现代控制理论

王陈亮

北京航空航天大学
自动化科学与电气工程学院

3.2.1 问题描述

考虑如下非线性系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1) \\
\dot{x}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2) \\
\dot{x}_3 &= u + f_3(x_1, x_2) \\
y &= x_1
\end{aligned}
\tag{3.2.1}
$$

其中x_1, x_2, x_3为系统状态，$u \in \mathbb{R}$为输入，$y \in \mathbb{R}$为输出，f_1 ,f_2和f_3为未知光滑函数。

□ 控制目的

在全状态可测的条件下，设计控制信号u，使得闭环系统内所有信号有界，同时输出$y(t)$跟踪给定的期望轨迹$y_d(t)$ 。

□ 假设1： $y_d(t), \dot{y}_d(t)$已知且有界, $\ddot{y}_d(t)$有界。

3.2.2 模糊逻辑系统

设$f(x_1,x_2)$为集合$\Omega=[\gamma_1,\beta_1]\times[\gamma_2,\beta_2]\subset\mathbb{R}^2$上的一个实值连续函数，其解析形式未知。可设计一个逼近$f(x_1,x_2)$的模糊系统，设计步骤为：

步骤1：在$[\gamma_i,\beta_i]$上定义$N_i(i=1,2)$个模糊集$A_i^1,A_i^2,\ldots,A_i^{N_i}$。

步骤2：组建$M=N_1\times N_2$条模糊集IF-THEN规则，即$R_u^{i_1 i_2}$：如果x_1为$A_1^{i_1}$，且x_2为$A_2^{i_2}$，则p为$B^{i_1 i_2}$

其中$i_1=1,2,\ldots,N_1$; $i_2=1,2,\ldots,N_2$

步骤3：采用乘积推理机、单值模糊器和中心平均解模糊器，根据$M = N_1 \times N_2$条规则来构造模糊系统$F(x_1, x_2)$,得

$$F(x_1,x_2)=\frac{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\left[\bar{\theta}^{i_1 i_2}(\mu_{A_1}^{i_1}(x_1)\mu_{A_2}^{i_2}(x_2))\right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\mu_{A_1}^{i_1}(x_1)\mu_{A_2}^{i_2}(x_2)}$$

式中，分子中[·]内表示规则前提之间、规则前提与结论之间的逻辑“与”运算，采用乘积推理机实现；分子中$\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}$表示规则间推理，采用模糊并运算算子实现；$\bar{\theta}^{i_1 i_2}$采用单值模糊器实现，即隶属函数最大值（1.0）所对应的横坐标值$\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right)$的函数值$f\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right)$；分子与分母相除为中心平均解模糊算法。

3.2 基于模糊逻辑系统的鲁棒自适应控制

令 $$\varphi^{i_1 i_2}(x_1,x_2)=\frac{\mu_{A_1}^{i_1}(x_1)\mu_{A_2}^{i_2}(x_2)}{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\mu_{A_1}^{i_1}(x_1)\mu_{A_2}^{i_2}(x_2)}$$

将所有的$\varphi^{i_1 i_2}$组成$l=N_1N_2$维列向量φ，将所有$\bar{\theta}^{i_1 i_2}$按相应次序组成l维列向量θ，则模糊逻辑系统可改写为

$$F(x_1,x_2)=\theta^T\varphi(x_1,x_2) \tag{3.2.2}$$

引理3.2：令$f(x_1,x_2){:}\Omega\rightarrow R$为实值连续函数，其中$\Omega\subset\mathbb{R}^2$为紧集，则任给常数$\delta>0$，均存在一个模糊逻辑系统（3.2.2）使得

$$\begin{gathered}f(x_1,x_2)=\theta^T\varphi(x_1,x_2)+\Delta(x_1,x_2),\\ |\Delta(x_1,x_2)|\le\delta,\forall[x_1,x_2]^T\in\Omega\end{gathered} \tag{3.2.3}$$

根据引理3.2，利用模糊逻辑系统$\theta_i^T\varphi_i$来逼近（3.2.1）中f_i：

$$f_i=\theta_i^T\varphi_i+\Delta_i,|\Delta_i|\le\delta_i,\forall[x_1,x_2]^T\in\overline{\Omega} \tag{3.2.4}$$

其中δ_i为常量，$\overline{\Omega}$为一充分大的紧集。

3.2.3 控制器设计

第1步：定义$z_1 = y - y_d$，其导数

$$\dot{z}_1 = x_2 + \theta_1^T \varphi_1(x_1) + \Delta_1 - \dot{y}_d \tag{3.2.5}$$

定义$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\theta}_1$，其中正定对称矩阵$\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_1}$为设计参数，$\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1$，$\hat{\theta}_1$是$\theta_1$的估计。微分$V_1$有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= z_1(x_2 + \theta_1^T \varphi_1 + \Delta_1 - \dot{y}_d) + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1 \\ &\le z_1\left(x_2 + \hat{\theta}_1^T \varphi_1 + \frac{1}{4} z_1 - \dot{y}_d\right) + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_1 - \Gamma_1 \varphi_1 z_1\right) + \delta_1^2\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

选取

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}_1^T \varphi_1 - \frac{1}{4} z_1 + \dot{y}_d \tag{3.2.7}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma_1 \varphi_1 z_1 - \sigma_1 \Gamma_1 \hat{\theta}_1 \tag{3.2.8}$$

其中$c_1 > 0$和$\sigma_1 > 0$为设计参数，然后有

$$\dot{V}_1 \le -c_1 z_1^2 + z_1(x_2 - \alpha_1) - \sigma_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 + \delta_1^2 \tag{3.2.9}$$

令α_1通过时间常数为τ_1的一阶低通滤波器：

$$\tau_1 \dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1 = \alpha_1 \tag{3.2.10}$$

第2步：

定义$z_2 = x_2 - \varepsilon_1$，其导数满足

$$\dot{z}_2 = x_3 + \theta_2^T \varphi_2 + \Delta_2 - \dot{\varepsilon}_1 \tag{3.2.11}$$

定义$V_2 = \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_2^T \Gamma_2^{-1} \tilde{\theta}_2$，其中正定对称矩阵$\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{l_2 \times l_2}$为设计参数，$\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2$，$\hat{\theta}_2$是$\theta_2$的估计。微分$V_2$有

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= z_2(x_3 + \theta_2^T \varphi_2 + \Delta_2 - \dot{\varepsilon}_1) + \tilde{\theta}_2^T \Gamma_2^{-1} \dot{\hat{\theta}}_2 \\ &\le z_2\left(x_3 + \hat{\theta}_2^T \varphi_2 + \frac{1}{4} z_2 - \dot{\varepsilon}_1\right) + \tilde{\theta}_2^T \Gamma_2^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_2 - \Gamma_2 \varphi_2 z_2\right) + \delta_2^2\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

选取

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - \hat{\theta}_2^T \varphi_2 - \frac{1}{4} z_2 + \dot{\varepsilon}_1 \tag{3.2.13}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \Gamma_2 \varphi_2 z_2 - \sigma_2 \Gamma_2 \hat{\theta}_2 \tag{3.2.14}$$

其中$c_2 > 0$和$\sigma_2 > 0$为设计参数，然后有

$$\dot{V}_2 \le -c_2 z_2^2 + z_2(x_3 - \alpha_2) - \sigma_2 \tilde{\theta}_2^T \hat{\theta}_2 + \delta_2^2 \tag{3.2.15}$$

令α_2通过时间常数为τ_2的一阶低通滤波器：

$$\tau_2 \dot{\varepsilon}_2 + \varepsilon_2 = \alpha_2 \tag{3.2.16}$$

第3步：

定义$z_3 = x_3 - \varepsilon_2$，其导数满足

$$\dot{z}_3 = u + \theta_3^T \varphi_3 + \Delta_3 - \dot{\varepsilon}_2 \tag{3.2.17}$$

定义$V_3=\frac{1}{2}z_3^2+\frac{1}{2}\tilde{\theta}_3^T\Gamma_3^{-1}\tilde{\theta}_3$，其中正定对称矩阵$\Gamma_3\in\mathbb{R}^{l_3\times l_3}$为设计参数，$\tilde{\theta}_3=\hat{\theta}_3-\theta_3$，$\hat{\theta}_3$是$\theta_3$的估计。微分$V_3$有

$$\dot{V}_3=z_3(u+\theta_3^T\varphi_3+\Delta_3-\dot{\varepsilon}_2)+\tilde{\theta}_3^T\Gamma_3^{-1}\dot{\hat{\theta}}_3$$

$$\leq z_3\left(u+\hat{\theta}_3^T\varphi_3+\frac{1}{4}z_3-\dot{\varepsilon}_2\right)+\tilde{\theta}_3^T\Gamma_3^{-1}\left(\dot{\hat{\theta}}_3-\Gamma_3\varphi_3z_3\right)+\delta_3^2 \quad (3.2.18)$$

选取

$$u=-c_3z_3-\hat{\theta}_3^T\varphi_3-\frac{1}{4}z_3+\dot{\varepsilon}_2 \quad (3.2.19)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_3=\Gamma_3\varphi_3z_3-\sigma_3\,\Gamma_3\,\hat{\theta}_3 \quad (3.2.20)$$

其中$c_3>0$和$\sigma_3>0$为设计参数。代入得

$$\dot{V}_3\leq-c_3z_3^2-\sigma_3\tilde{\theta}_3^T\hat{\theta}_3+\delta_3^2 \quad (3.2.21)$$

3.2.4 稳定性分析

定义滤波器误差： $Y_1=\varepsilon_1-\alpha_1, Y_2=\varepsilon_2-\alpha_2$ (3.2.22)

容易验证

$$\dot{\varepsilon}_1=-\frac{1}{\tau_1}Y_1,\ \dot{\varepsilon}_2=-\frac{1}{\tau_2}Y_2 \tag{3.2.23}$$

$$x_2=(x_2-\varepsilon_1)+(\varepsilon_1-\alpha_1)+\alpha_1=z_2+Y_1+\alpha_1 \tag{3.2.24}$$

$$x_3=(x_3-\varepsilon_2)+(\varepsilon_2-\alpha_2)+\alpha_2=z_3+Y_2+\alpha_2 \tag{3.2.25}$$

微分Y_1得

$$\dot{Y}_1=\dot{\varepsilon}_1-\dot{\alpha}_1=-\frac{1}{\tau_1}Y_1-\dot{\alpha}_1 \tag{3.2.26}$$

由于α_1是$(z_1,\hat{\theta}_1\ ,y_d,\dot{y}_d)$的光滑函数，故而

$$\dot{\alpha}_1=\frac{\partial\alpha_1}{\partial z_1}\dot{z}_1+\frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}_1}\dot{\hat{\theta}}_1+\frac{\partial\alpha_1}{\partial y_d}\dot{y}_d+\frac{\partial\alpha_1}{\partial\dot{y}_d}\ddot{y}_d \tag{3.2.27}$$

根据上式可以验证$\dot{\alpha}_1 = \eta_1(z_1, z_2, Y_1, \hat{\theta}_1, y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d)$，其中$\eta_1$是光滑函数，于是式（3.2.26）变为

$$\dot{Y}_1 = -\frac{1}{\tau_1} Y_1 - \eta_1 \tag{3.2.28}$$

微分Y_2得

$$\dot{Y}_2 = -\frac{1}{\tau_2} Y_2 - \dot{\alpha}_2 \tag{3.2.29}$$

由于α_2是$(z_1, z_2, Y_1, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, y_d, \dot{y}_d)$的光滑函数，可以验证

$\dot{\alpha}_2 = \eta_2(z_1, z_2, z_3, Y_1, Y_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d)$，其中$\eta_2$是光滑函数。

定义如下准Lyapunov函数:

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} Y_i^2 \tag{3.2.30}$$

定理3.2：考虑由被控对象(3.2.1)，滤波器(3.2.10) (3.2.16) 、自适应律(3.2.8) (3.2.14)(3.2.20)和控制律(3.2.19)组成的闭环系统。假定假设1成立。对于任意的常量b_1和b_2，若

$$y_d^2+\dot{y}_d^2+\ddot{y}_d^2\le b_1 \tag{3.2.31}$$

$$V(0)\le b_2 \tag{3.2.32}$$

则存在设计参数使得闭环系统内所有信号有界，且z_1可收敛至一任意小的残集内。

证明：微分V可得

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le -\sum_{i=1}^{3}c_i z_i^2+z_1(x_2-\alpha_1)+z_2(x_3-\alpha_2)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\tilde{\theta}_i^T\hat{\theta}_i+\sum_{i=1}^{2}Y_i\ \dot{Y}_i+\sum_{i=1}^{3}\delta_i^2\\ &=-\sum_{i=1}^{3}c_i z_i^2+z_1(z_2+Y_1)+z_2(z_3+Y_2)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\tilde{\theta}_i^T\hat{\theta}_i+\sum_{i=1}^{2}Y_i\left(-\frac{1}{\tau_i}Y_i-\eta_i\right)+\sum_{i=1}^{3}\delta_i^2\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

3.2 基于模糊逻辑系统的鲁棒自适应控制

利用以下关系式：

$$z_1(z_2 + Y_1) \leq \frac{1}{2}z_1^2 + z_2^2 + Y_1^2 \tag{3.2.34}$$

$$z_2(z_3 + Y_2) \leq \frac{1}{2}z_2^2 + z_3^2 + Y_2^2 \tag{3.2.35}$$

$$-\tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i \leq -\frac{1}{2}\tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2}\theta_i^T \theta_i \tag{3.2.36}$$

可将式（3.2.33）改写成

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^{3}\left(c_i - \frac{3}{2}\right)z_i^2 - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}\sigma_i\tilde{\theta}_i^T\tilde{\theta}_i - \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\tau_i} - 1\right)Y_i^2$$
$$+\sum_{i=1}^{2}|Y_i||\eta_i| + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}\sigma_i\theta_i^T\theta_i + \sum_{i=1}^{3}\delta_i^2 \tag{3.2.37}$$

定义如下紧集：

$$\Xi_1 = \left\{y_d^2 + \dot{y}_d^2 + \ddot{y}_d^2 \leq b_1\right\} \tag{3.2.38}$$

$$\Xi_2 = \left\{\sum_{i=1}^{3}(z_i^2 + \tilde{\theta}_i^T\Gamma_i^{-1}\tilde{\theta}_i) + \sum_{i=1}^{2}Y_i^2 \leq 2b_2\right\} \tag{3.2.39}$$

连续函数$|\eta_1|$和$|\eta_2|$在$\Xi_1 \times \Xi_2$上有最大值，分别记为M_1和M_2，则对于任意大于0的常数λ_1和λ_2，有

$$|Y_i||\eta_i| \le \frac{M_i^2}{4\lambda_i} Y_i^2 + \lambda_i, \; i = 1,2 \tag{3.2.40}$$

结合（3.2.37）和（3.2.40），可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \;\; & \le -\sum_{i=1}^{3}\left(c_i - \frac{3}{2}\right) z_i^2 - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}\sigma_i \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i \\ & \quad - \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\tau_i} - 1 - \frac{M_i^2}{4\lambda_i}\right) Y_i^2 + D \end{aligned} \tag{3.2.41}$$

其中$D = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}\sigma_i \theta_i^T \theta_i + \sum_{i=1}^{3} \delta_i^2 + \lambda_1 + \lambda_2.$

选取设计参数使得

$$c_i \ge \frac{3}{2} + k, \; \frac{\sigma_i}{2\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})} \ge k, \; i = 1,2,3$$

$$\frac{1}{\tau_i} \ge 1 + \frac{M_i^2}{4\lambda_i} + k, \quad i = 1,2$$

于是

$$\dot{V} \le -2kV + D \tag{3.2.42}$$

令$k > \frac{D}{2b_2}$, 则当$V = b_2$时， $\dot{V} \le 0$. 因此$V \le b_2$是不变集，即若$V(0) \le b_2$,则$V(t) \le b_2$， $\forall t \ge 0$。由此可知闭环系统半全局稳定。此外，

$$0 \le V(t) \le \frac{D}{2k} + \left[V(0) - \frac{D}{2k}\right] e^{-2kt}$$

进而

$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| \le \lim_{t\to\infty} \sqrt{2V(t)} \le \sqrt{\frac{D}{k}}$$

因此，增大k可使得跟踪误差收敛至一任意小的残集内。