线性系统作业.

2-2. (a) 解. $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\\1&-7\end{bmatrix}$

$\therefore [B\ AB]=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\\-1&1&1&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\\0&1&1&-6\end{bmatrix}$ $\Rightarrow rank([B\ AB])=3$

$\therefore$ 该方程可控.

$\because C=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$ $CA=\begin{bmatrix}2&4&4\\-2&-3&-1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow rank(\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix})=3.$

$\therefore$ 该方程可观测

综上,该动态方程既可控又可观测.

(d) $B(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\e^{-2t}\end{bmatrix}$ $e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-t}&\\&e^{-2t}\end{bmatrix}$ $\therefore e^{A(t_0-\tau)}B(\tau)=\begin{bmatrix}e^{-(t_0-\tau)}&\\&e^{-2(t_0-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-\tau}\\e^{-2\tau}\end{bmatrix}$

$\therefore e^{A(t_0-\tau)}B(\tau)=\begin{bmatrix}e^{-t_0}\\e^{-2t_0}\end{bmatrix}$

$\therefore e^{A(t_0-\tau)}B(\tau)$ 不行满秩.

$\therefore$ 动态方程不可控.

$C(t)=[1\ \ e^{-t}]$ 选取 $N_0(t)=C(t)=[1\ \ e^{-t}]$ $\frac{dN_0(t)}{dt}=[0\ \ -e^{-t}]$

$\therefore N_1(t)=N_0(t)A(t)+\frac{dN_0(t)}{dt}=[1\ \ e^{-t}]\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}+[0\ \ -e^{-t}]=[-1\ \ -3e^{-t}]$

$\therefore \begin{bmatrix}N_0(t)\\N_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&e^{-t}\\-1&-3e^{-t}\end{bmatrix}$ $\therefore$ 存在 t_1 . s.t. $rank(\begin{bmatrix}N_0(t)\\N_1(t)\end{bmatrix})=2$

$\therefore$ 动态方程可观测.

综上.该动态方程不可控但可观测

2-3. 证明如下. 先证 $\Leftarrow$

若线性动态方程可控.则Gram矩阵 $W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^H(\tau)\Phi^H(t_0,\tau)d\tau$ 非奇异.

$\because x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$

构造控制输入. $u(\tau)=-B^H(\tau)\Phi^H(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t_1)[x(t_0)-\Phi^{-1}(t_1,t_0)x']$

则 $x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)x(t_0)+\Phi(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)(-1)B^H(\tau)\Phi^H(t_0,\tau)d\tau\,W^{-1}(t_0,t_1)[x(t_0)-\cdots$
$\Phi^{-1}(t_1,t_0)x']$

$\therefore x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)x(t_0)-\Phi(t_1,t_0)[x(t_0)-\Phi^{-1}(t_1,t_0)x']=x_1$

$\therefore$ 若动态方程可控，则对任何 $x(t_0)$ 和 x'，存在有限时间 $t_1>t_0$ 和一个输入 $u_{[t_0,t_1]}$，能在 t_1 时刻将状态 $x(t_0)$ 转移到 x'。

- 接下来证明 $\Rightarrow$ $\because$ 对于任何 $x(t_0)$ 和 x'，存在有限时间 $t_1>t_0$ 和一个输入 $u_{[t_0,t_1]}$，能在 t_1 时刻将状态 $x(t_0)$ 转移到 $x(t_1)=x'$

$\therefore x'=x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$

$\Rightarrow x'=\Phi(t_1,t_0)x(t_0)+\Phi(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau=\Phi(t_0,t_1)x'-x(t_0)$

采用反证法，假设存在 $\alpha\neq0$，满足 $\alpha\Phi(t_0,\tau)B(\tau)=0$，则有

$\alpha\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau=\alpha[\Phi(t_0,t_1)x'-x(t_0)]=0$ ..

由于 $x(t_0)$ 是任意状态，不妨取 $x(t_0)$，使得 $\Phi(t_0,t_1)x'-x(t_0)$ 各行线性无关。

则，若 $\alpha[\Phi(t_0,t_1)x'-x(t_0)]=0$，则 $\alpha=0$。

$\therefore$ 与假设矛盾 $\therefore$ 不存在 $\alpha\neq0$，满足 $\alpha\Phi(t_0,\tau)B(\tau)=0$。

即当且仅当 $\alpha=0$ 时，$\alpha\Phi(t_0,\tau)B(\tau)=0$ $\Rightarrow$ $\Phi(t_0,\tau)B(\tau)$ 线性无关。

$\therefore$ 线性动态方程可控

$\therefore$ 充分性和必要性均得证。

- 对离散线性系统不成立。

离散线性系统的动态方程为 $\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)\\ y(k)=Cx(k)+Du(k)\end{cases}$ $k=0,1,\cdots$

由递推可知，$x(k)=A^kx(0)+A^{k-1}Bu(0)+A^{k-2}Bu(1)+\cdots+Bu(k-1)$

$\Rightarrow x(k)-A^kx(0)=A^{k-1}Bu(0)+A^{k-2}Bu(1)+\cdots+Bu(k-1)$

- 要使 $x(k)$ 为状态空间中的任一状态，则必须要求：

  $A^{k-1}B, A^{k-2}B,\cdots,B$ 构成空间的一组基。

即 $\text{rank}(B\ AB\ \cdots\ A^{k-1}B)=k$ ①

- 要使系统可控，需对任意的 $x(0)$，存在 $u(0),\cdots u(k-1)$，使得 $x(k)=0$

  即 $-A^kx(0)=A^{k-1}Bu(0)+A^{k-2}Bu(1)+\cdots+Bu(k-1)$

  a. 若 A 满秩，$\therefore -x(0)=A^{-1}Bu(0)+A^{-2}Bu(1)+\cdots+A^{-k}Bu(k-1)$ 由于 $x(0)$ 为任意状态，故需要 $\text{rank}(A^{-k}B,\cdots,A^{-2}B\ A^{-1}B)=\text{rank}(B\ AB\ \cdots\ A^{k-1}B)=k$ 此时与条件①等价。

  b. 若 A 不满秩，则 $\text{rank}(B\ AB\ \cdots\ A^{k-1}B)\leq k$，此时可控性条件弱于①。

2-7. 证明如下. 时不变系统(A.B.C)的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases}$$

当(A.B.C)可控时. 若 $rank[A\ B]<n$. 则 $\exists \alpha \neq 0$. $\alpha[A\ B]=0$

$\therefore \alpha A=0 \quad \alpha B=0 \quad \Rightarrow \alpha AB=0 \quad \alpha A^2B=0 \quad \cdots \quad \alpha A^{n-1}B=0$

$\therefore \alpha[B\ AB\ \cdots A^{n-1}B]=0$

$\therefore$ $[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]$ 行线性相关.

$\therefore$ 系统不可控. 与假设矛盾

$\therefore rank[A\ B]=n$ 得证.

举例说明并非系统可控的充分条件.

取 $A=I_n \quad B=0_{n\times1}$, 即 $\dot{x}=x$

$rank[A\ B]=n$. 然而 $[B\ AB \cdots A^{n-1}B]=0_{n\times n}$ 说明系统不可控.

由此可见非系统可控的充分条件.

2-8. 解. $x(\frac{2}{3}\pi)=\Phi(\frac{2}{3}\pi,0)x(0)+\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\Phi(\frac{2}{3}\pi,\tau)Bu_1(\tau)d\tau$ ①

$x(\frac{4}{3}\pi)=\Phi(\frac{4}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi)x(\frac{2}{3}\pi)+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\Phi(\frac{4}{3}\pi,\tau)Bu_2(\tau)d\tau$ ②

$x(2\pi)=\Phi(2\pi,\frac{4}{3}\pi)x(\frac{4}{3}\pi)+\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\Phi(2\pi,\tau)Bu_3(\tau)d\tau$. ③

对于动态方程 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$. 求取状态转移矩阵.

$\because e^{At}=Pe^{\Lambda t}P^{-1}$ 其中 $P=\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix}$ $P^{-1}=-\frac{1}{2i}\begin{bmatrix}-i&-1\\-i&1\end{bmatrix}$ $\Lambda=\begin{bmatrix}i&\\&-i\end{bmatrix}$

解得 $e^{At}=\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{bmatrix}$

$\therefore \Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}\cos(t-t_0)&\sin(t-t_0)\\-\sin(t-t_0)&\cos(t-t_0)\end{bmatrix}$

$\therefore \Phi(\frac{2}{3}\pi,0)=\begin{bmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi&\sin\frac{2}{3}\pi\\-\sin\frac{2}{3}\pi&\cos\frac{2}{3}\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\Phi(\frac{4}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi)=\Phi(2\pi,\frac{4}{3}\pi)$

由①②③联立可知.

$$x(2\pi)=\Phi(2\pi,\tfrac{4}{3}\pi)x(\tfrac{4}{3}\pi)+\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\Phi(2\pi,\tau)Bu_3(\tau)d\tau$$

$$=\Phi(2\pi,\tfrac{4}{3}\pi)\left[\Phi(\tfrac{4}{3}\pi,\tfrac{2}{3}\pi)x(\tfrac{2}{3}\pi)+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\Phi(\tfrac{4}{3}\pi,\tau)Bu_2(\tau)d\tau\right]+\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\Phi(2\pi,\tau)Bu_2(\tau)d\tau$$

$$=\Phi(2\pi,\tfrac{4}{3}\pi)\left\{\Phi(\tfrac{4}{3}\pi,\tfrac{2}{3}\pi)\left[\Phi(\tfrac{2}{3}\pi,0)x(0)+\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\Phi(\tfrac{2}{3}\pi,\tau)Bu_1(\tau)d\tau\right]+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\Phi(\tfrac{4}{3}\pi,\tau)Bu_2(\tau)d\tau\right\}$$

$$+\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\Phi(2\pi,\tau)Bu_3(\tau)d\tau$$

$$=\Phi(2\pi,0)x(0)+\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\Phi(2\pi,\tau)Bu_3(\tau)d\tau+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\Phi(2\pi,\tau)Bu_2(\tau)d\tau+\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\Phi(2\pi,\tau)Bu_1(\tau)d\tau$$

$\because \Phi(2\pi,0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\quad \Phi(2\pi,\tau)=\begin{bmatrix}\cos(2\pi-\tau)&\sin(2\pi-\tau)\\-\sin(2\pi-\tau)&\cos(2\pi-\tau)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\tau&-\sin\tau\\\sin\tau&\cos\tau\end{bmatrix}$

$\therefore \Phi(2\pi,\tau)B=\begin{bmatrix}\cos\tau&-\sin\tau\\\sin\tau&\cos\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\tau\\\cos\tau\end{bmatrix}$ $\quad \Phi(2\pi,0)x(0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\therefore \int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\begin{bmatrix}-\sin\tau\\\cos\tau\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ $\quad \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\begin{bmatrix}-\sin\tau\\\cos\tau\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{bmatrix}$ $\quad$ $\cos\tau$ $\sin\tau$

$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\begin{bmatrix}-\sin\tau\\\cos\tau\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

$\therefore x(2\pi)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}u_3+\begin{bmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{bmatrix}u_2+\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}u_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

解得 $u_1=-\frac{1}{3}$，$u_2=\cancel{\frac{1}{3}}0$ $u_3=\frac{1}{3}$ $\quad 0 \quad \frac{1}{3}$

$\therefore$ 存在常数 $u_1=-\frac{1}{3}$，$u_2=0$. $u_3=\frac{1}{3}$. 使得状态由 $x(0)$ 转移到 $x(2\pi)$

2-11. 解. 先由原系统可观证变换后的系统可观.

由于原系统可观. 故矩阵 $C(t)\Phi(t,t_0)$ 满列秩. 即 $rank(C(t)\Phi(t,t_0))=n$

由等价变换 $\bar{x}=P(t)x$ 可知. $\overline{A(t)}=P(t)A(t)P^{-1}(t)$ $\quad \overline{B(t)}=P(t)B(t)$

$\overline{C(t)}=C(t)P^{-1}(t)$ $\quad \overline{\Phi(t,t_0)}=P(t)\Phi(t,t_0)P^{-1}(t)$

$\therefore \overline{C(t)}\,\overline{\Phi(t,t_0)}=\cancel{P(t)}C(t)\Phi(t,t_0)P^{-1}(t)$

由于 P 是非奇异矩阵. 故 $rank(\overline{C(t)}\,\overline{\Phi(t,t_0)})=rank(C(t)\Phi(t,t_0))=n$

故变换后的系统仍可观测

再由原系统不可观证变换后矩阵不可观

由于原系统不可观. 故矩阵 $C(t)\Phi(t,t_0)$ 列不满秩. 即 $rank(C(t)\Phi(t,t_0))<n$

$\because \overline{C(t)\Phi(t,t_0)} = C(t)\Phi(t,t_0)P^{-1}(t)$

由于$P(t)$是非奇异矩阵，故 $\text{rank}(\overline{C(t)\Phi(t,t_0)}) \overset{\text{rank}}{=} C(t)\Phi(t,t_0)$

$\therefore$ 变换后的系统仍不可观测.

综上得证，在任何等价变换$\bar{x}=P(t)x$下，线性时变系统可观测性不变

2-14. 证明如下. 对于线性时不变系统 $\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx+Du \end{cases}$ 若系统可观测，则

$\text{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$，由于等价变换不改变可观测性，且$\forall A$，都存在$P$，$P^{-1}AP=J$.

故只需考虑A为若当形矩阵的情形，假设输入$u=0$.

取 $A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r & 1 \\ & & & & & \lambda_r \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ $e^{At}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & & \\ & & e^{\lambda_1 t} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & e^{\lambda_r t} & te^{\lambda_r t} \\ & & & & & e^{\lambda_r t} \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{r1} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ C_{q1} & & C_{rq} & \end{bmatrix}$
$\quad C_{11} \quad\quad C_{r1}$

由于$[C_{11} \cdots C_{r1}]$列满秩，故选取合适的$x(0)$，方程的全部模式将出现在输出中，但即使全部模式出现在输出中，无法保证$[C_{11} \cdots C_{r1}]$列满秩，即无法保证可观测性.

2-17. 证明如下. $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ $\quad\because G(s)$是对称传递函数阵.

$\therefore G^T(s)=G(s)=B^T[(sI-A)^{-1}]^TC^T$

由题可知，$PAP^{-1}=A^T \quad PB=C^T \quad CP^{-1}=B^T$

$\therefore B^T[(sI-A)^{-1}]^TC^T = CP^{-1}P(sI-A)^{-1}P^{-1}PB = C(sI-A)^{-1}B$

$\therefore (A^T, C^T, B^T)$也是$G(s)$实现

$\because \text{rank}[B \ AB \cdots A^{n-1}B] = \text{rank}[C^T \ A^TC^T \cdots A^{n-1}C^T] = \text{rank}\, P[B \ AB \cdots A^{n-1}B]=n$

$\text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} B^T \\ B^TA^T \\ \vdots \\ B^TA^{Tn-1} \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}P^{-1}=n$

$\therefore (A^T, C^T, B^T)$是不可简约实现.

接下来证明P的对称性.

$\because PAP^{-1}=A^T \quad PB=C^T \quad CP^{-1}=B^T$

$\therefore C=B^TP^T=CP^{-1}P^T \Rightarrow P^{-1}P^T=I \quad\quad \therefore P=P^T$

$\therefore$ 对称性可证

接下来证明P的唯一性.假设存在$Q\neq P$

$PAP^{-1}=QAQ^{-1}=A^T \quad PB=QB=C^T \quad CP^{-1}=CQ^{-1}=B^T$

$\therefore\ C^T=PB=QB \Rightarrow C=B^TP^T=CP^{-1}P^T=CQ^{-1}P^T$

$\therefore\ P^{-1}P^T=Q^{-1}P^T \Rightarrow Q^{-1}P=P^{-1}P=I$

由于P的逆是唯一的.所以$Q=P$ 与假设矛盾

∴矩阵P是唯一的

2-18. 解. 可控性矩阵

$$U=[B\ \ AB\ \ A^2B\ \ A^3B]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\3&3&3&3\\2&5&17&65\end{bmatrix}$$

$-3k_1\ k_2\ k_1\ 0$

$\therefore$ 可控子空间 $\langle A|B\rangle=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\\5\end{bmatrix}\right)$ $\quad \langle A|B\rangle^{\perp}=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$

可观测性矩阵

$$V=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\\CA^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-3&1&1\\-13&-10&3&4\\-43&-34&9&16\\-145&-118&27&64\end{bmatrix} \qquad \because\ \eta=\bigcap_{k=0}^{n-1}\ker(CA^k)$$

$\therefore\ VX=0$ 解得 $x=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}$

$-t_1-3t_2$

$1\ \ 0\ \ 3\ \ 1$

$0\ \ 1\ \ 2\ \ 1$

$-3t_1-2t_2\ \ t_2\ \ t_1$

$\therefore\ \eta=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}\right)$ $\quad \eta^{\perp}=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$

$\therefore\ \eta\cap\langle A|B\rangle \Rightarrow a_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\0\\3\\5\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix} \Rightarrow b_2=1$

$\therefore\ \eta\cap\langle A|B\rangle=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}\right)$ $\quad \eta\cap\langle A|B\rangle^{\perp}=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)$

$\eta^{\perp}\cap\langle A|B\rangle=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ $\quad \eta^{\perp}\cap\langle A|B\rangle^{\perp}=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$

故四个空间的直和为 $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ 该空间维数为2. 故无法取到状态空间的基底

6. 解：取 $X_2=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}\right)$ ∵ $X_1\oplus X_2=\langle A|B\rangle$ ∴ X_1与X_2线性无关且 $X_1\in\langle A|B\rangle$

∴ $X_1=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ ∵ $X_3=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}3\\2\\-1\\0\end{bmatrix}\right)$ $X_2\oplus X_4=\eta$

∴ X_4与X_2线性无关且$X_4\in\eta$，取 $X_4=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}$，此时 $P^{-1}=[X_1\ X_2\ X_3\ X_4]$ 非奇异

∴ $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&3&0\\0&0&2&1\\0&3&-1&2\\1&1&0&1\end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix}1&-4&-5&14\\5&-6&3&0\\3&2&-1&0\\-6&10&2&0\end{bmatrix}\times\frac{1}{14}$

$$\therefore \bar{A}=PAP^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1&-4&-5&14\\5&-6&3&0\\3&2&-1&0\\-6&10&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\-6&-2&3&0\\-3&-2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&3&0\\0&0&2&1\\0&3&-1&2\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-11&-26&-15&56\\-13&-18&9&0\\9&6&-3&0\\-18&16&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&3&0\\0&0&2&1\\0&3&-1&2\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}56&0&-70&0\\0&14&-84&0\\0&0&42&0\\0&0&-28&28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&-5&0\\0&1&-6&0\\0&0&3&0\\0&0&-2&2\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=PB=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1&-4&-5&14\\5&-6&3&0\\3&2&-1&0\\-6&10&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}14\\14\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CP^{-1}=[-4\ \ -3\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}0&1&3&0\\0&0&2&1\\0&3&-1&2\\1&1&0&1\end{bmatrix}=[1\ \ 0\ \ -19\ \ 0]$$

∴ 分解后的系统为 $\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u$

$y=\bar{C}\bar{x}+Du$

3-3. 解. 先化为可控标准形.

1). 验证系统的可控性

$$U=[b\ \ Ab\ \ A^2b]=\begin{bmatrix}2&-4&4\\0&1&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}$$ ⇒ $\mathrm{rank}(U)=3$，可化为可控标准形.

2) $$U^{-1}=\begin{bmatrix}-0.5&0&2\\-1&-1&2\\-0.5&-1&1\end{bmatrix}$$ ⇒ $h=[-0.5\ \ -1\ \ 1]$

3) $$P=\begin{bmatrix}h\\hA\\hA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5&-1&1\\0.5&2&-1\\-0.5&-3&2\end{bmatrix}$$ $\bar{x}=Px$

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-3\end{bmatrix}\quad \bar{B}=PB=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad \bar{C}=CP^{-1}=[-1\ \ 3\ \ 2]$$

∴ 可控标准形为

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u\\ y=\bar{C}\bar{x}\end{cases}$$ 变换矩阵 $$P=\begin{bmatrix}-0.5&-1&1\\0.5&2&-1\\-0.5&-3&2\end{bmatrix}$$

再化为可观标准形.

1) 验证系统可观测性.

$$V=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-3&-1\\1&5&0\end{bmatrix}$$ ⇒ $\mathrm{rank}(V)=3$ 可化为可观标准形.

2) $$V^{-1}=\begin{bmatrix}1.25&0&-0.25\\-0.25&0&0.25\\-0.5&-1&-0.5\end{bmatrix}$$ ⇒ $$h=\begin{bmatrix}-0.25\\0.25\\-0.5\end{bmatrix}$$

3) $$P^{-1}=[h\ \ Ah\ \ A^2h]=\begin{bmatrix}-0.25&0.75&-0.25\\0.25&-0.75&1.25\\-0.5&0.5&-0.5\end{bmatrix}$$ $\bar{x}=Px$ $$P=\begin{bmatrix}1&-1&-3\\2&0&-1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

∴ $\bar{A}=PAP^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}\quad \bar{B}=PB=\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}\quad \bar{C}=CP^{-1}=[0\ \ 0\ \ 1]$$

∴ 可观测标准形为 $$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u\\ y=\bar{C}\bar{x}+\bar{D}u\end{cases}$$

3-5. 解. (1) 列出可控性矩阵

$$U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots\\ -1 & 1 & 1 & \\ 0 & -1 & 0 & \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 \cdot b_2 \cdot Ab_1 \text{ 构成了线性无关的三列}.\ \mu_1=2,\ \mu_2=1.$$

(2) $$P_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow P_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} h_1=[1\ \ 1\ \ 2]\\ h_2=[0\ \ 0\ \ -1]\end{array}$$

(3) $$P_2=\begin{bmatrix}h_1\\ h_1A\\ h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \bar{x}=P_2x$$

$$\therefore \bar{A}=P_2AP_2^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -2\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad \bar{B}=PB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \bar{C}=CP^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 第二可控标准形为 $\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u\\ y=\bar{C}x\end{cases}$

$$(sI-\bar{A})=\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 1 & s-2 & 2\\ 1 & 0 & s+1\end{bmatrix} \rightarrow (sI-\bar{A})^{-1}=\frac{1}{s^3-s^2-s-1}\begin{bmatrix}(s-2)(s+1) & s+1 & -2\\ 1-s & s(s+1) & -2s\\ 2-s & -1 & (s-1)^2\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 传递函数阵为 $\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}$. 即

$$\frac{1}{s^3-s^2-s-1}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(s-2)(s+1) & s+1 & -2\\ 1-s & s(s+1) & -2s\\ 2-s & -1 & (s-1)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3-s^2-s-1}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 2s\\ s(s+1) & 2s^2\\ -1 & s^2-2s-1\end{bmatrix}=\frac{1}{s^3-s^2-s-1}\begin{bmatrix}-s^2+2s+1 & 2s-2\\ -2s^2+3s+1 & 2s-4\end{bmatrix}$$

3-6. 解. 1. 先列出可观测性矩阵.

$$P=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_q\\ c_1A\\ \vdots\\ c_qA\\ \vdots\\ c_1A^{n-1}\\ \vdots\\ c_qA^{n-1}\end{bmatrix}$$

按排列顺序,从上到下挑出n个线性无关向量,重新排列如下.

$$\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_1A^{\mu_1-1}\\ c_2\\ \vdots\\ c_2A^{\mu_2-1}\\ \vdots\\ c_q\\ \vdots\\ c_qA^{\mu_q-1}\end{bmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{q}\mu_i=n$$

2. 令 $P_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_1 A^{\mu_1 - 1} \\ c_2 \\ \vdots \\ c_2 A^{\mu_2 - 1} \\ \vdots \\ c_q \\ \vdots \\ c_q A^{\mu_q - 1} \end{bmatrix}$ 求出 $P_1^{-1} = [\cdots h_1 | \cdots h_2 | \cdots | \cdots h_q]$

h_1：第 μ_1 列；h_2：$\mu_1+\mu_2$ 列；h_q：$\sum_{i=1}^{q}\mu_i$ 列.

3. 求出变换矩阵 P_2

$$P_2^{-1} = [h_1 \ A h_1 \cdots A^{\mu_1 - 1} h_1 | h_2 \cdots A^{\mu_2 - 1} h_2 | \cdots | h_q \cdots A^{\mu_q - 1} h_q]$$

$\therefore P_2 = [h_1 \ A h_1 \cdots A^{\mu_1 - 1} h_1 \ h_2 \cdots A^{\mu_2 - 1} h_2 \cdots h_q \cdots A^{\mu_q - 1} h_q]^{-1}$ 即为变换矩阵

$\therefore$ 取 $\bar{A} = P_2 A P_2^{-1}$. $\bar{B} = P_2 B$. $\bar{C} = C P_2^{-1}$. 则.

$$\begin{cases} \bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{q1} & & & A_{qq} \end{bmatrix} \\ \bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_q \end{bmatrix} \end{cases}$$

其中.

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & & \times \\ 1 & & & \times \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \times \end{bmatrix} \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \\ & & & & \times \end{bmatrix} \rightarrow 1\text{位于第 } i \text{ 行}$$

$\bar{B} = P_2 B$.

变换后的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u. \end{cases}$$