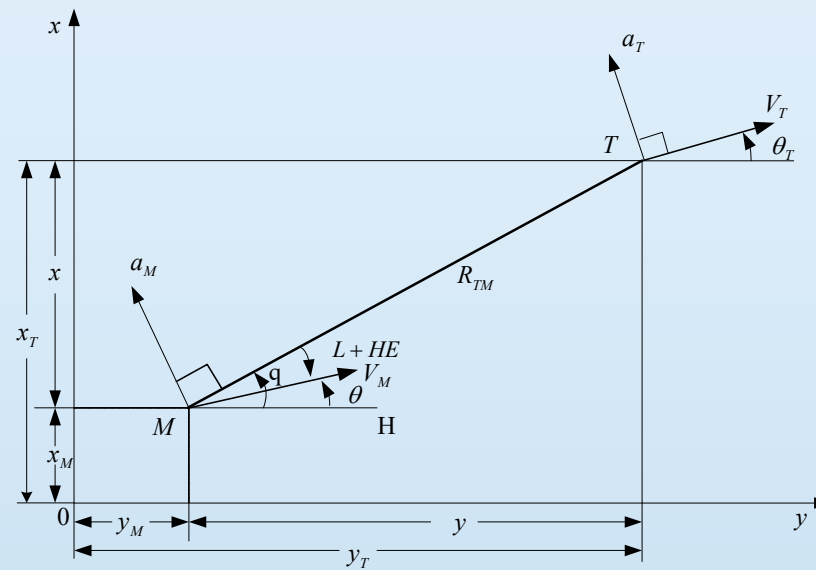


可以看出，当不考虑弹体惯性时，最优导引规律就是比例导引，其导航比为 $3V_c/V_M$ ，这证明了比例导引是一种很好的导引方法。最优导引规律的实现可用图来表示。





下面将对最优导引律进行仿真





最优导引攻击几何关系如上图所示，在这里讨论的目标和导弹均认为是二维拦截几何平面上的质点，分别以速度 V_T 和 V_M 运动。导弹的初始位置为相对坐标系的参考点，导弹初始速度矢量指向目标的初始位置， a_M 为导弹的指令（垂直于视线）。

其中：

$$\dot{\theta}_T = \frac{a_T}{V_T}$$

$$V_{Ty} = V_T \cos \theta_T$$

$$V_{Tx} = V_T \sin \theta_T$$





V_{Tx} , V_{Ty} 为目标速度在x, y轴上的分解, θ_T 是目标的角度。导弹和目标之间的接近速度为

$$V_c = -\dot{R}_{TM}$$

目标的速度分量可由其位置变化得到:

$$\dot{R}_{Ty} = V_{Ty}, \dot{R}_{Tx} = V_{Tx}$$

同样地, 我们可以得到导弹的位置和速度的微分方程:

$$\dot{V}_{Mx} = a_{Mx}$$

$$\dot{V}_{My} = a_{My}$$

$$\dot{R}_{Mx} = V_{Mx}$$

$$\dot{R}_{My} = V_{My}$$





上面几式中的下标x, y分别表示在x和y轴上的分量。 $a_{Mx}a_{My}$ 是导弹在地球坐标系的加速度分量。为了得到导弹的加速度分量, 我们必须得到弹目的相对位移:

$$R_{TMx} = R_{Tx} - R_{Mx}$$

$$R_{TMy} = R_{Ty} - R_{My}$$

根据图中三角关系我们可以得到视线角:

$$q = \tan^{-1} \frac{R_{TMx}}{R_{TMy}}$$





如果定义地球坐标系的速度分量为：

$$V_{TMx} = V_{Tx} - V_{Mx}$$

$$V_{TMy} = V_{Ty} - V_{My}$$

我们可以根据视线角的公式求导后得到视线角速率：

$$\dot{q} = \frac{R_{TM_y} V_{TMx} - R_{TMx} V_{TM_y}}{R_{TM}^2}$$

$$R_{TM} = (R_{TMx}^2 + R_{TM_y}^2)^{1/2}$$





所以不难得出弹目的接近速度为：

$$V_c = -\dot{R}_{TM} = \frac{-(R_{TMx}V_{TMx} + R_{TMy}V_{TMy})}{R_{TM}}$$

根据最优导引制导律：

$$\dot{\theta} = 3 \frac{V_c}{V_M} \dot{q}$$

可得到导弹的加速分量为

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_{Mx}}{V_{My}}\right)$$

$$a_{Mx} = V_M \dot{\theta} \cos q$$

$$a_{My} = -V_M \dot{\theta} \sin q$$





以上列出了两维的最优导引制导的必要方程，但是使用最优导引制导的导弹并不是直接向着目标发射的，而是向着一个能够导引导弹命中目标的方向发射，考虑了视线角之后可以得到导弹的指向角 L 。从图中我们可以看出，如果导弹进入了碰撞三角区（如果目标和导弹同时保持匀速直线运动，导弹必定会命中目标），这时利用正弦公式可以得到指向角的表达式，如下：

$$L = \sin^{-1} \frac{V_T \sin(q - \theta_T)}{V_M}$$





但是，实际上导弹不可能确切地在碰撞三角区发射，所以不能精确地得到拦截点。因为我们不知道目标将会如何机动，所以拦截点位置只能大概地估计。初始时刻导弹偏离碰撞三角的角度称之为指向角误差（Head-Error）。考虑了导弹初始时刻的指向角和指向角误差之后，导弹的初始速度分量可以表示为：

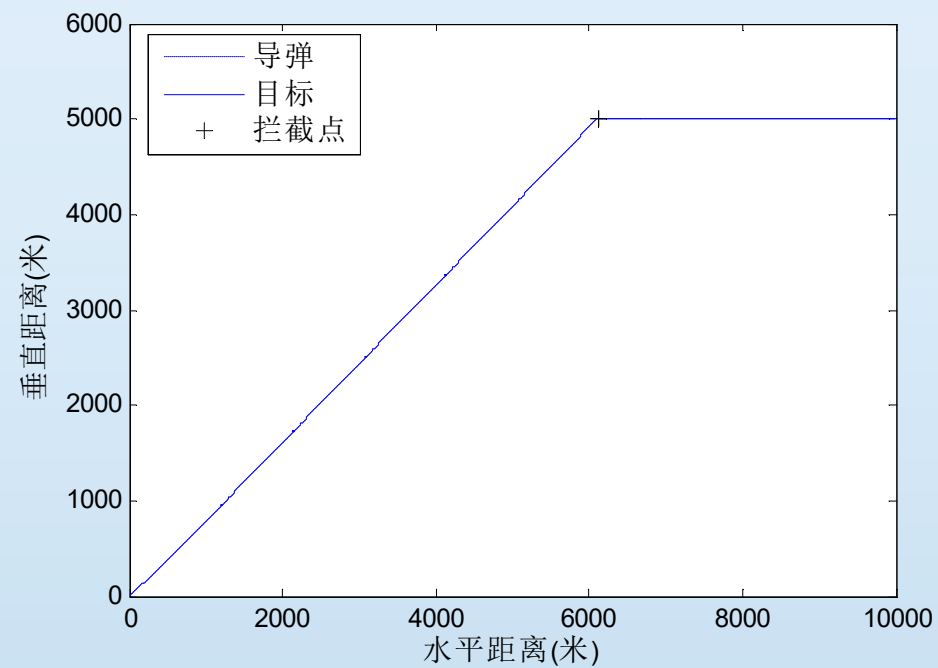
$$V_{My}(0) = V_M \cos(q - L + HeadError)$$

$$V_{Mx}(0) = V_M \sin(q - L + HeadError)$$



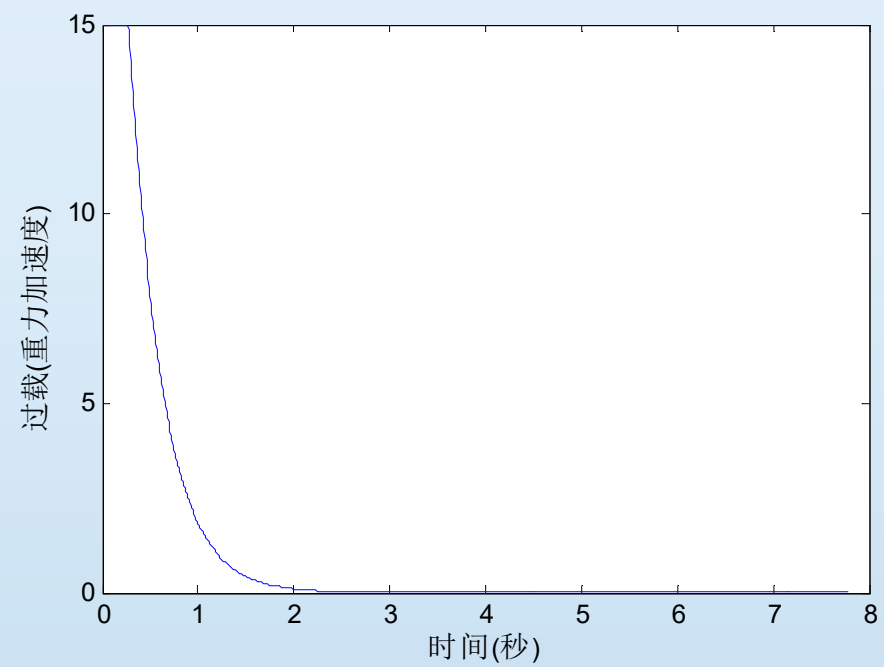


编写matlab程序仿真结果如下：



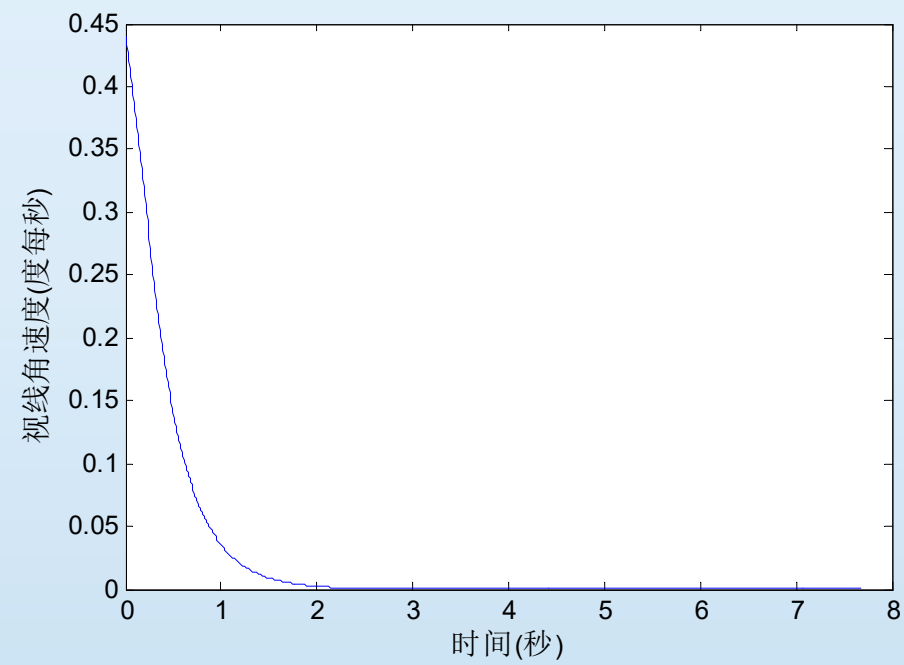
-5° 指向误差，目标不机动的攻击情况





-5° 指向误差，目标不机动时导弹的加速度





-5° 指向误差，目标不机动时导弹的视线角速率





谢谢！