

# 线性系统理论

(内部讲义)

程 鹏      编

2004 年 7 月

# 目 录

## 第一章 线性系统的基本概念

§ 1—1 系统的输入—输出描述	1
§ 1—2 系统的状态变量描述	10
§ 1—3 线性动态方程的解与等价动态方程	17
§ 1—4 系统两种数学描述之间的关系	22
小结和习题	28

## 第二章 线性系统的可控性、可观测性

§ 2—1 时间函数的线性无关性	33
§ 2—2 线性系统的可控性	38
§ 2—3 线性系统的可观测性	48
§ 2—4 若当型动态方程的可控性和可观测性	54
§ 2—5 线性时不变系统可控性和可观测性的几何判别准则	58
§ 2—6 线性时不变系统的规范分解	63
小结和习题	74

## 第三章 线性时不变系统的标准形与最小阶实现

§ 3—1 系统的标准形	79
§ 3—2 单变量系统的实现	89
§ 3—3 多变量系统的实现	95
§ 3—4 真有理函数矩阵的最小阶实现 (一)	103
§ 3—5 真有理函数矩阵的最小阶实现 (二)	106
小结和习题	113

## 第四章 用状态反馈进行极点配置和解耦控制

§ 4—1 状态反馈与极点配置	117
§ 4—2 跟踪问题的稳态特性	128
§ 4—3 用状态反馈进行解耦控制	132
§ 4—4 状态反馈与静态解耦	137
小结和习题	139

## 第五章 静态输出反馈、观测器和动态补偿器

§ 5—1 静态输出反馈和极点配置	143
§ 5—2 状态观测器	152
§ 5—3 利用观测器构成的状态反馈系统	164
§ 5—4 动态输出反馈	169
小结和习题	172

## 第六章 时变线性系统

§ 6—1 一致完全可控性与一致完全可观测性	176
------------------------	-----

## 第七章 线性系统的稳定性分析

§ 7—1 李雅普诺夫稳定性	182
§ 7—2 线性时不变系统动态方程的稳定性分析	190
§ 7—3 李雅普诺夫第二方法	197
小结和习题	210
参考文献	216

# 第一章 线性系统的基本概念

系统分析研究的第一步是建立描述系统的数学方程。由于所解决的问题不同，所用的分析方法不同，描述同一系统的数学表达式往往有所不同。经典控制理论中的传递函数就是定常线性系统输入—输出关系的一种描述。而现代控制理论中状态变量的描述方法，不仅描述了系统输入—输出关系，还描述了系统内部的特性。

本章将从非常一般的情形出发，引入系统输入—输出描述和状态变量描述，并叙述两种描述之间的关系。一方面可以算是对本科阶段已经学过的内容进行复习和扩充，另一方面也是为今后系统的分析和研究作必要的准备。

## § 1—1 系统的输入—输出描述

系统的输入—输出描述给出了系统输入与输出之间的关系。在推导这一描述时，系统内部结构的信息是不知道的。唯一可接触的是系统的输入端与输出端。在这种情况下，可把系统看作是如图 1—1 所示的一个“黑箱”。显然，我们所能做的只是向该黑箱施加各种类型的输入并测量与之相应的输出。然后，从这些输入—输出对中获悉有关系统的重要特性。

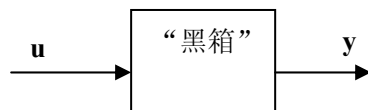


图 1—1

先介绍一些符号。在图 1—1 中，有  $p$  个输入端， $q$  个输出端； $u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p$  为输入，或用  $p \times 1$  列向量  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T$  表示输入。 $y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q$  表示输出，同样，可用  $q \times 1$  列向量  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q]^T$  表示输出。输入或输出有定义的时间区间为  $(-\infty, +\infty)$ ，用  $u$  或  $u(\cdot)$  表示定义在  $(-\infty, +\infty)$  的向量函数，而  $u(t)$  则表示  $u$  在时间  $t$  的值。若  $u$  仅定义在  $[t_0, t_1)$ ，则表示为  $u_{[t_0, t_1)}$ 。

**定义 1—1** 当且仅当  $p = q = 1$  时，系统称为单变量系统，否则称为多变量系统。

**初始松弛的概念** 若系统在  $t_0$  时刻的输出仅取决于其在  $t_0$  时的输入，则称该系统为瞬时系统或无记忆系统。只由电阻组成的网络就是这样的系统。然而，更为普遍的系统不是瞬时系统，即系统在  $t_0$  时的输出不仅取决于  $t_0$  时的输入，而也取决于  $t_0$  以前和（或）以后的输入。因此，当输入  $u_{[t_0, +\infty)}$  加于系统时，我们如果不知道  $t_0$  以前的输入  $u_{(-\infty, t_0]}$  那是无法确定输出  $y_{[t_0, +\infty)}$  的。换句话说，在这种情况下，输入  $u_{[t_0, +\infty)}$  与  $y_{[t_0, +\infty)}$  没有唯一确定的关系。显然，这种没有唯一确定关系的输入—输出对，对于决定系统重要特性是毫无用处的。因此在推导输入—输出描述时，必须假定在加入输入之前系统是松弛的或是静止的，且输出仅仅唯一地由嗣后的输入所引起。如果从能量的概念来看，这种假定意味着，若系统在  $t_0$  时刻不存储任何能量，我们就说系统在  $t_0$  时刻是松弛的。在工程实践中，我们总可认为系统在  $-\infty$  时刻是不存储任何能量的，也就是说总可假定系统在  $-\infty$  时是松弛或静止的。这时若在  $-\infty$  时把输入  $u_{(-\infty, +\infty)}$  加入系统，则与之相应的输出是唯一的，完全由输入  $u_{(-\infty, +\infty)}$  所决定。我

们称 $-\infty$ 时松弛或静止的系统为初始松弛系统或简称为松弛系统。对于一个松弛系统，自然就有

$$y = H u \quad (1-1)$$

其中， $H$ 是某一算子，通过它由系统的输入唯一地规定了系统的输出。式(1-1)也可用下面等价的写法表示：

$$y(t) = H u_{(-\infty, +\infty)} \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \quad (1-2)$$

**线性** 式(1-2)表示了一般的初始松弛系统，若对算子 $H$ 的性质加上适当限制，就可以得到初始松弛的线性系统的表达形式。

**定义 1-2** 一个松弛系统称为线性的，当且仅当对于任何输入 $u^1$ 和 $u^2$ ，以及任何实数 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ ，有

$$H(\alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2) = \alpha_1 H u^1 + \alpha_2 H u^2 \quad (1-3)$$

否则称为非线性系统。

式(1-3)的条件又可写成：对于任何 $u^1$ 和 $u^2$ 及任何实数 $a$ 有

$$H(u^1 + u^2) = H u^1 + H u^2 \quad (1-4)$$

$$H(\alpha u^1) = \alpha H u^1 \quad (1-5)$$

很容易证明条件(1-3)和条件(1-4)、(1-5)是等价的。式(1-4)称为可加性，而式(1-5)称为齐次性。可加性与齐次性合称叠加原理。在经典控制理论中，我们就已经用叠加原理是否成立来区分线性系统和非线性系统了。

要特别指出的是，齐次性和可加性是两个不可互相代替的概念，即具有齐次性的系统并不意味着可加性成立。现举例如下：

**例 1-1** 设一单变量系统，对所有 $t$ ，其输入输出之间有关系

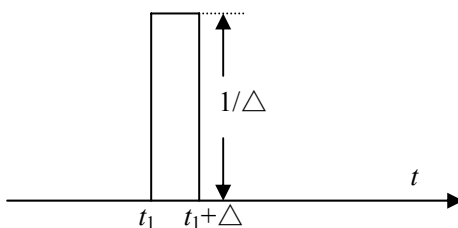
$$y(t) = \begin{cases} \frac{u^2(t)}{u(t-1)} & u(t-1) \neq 0; \\ 0 & u(t-1) = 0; \end{cases}$$

容易验证，这一输入—输出对满足齐次性，但不满足可加性。

同样，可加性一般也不隐含齐次性，因为(1-5)中的 $a$ 要求是任何实数。具体地说，由(1-4)式可以推导出对任何有理数 $a$ 有 $H(au) = aHu$ 成立（见习题 1-9），但一般不能导出 $a$ 是无理数时，式(1-5)也成立。

**线性松弛系统的脉冲响应** 首先我们引入 $\delta$ 函数或脉冲函数的概念，为此考虑图 1-2 所示的脉动函数 $\delta_{\Delta}(t - t_1)$ ，即

$$\delta_{\Delta}(t - t_1) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \frac{1}{\Delta} & t_1 \leq t < t_1 + \Delta \\ 0 & t \geq t_1 + \Delta \end{cases}$$



2 图 1-2

对于所有的 $\Delta$ ， $\delta_{\Delta}(t - t_1)$ 的面积总是 1，它表明了脉动的强度，当 $\Delta$ 趋于零时， $\delta_{\Delta}(t - t_1)$ 的极限

$$\delta(t - t_1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t - t_1)$$

称为 $t_1$ 时刻的单位脉冲函数，或简称 $\delta$ 函数。 $\delta$ 函数最重要的性质是采样性，即对在 $t_1$ 连续的任何函数 $f(t)$ ，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_1)dt = f(t_1) \quad (1-6)$$

利用脉冲函数的概念，就很容易导出单变量线性松弛的输入—输出的描述。因为每一分段连续的输入 $u(\cdot)$ 均可用一系列脉冲函数来近似，如图 1—3 所示，即

$$u \approx \sum_i u(t_i)\delta_{\Delta}(t - t_i)\Delta$$

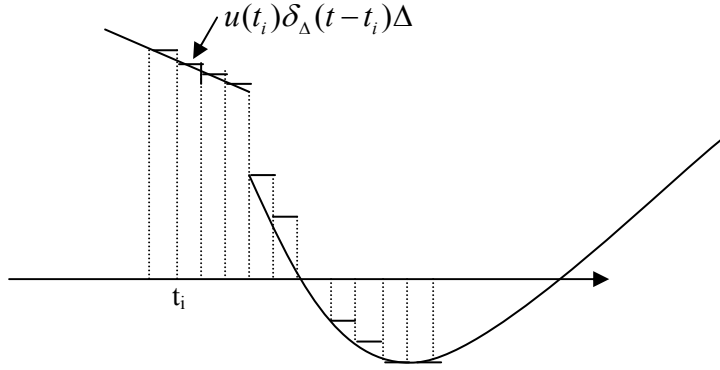


图 1—3

因为系统是初始松弛的线性系统，故输出

$$y = Hu \approx \sum_i [H\delta_{\Delta}(t - t_i)]u(t_i)\Delta \quad (1-7)$$

当 $\Delta$ 趋于零时，(1—7)式成为

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} [H\delta(t - \tau)]u(\tau)d\tau \quad (1-8)$$

若对所有的 $\tau$ ， $H\delta(t - \tau)$ 为已知，则对于任何输入，输出可由(1—8)求出。

$$H\delta(t - \tau) = g(t, \tau) \quad (1-9)$$

式(1—9)中 $g(t, \tau)$ 的变量 $\tau$ 表示 $\delta$ 函数加于系统的时刻，而第一个变量为观测输出的时刻。利用式(1—9)可将(1—8)改写为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau)u(\tau)d\tau \quad (1-10)$$

即单变量线性松弛系统，其输入—输出关系完全由式(1—10)的卷积积分所描述。

若一个初始松弛的线性系统，具有 $p$ 个输入端和 $q$ 个输出端，则(1—10)式可相应地推广为

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1-11)$$

其中

$$\mathbf{G}(t, \tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t, \tau) & g_{12}(t, \tau) \cdots g_{1p}(t, \tau) \\ g_{21}(t, \tau) & g_{22}(t, \tau) \cdots g_{2p}(t, \tau) \\ \vdots & \cdots \\ g_{q1}(t, \tau) & g_{q2}(t, \tau) \cdots g_{qp}(t, \tau) \end{bmatrix}$$

称为系统的脉冲响应矩阵。 $\mathbf{G}(t, \tau)$ 的元 $g_{ij}(t, \tau)$ 物理意义是，只在系统第 $j$ 个输入端，于时刻 $\tau$ 加脉冲函数，其它输入端不加信号，这时，在系统第 $i$ 个输出端引起的时刻 $t$ 的响应。或者简单的说 $g_{ij}(t, \tau)$ 是第 $i$ 个输出端对第 $j$ 个输入的脉冲响应。

这里我们规定今后所研究的脉冲响应 $\mathbf{G}(t, \tau)$ 可含有一系列的 $\delta$ 函数，并且除了这些 $\delta$ 函数之外， $\mathbf{G}(t, \tau)$ 的其余部分是 $\tau$ 和 $t(t > \tau)$ 的分段连续函数。在这一假定下，如果输入是分段连续函数，则输出也是分段连续函数。因此，线性松弛系统可以看作一个线性算子，它将定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上由所有分段连续函数组成的无限维空间映射到另一个无限维函数空间。

**因果性** 若系统在时刻 $t$ 的输出不取决于 $t$ 之后的输入，而只取决于时刻 $t$ 和在 $t$ 之前的输入则称系统具有因果性。任何实际的物理系统都是具有因果性的。通俗地说任何实际物理过程，结果总不会在引起这种结果的原因发生之前产生。习题 2-8 引入了一个算子，被称为截断算子，定义如下：

$$y(t) = P_{\alpha} u(t) = \begin{cases} u(t) & t \leq \alpha \\ 0 & t > \alpha \end{cases}$$

因果性可用截断算子来表示。即 $H$ 表示的系统是具有因果性的，是指成立如下的关系：

$$\forall T \quad P_T(Hu) = P_T(HP_T u)$$

上式左端的输入比右边的多了 $t > T$ 的一段，而输出在 $t < T$ 是一样的，这说明 $t > T$ 的输入对 $t < T$ 的输出无影响。

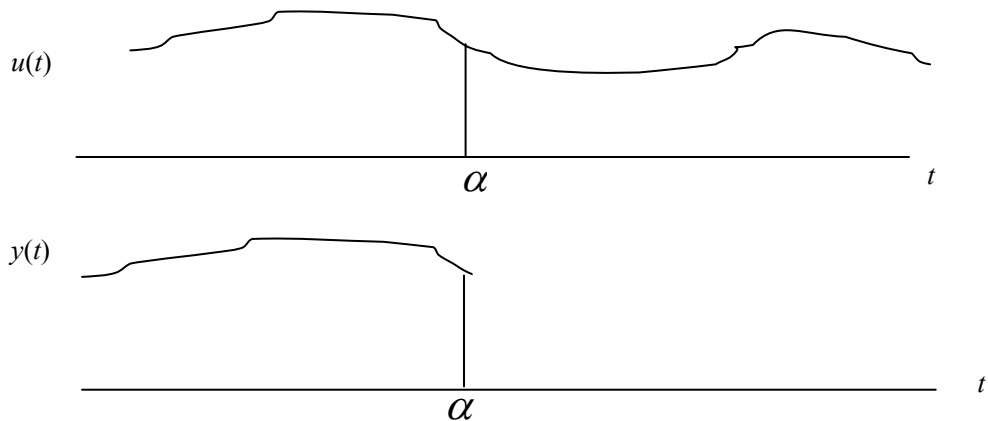


图 1—4

对于有因果性的松弛系统，其输入和输出的关系可以写成

$$y(t) = Hu_{(-\infty, t]} \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \quad (1-12)$$

对于具有线性和因果性的松弛系统，根据  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的定义， $\mathbf{G}(t, \tau)$  中的每一个元都是时刻  $\tau$  加于系统的  $\delta$  函数输入所引起的输出，若系统具有因果性，则系统在加入输入之前的输出为零，即

$$\mathbf{G}(t, \tau) = 0 \quad \forall t < \tau, \tau \in (-\infty, +\infty) \quad (1-13)$$

故具有线性和因果的松弛系统的输入—输出描述为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1-14)$$

**$t_0$  时刻的松弛性** 现在将前面所说的初始松弛的概念用于任意时刻  $t_0$ 。

**定义 1—3** 系统在时刻  $t_0$  称为松弛的，当且仅当输出  $y_{[t_0, +\infty)}$  仅仅唯一地由  $u_{[t_0, +\infty)}$  所决定。

若已知系统在  $t_0$  时松弛，则其输入—输出关系可以写成

$$y_{[t_0, +\infty)} = Hu_{[t_0, +\infty)} \quad (1-15)$$

显然，若系统初始松弛，且  $u_{(-\infty, t_0)} \equiv 0$ ，则系统在时刻  $t_0$  也是松弛的。但是对初始松弛系统， $u_{(-\infty, t_0)} \equiv 0$ ，并非系统在  $t_0$  松弛的必要条件。

**例 1—2** 考虑一个单位延迟系统。这种系统的输出就是输入延迟了单位时间。即对所有的  $t$ ，有  $y(t) = u(t-1)$ 。虽然  $u_{(-\infty, t_0-1)} \neq 0$ ，但只要  $u_{(t_0-1, t_0)} \equiv 0$ ，则系统在  $t_0$  是松弛的。

对于线性系统而言，不难证明，系统在  $t_0$  松弛的充要条件是，对于所有的  $t \geq t_0$ ，有  $y(t) = Hu_{(-\infty, t_0)} = 0$ 。也就是说，若  $u_{(-\infty, t_0)}$  对于  $t_0$  以后的输出无影响，则线性系统在  $t_0$  时刻是松弛的。在  $t_0$  时刻是松弛的线性系统，它的一种输入—输出描述可表示为

$$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{G}(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1-16)$$

一个很自然的问题是，给定一个线性系统，如何判断该系统在  $t_0$  时是松弛的？前面虽然给出一个充要条件，但条件中要考察系统过去的历史情况，即  $u_{(-\infty, t_0)}$  对系统的影响。下面的定理给出的判断可以不必知道系统过去的历史。

**定理 1—1** 由下式描述的系统

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

在  $t_0$  是松弛的，必要且只要  $u_{[t_0, +\infty)} \equiv 0$  隐含着  $y_{[t_0, +\infty)} \equiv 0$ 。

**证明** 必要性。若系统在  $t_0$  松弛，则对于  $t \geq t_0$ ，输出  $y(t)$  为  $\int_{t_0}^{\infty} \mathbf{G}(t, \tau) u(\tau) d\tau$ ，因此若

$u_{[t_0, +\infty)} \equiv 0$ ，则有  $y_{[t_0, +\infty)} \equiv 0$ 。

充分性。因为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} G(t, \tau) u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

对所有  $t \in (-\infty, +\infty)$  均成立。在  $u_{[t_0, +\infty)} \equiv 0$  时和  $y_{[t_0, +\infty)} = 0$  的假定条件下，可得

$$\int_{-\infty}^{t_0} G(t, \tau) u(\tau) d\tau = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

即  $u_{(-\infty, t_0)}$  对输出  $y(t) (t \geq t_0)$  的影响为零，因此系统在  $t_0$  是松弛的。

定理 1—1 虽然给出了判断  $t_0$  时刻是否松弛的规则，但是在实用中想要从  $t_0$  到  $+\infty$  来观测输出仍然是不现实的，下面的推论将给出判断  $t_0$  松弛的一个实用条件。

**推论 1—1** 若系统的脉冲响应阵  $G(t, \tau)$  可以分解成  $G(t, \tau) = M(t)N(\tau)$ ，且  $M(t)$  中每一个元素在  $(-\infty, +\infty)$  上是解析的(注 1)，则系统在  $t_0$  松弛的一个充分条件是对于某个固定的正数  $\varepsilon$ ， $u_{[t_0, t_0 + \varepsilon)} \equiv 0$  意味着  $y_{[t_0, t_0 + \varepsilon)} \equiv 0$ 。

**证明** 若  $u_{[t_0, +\infty)} = 0$ ，则系统输出  $y(t)$  为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} G(t, \tau) u(\tau) d\tau = M(t) \int_{-\infty}^{t_0} N(\tau) u(\tau) d\tau \quad \forall t \geq t_0$$

上式最后一个积分的结果是与  $t$  无关的常向量，故  $M(t)$  是解析的假定意味着  $y(t)$  在  $[t_0, +\infty)$  上是解析的，又因为  $y_{[t_0, t_0 + \varepsilon)} \equiv 0$ ，解析开拓原理可知  $y_{[t_0, +\infty)} \equiv 0$ 。至此我们证明了  $u_{[t_0, +\infty)} \equiv 0$  隐含  $y_{[t_0, +\infty)} \equiv 0$ ，由定理 1—1 可知系统在  $t_0$  是松弛的。

推论 1—1 的结果之所以重要，是因为对于任何满足推论 1—1 条件的系统，其松弛性可以由任何非零时间区间上观测输出来确定。若在该区间内系统的输出为零，则系统在该时刻是松弛的。以后我们将证明凡可由有理传递函数阵或线性常系数分方程描述的系统，是满足推论 1—1 的条件的。因此推论 1—1 具有广泛的实用价值。

**时不变性** 首先介绍位移算子  $Q_\alpha$  的概念，位移算子  $Q_\alpha$  的作用效果如图 1—5 所示。经  $Q_\alpha$  作用后的输出等于延迟了  $\alpha$  秒的输入。

用数学式子可表示为：

$$\bar{u}(t) = Q_\alpha u(t) \quad \forall t \quad (1-17)$$

即对任意的  $t$ ，有



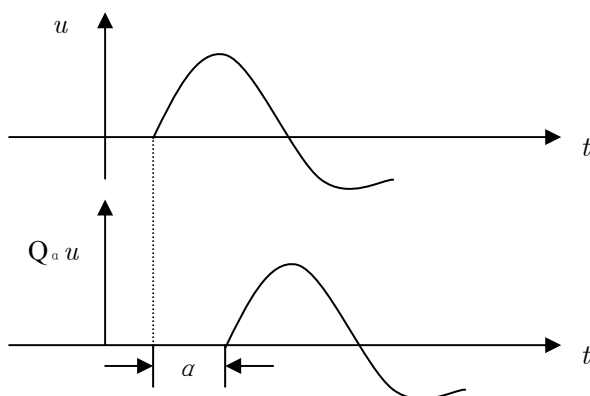


图 1—5

$$\bar{u} = u(t - \alpha) \text{ 或 } \bar{u}(t + \alpha) = u(t)$$

成立。

**定义 1—4** 松弛系统称为时不变的，当且仅当对于任何输入  $\mathbf{u}$  和任何实数  $\alpha$ ，有

$$HQ_\alpha \mathbf{u} = Q_\alpha H\mathbf{u} \quad (1-18)$$

成立。否则称为时变的。

关系式 (1-18) 的含义是，若输入位移  $\alpha$  秒，输出波形除位移  $\alpha$  秒之外保持不变。换句话说，不管在什么时刻把输入加于时不变松弛系统，输出波形总是相同的。对线性松弛系统，若又具有时不变性，这时的脉冲响应函数仅仅取决于加脉冲时刻  $\tau$  和观测时刻  $t$  之差，即  $H\delta(\xi - \tau) = g(t - \tau, 0)$ 。实际上，根据时不变性有：

$$Q_\alpha H\delta(\xi - \tau) = HQ_\alpha \delta(\xi - \tau) = H\delta[\xi - (\tau + \alpha)] = g(t, \tau + \alpha)$$

由  $Q_\alpha$  的定义，等式  $Q_\alpha g(t, \tau) = g(t, \tau + \alpha)$  意味着对于任何的  $t, \tau, \alpha$  都有  $g(t, \tau) = g(t + \alpha, \tau + \alpha)$  成立，如取  $\alpha = -\tau$  就可得

$$g(t, \tau) = g(t - \tau, 0) \quad \forall t, \tau$$

为了方便起见，今后仍把  $g(t - \tau, 0)$  记为  $g(t - \tau)$ 。这一结论推广到多变量系统就是：对于所有的  $t$  和  $\tau$  有

$$\mathbf{G}(t, \tau) = \mathbf{G}(t - \tau, 0) = \mathbf{G}(t - \tau)$$

因而线性、时不变性，在  $t_0$  时刻松弛的因果系统，其输入—输出对满足

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1-19)$$

在时不变的情况下，不失一般性，总可以选零作为初始时刻  $t_0$ ，即  $t_0 = 0$  是开始研究系统或开始向系统提供输入  $u$  的时刻，这时 (1-19) 式就变成下列卷积积分的形式：

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1-20)$$

或

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t) \mathbf{u}(t - \tau) d\tau \quad (1-21)$$

### 传递函数阵和它的极点多项式

将 (1-20) 式进行拉氏变换，并记

$$\mathbf{Y}(s) = L[\mathbf{y}(t)] = \int_0^\infty \mathbf{y}(t) e^{-st} dt$$

由拉氏变换的卷积定理，可得

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \quad (1-22)$$

式中  $\mathbf{G}(s) = \int_0^\infty \mathbf{G}(t)e^{-st}dt$  是脉冲响应阵的拉氏变换，称为系统的传递函数阵。

传递函数阵的元素不一定是  $s$  的有理函数，但在本教材中所讨论的传递函数阵，其元素都是  $s$  的有理函数，这样的传递函数阵称为有理函数矩阵。今后我们总假定  $\mathbf{G}(s)$  的每一个元都已经是既约形式，即每一个元的分子多项式和分母多项式没有非常数的公因式。推广经典控制原理中关于传递函数零点和极点的概念，可以定义有理传递函数阵  $\mathbf{G}(s)$  的零点和极点。有理函数阵零点和极点的等价定义很多(注 2)，为了尽可能不涉及多项式矩阵和多项式矩阵互质的概念，我们这里采用  $\mathbf{G}(s)$  的不同子式来定义它的零点和极点。设  $\mathbf{G}(s)$  是  $q \times p$  有理函数阵，且  $\mathbf{G}(s)$  的秩为  $r$ 。

**定义 1-5**  $\mathbf{G}(s)$  所有不恒为零的各阶子式的首一最小公分母称为  $\mathbf{G}(s)$  的极点多项式。极点多项式的零点称为  $\mathbf{G}(s)$  的极点。

**定义 1-6**  $\mathbf{G}(s)$  的所有  $r$  阶子式，在其分母取  $\mathbf{G}(s)$  的极点多项式时，其分子的首一最大公因式称为  $\mathbf{G}(s)$  的零点多项式。零点多项式的零点称为  $\mathbf{G}(s)$  的零点。

定义中的“首一”表示一个多项式的最高幂次项的系数为 1。定义 1-5 在第三章中还要用到。根据定义 1-5 和定义 1-6，可直接计算  $\mathbf{G}(s)$  的零点和极点。

**例 1-3** 若

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ -1 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

根据定义 1-5，可以计算出  $\mathbf{G}(s)$  的一阶子式的公分母为  $(s+1)(s-1)(s+2)$ ，而  $\mathbf{G}(s)$  的三个二阶子式分别为

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2}, \quad \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

二阶子式的公分母为  $(s+1)(s+2)^2$ 。因此  $\mathbf{G}(s)$  的极点多项式为一阶子式的公分母和二阶子

式的公分母的最小公倍式，即  $(s+1)(s-1)(s+2)^2$ ，显然  $\mathbf{G}(s)$  有四个极点，它们分别为 -1、

-2、-2 和 +1。另外三个二阶子式在分母取成极点多项式时分别为

$$\frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)(s-1)(s+2)^2}, \quad \frac{-(s-1)}{(s+1)(s-1)(s+2)^2}, \quad \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-1)(s+2)^2}$$

它们分子的最大公因式为  $(s-1)$ ，因此  $\mathbf{G}(s)$  的零点多项式为  $(s-1)$ ， $\mathbf{G}(s)$  有一个零点  $s=1$ 。

**注 1:** 实变量解析函数： $f(t)$  在  $(a,b)$  是解析的，若对于  $(a,b)$  中任一点  $t_0$ ，存在一个  $\varepsilon_0$ ，使得对  $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$  中所有  $t$ ， $f(t)$  可表示成  $t_0$  处的泰劳级数

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0)$$

**定理 (解析开拓):** 若函数  $f$  在  $\mathbb{D}$  上解析，已知函数在  $\mathbb{D}$  中任意小的非零区间上恒为零，则函数在  $\mathbb{D}$  上恒为零。

**注 2:** 例 1-3 中的  $\mathbf{G}(s)$ ，它的一个左互质分解式为

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{Q}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & & \\ & (s-1)(s+2) & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s+2 & 0 & s-1 \\ -(s+2) & s-1 & s-1 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & & \\ & (s-1)(s+2) & \end{bmatrix}, \mathbf{Q}(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 & s-1 \\ -(s+2) & s-1 & s-1 \end{bmatrix}$$

类似于有理函数的分母和分子，称  $\mathbf{P}(s)$  为  $\mathbf{G}(s)$  的分母阵，称  $\mathbf{Q}(s)$  为  $\mathbf{G}(s)$  的分子阵。可以由  $\mathbf{G}(s)$  的分母阵和分子阵来定义  $\mathbf{G}(s)$  的极点和零点。

$\mathbf{G}(s)$  的极点为多项式  $\det(\mathbf{P})$  的根，即

$$\det \mathbf{P}(s) = \det \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & & \\ & (s-1)(s+2) & \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)(s+2)^2$$

的根。

$\mathbf{G}(s)$  的零点为使分子阵  $\mathbf{Q}(s)$  降秩的那些复数值。这里  $\mathbf{G}(s)$  的正常秩为

$$\text{rank} \mathbf{Q}(s) = \text{rank} \begin{bmatrix} s+2 & 0 & s-1 \\ -(s+2) & s-1 & s-1 \end{bmatrix} = 2$$

当用  $s = 1$  代入  $\mathbf{Q}(s)$  时，其秩为

$$\text{rank} \mathbf{Q}(s)|_{s=1} = \text{rank} \begin{bmatrix} s+2 & 0 & s-1 \\ -(s+2) & s-1 & s-1 \end{bmatrix} \Big|_{s=1} = 1$$

小于正常秩，故  $\mathbf{G}(s)$  有  $s = 1$  的零点。

## § 1—2 系统的状态变量描述

在现代控制理论中, 采用状态变量对系统进行描述, 为此先介绍状态变量的概念。

**状态变量** 系统的输入—输出描述仅在松弛的条件下才能采用。若系统在  $t_0$  时刻是非松弛的。输出  $y_{[t_0, +\infty)}$  并不能单单由  $u_{[t_0, +\infty)}$  所决定, 而且还取决于  $t_0$  时的状态。例如在  $t_0$  时刻对质点 (系统) 施加一个外力 (输入), 则在  $t \geq t_0$  时质点的运动 (输出) 并不能唯一地确定。但如果我们知道了在  $t_0$  时刻质点的位置和速度, 那么在  $t \geq t_0$  时质点的运动就唯一地确定了。因此可以把质点在  $t_0$  时的位置和速度看作是一组信息量, 它与施加于质点的外力 (输入) 一起, 可唯一地确定质点的运动 (输出)。这样性质的一组信息量称为该质点运动的一组状态变量。

**定义 1—7** 系统在  $t_0$  时刻的状态变量是系统在  $t_0$  时的信息量, 它与  $u_{[t_0, +\infty)}$  一起, 唯一地确定系统在所有  $t \geq t_0$  时的行为。

定义中的信息量可以看作系统以往活动情况的某种最简练的表示, 但这种表示又是足够的全面, 使得它足以和  $u_{[t_0, +\infty)}$  一起确定系统的输出和信息量本身的更新。在上述质点运动的例子中, 信息量只取速度显然是不全面的; 同样若取位置、速度、动量那也是不必要的, 因为速度和动量并不独立。为了进一步说明状态变量的概念, 考虑下面的例子。

**例 1-4** 考虑如图 1—6 所示的网络。图中  $R = 3\Omega, L = 1H, C = 0.5F$ 。

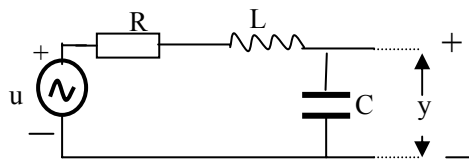


图 1—6

由复数阻抗的方法容易求出该网络的传递函数。

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

相应的脉冲响应函数为

$$g(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}, \quad t \geq 0 \quad (1-23)$$

在  $t_0$  非松弛的情况下, 输入—输出的关系式为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1-24)$$

上式第一个积分可以看作输入  $u_{(-\infty, t_0)}$  对  $t > t_0$  时输出产生的影响, 而这种影响即是  $t_0$  以前的输入电压通过电容和电感在  $t_0$  存储了能量, 这一存储的能量对  $t > t_0$  的输出发生了影响。实

际上，将（1—23）代入（1—24）式的第一个积分，可得

$$\int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)d\tau = 2e^{-t} \int_{-\infty}^{t_0} e^{\tau}u(\tau)d\tau - 2e^{-2t} \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\tau}u(\tau)d\tau = 2e^{-t}c_1(t_0) - 2e^{-2t}c_2(t_0) \quad (1-25)$$

式中

$$c_1(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} e^{\tau}u(\tau)d\tau, \quad c_2(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\tau}u(\tau)d\tau$$

如果  $c_1(t_0)$  和  $c_2(t_0)$  为已知，则由未知输入  $u_{(-\infty, t_0)}$  引起的在  $t \geq t_0$  后的输出就可完全确定。从

式（1—24）和（1—25）可得

$$y(t) = 2e^{-t}c_1(t_0) - 2e^{-2t}c_2(t_0) + \int_{t_0}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (1-26)$$

对（1—26）式取关于  $t$  的导数，可得

$$\dot{y}(t) = -2e^{-t}c_1(t_0) + 4e^{-2t}c_2(t_0) + g(0)u(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial g(t-\tau)}{\partial t}u(\tau)d\tau$$

由（1—23）式可知  $g(0) = 0$ ，将上式中  $t$  换为  $t_0$  可得

$$\dot{y}(t_0) = -2e^{-t_0}c_1(t_0) + 4e^{-2t_0}c_2(t_0) \quad (1-27)$$

将（1—26）式中的  $t$  换为  $t_0$ ，可得

$$y(t_0) = 2e^{-t_0}c_1(t_0) - 2e^{-2t_0}c_2(t_0) \quad (1-28)$$

式（1—27）和（1—28）给出了  $c_1(t_0)$ 、 $c_2(t_0)$  与  $y(t_0)$ 、 $\dot{y}(t_0)$  的关系。为了表现  $t_0$  时非松弛的情况，这里需在  $t_0$  时补充的信息量完全可以取  $c_1(t_0)$ 、 $c_2(t_0)$ 。从  $c_1(t_0)$  及  $c_2(t_0)$  的表达式中可以看出它们的确概括了  $t_0$  以前的输入在  $t_0$  时的影响。由于（1—27）和（1—28）式，所以在  $t_0$  时补充信息量也可以取  $y(t_0)$  和  $\dot{y}(t_0)$ ，亦即状态变量可取为  $y$ 、 $\dot{y}$ ，这和通常电工学的知识是一致的。众所周知，对于这个网络，若流经电感的初始电流以及电容两端的初始电压为已知，则在任何驱动电压下，网络的动态行为就完全可以确定。而  $y$  就是电容上的电压，而  $\dot{y}$  是和流经电感上电流成比例的量。

**例 1—5** 单位时间延迟系统，是对所有  $t$  其输出  $y(t)$  等于  $u(t-1)$  的装置。对于这一系统，为了唯一地由  $u_{[t_0, +\infty)}$  确定  $y_{[t_0, +\infty)}$ ，需要知道  $u_{(t_0-1, t_0)}$  的信息。因此这一信息  $u_{(t_0-1, t_0)}$  就可以作为系统在  $t_0$  时刻的状态。这个例子和例 1—4 不同，这里  $t_0$  时的状态由无限个数所组成。

**例 1—6** 电枢控制直流电动机的模型如图 1—7 所示， $R_a$  和  $L_a$  表示电枢回路的电阻和电感。激磁电流  $i_f$  为常数。电机驱动的负载具有惯量  $J$  和阻尼  $f$ 。输入电压  $u$  加于电枢两端，电机转轴的角位移  $\theta$  是所需要的输出量。

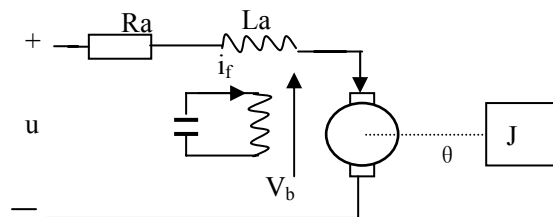


图 1—7

电动机的驱动力矩  $T_m$  是激磁电流  $i_f$  产生的磁通和电枢电流  $i_a$  的函数。因  $i_f$  假定为常数，故在无饱和的假定下，驱动力矩为

$$T_m = K_m i_a \quad (1-29)$$

其中， $K_m$  是电机常数。电机的力矩平衡方程为

$$T_m = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} \quad (1-30)$$

电枢电流与输入电压之间有如下关系：

$$u(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + V_b(t) \quad (1-31)$$

其中  $V_b(t)$  为反电势，它正比于电机转速。设反电势系数为  $K_b$ ，则有

$$V_b(t) = K_b \frac{d\theta}{dt} \quad (1-32)$$

为了描述上述电动机模型内部的电学过程和力学运动过程，可以选择流经电感的电流  $i_a$ 、电机输出轴的角位移  $\theta$  和角速度  $\dot{\theta}$  作为状态变量，即如果知道了  $t_0$  时刻的上述三个量，该电动机模型的运动就可完全由驱动电压唯一决定。

通过上面三个例子的叙述，可以简单地归纳出下列几点：

第一，状态变量的选择不是唯一的，对于图 1—6 所示的网络，可以选流经电感的电流和电容上的电压作为状态变量，也可以选  $y(t)$  和  $\dot{y}(t)$  或  $c_1(t)$  和  $c_2(t)$  作为状态变量。

第二，状态变量可以选为具有明显物理意义的量，在图 1—7 的电动机模型中，电枢电流、输出轴的角位移及角速度都是具有明显物理意义的量，前者是电学中的物理量，后者是力学中的物理量。状态变量  $t$  也可以根据数学描述的需要，选择从物理意义上难以直接解释的量。

第三，如果用能量的概念，我们可以把系统的运动过程看作是能量的变换过程。因此状态变量的数目等于且仅仅等于系统中包含独立储能元件的数目。在例 1—6 中有电能贮存元件电感，以及机械能（位能和动能）的贮存元件电机转动轴，电机转子连同负载。

第四，状态变量的数目的可以是有限个，如例 1—4 和例 1—6；也可以和例 1—5 一样，状态变量的数目是无限个。

在本书中，我们仅研究状态变量数目是有限个数的情况。这时，若将系统每一个状态变量作为分量，可将系统的状态变量集合成有限维列向量  $\mathbf{x}$ ，我们称  $\mathbf{x}$  为系统的状态向量。因为状态变量通常取实数值，所以状态向量取值的线性空间通常是熟知的有限维实向量空间，称为状态空间。

**动态方程** 引入系统的状态变量之后，我们可以得到描述系统输入、输出和状态之间关系的方程组，这个方程组称为系统的动态方程。在状态变量的定义中曾经指出状态变量的更新问题。也就是说状态变量是其自身和输入变量的泛函，状态变量是通过一组时间函数与输入变量、状态的过去特性联系起来的，这种最简单的泛函关系就是积分，即状态向量的表达式为

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

其中函数向量  $\mathbf{f}$  确定了系统特性，上式表明状态向量满足下列向量微分方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1-33a)$$

如果再确定由输入向量与状态向量求出输出向量  $\mathbf{y}$  的关系式

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1-33b)$$

这样，一个系统的动态模型就算完全了。

目前都把式 (1—33a、b) 所表示的描述形式取作状态空间模型的标准形式，并称为系统的动态方程式。为使 (1—33) 真正成为系统的动态方程式，还必须假定对任何初态  $\mathbf{x}(t_0)$  和任何给定的允许控制  $\mathbf{u}(t)$ ，方程有唯一解。对于给定  $\mathbf{u}$  和给定的初态，方程有唯一解的一个充分条件是  $f_i$  和  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (i, j = 1, 2, \dots, n)$  是时间的连续函数。若 (1—33) 存在唯一解，则可证明它能用  $\mathbf{x}(t_0)$  和  $\mathbf{u}_{[t_0, t]}$  表出。正如所期望的一样， $\mathbf{x}(t_0)$  当然就是  $t_0$  时的状态。方程 (1—33a) 决定了状态的行为，故称为状态方程，方程 (1—33b) 给出输出，故称输出方程。

若 (1—33) 中的  $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{d}$  是  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  的线性函数，则称 (1—33) 为线性动态方程，它们具体形式为

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

其中  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$  和  $\mathbf{D}(t)$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times p$ 、 $q \times n$ 、 $q \times p$  的矩阵，因此  $n$  维线性动态方程有形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (\text{状态方程}) \quad (1-34a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (\text{输出方程}) \quad (1-34b)$$

式 (1—34) 有唯一解的一个充分条件是  $\mathbf{A}(t)$  的每一元素均为定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的  $t$  的连续函数。为了方便，假定  $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$  和  $\mathbf{D}(t)$  的元素也在  $(-\infty, +\infty)$  上连续。(1—34) 的方程称为线性时变动态方程， $\mathbf{A}(t)$  称为系统矩阵， $\mathbf{B}(t)$  和  $\mathbf{C}(t)$  分别称为控制分布矩阵和量测矩阵， $\mathbf{D}(t)$  表示输入和输出的直接耦合关系，称为前馈矩阵。方程 (1—34) 又可用图 1—8 中的框图来表示。

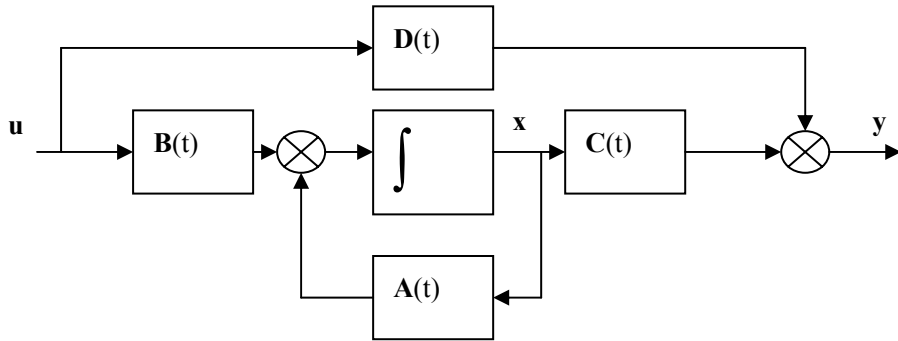


图 1—8

若矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  不随时间变化，则方程称为线性时不变动态方程。 $n$  维线性时不变动态方程的一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1-35)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

式中  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times p$ 、 $q \times n$  和  $q \times p$  的实常量矩阵。在时不变的情况下，方程的特性不随时间而变，因此不失一般性可选初始时间为零，从而时间区间可选为  $[0, +\infty)$ 。

### 建立线性动态方程的例题

**例 1—7** 设有一倒摆安装在马达传动车上，如图 1—9 所示。这实际上是一个空间起飞助推器的姿态控制模型。图中  $M$  为传动车的质量， $l$  为摆长， $m$  为摆的质量， $u$  为控制力。假定摆只在图 1—9 所示的平面上运动。

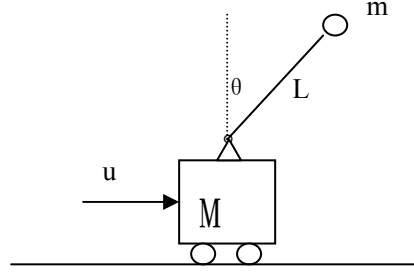


图 1—9

若取系统的坐标为  $x$  及  $\theta$ ，则这个系统的动力学方程如下：

$$\begin{aligned} ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta &= mg\sin\theta, \\ (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta &= u \end{aligned}$$

这是一组非线性方程，注意到  $\theta$  很小时有

$$\sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

忽略掉方程中的高阶小量，可得线性化方程

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= u \\ m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= mg\theta \end{aligned}$$

取  $x$ 、 $\dot{x}$ 、 $\theta$ 、 $\dot{\theta}$  为系统的状态变量，并引入状态向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})^T$ ，可将上述线性化方程表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u$$

如果  $x$  为测量变量，即输出变量  $y = x$ ，因此输出方程为

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x$$

**动态方程 (1-35) 的传递函数矩阵** 在研究线性时不变动态方程时，在初态为零的条件下，通过对动态方程进行拉普拉斯变换，可以得到与动态方程相应的传递函数矩阵。对方程 (1—35) 进行拉氏变换可得

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (1-40a)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s) \quad (1-40b)$$

由上式可得



$$\begin{aligned}\mathbf{x}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}^0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}^0 + (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{u}(s)\end{aligned}$$

若  $\mathbf{x}^0 = 0$ ，可得

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \quad (1-41)$$

其中  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$  称为动态方程 (1-35) 的传递函数矩阵，以后将会说明对一个具有输入—输出描述和状态变量描述的线性时不变系统，用 (1-22) 和 (1-41) 导出的传递函数矩阵是相同的。

在给了动态方程之后，可由 (1-41) 式出发计算出相应的传递函数阵。由 (1-41) 可见，传递函数矩阵的主要部分是预解矩阵  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ，其拉氏反变换是矩阵指数  $e^{\mathbf{A}t}$ ，预解矩阵是不易计算的。现在来介绍与  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  有关的一些关系式，这些关系在今后的计算或论证中经常要用到。

对于任何一个  $n \times n$  的矩阵  $\mathbf{A}$ ，其预解矩阵  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  可以写成下列形式

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}(\mathbf{R}_0 s^{n-1} + \mathbf{R}_1 s^{n-2} + \cdots + \mathbf{R}_{n-2}s + \mathbf{R}_{n-1}) \quad (1-42)$$

其中  $\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n \quad (1-43)$

$\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \cdots, \mathbf{R}_{n-1}$  为  $n \times n$  的常量矩阵。

将 (1-42) 左乘  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\Delta(s)$ ，可得

$$\Delta(s)\mathbf{I} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{R}_0 s^{n-1} + \mathbf{R}_1 s^{n-2} + \cdots + \mathbf{R}_{n-1})$$

比较上式两边  $s$  同次幂的系数矩阵有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_0 &= \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{R}_0 + a_1\mathbf{I} = \mathbf{A} + a_1\mathbf{I} \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{R}_1 + a_2\mathbf{I} = \mathbf{A}^2 + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{I} \\ &\vdots \\ \mathbf{R}_{n-1} &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{n-2} + a_{n-1}\mathbf{I} = \mathbf{A}^{n-1} + a_1\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{I} \\ 0 &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{n-1} + a_n\mathbf{I} = \Delta(\mathbf{A})\end{aligned} \quad (1-44)$$

利用 (1-44) 和 (1-42) 可得

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \Delta(s)(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(s)\mathbf{A}^k \quad (1-45)$$

其中

$$\begin{pmatrix} p_0(s) \\ p_1(s) \\ \vdots \\ p_{n-1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & a_1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ \vdots \\ s^0 \end{pmatrix} \quad (1-46)$$

由 (1-45) 可得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(s)}{\Delta(s)} \mathbf{A}^k \quad (1-47)$$

若对 (1-47) 进行拉氏反变换，且命  $p_k(t) = L^{-1}\left[\frac{p_k(s)}{\Delta(s)}\right]$ ，则可以得到矩阵指数  $e^{\mathbf{A}t}$  的一种

表达式

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \mathbf{A}^k \quad (1-48)$$

我们也可以从凯莱—哈密顿定理或矩阵函数等不同角度得出这些关系式。(1—44)有时可以用来计算特征多项式的系数  $a_i$  (见习题 1—21)。

### § 1—3 线性动态方程的解与等价动态方程

根据微分方程的理论, 当  $\mathbf{A}(t)$  和  $\mathbf{B}(t)$  为连续或分段连续函数时, 方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}^0\end{aligned}\quad (1-49)$$

对任意的连续或分段连续的  $\mathbf{u}(t)$  均有唯一解。为了确定这个方程的解, 先研究对应的齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (1-50)$$

**齐次方程  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的解** 首先说明齐次方程 (1—50) 解的一些性质。

**定理 1—2** 方程 (1—50) 的所有解的集合, 组成了实数域上的  $n$  维向量空间。

**证明** 命  $\Psi^1$  和  $\Psi^2$  是 (1—50) 的任意两个解, 则对于任意的实数  $a_1$  和  $a_2$ ,  $a_1\Psi^1 + a_2\Psi^2$  也是 (1—50) 的解。事实上

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(a_1\Psi^1 + a_2\Psi^2) &= a_1\frac{d}{dt}\Psi^1 + a_2\frac{d}{dt}\Psi^2 \\ &= a_1\mathbf{A}(t)\Psi^1 + a_2\mathbf{A}(t)\Psi^2 = \mathbf{A}(t)(a_1\Psi^1 + a_2\Psi^2)\end{aligned}$$

因此, 解的集合组成了实数域上的线性空间, 并称它为 (1—50) 的解空间。下面证明解空间维数为  $n$ 。令  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$  是  $n$  个线性无关的向量,  $\Psi^i$  是在初始条件  $\Psi^i(t_0) = \mathbf{e}^i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 时, 方程 (1—50) 的解。若我们能证明这  $n$  个解  $\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n$  是线性无关的, 且 (1—50) 的任一解均可表成它们的线性组合, 则维数为  $n$  的论断就得到了证明。现在用反证法, 若  $\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n$  线性相关, 必存在一个  $n \times 1$  非零实向量  $\alpha$  使得

$$[\Psi^1 \quad \Psi^2 \quad \dots \quad \Psi^n]\alpha = 0, \quad \forall t$$

当  $t = t_0$  时就有

$$[\Psi^1 \quad \Psi^2 \quad \dots \quad \Psi^n]\alpha = [\mathbf{e}^1 \quad \mathbf{e}^2 \quad \dots \quad \mathbf{e}^n]\alpha = 0$$

上式意味着向量组  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$  线性相关, 这写原先假设矛盾, 矛盾表明  $\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  上线性无关, 设  $\Psi$  是 (1—50) 的任一解, 且  $\Psi(t_0) = \mathbf{e}$ 。显然  $\mathbf{e}$  可唯一地用  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$  的线性组合表示

$$\mathbf{e} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + \dots + a_n\mathbf{e}^n$$

考虑  $\sum_{i=1}^n a_i\Psi^i(t)$ , 它是方程 (1—50) 满足初条件  $\mathbf{e}$  的解, 根据唯一性定理有

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^n a_i\Psi^i(t)$$

即  $\Psi(t)$  可表为  $\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n$  的线性组合。

**定义 1—8** 方程 (1—50) 的  $n$  个线性无关解为列所构成的矩阵  $[\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n] = \Psi$ , 称为 (1—50) 的基本矩阵。不难验证, (1—50) 的基本矩阵是下列矩阵微分方程的解,  $\mathbf{E}$  是某一个非奇异实常量矩阵。

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= \mathbf{A}(t)\Psi \\ \Psi(t_0) &= \mathbf{E}\end{aligned}\quad (1-51)$$

**定理 1—3** 方程 (1—50) 的基本矩阵  $\Psi(t)$  对于  $(-\infty, +\infty)$  中的每一个  $t$  均为非奇异矩阵。

**证明** 用反证法。设有  $t_0$ , 使得  $\Psi(t_0)$  为奇异阵, 则存在非零的实向量  $\alpha$ , 使得

$$[\Psi^1(t_0) \ \Psi^2(t_0) \ \cdots \ \Psi^n(t_0)]\alpha = 0$$

利用此  $\alpha$  构造  $\Psi(t) = [\Psi^1(t_0) \ \Psi^2(t_0) \ \cdots \ \Psi^n(t_0)]\alpha$ , 显然,  $\Psi(t_0) = 0$ , 且  $\Psi(t)$  是 (1—50)

的解, 故由唯一性定理可知有  $\Psi(t) \equiv 0$ , 即  $[\Psi^1(t) \ \Psi^2(t) \ \cdots \ \Psi^n(t)]\alpha \equiv 0$ , 这和  $\Psi$  是基本矩阵的假设相矛盾。故对于  $(-\infty, +\infty)$  中所有的  $t$  均有  $\det \Psi(t) \neq 0$ 。

**定理 1—4** 若  $\Psi_1 \ \Psi_2$  均为 (1—50) 的基本矩阵, 则存在  $n \times n$  非奇异实常量矩阵  $C$ , 使得

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) \cdot C$$

这一结论不难利用基本矩阵的性质给出证明。

**定义 1—9** 令  $\Psi(t)$  是 (1—50) 的任一基本矩阵, 则  $\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$  称为 (1—50) 的状态转移矩阵。这里  $t, t_0 \in (-\infty, +\infty)$

根据定理 1—4 可知, (1—50) 的状态转移矩阵与基本矩阵的选择无关。同时根据定义容易验证状态转移矩阵具有下列重要性质

$$\begin{aligned}\Phi(t, t) &= I \\ \Phi^{-1}(t, t_0) &= \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) = \Phi(t_0, t) \\ \Phi(t_2, t_0) &= \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)\end{aligned}$$

由 (1—51) 式可以证明  $\Phi(t, t_0)$  是下列矩阵微分方程的唯一解

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} &= A(t)\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) &= I\end{aligned}\tag{1—52}$$

由状态转移矩阵的概念, 可以立即得到齐次方程 (1—50) 在初始条件  $x(t_0) = x^0$  下的解为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x^0\tag{1—53}$$

由 (1—53) 式可以清楚地看出状态转移矩阵的物理意义, 在输入恒等于零的时间间隔内, 状态转移矩阵决定了状态向量的运动,  $\Phi(t, t_0)$  可看作一个线性变换, 它将  $t_0$  时的状态  $x^0$  映射到时刻  $t$  的状态  $x(t)$ 。

**非齐次方程  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  的解** 令  $x(t) = \Phi(t, t_0)\xi(t)$ , 代入方程 (1—49) 的左边, 可得

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0)\xi(t) + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) = A(t)\Phi(t, t_0)\xi(t) + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t)$$

将  $x(t) = \Phi(t, t_0)\xi(t)$  代入 (1—49) 右边可得

$$A(t)\Phi(t, t_0)\xi(t) + B(t)u(t)$$

由左边和右边相等, 可以得到

$$\dot{\xi}(t) = \Phi^{-1}(t, t_0)B(t)u(t)$$

积分上式得

$$\xi(t) - \xi(t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

因为  $\xi(t_0) = x(t_0) = x^0$ ,  $\xi(t) = \Phi^{-1}(t, t_0)x(t)$ , 所以得  $x(t)$  的表达式如下:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x^0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1-54)$$

在上式的推导中多次用到状态转移矩阵的性质。将以上结果写成定理形式。

**定理 1—5 状态方程**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ x(t_0) &= x^0 \end{aligned}$$

的解由式 (1—54) 给出。

若用  $\Phi(t, t_0, x^0, u)$  来表示初始状态  $x(t_0) = x^0$  和输入  $u_{[t_0, t]}$  共同引起的在  $t$  时刻的状态。当  $u \equiv 0$  时, 则(1—54)化为

$$\Phi(t, t_0, x^0, 0) = \Phi(t, t_0)x^0 \quad (1-55)$$

若  $x(t_0) = 0$ , 则(1—54)化为

$$\Phi(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (1-56)$$

$\Phi(t, t_0, x^0, 0)$  和  $\Phi(t, t_0, 0, u)$  分别称为状态方程的零输入响应和零状态响应。由 (1—54) 式可以看到, 一个线性状态方程的响应总能分解成零输入响应和零状态响应的和, 且这两部分响应分别是  $x^0$  和  $u$  的线性函数。

**推论 1—5 动态方程 (1—34) 的输出为**

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \quad (1-57)$$

同样可以将  $y(t)$  分解为零输入响应和零状态响应。若  $x^0=0$ , 则 (1—57) 变为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^t [C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau)]u(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^t G(t, \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1-58)$$

比较 (1—58) 和在第一节中引入的输入—输出的描述, 可知矩阵函数

$$t \geq \tau \quad G(t, \tau) = C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau) \quad (1-59)$$

$$t < \tau \quad G(t, \tau) = 0$$

是动态方程的脉冲响应矩阵。

**线性时不变动态方程的解** 线性时不变动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (1-60)$$

其中  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times p$ 、 $q \times n$  和  $q \times p$  的实常量矩阵。因为这种情况是线性时变动态方程的特殊情况，所以前面导出的所有结果，此处均能适用，它的主要结论如下：

1、 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  的基本矩阵为  $e^{\mathbf{A}t}$ ；状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}t}(e^{\mathbf{A}t_0})^{-1} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \Phi(t - t_0)$ 。

2、动态方程 (1-60) 的解为)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1-61)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1-62)$$

通常假定  $t_0=0$ ，这时则有

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1-63)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1-64)$$

3、(1-60) 式对应的脉冲响应矩阵

$$t \geq \tau \quad \mathbf{G}(t - \tau) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t - \tau)$$

$$t < \tau \quad \mathbf{G}(t, \tau) = 0$$

或更通常地写为

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \quad (1-65)$$

4、(1-60) 式对应的传递函数阵  $\mathbf{G}(s)$  是一个有理函数矩阵

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1-66)$$

**等价变换与等价动态方程** 在建立系统动态方程描述时曾经指出，系统的状态变量，是当系统为非初始松弛时，为了给出系统输入和输出之间的唯一关系而引出的一种信息量。状态变量的选择不是唯一的，不同的选择方法会导致形式上不同的动态方程。现在研究这些不同的状态方程之间的关系。首先讨论时不变的情况。

**定义 1-10** 线性时不变方程

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (1-67)$$

称为 (1-60) 的等价动态方程，当且仅当存在非奇异矩阵  $\mathbf{P}$ ，使得

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (1-68)$$

由定义不难看出，只要在 (1-60) 中令  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，就可得到 (1-67)，这也就是说动态

方程(1—67)相当于动态方程(1—60)在变换状态空间的基底后所得的结果,  $\mathbf{P}^{-1}$ 就是状态空间底基底变换的矩阵, 而  $\mathbf{P}$  则是坐标变换矩阵。而同一系统选取不同的状态变量所得到的状态方程之间的关系, 是等价动态方程关系。

显然, 动态方程是等价动态方程的必要条件是它们的维数相同和传递函数阵相同。但反之未必成立。

定义 1—10 可以推广到时变情况。设线性时变动方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{aligned}\quad (1—69)$$

其中  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$  和  $\mathbf{D}(t)$  为具有相应维数矩阵, 它们的元素都是  $t$  的实值连续函数。设  $\mathbf{P}(t)$  为定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的复数矩阵, 若对所有  $t$ ,  $\mathbf{P}(t)$  是非奇异且关于  $t$  是连续可微的。

**定义 1—10'** 动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}(t)\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}(t)\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}(t)\mathbf{u}\end{aligned}\quad (1—70)$$

称为(1—69)的代数等价动态方程, 当且仅当存在  $\mathbf{P}(t)$ , 使得

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}(t) &= [\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t)]\mathbf{P}^{-1}(t) \\ \bar{\mathbf{B}}(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t), \quad \bar{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{P}^{-1}(t), \quad \bar{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{D}(t)\end{aligned}\quad (1—71)$$

由定义可见, 只要在(1—69)中令  $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$  就可以得到(1—70), 因此同样可以将定义 1—10' 的代数等价关系和时不变的情况一样, 看作是状态空间的基底变换的结果, 只不过这里基底向量是随时间而变化的。

若  $\Psi(t)$  是(1—69)的一个基本矩阵, 显然  $\mathbf{P}(t)\Psi(t)$  是(1—70)的基本矩阵。因此若  $\Phi(t, t_0)$  是(1—69)的状态转移矩阵, 那么(1—70)的状态转移矩阵为

$$\mathbf{P}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{P}^{-1}(t_0)\quad (1—72)$$

## § 1—4 系统两种数学描述之间的关系

在 § 1—1 和 § 1—2 中分别介绍了线性系统的输入-输出描述和状态变量描述，这里对这两种描述方法简单作一为比较。

### 两种描述方法的比较

1、系统的输入—输出描述，仅揭示在初始松弛的假定下输入与输出之间的关系。因此这种描述方法不能表示在非松弛情况下系统输入输出的关系。更重要的一点是它也不能揭示系统内部的行为。例如如图 1—10 所示的网络。图中电阻均为  $1\Omega$ ，电容为  $1f$ 。

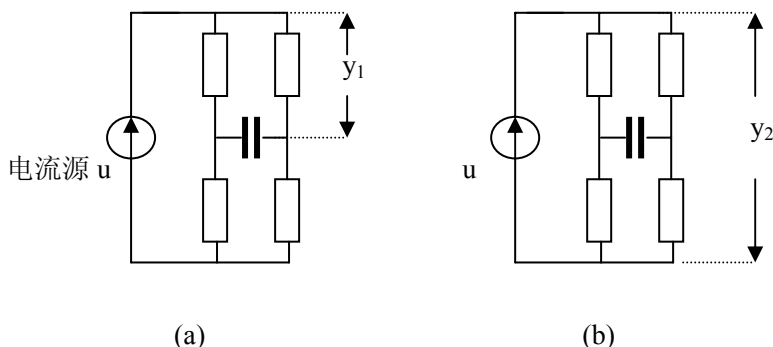


图 1—10

该图 (a) 所示的网络的传递函数为 0.5，图(b)所示网络传递函数为 1。当电容初始电压不为零时，则因电容为负，致使图(a)中的电压  $y_1$  随时间增加而增加，而图(b)中的  $y_2$  则对有  $t$  均保持等于  $u(t)$  不变。显然图(a)的网络是不能令人满意的。因为在非零初始条件，该网络的输出将随时间增加而无限增长。而图(b)的网络显然输出特性较好，但因支路 1 和 2 的电压随时间增加而增加，结果可能导致电容被击穿。因此图 1—10 所示的网络均不能正常工作，在网络内部结构不知道的情况下，上述现象是从传递函数检查不出来的。这就是说，在有些情况下，输入—输出描述尚不足以完全描述系统。

图 1—10 的网络的动态方程分别为

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ y_1 = 0.5x + 0.5u \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x \\ y_2 = u \end{cases}$$

容易求出动态方程的解，并通过解的表达式说明前述的物理现象，因此可见动态方程不仅描述了任何初始状态下输入和输出之间的关系，而且描述了在任何初始状态下系统的内部行为，所以与输入—输出描述相比，动态方程更完善的描述了系统。

2、对于比较复杂的线性系统，建立其动态方程是很繁的。在这种情况下，通过直接量测求得输入—输出描述，可能比较容易一些，例如可以通过对系统加入某些典型外作用，然后量测系统在典型外用下的响应，再通过数据处理。

3、在经典控制理论中，分析和综合都是在传递函数基础上实现的。例如容易用根轨迹方法或 Bode 图完成反馈系统的设计，这种设计由于解的不唯一性，在设计法上含有较多的试凑的成份，故设计者的经验起着很重要的作用。在现代控制理论中，系统设计是用动态方程完成的，虽然动态方程的解析解可能直接得到并且似乎是简单的。但是它的数值计算却是很麻烦的，通常要用数字机来计算。然而，现代控制理论能处理那些经典理论所不能处理的问题，



如最优控制设计问题。

4、本书中所研究的动态方程仅限于有限维的情况，故它们仅适用于集中参数系统。而输入—输出描述即适用于集中参数系统也适用于分布参数系统。

5、采用动态方程描述，系统很容易在模拟机或数字机上仿真。

由上述讨论可见，输入—输出描述和动态方程描述各有长处。因此，为了有效地进行设计，一个设计者应该掌握这两种描述。

**脉冲响应矩阵与动态方程** 首先研究的是时变的情况。若给定系统的动态方程如下

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{aligned}\quad (1-75)$$

容易根据动态方程（1—75）得到系统的输入—输出描述；因为在  $\mathbf{x}(t_0)=0$  时，动态方程的解为

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \\ &= \int_{t_0}^t [\mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) + \mathbf{D}(t) \delta(t - \tau)] \mathbf{u}(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (1-76)$$

$$\text{令} \quad \mathbf{G}(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) + \mathbf{D}(t) \delta(t - \tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \quad (1-77)$$

（1—76）式可写成

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

这正是在  $t_0$  松弛、具有因果性的线性时变系统的输入—输出描述。而（1—77）式所定义的  $\mathbf{G}(t, \tau)$  正是脉冲响应矩阵，式中当  $t < \tau$  时  $\mathbf{G}(t, \tau) = 0$  是（1—76）中积分上限终止于  $t$  的体现，即体现了该系统具有因果性。

若一个系统可以用状态变量描述，利用（1—77）容易得到其输入—输出描述。相反的问题，即从系统的输入—输出描述求取状态变量描述就要复杂得多。这里实际上包含有两个问题：1、是否可能从系统的脉冲响应阵获得状态变量描述？2、如果可能，怎样由脉冲响应阵求出状态变量描述？

**定义 1—11** 一个具有脉冲响应矩阵  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的系统，若存在一个线性有限维的动态方程  $\mathbf{E} : (\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$ ，与它具有相同的脉冲响应阵，则称  $\mathbf{G}(t, \tau)$  是可实现的，并称为  $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$  是  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的一个动态方程实现。

显然，在定义 1—11 中，实现仅给出与系统同样的零状态响应；若动态方程不在零状态，则其响应可与系统没有任何关系。另外，并不是每一个  $\mathbf{G}(t, \tau)$  都是可实现的。例如没有一个如（1—75）形式的线性动态方程，能够产生单位迟延系统的脉冲响应。

下面将给出  $\mathbf{G}(t, \tau)$  可实现的充分必要条件。

**定理 1—8**  $q \times p$  脉冲响应矩阵  $\mathbf{G}(t, \tau)$  是能用（1—75）形式有限维动态方程实现的，当且仅当  $\mathbf{G}(t, \tau)$  可分解为

$$\mathbf{G}(t, \tau) = \mathbf{D}(t) \delta(t - \tau) + \mathbf{M}(t) \mathbf{N}(\tau) \quad \forall t \geq \tau \quad (1-78)$$

其中  $\mathbf{D}(t)$  是  $q \times p$  矩阵， $\mathbf{M}(t)$  和  $\mathbf{N}(t)$  的分别是  $t$  的  $q \times n$  和  $n \times p$  连续矩阵。

**证明 必要性：**设动态方程（1—75）是  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的一个实现，则有

$$\mathbf{G}(t, \tau) = \mathbf{D}(t)\delta(t - \tau) + \mathbf{C}(t)\Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{D}(t)\delta(t - \tau) + \mathbf{C}(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)$$

其中  $\Psi(t)$  是  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的基本矩阵。若令

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{C}(t)\Psi(t)$$

$$\mathbf{N}(t) = \Psi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)$$

则必要性得证。

充分性：若  $\mathbf{G}(t, \tau)$  有（1—78）的形式，构造下列  $n$  维动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{N}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (1-79)$$

容易难证（1—79）是  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的一个实现。

我们注意到，（1—79）可用图 1—11 所示的没有反馈的结构来模拟。

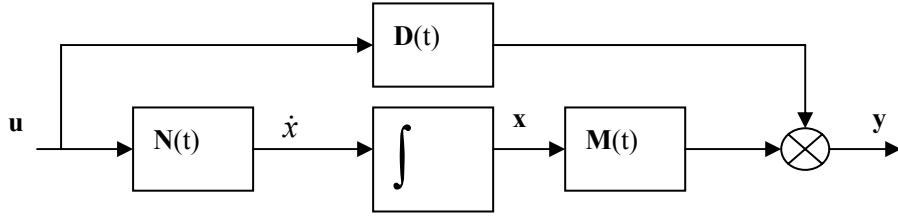


图 1—11

**例 1—10** 设  $g(t, \tau) = g(t - \tau) = (t - \tau)e^{\lambda(t-\tau)}$ 。容易证明

$$g(t - \tau) = (t - \tau)e^{\lambda(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau e^{-\lambda \tau} \\ e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix}$$

因此，动态方程的一个实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^{-\lambda \tau} \\ e^{-\lambda t} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

所有等价动态方程都具有相同的脉冲响应矩阵。因此，若找到  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的一个实现，就可利用等价变换找到  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的另一个实现。但是注意  $\mathbf{G}(t, \tau)$  可以有维数不同的实现，故并非  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的所有实现均等价。

**有理函数矩阵可实现的条件** 对于时不变的情况，先从  $s$  域来讨论。设系统的输入—输出描述为

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

或在复数域中为

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \quad (1-80)$$

这里  $\mathbf{G}(s)$  是脉冲响应矩阵  $\mathbf{G}(t)$  的拉氏变换，也就是传递函数矩阵。现假定已找到系统的动态方程描述为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\quad (1-81)$$

由 (1—80) 可求出

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(s) \quad (1-82)$$

比较 (1—80) 与 (1—81), 故有

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D} \quad (1-83)$$

(1—83) 表明,  $\mathbf{G}(s)$  可用 (1—81) 的动态方程实现的条件是  $\mathbf{G}(s)$  的每一个元都是  $s$  的有理函数, 而且它的分母的次数不小于分子的次数。

**定义 1—12** 若  $\mathbf{G}(\infty)$  是常量矩阵, 则称有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  是真有理函数矩阵。若  $\mathbf{G}(\infty) = 0$ , 则称有理函数矩阵为严格真有理函数矩阵。

**定理 1—9**  $\mathbf{G}(s)$  可由限维线性动态方程 (1—81) 实现的充分必要条件是, 传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  是真有理函数矩阵。

**证明** 必要性由 (1—83) 式就可说明, 因为  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  的行列式是  $s$  的  $n$  次多项式,  $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  的每一个元是矩阵  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  的  $n-1$  阶子式, 而这些子式都是次数至多为  $n-1$  次的多项式。

因此  $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  是严格真的有理函数矩阵, 根据 (1—83) 式可知  $\mathbf{G}(\infty) = \mathbf{D}$ , 所以  $\mathbf{G}(s)$  是真有理函数矩阵。

充分性: 因为  $\mathbf{G}(s)$  是  $q \times p$  真有理函数矩阵, 显然  $\mathbf{G}(\infty)$  是一常量矩阵, 记  $\mathbf{G}(\infty)$  为  $\mathbf{D}$ , 因而  $\mathbf{G}(s)$  可分解如下:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_0(s) + \mathbf{D} \quad (1-84)$$

其中  $\mathbf{G}_0(s)$  是严格真的有理函数矩阵。现在证明存在  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  阵, 使得

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{G}_0(s)$$

设  $\mathbf{G}_0(s)$  各元素的分母的首一最小公倍式为  $g(s) = s^r + g_{r-1}s^{r-1} + \cdots + g_1s + g_0$ , 显然  $g(s)\mathbf{G}_0(s)$  是多项式矩阵, 因为  $\mathbf{G}_0(s)$  是严格真的有理函数矩阵, 故  $g(s)\mathbf{G}_0(s)$  可表示如下:

$$g(s)\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1s + \cdots + \mathbf{G}_{r-1}s^{r-1}$$

其中  $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_{r-1}$  都是  $q \times p$  的常量矩阵。按下列方式构造  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_p & \mathbf{I}_p & & & \\ & 0_p & \mathbf{I}_p & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0_p & \mathbf{I}_p \\ -g_0\mathbf{I}_p & -g_1\mathbf{I}_p & \cdots & & -g_{r-1}\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0_p \\ 0_p \\ \vdots \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (1-85)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{G}_0 \quad \mathbf{G}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{G}_{r-1}]$$

显然  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  分别为  $rp \times rp$ 、 $rp \times p$ 、 $q \times rp$  的矩阵。为了证明由 (1—85) 式给出的  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  是  $\mathbf{G}_0(s)$  一个实现, 先考虑下列矩阵方程

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_r \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

这里  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r$  是  $p \times p$  的矩阵。上述矩阵方程等价于

$$s \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \\ \vdots \\ -(g_0\mathbf{X}_1 + g_1\mathbf{X}_2 + \dots + g_{r-1}\mathbf{X}_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p \\ \vdots \\ \mathbf{I}_p \end{pmatrix}$$

因此可得

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}_1 &= \mathbf{X}_2 \\ s\mathbf{X}_2 &= \mathbf{X}_3 \\ &\vdots \\ s\mathbf{X}_{r-1} &= \mathbf{X}_r \\ s\mathbf{X}_r &= \mathbf{I}_p - (g_0\mathbf{X}_1 + g_1\mathbf{X}_2 + \dots + g_{r-1}\mathbf{X}_r) \end{aligned}$$

将上式前  $r-1$  个式子代入最后一式，可得

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{g(s)} \mathbf{I}_p$$

所以

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_r \end{pmatrix} = \frac{1}{g(s)} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p \\ s\mathbf{I}_p \\ \vdots \\ s_{r-1}\mathbf{I}_p \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{g(s)} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p \\ s\mathbf{I}_p \\ \vdots \\ s^{r-1}\mathbf{I}_p \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = [\mathbf{G}_0 \quad \mathbf{G}_1 \quad \dots \quad \mathbf{G}_{r-1}] \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = g(s)\mathbf{G}_0(s) \cdot \frac{1}{g(s)} = \mathbf{G}_0(s)$$

上式表示由 (1—85) 所定义的  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  是  $\mathbf{G}_0(s)$  的一个实现，因此根据 (1—84) 式，可知  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$  是  $\mathbf{G}(s)$  的一个实现。

(1—84) 式所给出实现的维数为  $rp$ ，是否可以构成维数比  $rp$  更小的  $\mathbf{G}(s)$  的实现呢？这个问题在第三章再深入研究。

**例 1—11** 若有理函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+3)(s+1)} + 5 \\ \frac{1}{(s+4)(s+3)} & \frac{1}{(s+4)(s+5)} \end{bmatrix}$$

试求  $\mathbf{G}(s)$  的一个实现

解 首先不难验证  $\mathbf{G}(s)$  是真有理函数矩阵，且

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_0(s) + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{G}_0(s)$  为严格真有理函数矩阵, 进行下列计算:

$$g(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5) = s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 225s^2 + 274s + 120$$

$$r = 5, g_0 = 120, g_1 = 274, g_2 = 225, g_3 = 85, g_4 = 15$$

$$g(s)\mathbf{G}_0(s) = \begin{bmatrix} 2s^3 + 24s^2 + 94s + 120 & s^3 + 11s^2 + 38s + 40 \\ s^3 + 8s^2 + 17s + 10 & s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 120 & 40 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 94 & 38 \\ 17 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 24 & 11 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此根据 (1—85) 式, 可得  $\mathbf{G}(s)$  一个实现如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -120 & 0 & -274 & 0 & -225 & 0 & -85 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & -274 & 0 & -225 & 0 & -85 & 0 & -15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 120 & 40 & 94 & 38 & 24 & 11 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 17 & 11 & 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这是一个  $rp = 10$  维的实现。

容易将定理 1—9 改换为时域的形式来叙述:

**推论 1—9** 脉冲响应矩阵  $\mathbf{G}(t)$  可由动态方程(1—81)来实现的充分必要条件是  $\mathbf{G}(t)$  的元素是如  $t^k e^{\lambda t}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$  和  $i = 1, 2, \dots$ ) 形式的诸项的线性组合, 但其中可能还含有在  $t = 0$  时的  $\delta$  函数。

## 小 结

本章首先在松弛、线性、因果性、时不变性等概念和基础上，引出了线性系统的输入-输出描述和状态变量描述，并在 § 1—4 中对这两种描述方法进行了比较。

在 § 1—3 中讨论了动态方程的解。解动态方程的关键所在是求出状态转移矩阵  $\Phi(t, \tau)$ 。

对于时变的情况，计算  $\Phi(t, \tau)$  甚为困难。对于时不变的情况，因为  $\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$ ，而对矩阵指数，(1—48) 式提供了一种计算途径。

§ 1—4 中对实现问题的讨论是初步的，实现问题的深入讨论只有在引入可控性和可观性等概念后才有可能。定理 1—9 的充分性的证明是构造性的，它通过 (1—85) 式给出了构造真有理函数阵实现的一种方法。

本章作为学习后续各章的准备，都是很基本的内容。许多内容可以在有关的本科教材中找到更加详细的说明。为了使读者复习必要的数学预备知识，在习题中选用一些数学练习题，见习题 1—1 至习题 1—6。

## 习 题

1—1 设有矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & & -a_1 \end{bmatrix}$$

试证，A 的特征多项式为

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

若  $\lambda_i$  是 A 的特征值，试证  $[1 \quad \lambda_i \quad \lambda_i^2 \quad \cdots \quad \lambda_i^{n-1}]^T$  是属于  $\lambda_i$  的特征向量。

1—2 若  $\lambda_i$  是 A 的一个特征值，试证  $f(\lambda_i)$  是矩阵函数  $f(A)$  的一个特征值。

1—3 试求下列矩阵的特征多项式和最小多项式

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

1—4 给定

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求  $A^{10}, A^{101}, e^{At}$

1-5 设

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

试求能满足  $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{C}$  的矩阵  $\mathbf{B}$ 。并证明，对于任一非奇异矩阵  $\mathbf{C}$ ，均存在能满足  $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{C}$  的矩阵  $\mathbf{B}$

1-6 若  $\mathbf{D}$  可逆，证明

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \mathbf{D} \cdot \det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})$$

若  $\mathbf{A}$  可逆，上式有何变化？并证明

$$\det[\mathbf{I}_n + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]] = 1 + \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

1-7 线性松弛系统的脉冲响应为  $g(t, \tau) = e^{-|t-\tau|}$  (对所有的  $t, \tau$ ) 设问系统是否具有因果性？它是时不变的吗？

1-8 设一松弛系统，对于任何  $u$ ，其输入和输出的关系为

$$y(t) = (\mathbf{P}_\alpha u)(t) = \begin{cases} u(t) & t \leq \alpha \\ 0 & t > \alpha \end{cases}$$

其中  $\alpha$  为固定常数。试问，试系统是否为线性的？是否为时不变的？是否具有因果性？

1-9 试证：若对于任何  $u_1, u_2$ ，有

$$H(u_1 + u_2) = Hu_1 + Hu_2$$

则对于任意有理数  $\alpha$  和任何  $u$ ，有  $H\alpha u = \alpha Hu$ 。

1-10 试证，对于固定的  $\alpha$ ，图 1-4 所定义的移位算子  $Q_\alpha$  是线性时不变系统。它的脉冲响应和传递函数为何？

1-11 考虑由下式描述的松弛系统

$$y = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

若脉冲响应  $g$  由图 1-12 (a) 给定。试问，由图 1-12(b)所示的输入而激励的输出为何？

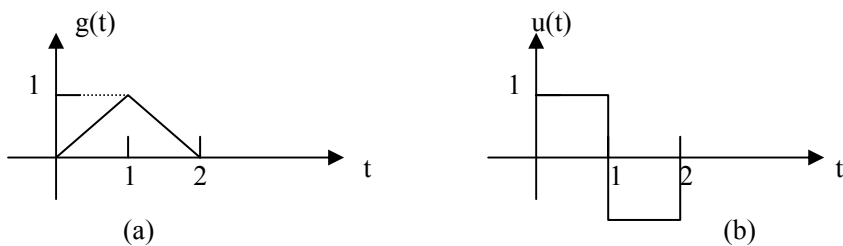


图 1-12

1-12 试求图 1-13 所示系统的动态方程式(略)

1-13 试求图 1-14 所示的网络动态方程描述

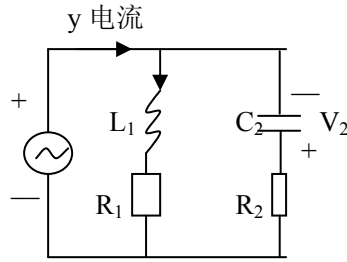


图 1-14

1-14 试求图 1-15 所示网络的传递函数和动态方程描述。你是否认为该传递函数是这个系统的一种好的描述? (略)

1-15 试求下列齐次方程的基本矩阵和状态转移矩阵。

$$\text{a, } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{b, } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1-16 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试利用  $L[e^{At}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ , 求  $e^{At}$

1-17 若  $\mathbf{T}^{-1}(t)$  存在且对所有  $t$  可微, 试证

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{T}^{-1}(t)] = -\mathbf{T}^{-1}(t) \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{T}(t) \right] \mathbf{T}^{-1}(t)$$

1-18 设  $\Phi(t, t_0)$  为  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的状态转移矩阵, 试证:

$$\det \Phi(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t \text{tr}[\mathbf{A}(\tau)] d\tau$$

1-19 给定  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ , 方程  $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{A}^*(t)\mathbf{z}$  称为它的伴随方程。其中  $\mathbf{A}^*(t)$  表示  $\mathbf{A}(t)$  的转置共轭。设  $\Phi(t, t_0)$  和  $\Phi_1(t, t_0)$  分别是  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  和  $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{A}^*(t)\mathbf{z}$  的状态转移矩阵。试证:

$$\Phi_1(t, t_0) \Phi^*(t, t_0) = \Phi^*(t, t_0) \Phi_1(t, t_0) = \Phi_1^*(t, t_0) \Phi(t, t_0) = \mathbf{I}$$

1-20 给出  $\mathbf{G}(t, \tau)$  的  $n$  维实现  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ , 试求将  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  转换到  $\{\mathbf{0}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}\}$  的等价变换。

1-21 令  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} [\mathbf{R}_0 s^{n-1} + \mathbf{R}_1 s^{n-2} + \cdots + \mathbf{R}_{n-2} s + \mathbf{R}_{n-1}]$

其中  $\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n$  是  $\mathbf{A}$  的特征多项式。试证



$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \mathbf{A} + a_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{R}_0 + a_1 \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{A}^2 + a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{I} \\ &\vdots \\ \mathbf{R}_{n-1} &= \mathbf{A}^{n-1} + a_1 \mathbf{A}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{R}_{n-2} + a_{n-1} \mathbf{I}\end{aligned}$$

且:

$$a_i = -\frac{1}{i} t_r (\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{A}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

**1-22** 试求  $\dot{x} = (\cos t \sin t)x$  的等价时不变动态方程

**1-23** 若  $\dot{x} = e^{-At} \mathbf{B} e^{At} x$ , 其中  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  为常值方阵, 求状态转移矩阵。

**1-24** 求真有理函数阵

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2+s}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{5}{s+1} & \frac{5s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

的实现, 并画出其模拟图。

**1-25** 设  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  和  $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}}\}$  是两个线性时不变系统, 其维数不一定相同。证明当且仅当

$$\mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{A}}^k \bar{\mathbf{B}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}}$$

时, 两系统零状态等价。

**1-26** 设  $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n) \mathbf{x}(n)$  定义:

$$\begin{aligned}\Phi(n, m) &= \mathbf{A}(n-1) \mathbf{A}(n-2) \cdots \mathbf{A}(m) \quad n > m \\ \Phi(m, m) &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

试证, 给定初始状态  $\mathbf{x}(m) = \mathbf{x}^0$  下, 时刻  $n$  的状态为  $\mathbf{x}(n) = \Phi(n, m) \mathbf{x}(0)$ 。若  $\mathbf{A}$  与  $n$  无关, 则

$\Phi(n, m)$  为何?

**1-27** 证明  $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n) \mathbf{x}(n) + \mathbf{B}(n) \mathbf{u}(n)$  的解为

$$\mathbf{x}(n) = \Phi(n, m) \mathbf{x}(m) + \sum_{l=m}^{n-1} \Phi(n, l+1) \mathbf{B}(l) \mathbf{u}(l)$$

**1-28** 设有  $n$  维、线性、时不变动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}\end{aligned}$$

若输入

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(n) \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

这里  $T > 0$  为采样周期。试证, 系统在离散瞬时  $0, T, 2T, \dots$  上的行为由下列离散时间方程给出:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(n) + \left( \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B} \mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(n) + \mathbf{D} \mathbf{u}(n)\end{aligned}$$

**1-29** 设有理函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2s+1}{s(s+1)} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2s+1}{s(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

计算极点多项式和零点多项式。

**1—30** 若  $\lambda_1$  不是  $\mathbf{A}$  的特征值，试证下列恒等式

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(s - \lambda_1)^{-1} = (\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(s - \lambda_1)^{-1} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^{-1}$$

**1—31** 设单变量线性时不变动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{d}u$$

若输入  $u$  有形式  $e^{\lambda_1 t}$ ，其中  $\lambda_1$  不是  $A$  的特征值，试证存在初始状态，使输出  $y$  立即有  $e^{\lambda_1 t}$  的形式而不包含有任何瞬变过程。又当  $\lambda_1$  是传递函数的零点时，试证可选适当初始状态，使系统在输入  $e^{\lambda_1 t}$  作用下，输出恒为零。

## 第二章 线性系统的可控性、可观测性

采取状态空间方法描述系统的特点是突出了系统内部动态结构。由于引入了反映系统内部动态信息的状态变量,使得系统的输入输出关系就分成了两部分。一部分是系统的控制输入对状态的影响。这由状态方程来表征;另一部分是系统状态与系统输出的关系,这由量测方程来表征。这种把输入、状态和输出之间的相互关系分别表现的方式,对我们了解系统内部结构的特征提供了方便,在这个基础上也就产生了控制理论中的许多新概念。可控性和可观测性就是说明系统内部结构特征的两个最基本的概念。

人们在用状态空间方法进行控制系统设计时,常常关心这样两个问题:第一,应该把系统的控制输入加在什么地方,这样加的控制输入是否能够有效的制约系统的全部状态变量?因为系统的状态变量完全刻画了系统的动力学行为,所以控制输入对状态变量制约能力也就反映了对系统动力学行为的制约能力。而反映控制输入对状态变量制约能力的概念就是系统的可控性。第二,设计系统时为了形成控制作用,往往需要系统内部结构的动态信息,这些所需要的信息从哪里得到呢?例如对输出反馈控制系统来说,这些信息是要从系统的输出中得到的,而系统的输出是通过敏感元件或量测仪表量测得的,那么为了设计系统需要量测那些物理量呢?这些能量测得到的物理量是否包含有系统的内部结构的全部动态信息呢?由于系统内部结构提供的动态信息都集中于系统的状态变量中,因此就要知道输出中是否包括有系统的状态变量所提供的信息。而这种反映由系统输出来判断系统状态的能力的概念就是可观测性。简而言之,可控性反映了控制输入对系统的制约能力,可观测性反映了输出对系统状态的判断能力。它们都是反映控制系统结构性质的基本概念,它们在系统分析与设计中起着关键性作用。

若考虑以下动态方程所描述的系统:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2-1)$$

式中各符号意义同第一章。显然可控性的问题是研究矩阵对  $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t))$  的关系,而可观测性则是研究矩阵对  $(\mathbf{A}(t), \mathbf{C}(t))$  的关系。为了方便起见,我们假定系统(2-1)的时间域是  $[t_0, \infty)$ , 同时规定  $\mathbf{u}(t)$  在  $[t_0, T]$  上分段连线函数所组成的控制输入向量,这里  $t_0 \leq T < \infty$ , 并将这些控制输入简称为容许控制。

### § 2-1 时间函数的线性无关性

关于线性空间的向量组的线性无关概念已为大家所熟悉。现在,将在实变量函数集合中应用这一概念。为简单起见,假设这些实变量函数都是在所定义区间上的连接函数。

**定义 2-1** 若存在不全为零的复数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 使得

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (2-2)$$

成立,则称在复数域上,实变量复值函数组  $f_1, f_2, \dots, f_n$  在时间  $[t_1, t_2]$  上是线性相关的。否则,

称  $f_1, f_2, \dots, f_n$  在  $[t_1, t_2]$  上线性无关。

在这一定义中，关于时间区间的说明很重要。

**例 2-1** 设有定义在  $[-1, 1]$  上的两个连续函数  $f_1$  和  $f_2$ ：

$$f_1(t) = t \quad t \in [-1, 1]$$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1] \\ -t & t \in [-1, 0] \end{cases}$$

显然， $f_1$  和  $f_2$  在  $[-1, 0]$  上是线性相关的。而对于  $[-1, 1]$  上， $f_1$  和  $f_2$  则是线性无关的。

从例 2-1 可见，虽然一个函数组在某个时间区间  $[t_1, t_2]$  上是线性无关的，但在  $[t_1, t_2]$  中的某个子区间上却可以是线性相关的。然而在  $[t_1, t_2]$  上一定存在这样的子区间，函数组在这个子区间上是线性无关的，而且在包含这个子区间的任何区间上都是线性无关的。在上述例子中， $[-\varepsilon, \varepsilon]$  就是这样的子区间，这里  $\varepsilon$  是小于 1 的任何正数。因此函数组的线性无关性是和时间区间密切相联系的，在考察函数组线性无关性时，必须考虑它所定义的整个时间区间。

这一线性无关概念也可以推广到向量值函数组。令  $\mathbf{f}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 是  $t$  的  $1 \times p$  复值向量函数，若存在不全为零的复数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，使得

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{f}_2(t) + \dots + \alpha_n \mathbf{f}_n(t) = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (2-3)$$

则称函数组  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  在  $[t_1, t_2]$  上线性相关，否则称  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  在  $[t_1, t_2]$  上线性无关。

我们也可以给线性无关作如下的叙述： $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  在  $[t_1, t_2]$  上是线性无关的，当且仅当

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n(t) \end{bmatrix} = \alpha \cdot \mathbf{F}(t) = 0$$

意味着  $\alpha \equiv 0$ ，其中

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n(t) \end{bmatrix}$$

**定义 2-2** 设  $\mathbf{f}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 是定义在  $[t_1, t_2]$  上的  $1 \times p$  复值连续向量函数， $\mathbf{F}$  是  $n \times p$  矩阵，它的第  $i$  行是  $\mathbf{f}_i$ 。则称

$$\mathbf{W}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \mathbf{F}^*(t) dt \quad (2-4)$$

为  $\mathbf{f}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 在  $[t_1, t_2]$  上的克莱姆矩阵。其中  $\mathbf{F}^*(t)$  表示  $\mathbf{F}(t)$  的转置共轭。

**定理 2-1**  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  在  $[t_1, t_2]$  上线性无关的充分必要条件是  $\mathbf{W}(t_1, t_2)$  非奇异。

**证明** 先证充分性，即由  $\mathbf{W}(t_1, t_2)$  非奇异证明  $\mathbf{f}_i$  在  $[t_1, t_2]$  上线性无关。用反证法。若  $\mathbf{f}_i$  线性相关，则存在非零  $1 \times n$  行向量  $\alpha$  使得

$$\alpha \cdot \mathbf{F}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

因此有

$$\alpha \cdot \mathbf{W}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \cdot \mathbf{F}(t) \mathbf{F}^*(t) dt = 0$$

故  $\mathbf{W}(t_1, t_2)$  行线性相关, 从而  $\det \mathbf{W}(t_1, t_2) = 0$ , 这和  $\mathbf{W}(t_1, t_2)$  非奇异相矛盾, 矛盾表明  $\mathbf{f}_i$  在  $[t_1, t_2]$  上线性无关。

再用反证法证明必要性。设  $\mathbf{f}_i$  在  $[t_1, t_2]$  上线性无关, 但  $\mathbf{W}(t_1, t_2)$  是奇异的, 由于  $\mathbf{W}(t_1, t_2)$  是奇异矩阵, 则必存在一个  $1 \times n$  行向量  $\alpha$  使得

$$\alpha \cdot \mathbf{W}(t_1, t_2) = 0$$

或者

$$\alpha \cdot \mathbf{W}(t_1, t_2) \alpha^* = \int_{t_1}^{t_2} [\alpha \mathbf{F}(t)] [\alpha \mathbf{F}(t)]^* dt = 0$$

因为对于  $[t_1, t_2]$  中所有  $t$ , 被积函数  $[\alpha \mathbf{F}(t)] [\alpha \mathbf{F}(t)]^*$  是非负连续函数, 故上式意味着

$$\alpha \mathbf{F}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

这与函数  $\mathbf{f}_i$  在  $[t_1, t_2]$  上是线性无关相矛盾。因此必有  $\det \mathbf{W}(t_1, t_2) \neq 0$ 。

**定理 2-2** 设  $\mathbf{f}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是定义在  $[t_1, t_2]$  上的  $1 \times p$  复值函数, 且在  $[t_1, t_2]$  上有一直到  $(n-1)$  阶的连续导数, 令  $\mathbf{F}$  是为  $\mathbf{f}_i$  为其第  $i$  行的  $n \times p$  矩阵, 且令  $\mathbf{F}^{(k)}(t)$  是  $\mathbf{F}$  的第  $k$  阶导数。若在  $[t_1, t_2]$  上存在某个  $t_0$ , 使  $n \times np$  矩阵

$$[\mathbf{F}(t_0) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \quad \dots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)] \quad (2-5)$$

的秩为  $n$ , 则在  $[t_1, t_2]$  上,  $\mathbf{f}_i$  在复数域上是线性无关的。

**证明** 用反证法。若  $\mathbf{f}_i$  在  $[t_1, t_2]$  上线性相关, 则存在非零  $1 \times n$  行向量  $\alpha$ , 使得对于  $[t_1, t_2]$  中任一  $t$ , 均有  $\alpha \mathbf{F}(t) = 0$  成立, 因此有

$$\alpha \mathbf{F}^{(k)}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2], k = 1, 2, \dots, n-1$$

因为  $t_0 \in [t_1, t_2]$ , 故有

$$\alpha \cdot [\mathbf{F}(t_0) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \quad \dots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)] = 0$$

这说明矩阵  $[\mathbf{F}(t_0) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \quad \dots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)]$  行线性相关, 其秩小于  $n$ , 这与假设相矛盾, 因此在  $[t_1, t_2]$  行  $\mathbf{f}_i$  线性无关。

定理 2-2 中的条件对于一个函数组的线性无关性来说是充分的但不是必要的, 这可用下面的例子来说明。

**例 2-2** 设有定义在  $[-1, 1]$  上的两个函数:  $f_1(t) = t^3, f_2(t) = |t^3|$ , 它们在  $[-1, 1]$  上是线性无关的, 但不难由计算证明, 对  $[-1, 1]$  中的任一点  $t_0$ , (2-5) 式所定义的矩阵的秩均小于 2。

为检验函数组的线性无关性, 若函数是连续的, 就可应用定理 2-1, 它要求在时间区间上计算积分。若函数连续可微到某一阶次, 则可应用定理 2-2。显然, 应用定理 2-2 比用

定理 2-1 方便, 但是定理 2-2 给出的条件不是必要的, 使用时要特别注意。如果函数是解析的, 相应于定理 2-2 有以下更强的结果。

**定理 2-3** 假设对每一个  $i$ ,  $f_i$  在  $[t_1, t_2]$  上是解析的。令  $t_0$  是  $[t_1, t_2]$  中的任一固定点, 则向量函数组  $f_i$  在  $[t_1, t_2]$  上线性无关的充分必要条件是

$$\text{rank}[\mathbf{F}(t_0) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0) \quad \cdots] = n \quad (2-6)$$

**证明** 充分性证明与定理 2-2 相同。下面用反证法来证明必要性。设

$$\text{rank}[\mathbf{F}(t_0) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0) \quad \cdots] < n$$

则无穷矩阵  $[\mathbf{F}(t_0) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0) \quad \cdots]$  的行是线性相关的, 因而必存在非零  $1 \times n$  行向量  $\alpha$  使得

$$\alpha \cdot [\mathbf{F}(t_0) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0) \quad \cdots] = 0$$

又因为  $f_i$  在  $[t_1, t_2]$  上是解析的, 因此存在  $\varepsilon > 0$ , 使对于  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  中的所有  $t$ ,  $\mathbf{F}(t)$  能在  $t_0$  表示为台劳级数, 即

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \mathbf{F}^{(n)}(t_0), \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$$

上式两边乘以  $\alpha$  后;可得

$$\alpha \mathbf{F}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$$

而由  $f_i$  的解析性可知,  $\alpha \mathbf{F}(t)$  作为行向量函数在  $[t_1, t_2]$  上也是解析的。因此有

$$\alpha \mathbf{F}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

或等价地说,  $f_i$  在  $[t_1, t_2]$  上是线性相关的。这与假设相矛盾。因此定理必要性成立。

由定理 2-3 导致的直接结论是若解析函数组在  $[t_1, t_2]$  上线性无关, 则对于  $[t_1, t_2]$  中所有  $t$ , 均有

$$\text{rank}[\mathbf{F}(t) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t) \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t) \quad \cdots] = n$$

由此我们可以进一步得知若解析函数集合在  $[t_1, t_2]$  上线性无关, 则解析函数组在  $[t_1, t_2]$  的每一个子区间上也线性无关。

必须注意的是, 如果 (2-6) 的无穷矩阵用

$$\text{rank}[\mathbf{F}(t_0) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)] = n$$

取代, 则定理 2-3 亦不复成立。这可从下例看出。

**例 2-3** 设  $f_1(t) = \sin 1000t$ ,  $f_2(t) = \sin 2000t$ , 显然  $f_1$  和  $f_2$  对每一个  $t$  是线性无关的, 但可以证明矩阵。

$$[\mathbf{F}(t) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t)] = \begin{bmatrix} \sin 1000t & 10^3 \cos 1000t \\ \sin 2000t & 2 \times 10^3 \cdot \cos 2000t \end{bmatrix}$$

当  $t = 0, \pm 10^{-3}\pi, \dots$  处, 其秩小于 2。然而对于所有的  $t$ , 不难验证

$$\text{rank}[\mathbf{F}(t) \quad \mathbf{F}^{(1)}(t) \quad \mathbf{F}^{(2)}(t) \quad \mathbf{F}^{(3)}(t)] = 2$$

本节介绍了判断向量函数组线性无关的二个定理, 这是为研究线性系统可控性和可观测性所作的数学准备。读者将会看到, 判断系统可控性和可观测性的所有准则几乎都是由这二个定理引出的。

## § 2—2 线性系统的可控性

在本章开始时，我们曾经初步提出状态可控性的概念。并指出状态可控性仅是状态方程的特性，即由矩阵对  $(A(t), B(t))$  所决定，而输出方程在此并不起任何作用。

**可控性的定义** 在给出状态可控性的一般定义之前，先研究两个简单的例子。

**例 2—4** 设有图 2—1 所示的网络，其中电阻均为  $1\Omega$ ，电容两端的电压是系统的状态变量。若  $x(t_0) = x_0$ ，则不管输入如何，都不可能在有限时间  $t_1$ ，使得  $x(t_1) = 0$ ，这是由于网络的对称性使输入不影响电容电压之故。因此，系统的状态在任何  $t_0$  时刻都是不可控的。

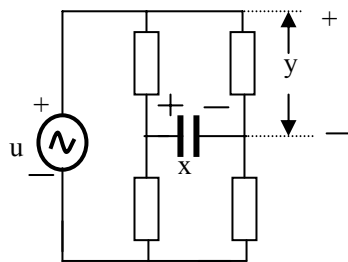


图 2—1

**例 2—5** 设有二阶系统的状态方程如下

$$\dot{x}_1(t) = u, \quad \dot{x}_2(t) = u$$

这个状态方程的解为

$$x_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

$$x_2(t) = x_2(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

只要  $x_1(t_0)$  和  $x_2(t_0)$  不相等，任何输入  $u$  都不能使  $x_1(t_0)$  和  $x_2(t_0)$  同时达到零，这说明输入不能制约全部的状态变量。显然通过一个输入作用同时控制两个积分器，而且要求它们的动态行为都满足各自的要求是不可能的。

上面这两个例子都是状态不可控的最简单的例子。

**定义 2—3** 若对状态空间的任一状态  $x(t_0)$ ，存在一个有限时刻  $t_1 > t_0$  和一个容许控制  $u_{[t_0, t_1]}$ ，能在  $t_1$  时刻使状态  $x(t_0)$  转移到零，则称状态方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (2-7)$$

在  $t_0$  时刻是可控的。反之称为在  $t_0$  时刻不可控。

对定义 2—3 作如下说明：第一，定义仅仅要求输入  $u$  能在有限时间内将状态空间中任何初态转移到零状态，至于状态遵循什么轨迹转移则并未指定；而且对输入除了容许控制之外也未对其形式加以任何限制。第二， $t_1$  时刻是依赖于初始状态的，但是由于状态空间是有限维的，因此可控系统来说，必对所有的初始状态都存在一个共同的有限时刻  $t_1$ ，也就是说， $t_1$  可以取得与初始状态大小无关。第三，与可控概念相反，只要存在一个初态  $x(t_0)$ ，无论  $t_1$  取多大，都不能找到一个容许控制将这个状态  $x(t_0)$  控制到  $x(t_1) = 0$ ，这时称系统在  $t_0$  时刻是不可控的。第四，这里所定义的可控性又称为到达原点的可控性。以后若不加特别说明，我们说到系统（或状态，或动态方程）的可控性时都是指定义 2—1 所定义的可控性。对于线性连续时间系统，可以证明，定义 2—3 所阐述的到达原点的可控性与状态空间的任何状态转移到另一任何状态是等价的（见习题 2—3）



**例 2—6** 用定义直接研究系统

$$\dot{x} = x + u$$

的可控性。因为这个一阶系统状态方程的解为

$$x(t) = e^{(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

任取固定的  $t_1 > t_0$  并记  $x(t_0)$  为  $x_0$ ，令

$$u(t) = \frac{-x_0 e^{2(t_1-t_0-t)}}{\int_{t_0}^{t_1} e^{2(t_1-\tau)}d\tau} \quad t \in [t_0, t_1]$$

将上述  $u(t)$  代入  $x(t)$ ，验证可知  $x(t_1) = 0$ 。这说明系统在  $t_0$  时刻是可控的。这时有

$$e^{(t_1-t_0)}x_0 = \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)} \cdot [-u(\tau)]d\tau \quad \forall t_1 > t_0$$

这说明零状态响应都可用一个特别的零输入响应来代替。

**可控性的一般判别准则** 如例 2—6 那样，直接用定义来验证可控性实在太不方便了，因此有必要研究判别系统可控性的一般准则。

**定理 2—4** 状态方程 (2—7) 在  $t_0$  可控，必要且只要存在一个有限时间  $t_1 > t_0$ ，使矩阵  $\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)$  的  $n$  个行在  $[t_0, t_1]$  上线性无关。

**证明** 充分性：若矩阵  $\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)$  的行在  $[t_0, t_1]$  上线性无关，根据定理 2—1， $n \times n$  常量矩阵

$$\mathbf{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau \quad (2-8)$$

为非奇异。对于任给的  $\mathbf{x}(t_0)$ ，构造如下控制输入

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^*(t)\Phi^*(t_0, t)\mathbf{W}^{-1}(t_0, t_1)\mathbf{x}(t_0) \quad t \in [t_0, t_1] \quad (2-9)$$

可以证明，(2—9) 式所定义的  $u(t)$  能在  $t_1$  时刻将  $\mathbf{x}(t_0)$  转移到  $\mathbf{x}(t_1) = 0$ 。事实上，将 (2—8) 代入方程解的表达式，得

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)[\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau]$$

并令  $t = t_1$ ，得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_1) &= \Phi(t_1, t_0)\{\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)[- \mathbf{B}^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)]\mathbf{W}^{-1}(t_0, t_1)\mathbf{x}(t_0)d\tau\} \\ &= \Phi(t_1, t_0)[\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)] = 0 \end{aligned}$$

由此可以断言方程 (2—7) 是可控的。

再用反证法证明必要性。设在  $t_0$  时刻方程可控，但对任何  $t_1 > t_0$ ， $\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)$  在  $[t_0, t_1]$  上都是线性相关的，故必存在非零  $1 \times n$  行向量  $\alpha$ ，使得对于  $[t_0, t_1]$  中所有的  $t$ ，均有

$$\alpha \cdot \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau) = 0$$

又由于方程在  $t_0$  时刻可控，当取  $\mathbf{x}(t_0) = \alpha^*$  时，存在有限时刻  $t_1 > t_0$  和  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$ ，使  $\mathbf{x}(t_1) = 0$ ，

即

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0)[\alpha^* + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau] = 0$$

因为  $\Phi(t_1, t_0)$  非奇异，故有

$$\alpha^* = - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

上式两边左乘  $\alpha$ ，有

$$\alpha\alpha^* = -\int_{t_0}^{t_1} [\alpha\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)]\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

上式积分号下  $\alpha\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau) = 0$ , 故

$$\alpha\alpha^* = 0$$

此即意味着  $\alpha = 0$ , 这与假设相矛盾。

在证明定理的过程中, 利用  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  构造出 (2—9) 式所表示的控制。若  $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$  是连续函数, (2—9) 式表示的控制也是  $[t_0, t_1]$  中  $t$  的连续函数, 而且它是所有能使  $\mathbf{x}(t_1) = 0$  的控制中消耗能量最小的控制 (见习题 2—5)。

**推论 2—4** 状态方程 (2—7) 在  $t_0$  可控的充分必要条件是存在有限时刻  $t_1 > t_0$ , 使得  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  为非奇异。

通常将 (2—8) 式所定义的矩阵  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  称为可控性克莱姆矩阵, 或简称为可控性矩阵。

为了应用定理 2—4, 必须计算  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$ 。如前所述, 这工作一般是困难的。因此, 应用定理 2—4 并非易事。下面我们将根据矩阵  $\mathbf{A}(t)$  与  $\mathbf{B}(t)$  给出可控性判据。

假定  $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$  是  $(n-1)$  次连续可微的, 用下式定义矩阵序列  $\mathbf{M}_0(t), \mathbf{M}_1(t), \dots, \mathbf{M}_{n-1}(t)$

$$\mathbf{M}_0(t) = \mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{M}_k(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_{k-1}(t) + \frac{d\mathbf{M}_{k-1}(t)}{dt} \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2-10)$$

由 (2—10) 中第一式, 有

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t) &= \Phi(t_0, t)\mathbf{M}_0(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t) &= \Psi(t_0) \left[ \left( \frac{d\Psi^{-1}(t)}{dt} \right) \mathbf{B}(t) + \Psi^{-1}(t) \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} \right] \\ &= \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) \left[ -\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} \right] \\ &= \Phi(t_0, t)\mathbf{M}_1(t) \end{aligned}$$

一般地, 有

$$\frac{\partial^k \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)}{\partial t^k} = \Phi(t_0, t)\mathbf{M}_k(t)$$

**定理 2—5** 设状态方程 (2—7) 中的矩阵  $\mathbf{A}(t)$  与  $\mathbf{B}(t)$  是  $(n-1)$  次连续可微的, 若存在有限时间  $t_1 > t_0$ , 使得

$$\text{rank}[\mathbf{M}_0(t_1) \quad \mathbf{M}_1(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{M}_{n-1}(t_1)] = n \quad (2-12)$$

则状态方程 (2—7) 在  $t_0$  可控。

**证明** 用反证法。若由方程 (2-7) 在  $t_0$  不可控, 则由定理 2—4 可知, 对任意的  $t_1 > t_0$ ,  $\Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)$  在  $[t_0, t_1]$  上行线性相关, 也即存在非零  $1 \times n$  的行向量  $\alpha$ , 使得对于  $[t_0, t_1]$  中任一时刻  $t$ , 均有

$$\alpha\Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t) = 0$$

上式对变量  $t$  求偏导数, 并利用 (2—11) 式, 得

$$\alpha\Phi(t_0, t)[\mathbf{M}_0(t) \quad \mathbf{M}_1(t) \quad \dots \quad \mathbf{M}_{n-1}(t)] = 0$$

当  $t = t_1$  时, 上式仍成立。又因为  $\alpha\Phi(t_0, t_1) \neq 0$ , 即矩阵  $[\mathbf{M}_0(t_1) \quad \mathbf{M}_1(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{M}_{n-1}(t_1)]$  的行线性相关, 与定理的条件相矛盾。

**例 2—7** 设有

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

由(2—10)式,有

$$\mathbf{M}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_0(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_0(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_1(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ t^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 - 1 \\ t^4 - 2t \end{pmatrix}$$

令  $f(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1$ 。因对所有  $f(t) \neq 0$ , 矩阵  $[\mathbf{M}_0(t) \quad \mathbf{M}_1(t) \quad \mathbf{M}_2(t)]$  的秩为 3, 故动态方程在每个  $t$  时刻是可控的。

定理 2—5 的条件对于状态可控是充分的, 并不是必要的。举例如下:

**例 2—8** 设有

$$\dot{x}_1 = f_1(t)u$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t)u$$

其中  $f_1(t), f_2(t)$  的定义如例 2—2。不难验证有

$$\text{rank}[\mathbf{M}_0(t) \quad \mathbf{M}_1(t)] < 2$$

但是直接由定理 2—4 可以判断, 当  $t_0 < 0$  时, 系统在  $t_0$  时刻都是可控的。

**可达性的概念** 一个系统是  $t_0$  时刻可控的, 直观说来, 就是存在这样的容许控制, 使得系统在这个控制作用下在有限时间内, 把系统从任意初始状态出发的运动轨线引导到原点。现在提出的问题是: 对  $t_0$  时刻的任一状态  $\mathbf{x}(t_0)$ , 是否存在容许控制把原点出发的轨线在有限时间内引导到所希望的状态  $\mathbf{x}(t_0)$  呢? 这一概念极其类似于  $t_0$  时刻可控的概念, 但是考虑到都应满足因果关系, 所以这两个概念涉及的时间区间是不同的。

**定义 2—4** 若对  $t_0$  时刻状态空间中的任一状态  $\mathbf{x}(t_0)$ , 存在着一个有限时刻  $t_1 < t_0$  和一个容许控制  $u_{[t_1, t_0]}$ , 能在  $[t_1, t_0]$  内使状态  $\mathbf{x}(t_1) = 0$  转移到  $\mathbf{x}(t_0)$ , 则称状态方程 (2-7) 在  $t_0$  时刻是可达的。

如果我们将时间的先后关系倒过来, 即从逆因果关系考虑问题, 显然  $t_0$  时刻逆因果关系的可控性等价于  $t_0$  时刻的可达性。类似于可控性的讨论, 可以对可达性进行讨论, 这里不再重复。但必须指出, 状态方程 (2—7) 在  $t_0$  时刻可达的充分必要条件是存在  $t_1 \leq t_0$ , 使得  $\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)$  在  $[t_1, t_0]$  上行线性无关或是下列可达性矩阵

$$\mathbf{Y}(t_1, t_0) = \int_{t_1}^{t_0} \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau, \quad t_1 < t_0$$

是非奇异矩阵。

**时不变系统的可控性判据** 下面研究时不变状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2-13)$$

的可控性，其中  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  分别  $n \times n$  和  $n \times p$  实常量矩阵，但我们还是把  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的元素作为复数域的元素来讨论。对于时不变状态方程。我们所注意的时间区间是  $[0, +\infty)$ 。

**定理 2-6** 对于  $n$  维线性不变状态方程 (2-13)，下列提法等价：

- (1) 在  $[0, +\infty)$  中的每一个  $t_0$ ，(2-13) 可控；
- (2)  $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}$  (也即  $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ ) 的行在  $[0, +\infty)$  上是复数域线性无关的；
- (3) 对于任何  $t_0 \geq 0$  及任何  $t > t_0$ ，矩阵

$$\mathbf{W}(t_0, t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*(t_0-\tau)} d\tau$$

非奇异；

$$(4) \text{ rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n; \quad (2-14)$$

(5) 在复数域上，矩阵  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  的行是线性无关的；

(6) 对于  $\mathbf{A}$  的任一特征值  $\lambda_i$ ，都有

$$\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = n \quad (2-15)$$

**证明** 提法 (1)，(2) 和 (3) 的等价性可以直接由定理 2-4 及推论 2-4 得到。

证明 (2) 和 (5) 等价。对  $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$  取拉氏变换可得  $L[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ ，因拉氏变换是一一对应的线性算子，故若在复数域中， $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$  的行在  $[0, +\infty)$  线性无关，则  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  的行也线性无关，反之亦然。

证明 (1) 和 (4) 的等价性。由 (1) 证明 (4)，设系统可控，要证  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$ 。

反证法：若  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] < n \Rightarrow \exists \alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \alpha[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \mathbf{A}^i \mathbf{B} &= 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

利用(1-48) 式，并注意到以上结果，有

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, \tau) &= e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(t_0 - \tau) \mathbf{A}^i \\ \Rightarrow \alpha \Phi(t_0, \tau) \mathbf{B} &= \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(t_0 - \tau) \alpha \mathbf{A}^i \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (1-48)$$

这说明  $\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}$  行线性无关，与可控矛盾。

下面由(4)证明(1)：若  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$ ，要证系统可控。

反证法：若不可控，则  $\forall t_1 > t_0 \quad \exists \alpha \neq 0 \quad \alpha e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B} = 0 \quad \tau \in [t_0 \quad t_1]$

上式对  $\tau$  求导，再求导 $\cdots$ ，依次可得

$$\begin{aligned}\alpha e^{A(t_0-\tau)} \mathbf{A} \mathbf{B} &= 0 \\ \vdots \\ \alpha e^{A(t_0-\tau)} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

$$\text{令 } \tau = t_0 \Rightarrow \alpha \mathbf{B} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{B} = \cdots = \alpha \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} = 0$$

$$\alpha [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = 0$$

与  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = n$  矛盾。

(4) 和 (6) 的等价性。由 (4) 证明 (6)。若  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = n$ ，

要证  $\forall \lambda_i \in \mathbf{A}(\sigma)$  均有  $\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = n$ 。用反证法。若有一个  $\lambda_0$ ，使

$$\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] < n,$$

$$\exists \alpha \neq 0$$

$$\alpha [\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = 0 \Rightarrow \alpha [\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}] = 0 \quad \alpha \mathbf{B} = 0$$

$$\alpha \mathbf{A} \mathbf{B} = \lambda_0 \alpha \mathbf{B} = 0$$

$$\alpha \mathbf{A}^2 \mathbf{B} = \lambda_0 \alpha \mathbf{A} \mathbf{B} = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = 0$$

这说明矩阵  $[\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$  的行线性相关，与条件  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = n$  矛盾。

下面由 (6) 证明 (4)：

$$\forall \lambda_i \in \mathbf{A}(\sigma) \quad \text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = n, \text{ 要证 } \text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = n。$$

反证法：若  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = n_1 < n$ ， $n - n_1 = k$ 。存在可逆矩阵  $\mathbf{T}$ ，

$\mathbf{T}$  是将  $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$  的后  $k$  行化为零行的行变换矩阵，即

$$\mathbf{T} [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = [\mathbf{T} \mathbf{B} \quad \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{T} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$$

矩阵  $[\mathbf{T} \mathbf{B} \quad \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{T} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$  的后  $k$  行为零行。记  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T} \mathbf{B}$ ， $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$ ，则

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}} &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} & \cdots & \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 = 0 \\ \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 = 0 \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

依此类推，可得

$$\bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{n-2}\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{n-2}\mathbf{B}_1 = 0$$

综合起来，可知  $\mathbf{A}_3$  应满足

$$\mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n-2}\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = 0$$

而  $\bar{\mathbf{U}}$  的形式为

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank} \bar{\mathbf{U}} = n_1$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n-2}\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = n_1$$

因为  $n_1 < n$       $n_1 - 1 < n - 1$ ，根据卡莱—哈密顿定理可以由  $\text{rank} \bar{\mathbf{U}} = n_1$  得

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n-2}\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = n_1$$

由  $\mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n-2}\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = 0$  可得  $\mathbf{A}_3 = 0$ 。

故  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$  的形式为 (以后将说明这就是可控分解的形式。)

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

且  $\mathbf{A}_4$  的维数为  $k$ 。考察下式

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \lambda \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_1 \\ 0 & \mathbf{A}_4 - \lambda \mathbf{I}_k & 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

显然只要取  $\mathbf{A}_4$  的特征值  $\lambda_0$ ，即可使右边矩阵的秩小于  $n$ 。

$\lambda_0$  是  $\mathbf{A}_4$  的特征值，因而也是  $\bar{\mathbf{A}}$  的特征值，也是  $\mathbf{A}$  的特征值。(\*) 式左端矩阵  $\mathbf{T}$  与

$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_k \end{bmatrix}$  不影响秩，故有  $\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} < n$ 。即存在  $\lambda_0 \in \mathbf{A}(\sigma)$ ，使

$\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] < n$ ，与假设相矛盾，故  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$ 。

定理 2—6 中 (4) 的矩阵  $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  称为状态方程 (2—13) 的可控性矩阵。在研究时不变系统的结构性质时，矩阵  $\mathbf{U}$  起着重要的作用。定理 2—6 中 (6) 是通过  $\mathbf{A}$  的特征值来判断可控性的。通常我们把  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  称为系统的振型或模态，把  $t^k e^{\lambda_i t} (k = 0, 1, 2, \dots, n_i, i = 1, 2, \dots, n)$  称为方程 (2—13) 的运动模式。凡使得矩阵  $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$  满秩的  $\lambda_i$  称为可控振型。相应的把使矩阵  $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$  降秩的  $\lambda_i$  称为不可控振型。

显然，不可控制振型所对应的模式与控制作用无耦合关系，因此不可控振型又称为系统的输入解耦零点。一个线性时不变系统可控的充分必要条件是没有输入解耦零点。若线性时不变动态方程可控即没有输入解耦零点时，输入能激励方程的所有模式。另一方面，输入也能抑制任何所不希望的模式。

**例 2—9** 设有动态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

矩阵  $\mathbf{A}$  具有特征值 -1 和 2，因此方程具有两个运动模式  $e^{-t}$  和  $e^{2t}$ 。因模式  $e^{2t}$  随时间而增加，所以我们在输出中抑制它。方程的可控性矩阵是

$$\mathbf{U} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

其秩为 2，故方程可控。因此模式  $e^{2t}$  是能被抑制的。首先，计算可知

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix}$$

现在对于任何的初始状态  $\mathbf{x}(0)$ ，我们寻找一个输入  $u$ ，使得在某一瞬时，例如  $t_0$  以后，输出  $y$  中不再包含模式  $e^{2t}$ 。令在  $t_0$  以后，输入恒为零，则由  $t_0$  时状态所引起的输出是

$$y = [1 \quad 2]e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \frac{5}{3}[x_1(t_0) + x_2(t_0)]e^{2t} + \frac{1}{3}[x_2(t_0) - 2x_1(t_0)]e^{-t}$$

由此可见，若  $x_1(t_0) = -x_2(t_0)$ ，则在  $t > t_0$  后，输出将不包括模式  $e^{2t}$ 。因动态方程可控，故

有可能按 (2—9) 式来计算所需要的输入  $u_{[0, t_0]}$ ，以使  $\mathbf{x}(0)$  移到如上要求的  $\mathbf{x}(t_0)$ 。

**关于定理 2—6 (6) 的说明：**

1，可以将  $\forall \lambda_i \in A(\sigma)$  换为  $\forall s \in C$  ( $s$  为任意复数)。因为当  $s$  不是  $\mathbf{A}$  的特征值时，

$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$ ， $\text{rank}[s\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = n$  自然成立。

2，当  $\lambda_0$  是  $\mathbf{A}$  的简单特征值时，

$$\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] < n, \quad \lambda_0 \text{ 不可控；}$$

$$\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = n, \quad \lambda_0 \text{ 可控。}$$

3, 当  $\lambda_0$  是  $\mathbf{A}$  的重特征值时, 若有  $\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] < n$ , 只能断言至少有一个  $\lambda_0$  不可控并不能说所有的  $\lambda_0$  都不可控, 究竟有几个  $\lambda_0$  是可控的, 几个  $\lambda_0$  是不可控的, 需要用其它方法补充研究。(计算可控性矩阵的秩或进行可控性分解。)

### 例 2-10

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \quad \mathbf{b}_i] = 3 \quad i = 1, 2, 3$$

$(\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_1)$  有一个模态不可控,  $(\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_2)$  有二个模态不可控,  $(\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_3)$  有三个模态不可控,

计算矩阵  $[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \quad \mathbf{b}]$  的秩区别不出这三种不同情况。而可控性矩阵的秩却显示出这种差别。

$$\text{rank}[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1] = 3, \quad \text{一个模态不可控}$$

$$\text{rank}[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1] = 2, \quad \text{二个模态不可控}$$

$$\text{rank}[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1] = 1, \quad \text{三个模态不可控}$$

对此例也可以直接用可控性分解来判断。

**简化的可控性条件** 在许多情况下, 利用可控性矩阵来判断可控性时, 无须计算出矩阵  $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ , 而只须计算一个列数较小的矩阵。下面研究这个问题。记

$$\mathbf{U}_{k-1} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$$

**定理 2-7** 若  $j$  是使  $\text{rank}\mathbf{U}_j = \text{rank}\mathbf{U}_{j+1}$  成立的最小整数, 则对于所有  $k > j$ , 有

$$\text{rank}\mathbf{U}_k = \text{rank}\mathbf{U}_j$$

并且

$$j \leq \min(n - r, \bar{n} - 1)$$

其中  $r$  是矩阵  $\mathbf{B}$  的秩,  $\bar{n}$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的最小多项式的次数。

**证明** 因为  $\text{rank}\mathbf{U}_j$  等于  $\mathbf{U}_j$  中线性无关的列数, 而  $\mathbf{U}_j$  中的所有列也是  $\mathbf{U}_{j+1}$  中的列, 故条件  $\text{rank}\mathbf{U}_k = \text{rank}\mathbf{U}_j$  即意味着  $\mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}$  的每一列与矩阵  $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^j\mathbf{B}]$  的各列线性相关, 从而  $\mathbf{A}^{j+2}\mathbf{B}$  的每一列又与  $\mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}$  的各列线性相关。依此类推, 我们可以证明对所有  $k > j$ , 均有  $\text{rank}\mathbf{U}_k = \text{rank}\mathbf{U}_j$ 。对于矩阵  $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots]$ , 当在其中增加一个子矩阵  $\mathbf{A}^k\mathbf{B}$  时, 矩阵的秩至少增加 1, 否则其秩将增停止增加。矩阵  $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots]$  的秩最大为  $n$ , 因此当  $\mathbf{B}$  的秩为  $r$  时, 为了核对  $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots]$  的最大秩数, 最多只需在其中附加  $(n - r)$  个形



成为  $\mathbf{A}^k \mathbf{B}$  子矩阵就够了。因此我们有  $j \leq n - r$ 。从最小多项式的定义可知,  $j \leq \bar{n} - 1$ 。故得  $j \leq \min(n - r, \bar{n} - 1)$ 。

**推论 2-7** 若  $\text{rank} \mathbf{B} = r$ , 则状态方程 (2-13) 可控的充分必要条件是

$$\text{rank} \mathbf{U}_{n-r} = \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \cdots \mathbf{A}^{n-r} \mathbf{B}] = n$$

或者说

$$\det[\mathbf{U}_{n-r} \mathbf{U}_{n-r}^*] \neq 0$$

**定义 2-5** 设使得  $\text{rank} \mathbf{U}_j = \text{rank} \mathbf{U}_{j+1} = n$  成立的最小整数  $j$  为  $(\nu - 1)$ , 称  $\nu$  为方程 (2-13) 的可控性指数。

显然对可控性系统, 有关系

$$\nu \leq \min\{n - r, \bar{n} - 1\} + 1$$

## § 2-3 线性系统的可观测性

在控制理论中,可观测性与可控性是对偶的概念。系统可观测性所研究的是由输出估计状态的可能性。如果动态方程可观测,那么由输出中可以得到状态变量的信息。前面业已指出,它是研究动态方程(2-1)中矩阵 $(\mathbf{A}(t), \mathbf{C}(t))$ 的关系。

**可观测性的定义** 在给出可观测性的一般定义之前,先研究一个具体的例子。

**例 2-11** 已知二阶系统

$$\dot{x}_1 = x_2, x_2 = u, y = x_1$$

这里  $y$  是能够测量的输出。我们希望通过对  $y$  的量测决定出系统的初始状态  $x_1(t_0) = x_{10}$ ,  $x_2(t_0) = x_{20}$ , 这个系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t - t_0) = \begin{bmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

状态方程的解为

$$x_1(t) = x_{10} + (t - t_0)x_{20} + \int_{t_0}^t (t - \tau)u(\tau)d\tau$$

$$x_2(t) = x_{20} + \int_{t_0}^t u(\tau)d\tau$$

令  $t_1 > t_0$ , 并对  $y(t)$  作加权处理, 令

$$h(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t - t_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) dt$$

显然

$$h(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t - t_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} dt +$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t - t_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \right) dt$$

$$= \begin{bmatrix} t_1 - t_0 & \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \\ \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 & \frac{1}{3}(t_1 - t_0)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{20} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} 1 \\ t - t_0 \end{bmatrix} \cdot \int_{t_0}^t (t - \tau)u(\tau) d\tau dt$$

由于当  $t_1 > t_0$  时

$$\det \begin{bmatrix} t_1 - t_0 & \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \\ \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 & \frac{1}{3}(t_1 - t_0)^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}(t_1 - t_0)^4 > 0$$

并且  $h(t_1 - t_0)$  已知,  $u(\tau)$  已知, 因此可以唯一决定出  $x_{10}$  和  $x_{20}$  :

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 - t_0 & \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \\ \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 & \frac{1}{3}(t_1 - t_0)^3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\{ h(t_1, t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} 1 \\ t - t_0 \end{bmatrix} \cdot \int_{t_0}^t (t - \tau)u(\tau) d\tau dt \right\}$$

此例说明，由量测的信息，经过一段时间的积累之后能够唯一地决定出系统的初始状态，这表明输出对系统的初始状态具有判断能力。当系统的初始状态确定之后，在任何时刻的状态均可由状态转移方程来确定。因此说这个系统的状态是可观测的。

**定义 2-6** 若对状态空间中任一非零初态  $x(t_0)$ ，存在一个有限时刻  $t_1 > t_0$ ，使得由输入  $u_{[t_0, t_1]}$

和输出  $y_{[t_0, t_1]}$  的值能够唯一地确定初始状态  $x(t_0)$ ，则称动态方程 (2-1) 在  $t_0$  时刻可观测的。

反之则称动态方程在  $t_0$  时刻是不可观测的。

这个定义反映了系统的输出对状态的判断能力。与可控性一样，可观测性也是系统的结构性质，它不依赖于具体的输入、输出和初始状态的情况。另外在例 2-11 中可见， $x_{10}$  和  $x_{20}$  是否有唯一解与  $u(t)$  取什么形式无关。因此为方便起见，在以后的讨论中，不妨假定  $u(t) = 0$ 。这时零状态响应恒为零，从输出来判断初态的问题就成为从零输入响应来判断初态的问题。显然，若零输入响应为零，我们就不可能由它计算出初态。对于线性系统，若  $x(t_0) = 0$  时，零输入响应恒为零。

**例 2-12** 设有图 2-2 所示的网络，

其中电阻  $R = 1\Omega$ ，电容为  $C = 1f$ ，电容两端的电压是系统状态变量  $x$ ，当  $u = 0$  时，系统的输出恒为零，我们不可能从这个输出中判断出在  $t_0$  时刻电容的电压是多少。因此这个网络是不可观测的。

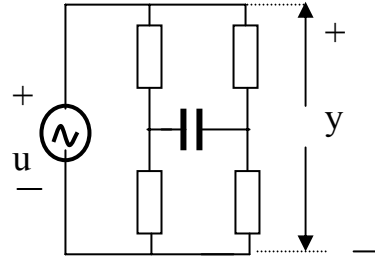


图 2-2

**可观测性的一般判断准则** 和可控性一样仅仅由定义出发检验系统的可观测性也是不容易的，需要寻找比较简便的判别准则。

**定理 2-8** 动态方程 (2-1) 在  $t_0$  时刻可观测，必要且只要存在一个有限时刻  $t_1 > t_0$ ，使矩阵  $C(\tau)\Phi(\tau, t_0)$  的  $n$  个列在  $[t_0, t_1]$  上线性无关。

**证明** 充分性：假定  $u = 0$ ，将

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)$$

两端左乘  $\Phi^*(t, t_0)C^*(t)$  并从  $t_0$  到  $t_1$  积分得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t, t_0)C^*(t)y(t)dt &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t, t_0)C^*(t)C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)dt \\ &= V(t_0, t_1)x(t_0) \end{aligned} \quad (2-16)$$

其中

$$V(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t, t_0)C^*(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt \quad (2-17)$$

由定理 2-1 及在  $[t_0, t_1]$  上  $C(t)\Phi(t, t_0)$  的所有列线性无关的假定，可知  $V(t_0, t_1)$  是非奇异的。因此有

$$x(t_0) = V^{-1}(t_0, t_1) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t, t_0)C^*(t)y(t)dt$$

即  $x(t_0)$  由  $y_{[t_0, t_1]}$  唯一确定。

必要性：用反证法。设系统  $t_0$  可观测，但对任意  $t_1 > t_0$ ，均有非零列向量  $\alpha$  存在，使得在  $[t_0, t_1]$  上成立  $C(t)\Phi(t, t_0)\alpha = 0$ ，选择  $x(t_0) = \alpha$ ，则对于所有的  $t > t_0$  有

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\alpha = 0$$

因此，初始状态不可能由  $\mathbf{y}(t)$  确定出来，这与系统  $t_0$  时刻可观测相矛盾。故知若系统在  $t_0$  时刻可观测，则必存在有限的  $t_1 > t_0$ ，使矩阵  $\mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0)$  的  $n$  个列在  $[t_0, t_1]$  上线性无关。

由上述定理可见，线性动态方程可观测性只取决于矩阵  $\mathbf{A}(t)$  和  $\mathbf{C}(t)$ ，而和矩阵  $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{D}(t)$  无关，因此在讨论可观测性时，仅需研究下列方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}$$

由 (2-17) 式定义的矩阵  $\mathbf{V}(t_0, t_1)$  称为系统的可观测性矩阵。

**推论 2-8** 动态方程 (2-1) 在  $t_0$  时刻可观测的充分必要条件是存在有限时刻  $t_1 > t_0$ ，使得矩阵  $\mathbf{V}(t_0, t_1)$  非奇异。

**可重构性的概念** 和讨论可控性时引入可达性的概念相仿，在讨论可观测性时引入状态可重构性的概念。

**定义 2-7** 如果对状态空间任一状态  $\mathbf{x}(t_0)$ ，存在某个有限时刻  $t_1$ ， $t_1 < t_0$ ，使得由输入  $\mathbf{u}_{[t_1, t_0]}$

和输出  $\mathbf{y}_{[t_1, t_0]}$  的值可唯一地决定  $\mathbf{x}(t_0)$ ，则称系统 (2-1) 在  $t_0$  时刻是可重构的。

这一定义和定义 2-6 相比，也是因果关系上有差别。定义 2-6 的可观测性是用未来的信息来判断现在的状态，而这一定义是用过去的信息来判断现在的状态。可重构性与可观测性对于辨别状态来说仅是使用信息的时间区间不同。因此显然可得到重构性的充分必要条件是存在  $t_1 < t_0$ ，使得矩阵  $\mathbf{C}(\tau)\Phi(\tau, t_0)$  在  $[t_1, t_0]$  上列线性无关，或是下列可重构矩阵

$$\int_{t_1}^{t_0} \Phi^*(\tau, t_0) \mathbf{C}^*(\tau) \mathbf{C}(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \quad t_1 < t_0$$

是非奇异矩阵

**线性系统的对偶定理** 可控性和可观测性不是相互独立的概念，它们之间存在一种对偶关系。为了研究这种对偶关系，首先研究系统 (2-1) 的对偶系统

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= -\mathbf{A}^*(t)\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^*(t)\mathbf{V} \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{B}^*(t)\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^*(t)\mathbf{V} \end{aligned} \quad (2-18)$$

其中  $\mathbf{A}^*(t), \mathbf{B}^*(t), \mathbf{C}^*(t), \mathbf{D}^*(t)$  分别是  $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$  的复共轭转置。有时将系统 (2-18)

的状态向量  $\bar{\mathbf{x}}$  称为系统 (2-1) 的状态向量  $\mathbf{x}$  的协态。对偶系统也叫伴随系统。下面的定理就是著名的对偶定理。

**定理 2-9** 系统 (2-1) 在  $t_0$  时刻可控 (可达) 的充分必要条件是它的对偶系统 (2-18) 在  $t_0$  时刻可观测 (可重构)。系统 (2-1) 在  $t_0$  时刻可观测 (可重构) 的充分必要条件是它的对偶系统在  $t_0$  时刻可控 (可达)。

**证明** 设  $\Phi(t, t_0)$  为系统 (2-1) 的状态转移矩阵，由第一章习题 1-19 可知系统 (2-18) 的状态转移矩阵为  $\Phi^{*-1}(t, t_0)$ 。系统 (2-1) 在  $t_0$  时刻可控的充分必要条件是存在有限的  $t_1 > t_0$ ，使得矩阵  $\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)$  的行在  $[t_0, t_1]$  上线性无关。而系统 (2-18) 在  $t_0$  时刻的可观测的充分必要条件是存在有限的  $t_1 > t_0$ ，矩阵  $\mathbf{B}^*(\tau)\Phi^{*-1}(\tau, t_0)$  的列在  $[t_0, t_1]$  上线性无关。又有

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^*(\tau)\Phi^{*-1}(\tau, t_0) &= \mathbf{B}^*(\tau)\Phi^{-1*}(\tau, t_0) = \mathbf{B}^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau) \\ &= [\Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)]^* \end{aligned}$$

所以系统 (2-1) 在  $t_0$  时刻的可控性等价于其对偶系统 (2-18) 在  $t_0$  时刻的可观测性。同

理可以证明定理的第二部分。

用同样的方法可以证明系统 (2-1) 的可达性等价于系统 (2-18) 的可重构性。

运用对偶定理我们可以得到与定理 2-5、定理 2-6 以及定理 2-7 相对应的有关可观测性判别定理，当然这些定理也可以给以直接的证明。

**定理 2-10** 设  $n$  维动态方程 (2-1) 中的  $\mathbf{A}(t)$  和  $\mathbf{C}(t)$  是  $(n-1)$  次连续可微的，而且存在有限的  $t_1 > t_0$ ，使下式成

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0(t_1) \\ \mathbf{N}_1(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n \quad (2-19)$$

其中

$$\mathbf{N}_0(t) = \mathbf{C}(t)$$

$$\mathbf{N}_k(t) = \mathbf{N}_{k-1}(t)\mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{N}_{k-1}(t) \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2-20)$$

则系统 (2-1) 在  $t_0$  时刻是可观测的。

**线性时不变系统的可观测性判据** 设线性时不变系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2-21)$$

其中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  分别为  $n \times n, n \times p, q \times n$  和  $q \times p$  的常量矩阵，所研究的时间区间为  $[0, +\infty)$ 。

**定理 2-11** 对于  $n$  维线性时不变系统 (2-21)，下列提法等价：

- (1) 在  $[0, +\infty)$  中的每一个  $t_0$ ，系统 (2-21) 可观测；
- (2) 在  $[0, +\infty)$  上， $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$  的各列在复数域线性无关；
- (3) 对于任意  $t_0 \geq 0$  的任意一个  $t > t_0$ ，矩阵

$$\mathbf{V}(t_0, t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}^*(\tau-t_0)} \mathbf{C}^* \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(\tau-t_0)} d\tau$$

是非奇异矩阵；

$$(4) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (2-22)$$

- (5) 在复数域上  $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  的各列线性无关；
- (6) 对于  $\mathbf{A}$  的任一特征值  $\lambda_i$  有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (2-23)$$

定理 2-11 的 (4) 中的矩阵

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

称为系统(2-21)的可观测性矩阵,与可控性矩阵一样,它在系统结构性质的研究中起着重要的作用。定理的条件(6)是通过 $\mathbf{A}$ 的特征值来判断系统的可观测性。同样,可以把满足(2-23)式的那些特征值 $\lambda_i$ 称为系统(2-21)的可观测性振型,把不满足(2-23)式的特征值 $\lambda_i$ 称为系统(2-21)的不可观振型。 $\mathbf{A}$ 的不可观振型又称为系统的输出解耦零点。显然系统(2-21)可观测的充分必要条件是没有输出解耦零点。当系统具有输出解耦零点 $\lambda_i$ 时,即存在非零列向量 $\mathbf{a}$ 使得

$$(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})\mathbf{a} = 0 \quad \text{及} \quad \mathbf{C}\mathbf{a} = 0$$

这表明 $\mathbf{a}$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda_0$ 的特征向量,这个特征向量落在 $\mathbf{C}$ 的核空间中,因此在输出中不能反映该振型所对应的模式。这里 $\lambda_0$ 是 $\mathbf{A}$ 的简单特征值。

**例题 2-13** 设系统 $\mathbf{A}, \mathbf{c}$ 阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ 的特征值为-1, -2, 其中-2是不可观模态。求出对应的特征向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$

$$\begin{aligned} \lambda = -1 \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}_{\lambda=-1} &= 2 \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = -2 \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}_{\lambda=-2} &= 1 \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

利用 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 作等价变换,  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , 可将 $\mathbf{A}$ 化为对角形

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这样可得

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(0) \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1(0) e^{-t} + \mathbf{a}_2 [x_2(0) - x_1(0)] e^{-2t}$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{c}\mathbf{a}_1 x_1(0) e^{-t} + \mathbf{c}\mathbf{a}_2 [x_2(0) - x_1(0)] e^{-2t} = \mathbf{c}\mathbf{a}_1 x_1(0) e^{-t}$$

以上的计算表明: $\mathbf{a}_2$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda_0 = -2$ 的特征向量,这个特征向量落在 $\mathbf{c}$ 的核空间中( $\mathbf{c}\mathbf{a}_2 = 0$ ),因此在输出中不能反映振型 $\lambda_0 = -2$ 所对应的模式 $e^{-2t}$ 。

**简化的可观测性条件** (2-22)式所定义的矩阵 $\mathbf{V}$ ,其秩的计算同样可以简化。令

$$\mathbf{V}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}$$

有以下定理:

**定理 2-12** 若 $j$ 是使 $\text{rank}\mathbf{V}_j = \text{rank}\mathbf{V}_{j+1}$ 成立的最小整数,则对于所有的 $k > j$ ,有

$$\text{rank} \mathbf{V}_k = \text{rank} \mathbf{V}_j$$

并且

$$j \leq \min\{n - r, \bar{n} - 1\}$$

其中  $r$  是  $\mathbf{C}$  的秩,  $\bar{n}$  是  $\mathbf{A}$  的最小多项式的次数。

**推论 2-12** 若  $\mathbf{C}$  的秩为  $r$ , 则动态方程 (2-21) 可观测的充分必要条件是  $\text{rank} \mathbf{V}_{n-1} = n$ , 或矩阵  $\mathbf{V}_{n-r}^* \mathbf{V}_{n-r}$  是非奇异矩阵。

**定义 2-8** 设使得  $\text{rank} \mathbf{V}_j = \text{rank} \mathbf{V}_{j+1} = n$  成立的最小整数  $j$  为  $(\nu - 1)$ , 称  $\nu$  为方程 (2-21) 的可观测性指数。

显然对于可观测系统, 有关系

$$\nu \leq \min\{n - r, \bar{n} - 1\} + 1$$

## § 2-4 若当型动态方程的可控性和可观测性

本节专门研究  $n$  维线性时不变动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\quad (2-24)$$

若令  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$ ,  $\mathbf{P}$  是  $n \times n$  非奇异常数矩阵, 则方程 (2-24) 变成

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2-24')$$

$$\text{其中} \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}, \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (2-25)$$

如前所述, 方程 (2-24) 和 (2-25) 是彼此等价的动态方程, 矩阵  $\mathbf{P}$  是等价变换矩阵。一个自然的问题是, 在经过等价变换后, 系统的可控性和可观测性是否发生变化? 从直观上看, 因为等价变换仅是变换状态空间的基底, 反映系统本身结构性质的可控性和可观测性应不受影响。

**定理 2-13** 在任何等价变换之下, 线性时不变系统的可控性和可观测性是不变的。

**证明** 我们只证明当且仅当 (2-24') 是系统的可控时, (2-24) 是系统才是可控的。(2-24') 可控, 由定理 2-6, 当且仅当  $\text{rank}[\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] = n$  将 (2-25) 式代入得

$$[\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] = \mathbf{P}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

因  $\mathbf{P}$  为非奇异矩阵, 故

$$\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \text{rank}[\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] = n$$

即方程 (2-24) 的可控性矩阵的秩为  $n$ , 故方程 (2-24) 是可控的。

定理 2-13 可以推广到线性时变动态系统 (见习题 2-11)。定理 2-13 保证了在研究可控性和可观测性时, 可以采取等价变换方程变换成某种特殊形式, 而如果能从这种特殊形式方便地判断系统的可控性和可观测性, 那么我们就可以得到更为简单的判据。例如将线性时不变系统方程化为若当型, 那么它可控性和可观测性在许多情况下用观察法就可以确定。

设线性时不变若当型方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\quad (2-26)$$

其中  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  的形式如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & 0 \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_m]$$



$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i1} & & & 0 \\ & \mathbf{A}_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{A}_{ir(i)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{i1} \\ \mathbf{B}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{ir(i)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_i = [\mathbf{C}_{i1} \quad \mathbf{C}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{ir(i)}] \quad i=1, 2, \cdots, m$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} b_{1ij} \\ b_{2ij} \\ \vdots \\ b_{Lij} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{ij} = [\mathbf{C}_{1ij} \quad \mathbf{C}_{2ij} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{Lij}] \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, r(i)$$

以上的形式说明  $\mathbf{A}$  有  $m$  个不同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ ，与特征值  $\lambda_i$  对应的若当块共有  $r(i)$  个， $\mathbf{A}_{ij}$  是属于  $\lambda_i$  的第  $j$  个若当块。令  $n_i$  和  $n_{ij}$  分别表示  $\mathbf{A}_i$  和  $\mathbf{A}_{ij}$  的阶数，则有

$$n = \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r(i)} n_{ij}$$

相应于  $\mathbf{A}_{ij}$  和  $\mathbf{A}_i$ ，矩阵  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  也作相应的分块。 $\mathbf{B}_{ij}$  的第一行和最后一行分别用  $b_{lij}$  和  $b_{Lij}$  表示， $\mathbf{C}_{ij}$  的第一列和最后一列分别用  $c_{lij}$  和  $c_{Lij}$  表示。

**例 2—14** 设有若当型动态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \cdots \cdots \begin{matrix} b_{L11} \\ b_{L12} \\ b_{L13} \\ b_{L21} \end{matrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ c_{111} & c_{112} & c_{113} & c_{121} \end{matrix}$$

根据前面引入的记号，对于这个若当型方程，可知  $m = 2$ ，与  $\lambda_1$  相关的若当块有 3 块，即

$r(1) = 3$ 。与  $\lambda_2$  相关的若当块只有一块  $r(2) = 1$ 。  $n_1 = 4, n_2 = 3, n_{11} = 2, n_{12} = 1, n_{13} = 1$ 。向量  $\mathbf{b}_{L11}, \mathbf{b}_{L12}, \mathbf{b}_{L13}, \mathbf{b}_{L21}, \mathbf{c}_{111}, \mathbf{c}_{112}, \mathbf{c}_{113}, \mathbf{c}_{121}$  如方程旁边所标注的那样。

**定理 2-14**  $n$  维线性时不变若当型动态方程 (2-26) 可控的充分必要条件是每一个  $r(i) \times p$  矩阵

$$\mathbf{B}_i^L = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Li1} \\ \mathbf{b}_{Li2} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{Lir(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2-27)$$

的各行在复数域上线性无关。方程 (2-26) 可观测的充分必要条件每一个  $q \times r(i)$  矩阵

$$\mathbf{C}_i^1 = [\mathbf{c}_{1i1} \quad \mathbf{c}_{1i2} \quad \cdots \quad \mathbf{c}_{1ir(i)}] \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2-28)$$

的各列在复数域上线性无关。

**证明** 这里我们用定理 2-6 的 (6) 来证明定理中关于可控的条件。定理中关于可观测的条件则可用定理 2-11 的 (6) 来证明, 也可用对偶定理 2-9 来证明。取  $\mathbf{A}$  的任一特征值

$\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , 考察  $n \times (n + p)$  维矩阵  $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$ 。显然  $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$  的前  $n$  列的对角线

元素除了与特征值  $\lambda_i$  相关联的  $\mathbf{A}_i$  之外, 都是非零元素, 故这些非零元素所在的行是线性无关的。再考虑  $(\mathbf{A}_i - \lambda_i \mathbf{I})$  的这些行, 它们对角线上的元素都为 0, 但是除了每个若当块的最后一行元素全为 0 之外, 都是位于对角线上方为 1 的元素, 故除掉每一若当块的最后一行之外,  $(\mathbf{A}_i - \lambda_i \mathbf{I})$  的其它各行均线性无关, 并且这些行与前述不属于特征值  $\lambda_i$  的所有行均线性

无关。再考虑  $(\mathbf{A}_i - \lambda_i \mathbf{I})$  的每一个若当块的最后一行, 由于  $\mathbf{B}_i^L$  的各行线性无关, 故

$[\mathbf{A}_i - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$  的每一个若当块最后一行也是线性无关, 因此矩阵  $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$  的各行线性无

关, 即对于  $\mathbf{A}$  的每一个特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , 都有  $\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = n$ 。由定理 2-6 的 (6) 可知定理 2-14 关于可控性的条件是充分的。反之, 若 (2-27) 的条件有一个

不成立, 必然导致某一个特征值代入后, 使矩阵  $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$  的秩小于  $n$ , 系统必然不可控。

定理 2-14 中可观测条件的证明与可控性条件证明类似。

根据定理 2-14, 容易验证例 2-14 的动态方程是可控的。但因为  $\mathbf{c}_{121} \neq 0$ , 故该动态方程不可观测。

**推论 2-14** (1) 单输入、线性、时不变若当型动态方程是可控的充分必要条件是对于一个特征值只有一个若当块, 而且向量  $\mathbf{b}$  中所有与若当块最后一行相对应的元素不等于零。(2) 单输出、线性、时不变若当型动态方程是可观测的充分必要条件是对于一个特征值只有一个若当块, 而且向量  $\mathbf{c}$  中所有与若当块第一列相应的元素不等于零。

**例 2-15** 设有两个若当型状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2-29)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2-30)$$

由推论 2-14 可知，状态方程 (2-29) 可控。方程 (2-30) 是时变的，虽然  $\mathbf{A}$  阵具有若当型且对所有的  $t$ ， $\mathbf{b}$  的各分量非零，但并不能应用推论 2-14 来判断可控性。事实上，由定理 2-4，对任一固定的  $t_0$  有

$$\Phi(t_0 - t)\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} e^{-(t_0-t)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t_0-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t_0} \\ e^{-2t_0} \end{bmatrix}$$

显然对所有  $t > t_0$ ，矩阵  $\Phi(t_0 - t)\mathbf{B}(t)$  的各行线性相关，故方程 (2-30) 在任何  $t_0$  均不可控。

## § 2-5 线性时不变系统可控性和可观测性的几何判别准则

在多变量系统的研究中, *Wonham* 等人发展了新的研究方法——几何方法。所谓几何方法, 主要是应用线性变换理论, 在系统的状态线性空间、输入状态线性空间和输出状态线性空间中, 着重从几何的角度来研究线性时不变系统的一般性质(可控性和可观测性等)和控制问题。几何方法的主要特点是它往往能给出一般性的关于问题本质的结论, 从而使我们能透过大量的有时是复杂的矩阵运算, 对问题的本质与特性有深入的理解, 并且对解决问题的方法与前景有所启发和认识。用几何方法研究线性系统的工作, 目前仍在有成效地发展着。这里我们仅介绍与可控性和可观测性有关的基本部分, 即关于可控子空间与不可观测子空间的概念。本节中研究的  $n$  维线性时不变动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2-31)$$

其中矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  定义如前。

**可控状态与可控子空间** 可控性反映了控制作用对状态的制约能力。一个不可控的系统可能只对某些状态没有制约能力, 或者说可能是从某些初始状态出发的轨线不可控制而对从另一些状态出发的轨线都可以控制。因此我们将状态空间的元素按照是否可控进行分类, 定义可控状态和不可控状态。

**定义 2-9** 对于系统 (2-1), 如果在  $t_0$  时刻对取定的初始状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 存在某个有限时刻  $t_1 > t_0$  和一个容许控制  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$  使得系统在这个控制作用下, 从  $\mathbf{x}_0$  出发的轨线在  $t_1$  时刻到达零状态, 即  $\mathbf{x}(t_1) = 0$ , 则称  $\mathbf{x}_0$  是系统在  $t_0$  时刻的一个可控状态。

从定义 2-9 容易看出, 若  $\mathbf{x}_1$ 、 $\mathbf{x}_2$  都是系统的可控状态, 那么对于任意的实数  $\alpha$  和  $\beta$ ,  $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$  也是系统的可控状态。另外, 零状态在  $t_0$  时刻总是可控的, 因此所有在  $t_0$  时刻可控状态的全体组成一个线性空间, 记为  $\mathbf{C}_{t_0}$ 。显然  $\mathbf{C}_{t_0}$  是  $n$  维状态空间  $\mathbf{X}_{t_0}$  的一个子空间, 称为系统在  $t_0$  时刻的可控子空间。

对于线性时不变系统 (2-31), 它的可控状态不依赖于某个特定时刻, 因此可控子空间也就不依赖于某个特定时刻。而且显然可控子空间也就是它的可达子空间。下面讨论线性时不变系统 (2-31) 的可控子空间结构。

令  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{I}_m \mathbf{B}$  表示  $\mathbf{B}$  的值域空间, 它是由矩阵  $\mathbf{B}$  的列所张成的空间, 并且是状态空间  $\mathbf{X}$  的子空间。引入记号

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{A}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{A}^2\bar{\mathbf{B}} + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}\bar{\mathbf{B}} \quad (2-32)$$

由于  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\cdots$ ,  $\mathbf{A}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}$  均为  $\mathbf{x}$  的子空间, 故  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  也是  $\mathbf{x}$  的子空间, 而且是  $\mathbf{A}$  的不变子空间。事实上, 根据凯莱—哈密顿定理有

$$\mathbf{A}^n = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{A}^2\bar{\mathbf{B}} + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{A}^n\bar{\mathbf{B}} \\ &= \alpha_0 \bar{\mathbf{B}} + (1 + \alpha_1)\mathbf{A}\bar{\mathbf{B}} + \cdots + (1 + \alpha_{n-1})\mathbf{A}^{n-1}\bar{\mathbf{B}} \subset \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle\end{aligned}$$

**引理 1**  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \text{Im } \mathbf{W}(t_0, t_1) \quad \forall t_1 > t_0 \quad (2-33)$

**证明** 为了证明 (2-33) 式, 只需证明

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp = \text{Ker } \mathbf{W}(t_0, t_1)$$

这里  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp$  表示子空间  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  的正交补空间, 而  $\text{Ker } \mathbf{W}(t_0, t_1)$  表示  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  的核空间。因为  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  是对称矩阵, 故

$$[\text{Im } \mathbf{W}(t_0, t_1)]^\perp = \text{Ker } \mathbf{W}^T(t_0, t_1) = \text{Ker } \mathbf{W}(t_0, t_1)$$

而

$$\mathbf{X} = \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle \oplus \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp = \text{Im } \mathbf{W}(t_0, t_1) \oplus [\text{Im } \mathbf{W}(t_0, t_1)]^\perp$$

因而若证明了

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp = \text{Ker } \mathbf{W}(t_0, t_1)$$

也就证明了 (2-33) 式。

取  $\mathbf{x} \in \text{Ker } \mathbf{W}(t_0, t_1)$ , 即有  $\mathbf{x}^T \mathbf{W}(t_0, t_1) \mathbf{x} = 0$  或

$$\mathbf{x}^T \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} d\tau \mathbf{x} = 0$$

由此可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} \mathbf{x}\|^2 d\tau = 0$$

于是

$$\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} \mathbf{x} = 0 \quad \forall \tau \in [t_0, t_1]$$

对上式取导数,

$$(-1)^j \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^j e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} \mathbf{x} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

令  $\tau = t_0$  得

$$\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^j \mathbf{x} = 0 \quad \text{或} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}^j \mathbf{B} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

这说明  $\mathbf{x}$  与矩阵  $\mathbf{A}^j \mathbf{B} (j=0, 1, 2, \dots, n-1)$  的每一列都是正交的, 因此有  $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp$

即

$$\text{Ker } \mathbf{W}(t_0, t_1) \subset \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp$$

反之若取  $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp$ , 即有  $\mathbf{x}^T [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = 0$  或

$\mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \dots = \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{x} = 0$ , 故知  $\mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{x}$  以及它们的任一线性组合属于  $\mathbf{B}^T$  的核空间, 所以对任意的  $t_1 > \tau > t_0$ , 均有

$$\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} \mathbf{x} = 0$$

将上式前乘  $e^{A(t_0-\tau)}\mathbf{B}$ ，再对  $\tau$  从  $t_0$  到  $t_1$  积分，可得

$$\left( \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau \right) \mathbf{x} = 0 \quad \forall t_1 > t_0$$

即对任何  $t_1 > t_0$ ，均有  $\mathbf{W}(t_0, t_1)\mathbf{x} = 0$ ，这说明  $\mathbf{x} \in \text{Ker} \mathbf{W}(t_0, t_1)$ ，故有  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp \subset \text{Ker} \mathbf{W}(t_0, t_1)$ 。

综上所述，可知  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp = \text{Ker} \mathbf{W}(t_0, t_1)$ ， $\forall t_1 > t_0$ ，故引理 1 得证。

**引理 2**  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  是可控子空间。即在这个子空间中的每一状态都是可控状态，凡是可控状态均在这个子空间中。

**证明** 如果  $\mathbf{x}_0 \in \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$ ，那么

$$\mathbf{x}_0 \in \text{Im } \mathbf{W}(t_0, t_1)$$

因此存在非零向量  $\mathbf{z}$ ，使得

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{W}(t_0, t_1)\mathbf{z}$$

取  $\mathbf{u}(\tau) = -\mathbf{B}^T e^{A^T(t_0-\tau)}\mathbf{z}$ ，可知对任意的  $t_1 > t_0$  有

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = 0$$

这表明  $\mathbf{x}_0$  是系统 (2-31) 的可控状态。

反之，若  $\mathbf{x}_0$  是系统 (2-31) 的可控状态，根据定义，存在一个有限时刻  $t_1 > t_0$  和一个容许控制  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$  使得

$$e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = 0$$

根据等式 (1-48) 有

$$\begin{aligned} e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 &= -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_{t_0}^{t_1} p_k(t_1-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= -[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \cdot \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} p_0(t_1-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \int_{t_0}^{t_1} p_1(t_1-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1} p_{n-1}(t_1-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这表明  $e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 \in \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$ 。由于  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  是  $\mathbf{A}$  的不变子空间，所以

$$e^{A(t_0-t_1)} \cdot e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \in \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$$

综合以上两方面的结果可知， $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  就是线性时不变系统 (2-31) 的可控子空间。

**定理 2-15** 线性时不变系统 (2-31) 可控的充分必要条件是

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \mathbf{X}$$

这个定理的结论是明显的，它是关于时不变系统可控性的一个几何解释。我们知道，

$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  实际上是由可控性矩阵  $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  的各列所张成的一个子空间。当系统可控时，可控性矩阵  $\mathbf{U}$  的秩等于状态空间的维数  $n$ ，这时  $\mathbf{U}$  的各列张成的子空间必为整个状态空间。当系统不可控时， $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  将是  $\mathbf{X}$  的真子空间。相应地，我们把可控子空间的正交补空间  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp$  称为系统的不可控子空间。状态空间中任一状态均可分解为这两个子空间的正交和，即分解为可控分量和不可控分量，而且这种分解是唯一的。

**例 2-16** 考虑动态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

因为可控性矩阵

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

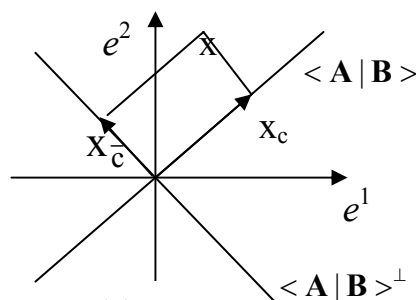


图 2-3

$\text{rank} \mathbf{U} = 1$ 。因此，它的可控子空间是由向量  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$  所张成的一维子空间。不可控子空间由向量  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$  所张成。这两个子空间的正交和构成了二维状态空间。状态空间中的任意状态向量可对这两个子空间进行分解，而且分解是唯一的。参看图 2-3，分解的两个分量分别为  $(x_c \ 0)^T$  和  $(0 \ x_{\bar{c}})^T$ 。

**不可观测状态与不可观测子空间** 可观测性反映了输出对状态的反映能力。一个不可观测的系统的一些初态不可以通过输出来确定，但可能另一些初态可以通过输出唯一地确定。因此，可以将状态空间的元素按照输出对它们的判断能力来进行分类、可定义不可观测状态和可观测状态。

**定义 2-10** 若在  $t_0$  时刻，初态  $\mathbf{x}(t_0)$  引起的零输入响应为零，即当  $t > t_0$ ， $\mathbf{u}(t) = 0$  时有  $\mathbf{y}(t) = 0$ ，则称这个状态为  $t_0$  时刻的不可观测状态。

显然  $\mathbf{x}(t_0) = 0$  是不可观测状态。若系统在  $t_0$  时刻可观测时，只有  $\mathbf{x}(t_0) = 0$  是唯一的不可观测状态。这从物理意义上是很容易理解的，如果有另外一个初态引起的零输入响应也为零，那么我们就无法从输出为零来判断别出这一初态。若  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  是系统在  $t_0$  时刻的不可观测状态，可以验证，对于任意实数  $\alpha$  和  $\beta$ ， $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$  也是不可观测状态。因此所有  $t_0$  时刻不可观测状态的全体构成一个线性空间，它是状态空间的一个子空间，称为  $t_0$  时刻的不可观测子空间。

对于线性时不变系统，它的不可观测状态不依赖于某一特定的时刻。如果某个状态在  $t_0$  时刻不可观测，那么它在任意时刻也都不可观测。因此不可观测子空间也就不依赖于特定的时刻了。现在来研究线性时不变系统 (2-31) 的不可观测子空间的结构。

定义子空间

$$\boldsymbol{\eta} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker}(\mathbf{CA}^k) \quad (2-34)$$

不难验证， $\boldsymbol{\eta}$  也是  $\mathbf{A}$  的不变子空间。事实上，若取  $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\eta}$ ，则有

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} = \cdots = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x} = 0$$

又因为

$$\mathbf{CA}^n \mathbf{x} = \mathbf{C}(a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A} + \cdots + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}) \mathbf{x} = 0$$

所以

$$\mathbf{Ax} \in \boldsymbol{\eta}$$

**引理 3**  $\boldsymbol{\eta}$  是线性时不变系统 (2-31) 的不可观测子空间, 即  $\boldsymbol{\eta}$  中的状态是 (2-31) 的不可观测状态, 而 (2-31) 的不可观测状态均在  $\boldsymbol{\eta}$  中。

**证明** 任取  $\mathbf{x}_0 \in \boldsymbol{\eta}$ , 要证  $\mathbf{x}_0$  是系统 (2-31) 的不可观测状态。设  $u(t) = 0$ , 这时有  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t - t_0)\mathbf{x}_0$ , 将等式 (1-48) 代入, 得

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t - t_0) \mathbf{CA}^k \mathbf{x}_0$$

由  $\mathbf{Cx}_0 = \mathbf{CAx}_0 = \cdots = \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}_0 = 0$ , 可知

$$\mathbf{y}(t) = 0$$

即由  $\mathbf{x}_0$  引起的零输入响应为零, 所以  $\mathbf{x}_0$  是不可观测状态。

另一方面, 若  $\mathbf{x}_0$  是不可观测状态, 即有

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t - t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 = 0 \quad \forall t > t_0$$

将上式对  $t$  求导, 再令  $t = t_0$ , 得

$$\mathbf{CA}^k \mathbf{x}_0 = 0 \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

故  $\mathbf{x}_0 \in \boldsymbol{\eta}$ , 这说明每个不可观测状态都是  $\boldsymbol{\eta}$  中的元。

**定理 2-16** 线性时不变系统 (2-31) 可观测的充分必要条件是  $\boldsymbol{\eta} = 0$ 。

这个定理的结论也是显而易见的。它说明系统可观测时, 它只有唯一的零状态是不可观测状态。我们知道,  $n$  维线性时不变系统可观测的充分必要条件时,  $\text{rank} \mathbf{V} = n$ , 这样必有  $\boldsymbol{\eta} = 0$ 。当系统不可观测时,  $\boldsymbol{\eta}$  中将包含有非零元。我们定义  $\boldsymbol{\eta}$  的正交补空间为系统 (2-31) 的可观测子空间, 记为  $\boldsymbol{\eta}^\perp$ 。

**例 2-17** 考虑例 2-16 中的动态方程, 其可观测性矩阵  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  的秩为 1, 不可观测

子空间  $\boldsymbol{\eta} = \text{Ker} \mathbf{C} \cap \text{Ker} \mathbf{CA}$  为向量  $(-1 \ 1)^T$  所张成的子空间, 可观测子空间  $\boldsymbol{\eta}^\perp$  为向量  $(1 \ 1)^T$  所张成的子空间, 参见图 2-4。

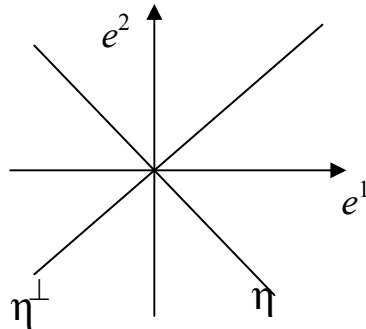


图 2-4



## § 2-6 线性时不变系统的规范分解

本节中我们只研究以下线性时不变系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2-35)$$

其中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  分别为  $n \times n, n \times p, q \times n, q \times p$  常量矩阵。

定理 2-13 说明在等价变换下, 线性时不变系统的可控性和可观测性都保持不变, 因此我们可以适当选取状态空间的基底, 以使在这组基底下的系统动态方程更能体现出系统的结构性质 (可控性和可观测性)。在上一节关于可控子空间及不可观测子空间的讨论, 给我们指出了应该如何选取状态空间的基底。

### 动态方程按可控性分解

**定理 2-17** 设动态方程 (2-35) 的可控性矩阵的秩为  $n_1$ ,  $n_1 < n$ 。则存在一个等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  ( $\mathbf{P}$  为  $n \times n$  非奇异矩阵), 可将 (2-35) 变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2-36)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

而且 (2-36) 的  $n_1$  维子方程

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 &= \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2-37)$$

是可控的, 该子方程与方程 (2-35) 有相同的传递函数矩阵。

**证明** 因为可控性矩阵  $\mathbf{U}$  的秩为  $n_1$ , 所以由  $\mathbf{U}$  的列所张成的可控子空间的维数为  $n_1$ 。在可控子空间中取  $n_1$  个性线无关向量  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{n_1}$ , 再补充  $(n - n_1)$  个向量使  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{n_1}, \mathbf{q}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{q}_n$ , 成为状态空间的一组基。命

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_{n_1} & \mathbf{q}_{n_1+1} & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

下面来证明变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  能将 (2-35) 化为 (2-36) 的形式。因为  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$  即  $\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{A}}$ , 这表明  $\bar{\mathbf{A}}$  的第  $j$  列就是  $\mathbf{A}\mathbf{q}_j$  关于基底  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  的表示。因可控子空间是  $\mathbf{A}$  的不变子空间, 故对  $j = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{q}_j$  都可表成  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{n_1}$  的线性组合

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{q}_1 &= a_{11}\mathbf{q}_1 + a_{21}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{n_1 1}\mathbf{q}_{n_1} \\ \mathbf{A}\mathbf{q}_2 &= a_{12}\mathbf{q}_1 + a_{22}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{n_1 2}\mathbf{q}_{n_1} \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{q}_{n_1} &= a_{1n_1}\mathbf{q}_1 + a_{2n_1}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{n_1 n_1}\mathbf{q}_{n_1}\end{aligned}$$

但是

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_{n_1+1} = a_{1, n_1+1}\mathbf{q}_1 + a_{2, n_1+1}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{n_1, n_1+1}\mathbf{q}_{n_1} + a_{n_1+1, n_1+1}\mathbf{q}_{n_1+1} + \cdots + a_{n, n_1+1}\mathbf{q}_n$$

⋮

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_n = a_{1,n}\mathbf{q}_1 + a_{2,n}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{n_1,n}\mathbf{q}_{n_1} + a_{n_1+1,n}\mathbf{q}_{n_1+1} + \cdots + a_{n,n}\mathbf{q}_n$$

所以  $\bar{\mathbf{A}}$  具有 (2-36) 中的形式, 其中  $\bar{\mathbf{A}}_{11}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_{12}$ , 和  $\bar{\mathbf{A}}_{22}$  分别为  $n_1 \times n_1$ ,  $n_1 \times (n - n_1)$  和  $(n - n_1) \times (n - n_1)$  矩阵。因为  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}$ , 即  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$ , 又因  $\mathbf{B}$  的各列都是可控子空间的元, 即  $\mathbf{B}$  的每一列均可由  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{n_1}\}$  线性表出, 所以  $\bar{\mathbf{B}}$  具有 (2-36) 中的形式且  $\bar{\mathbf{B}}_1$  是  $n_1 \times p$  矩阵。但是  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$  没有什么特殊形式, 其中  $\bar{\mathbf{C}}_1$  和  $\bar{\mathbf{C}}_2$  分别是  $q \times n_1$  和  $q \times (n - n_1)$  矩阵。因此在变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  下, (2-35) 化为 (2-36) 的形式。

令  $\bar{\mathbf{U}}$  是 (2-36) 的可控性矩阵, 因等价变换不改变可控性矩阵的秩, 故  $\text{rank}\bar{\mathbf{U}} = n_1$

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{A}}_{11}^{n_1-1}\bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ } n_1 \text{ 行} \\ \text{ } (n - n_1) \text{ 行} \end{matrix}$$

$\bar{\mathbf{U}}$  的前  $n_1$  行线性无关, 即

$$\text{rank}[\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}_{11}^{n_1-1}\bar{\mathbf{B}}_1] = n_1$$

又因为当  $k \geq n_1$  时,  $\bar{\mathbf{A}}_{11}^k\bar{\mathbf{B}}_1$  的各列可由  $\bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1, \dots, \bar{\mathbf{A}}_{11}^{n_1-1}\bar{\mathbf{B}}_1$  的各列线性表出, 故

$$\text{rank}[\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}_{11}^{n_1-1}\bar{\mathbf{B}}_1] = n_1$$

这说明 (2-37) 的动态方程可控。

现在证明 (2-35) 与 (2-37) 有相同的传递函数矩阵。因为等价变换保持传递函数矩阵不变, 故 (2-35) 与 (2-36) 有相同的传递数矩阵。计算 (2-36) 的传递函数矩阵如下

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11} & -\bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \\ &= [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1} & (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\bar{\mathbf{A}}_{12}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \\ 0 & (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \\ &= [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \\ &= \bar{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D} \end{aligned}$$

显然上式正是 (2-37) 的传递函数矩阵。

这个定理说明, 通过等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , 状态空间被分解成两个子空间。其一是  $n_1$  维子空间, 它由所有形如  $(\bar{\mathbf{x}}_1^T \quad 0)^T$  的向量所组成, 是 (2-36) 的可控子空间; 另一个是由所有形如  $(0 \quad \bar{\mathbf{x}}_2^T)^T$  的向量所组成  $(n - n_1)$  维子空间, 即可控子空间的直接和空间。显然, 任一状态  $\bar{\mathbf{x}}$  都可分解成为这两个子空间的直接和。

动态方程 (2-36) 及可控的  $n_1$  维子方程 (2-37) 的方块图如图 2-5 所示。从图中可

以看到，控制输入是通过可控子系统（图中虚线以上）传递到输出的，而对不可控子系统（图中虚线以下）没有影响。所以，传递函数的描述方法不能反映不可控部分的特性。

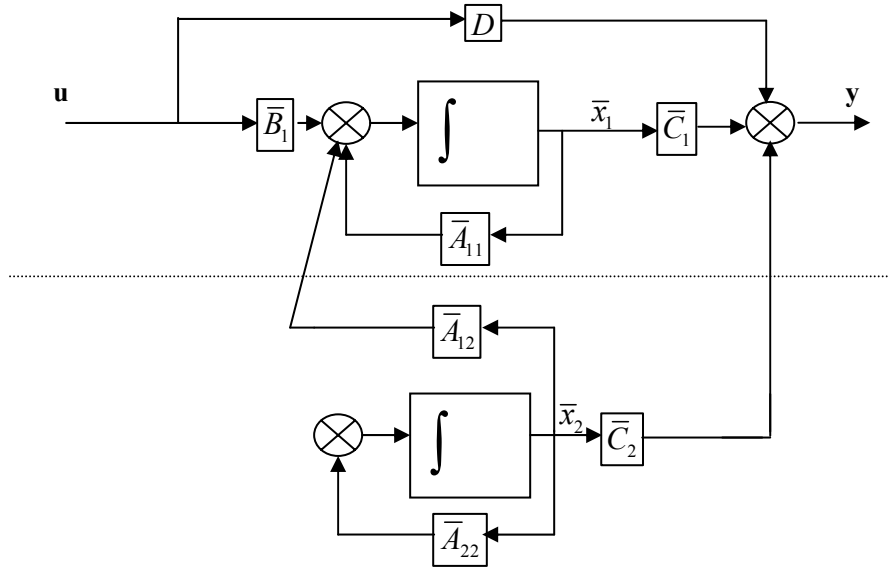


图 2—5

**例 2—18** 设动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

可控性矩阵的秩 1，可控子空间由向量  $(1 \ 1)^T$  所张成。取  $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，若令  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，

则可得等价的动态方程

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

所采取的变换是将状态空间的基底从标准正交向量组  $(1 \ 0)^T$  和  $(0 \ 1)^T$  变换为向量组  $(1 \ 1)^T$

和  $(1 \ 0)^T$ 。状态变量  $\bar{\mathbf{x}}$  的分量  $\bar{x}_1$  是可控的，即对状态变量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ，当  $x_1 = x_2$  时，状态  $x$  才是可控的。

### 动态方程按可观测性分解

**定理 2—18** 设动态方程 (2—35) 的可观测性矩阵的秩为  $n_2, n_2 < n$ ，则存在一个等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，可将 (2—35) 变换为如下形式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [\bar{\mathbf{C}}_1 \ 0] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2-38)$$

而且 (2—38) 的  $n_2$  维子方程

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 &= \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2-39)$$

是可观测的。该子方程与方程 (2-35) 有相同的传递函数矩阵。

上述定理可用对偶定理 2-9 和定理 2-17 得出，也可以直接证明。这里我们着重说明一下基底的取法。因为可观测性矩阵的秩为  $n_2$ ，所以不可观测子空间  $\mathbf{n}$  中取  $(n - n_2)$ 。基底选择可在  $\mathbf{n}$  中取  $(n - n_2)$  个线性无关向量  $\mathbf{q}_{n_2+1}, \mathbf{q}_{n_2+2}, \dots, \mathbf{q}_n$ ，再取另外  $n_2$  个线性无关向量，使得向量组  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{n_2}, \mathbf{q}_{n_2+1}, \mathbf{q}_{n_2+2}, \dots, \mathbf{q}_n$ ，构成状态空间的基底。在基底取定之后，采取和定理 2-17 的证明完全类似的方法便可证得定理 2-18。

这里，通过等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，状态空间分解为两个子空间。一个是  $(n - n_2)$  维的不可观测子空间，它由形如  $\begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathbf{x}}_2^T \end{pmatrix}^T$  的向量所组成；另一个是由形如  $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1^T & 0 \end{pmatrix}^T$  的向量所组成的  $n_2$  维子空间，它是不可观测子空间的直接和空间。显然任一状态  $\bar{\mathbf{x}}$  都可分解成这两个子空间的直接和。

方程 (2-38) 及可观测的  $n_2$  维子方程的方块图见图 2-6。由图中可见，输出不包含状态分量  $\bar{\mathbf{x}}_2$  所提供的任何信息，它只反映了状态分量  $\bar{\mathbf{x}}_1$  所提供的全部信息，所以，传递函数的描述方法不能反映不可观测部分的特性。

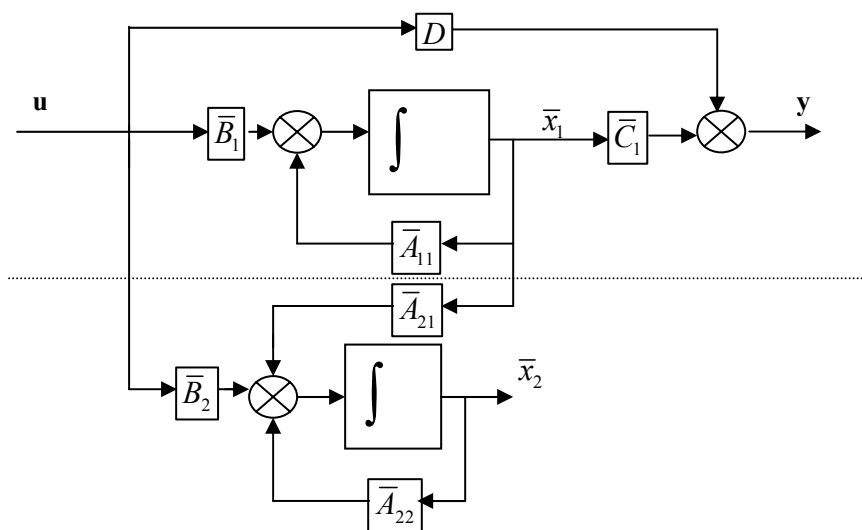


图 2-6

必须指出图 2-6 是按可观测性进行分解，它体现也输出中不含有  $\bar{\mathbf{x}}_2$  的信息这一结构性性质，但我们不能从图中看到输入  $\mathbf{u}$  形式上可影响到  $\bar{\mathbf{x}}_1$  和  $\bar{\mathbf{x}}_2$ ，就错误地断言系统是可控的。同样，在按可控性分解的图 2-5 中，也不能断言那里的  $\bar{\mathbf{x}}_1$  和  $\bar{\mathbf{x}}_2$  是可观测的。

**标准分解定理** 为了同时体现出系统的可控性和可观测性的结构性性质，有如下的标准分解定理。

**定理 2-19** 设动态方程 (2-35) 的可控性矩阵的秩为  $n_1 (n_1 < n)$ ，可观测性矩阵的  $n_2 (n_2 < n)$ ，则存在一个等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，可将方程 (2-35) 变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \\ \dot{\bar{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2-40)$$

$$\mathbf{y} = [\bar{C}_1 \quad 0 \quad \bar{C}_3 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

而且(2-40)的子方程

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{B}_1\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{C}_1\bar{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2-41)$$

是可控可观测的。(2-41)与(2-35)有相同的传递函数矩阵。

**证明** 定义子空间  $X_1, X_2, X_3$  和  $X_4$  分别为

$$\begin{aligned} X_2 &= \eta \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle & X_1 \oplus X_2 &= \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle \\ X_2 \oplus X_4 &= \eta & (\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle + \eta) \oplus X_3 &= \mathbf{X} \end{aligned}$$

由于  $\eta$  和  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  都是  $A$  的不变子空间, 所以  $X_2$  是  $A$  的不变子空间。显然状态空间  $\mathbf{X}$  是  $X_1, X_2, X_3$  和  $X_4$  的直接和。设  $X_i$  的维数为  $k_i$ , 有

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 &= n \\ k_1 + k_2 &= n_1 & k_2 + k_4 &= n - n_2 \end{aligned}$$

现在分别取  $X_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 的一组基, 使之联合构成  $\mathbf{X}$  中的一组基, 记为  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ , 其中  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{k_1}$  是  $X_1$  的基,  $\mathbf{q}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{q}_{k_1+k_2}$  是  $X_2$  的基, 依次类推。令

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]$$

作变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , 在这样的等价变换下, (2-35) 就可变换为 (2-40) 的形式。

首先我们来看在基组  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  下矩阵  $\mathbf{A}$  的表现。因为  $X_1$  属于  $\mathbf{A}$  的不变子空间  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$ , 所以  $\mathbf{A}\mathbf{q}_i$  ( $i=1, 2, \dots, k_1$ ) 仍属于  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$ , 可用  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{k_1+k_2}$  线性表出。  $X_2$  是  $A$  的不变子空间, 所以  $\mathbf{A}\mathbf{q}_i$  ( $i = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$ ) 仍属于  $X_2$ , 可用  $\mathbf{q}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{q}_{k_1+k_2}$  线性表出。  $X_4$  属于  $A$  的不变子空间  $\eta$ , 所以  $\mathbf{A}\mathbf{q}_i$  ( $i = k_1 + k_2 + k_3 + 1, \dots, n$ ) 仍属于  $\eta$ , 可用  $\mathbf{q}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{q}_{k_1+k_2}$ ,  $\mathbf{q}_{k_1+k_2+k_3+1}, \dots, \mathbf{q}_n$  线性表出。而  $X_3$  没有什么特殊性, 故  $\mathbf{A}\mathbf{q}_i$  ( $i = k_1 + k_2 + 1, \dots, k_1 + k_2 + k_3$ ) 一般应由  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  线性表出。由

$$\mathbf{A}[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n] = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n] \bar{\mathbf{A}}$$

可得  $\bar{\mathbf{A}}$  具有 (2-40) 中的形式, 其中  $\bar{A}_{11}$ ,  $\bar{A}_{22}$ ,  $\bar{A}_{33}$  和  $\bar{A}_{44}$  分别为  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  和  $k_4$  维方

阵，而  $\bar{\mathbf{A}}_{13}$ ， $\bar{\mathbf{A}}_{21}$ ， $\bar{\mathbf{A}}_{23}$ ， $\bar{\mathbf{A}}_{24}$  和  $\bar{\mathbf{A}}_{43}$  分别为适当维数的矩阵。

由于  $\mathbf{B}$  的各列都在子空间  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  中，因此  $\mathbf{B}$  的各列均可由  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{k_1+k_2}$  线性表出

$$\mathbf{B} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{k_1+k_2} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ } k_1 \text{ 行} \\ \text{ } k_2 \text{ 行} \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix}$$

又由于  $\text{Ker } \mathbf{C} \supset \eta$ ，所以  $\eta$  中的每一个元都在  $\mathbf{C}$  的核中，因此

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{C}[\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] = \begin{bmatrix} \underbrace{\bar{\mathbf{C}}_1}_{k_1 \text{ 列}} & 0 & \underbrace{\bar{\mathbf{C}}_3}_{k_3 \text{ 列}} & 0 \end{bmatrix}$$

以上证明了在等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  下，(2-35) 确实可化为 (2-40) 的形式。为了证明定理的其余部分，我们首先指出，一个具有下列形式的矩阵

$$\begin{bmatrix} \times & 0 & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

它进行乘幂或求逆运算后仍保持有 (2-42) 的形式，即原来零块所在的位置仍然是零块，而且对角线上的矩阵块就是原来对角线矩阵块的乘幂或逆。

计算 (2-40) 的可控性矩阵和可观测性矩阵，根据上述性质可知

$$\bar{\mathbf{U}} = [\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{11}^2\bar{\mathbf{B}}_1 & \cdots \\ \bar{\mathbf{B}}_2 & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ } k_1 \\ \text{ } k_2 \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix}$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & 0 & \bar{\mathbf{C}}_2 & 0 \\ \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{A}}_{13} + \bar{\mathbf{C}}_3\bar{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ } k_1 & & k_3 & \end{matrix}$$

由于  $\text{rank } \bar{\mathbf{U}} = k_1 + k_2 = n_1$ ， $\text{rank } \bar{\mathbf{V}} = k_1 + k_3 = n_2$ ，故可知  $\bar{\mathbf{U}}$  的前  $k_1$  行线无关， $\bar{\mathbf{V}}$  的前  $k_1$  列线性无关，即

$$\text{rank}[\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}_{11}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}_1] = k_1$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 \\ \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{A}}_{11} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{A}}_{11}^{n-1} \end{bmatrix} = k_1$$

因为  $\bar{\mathbf{A}}_{11}^l \bar{\mathbf{B}}_1 (l \geq k_1)$  的各列均可由  $\bar{\mathbf{B}}_1$ ， $\bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1$ ， $\cdots$ ， $\bar{\mathbf{A}}_{11}^{k_1-1}\bar{\mathbf{B}}_1$  的各列线性表出； $\bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{11}^l (l \geq k_1)$

的各行可由  $\bar{\mathbf{C}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{11}$ ,  $\dots$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{11}^{k_1-1}$  的各行线性表出, 故可知

$$\text{rank}[\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \bar{\mathbf{A}}_{11} \bar{\mathbf{B}}_1 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{A}}_{11}^{k_1-1} \bar{\mathbf{B}}_1] = k_1$$

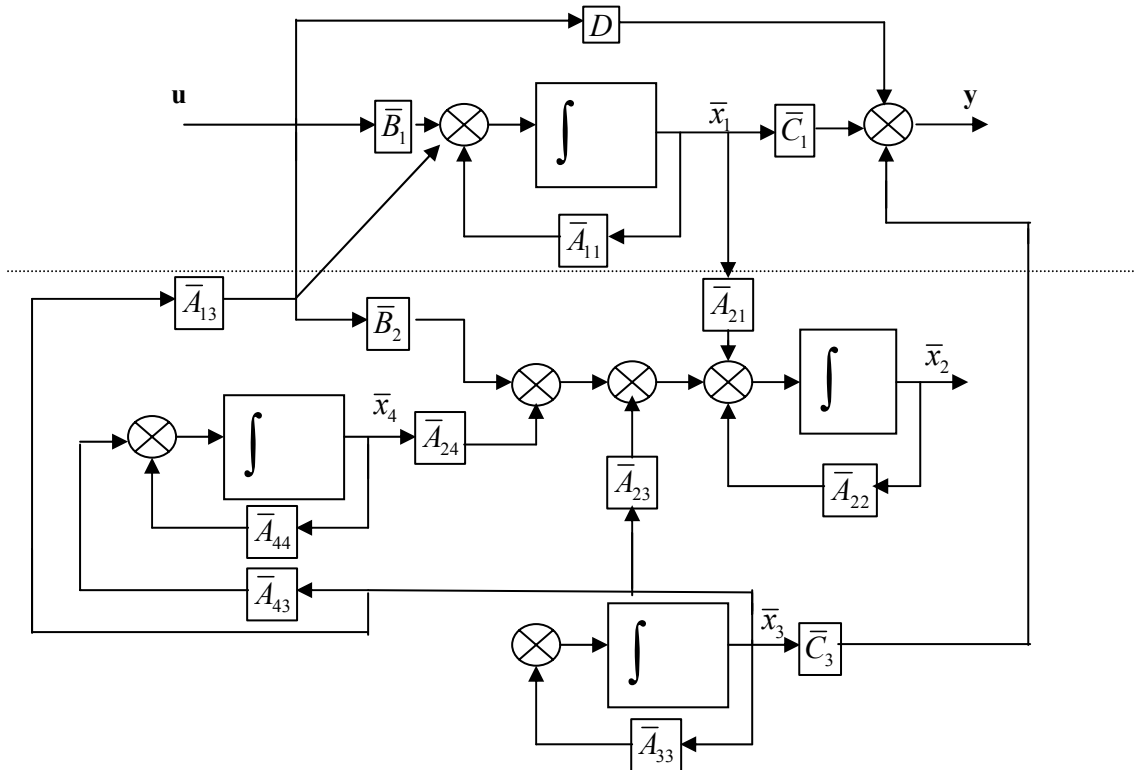
$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 \\ \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{11} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{11}^{k_1-1} \end{bmatrix} = k_1$$

即 (2-41) 是可控、可观测的。

下面计算 (2-40) 的传递函数阵, 这里将用到 (2-42) 形式矩阵求逆运算的性质。

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0] \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} & 0 & -\bar{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ -\bar{\mathbf{A}}_{21} & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{22} & -\bar{\mathbf{A}}_{23} & -\bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\mathbf{A}}_{43} & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \\ &= [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0] \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} & 0 & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \\ &= [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0] \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} = \bar{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D} \end{aligned}$$

最后的结果正是 (2-41) 式所对应的传递函数阵。定理 2-19 证毕。



69  
图 2-7 标准分解

经过等价变换后得到的动态方程 (2-40), 可用图 2-7 表示。图中虚线上部表示了子方程 (2-41)。它是系统 (2-40) 中可控、可观测的部分。在虚线以下的其它部分或者是可观测、不可控的, 或者是可控、不可观测的, 或者是不可控、不可观测的部分。定理 2-19 说明, 若一个线性时不变系统不可控、不可观测时, 必存在一个等价变换, 将系统分成如图 2-7 的四个部分。这就是所谓线性时不变系统的标准结构分解。

定理 2-19 还表明, 动态方程的传递函数矩阵仅仅取决于方程的可控、可观测的部分。换句话说, 传递函数矩阵 (输入—输出描述) 仅仅描述了系统的可控、可观测部分的特性。这是输入—输出描述和状态变量描述之间最重要的关系。输入—输出描述 (传递函数的描述) 在某些时候之所以不能够完全描述系统, 其原因就在于系统中的不可控或不可观测部分不出现在传递函数中。而这些不出现的传递函数矩阵中的部分其状态行为不可避免地要影响系统的稳定性和品质, 这是我们在系统设计中要特别注意的。参看习题 2-19

**例 2-19** 设单输入单输出系统动态方程如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [-4 \quad -3 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}$$

现根据前述定义, 求出空间  $\mathbf{X}_1$ 、 $\mathbf{X}_2$ 、 $\mathbf{X}_3$ 、 $\mathbf{X}_4$  中向量的一般形式, 并选取等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , 将方程化为 (2-40) 的形式。为此, 先计算出  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  和  $\boldsymbol{\eta}$ , 可得 (见习题 2-18)

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \text{span} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right), \quad \boldsymbol{\eta} = \text{span} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

因此有

$$\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{\eta} \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_4 = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \text{span} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 & 14 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & -10 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{cP}^{-1} = [1 \quad 0 \quad -19 \quad 0]$$

显然  $\mathbf{P}$  阵的选取不是唯一的，因此  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  标准形式不是唯一的。读者可另选  $\mathbf{P}$  阵作为练习。

**不可简约的动态方程** 由定理 2-17 和定理 2-18 可以看出，若线性时不变动态方程不可控或不可观测，则存在与原方程有相同传递函数矩阵而维数较低的方程。换言之，若线性时不变动态方程不可控或不可观测，则其维数可以降低，而且降低了维数的方程仍具有与原方程相同的传递函数矩阵。

**定义 2-11** 线性时不变动态方程称为可以简约的，当且仅当存在一个与之零状态等价且维数较低的线性时不变动态方程。否则，则称动态方程是不可简约的。

因为对于不可简约的动态方程不存在维数更低的与之零状态等价的动态方程，所以不可简约的动态方程又称为最小阶动态方程。

**定理 2-20** 线性时不变动态方程是不可简约的，必要且只要该动态方程是可控且可观测的。

**证明** 设动态方程。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \quad (2-43)$$

是不可控或不可观测的，则由定理 2-17 和定理 2-18 可知，(2-43) 可以简约。因此，我们只要证明若 (2-43) 可控可观测，则 (2-43) 为不可简约。用反证法证明，设  $n$  维动态方程 (2-43) 可控且可观测，但存在一个维数为  $n_1 < n$  的线性是不变动态方程

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2-44)$$

与 (2-43) 零状态等价。于是，由零状态等价的定义，对于  $[0, +\infty)$  中所有的  $t$ ,

$$\mathbf{C}e^{At}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) = \bar{\mathbf{C}}e^{\bar{A}t}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}}\delta(t) \quad (2-45)$$

即有

$$\mathbf{CA}^k\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

现考虑乘积

$$\mathbf{V}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^n\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^n\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{2(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

根据 (2-45), 用  $\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}}$  代替上式中的  $\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B}$ , 得

$$\mathbf{V}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{V}}_{n-1}\bar{\mathbf{U}}_{n-1}$$

因为 (2-43) 可控可观测, 故  $\text{rank}\mathbf{V}\mathbf{U} = n$ , 由上式可知  $\text{rank}\bar{\mathbf{V}}_{n-1}\bar{\mathbf{U}}_{n-1} = n > n_1$ , 这和  $\bar{\mathbf{V}}_{n-1}, \bar{\mathbf{U}}_{n-1}$  的秩最多是  $n_1$  矛盾。矛盾表明, 若 (2-43) 是可控可观测的, 则 (2-43) 必是不可简约的。

在 § 1-4 中曾经提到, 若动态方程  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  具有一指定的传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ , 则称动态方程  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  是  $\mathbf{G}(s)$  的实现。现在, 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  是  $\mathbf{G}(s)$  可控可观测的实现, 则称它为  $\mathbf{G}(s)$  的不可简约的实现或是最小阶实现。显然, 定理 1-9 的证明中给出的构造实现的方法不能直接得到最小阶实现。但是, 按照那里构造出的实现, 再运用定理 2-17, 定理 2-18 或定理 2-19 进行分解, 总可以得到  $\mathbf{G}(s)$  的最小阶实现。下面我们证明,  $\mathbf{G}(s)$  的所有最小阶实现是等价的。

**定理 2-21** 设动态方程  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  是  $q \times p$  正则有理矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的不可简约实现, 则  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}})$

也是  $\mathbf{G}(s)$  的不可简约实现, 必要且只要  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  和  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}})$  等价。也即存在一个非奇异常量矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$  和  $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$ 。

**证明** 充分性: 直接由定理 2-13 可知  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}})$  也是可控可观测的。又由等价变换保持传递函数矩阵不变, 故  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}})$  也是  $\mathbf{G}(s)$  的不可简约实现。

必要性: 设  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  是  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  的可控性和可观测性矩阵,  $\bar{\mathbf{U}}$  和  $\bar{\mathbf{V}}$  是  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}})$  的可控性和可观测性矩阵。若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  和  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}})$  是同一  $\mathbf{G}(s)$  的实现, 根据 (2-45) 和 (2-46) 有  $\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}}$  且

$$\mathbf{V}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{U}} \quad (2-47)$$

$$\mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{U}} \quad (2-48)$$

因为  $\mathbf{V}$  列满秩,  $\mathbf{U}$  行满秩, 故它们的伪逆存在且

$$\mathbf{V}^+ = (\mathbf{V}^*\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^*$$

$$\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^*(\mathbf{U}\mathbf{U}^*)^{-1}$$

由 (2-47) 可得  $\mathbf{V}^+\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}^+ = \mathbf{I}$

若令  $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}^+$ , 则有

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V}^+\bar{\mathbf{V}} \quad (2-49)$$

下面证明矩阵  $\mathbf{P}$  就是等价变换矩阵。由 (2-48), 可得

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$$

而

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{V}^+\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^+ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^+ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \mathbf{V}^+ \begin{bmatrix} \mathbf{CB} \\ \mathbf{CAB} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{V}^+\mathbf{VB} = \mathbf{B}
\end{aligned}$$

上式即

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}。$$

又

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}\mathbf{P} &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}^+ = \bar{\mathbf{C}}[\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}]\mathbf{U}^+ = [\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}]\mathbf{U}^+ \\
&= [\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]\mathbf{U}^+ = \mathbf{CU}\mathbf{U}^+ = \mathbf{C}
\end{aligned}$$

上式即

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}$$

以上证明过程是构造性的，(2-49)式给出了等价变换矩阵的求法。

## 小 结

在本章中,我们介绍了可控性和可观测性的概念,并推导了线性动态方程可控和可观测的各种定理。这里我们讨论这些定理之间的关系,首先列出相互对偶的定理如下:

可控性      定理  $\begin{matrix} 2-4 \\ \uparrow \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2-5 \\ \uparrow \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2-6 \\ \uparrow \end{matrix}$        $\begin{matrix} 2-7 \\ \uparrow \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2-17 \\ \uparrow \end{matrix}$

可观测性    定理  $\begin{matrix} 2-8 \\ \downarrow \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2-10 \\ \downarrow \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2-11 \\ \downarrow \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2-12 \\ \downarrow \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2-18 \\ \downarrow \end{matrix}$

对偶关系: 定理 2-9。

有关可观测性的定理,容易用对偶定理 2-9 从有关可控性的相应的定理推出,反之亦然。

以时间为变量的向量值函数组线性无关的概念是本章最基本的概念。定理 2-1 给出了判别函数组线性无关性的充分必要条件,它所用到的假定最少,故应用最广泛。在定理 2-1 的基础上,我们得到了定理 2-4。而定理 2-2 是判别函数组线性无关性的充分条件,虽然在推导该定理时附加了连续可微性的假定,但便于应用,在这个定理的基础上,我们得到了定理 2-5。如果所研究的动态方程有解析性的假定(条件最强),则对应定理 2-3。我们这里没有象定理 2-1 和定理 2-2 那样,将定理 2-3 进一步引伸为相应的可控性判据,但在必要时,读者可运用定理 2-3 来直接研究函数组的线性无关性。定理 2-6 是直接由定理 2-4 导出的,它给出了线性时不变动态方程可控的充分必要条件。关于若当型动态方程的定理 2-14,则由定理 2-6 很容易得出。

本章还在研究了可控子空间和不可观子空间的基础上,利用将动态方程分解为四部分的方法,探讨了系统的传递函数矩阵描述和状态空间描述的关系,从而得到了一个重要的结论,这就是传递函数矩阵仅仅取决于方程的可控可观测的部分。如果系统是可控或者不可观测的,那么传递函数矩阵就不足以描述系统。

定理 2-20 和定理 2-21 指出了有理函数矩阵  $G(s)$  的最小阶实现的性质,如何直接寻找  $G(s)$  的最小阶实现的问题在第三章中讨论。

## 习 题

2-1 下列各集合哪些在  $(-\infty, +\infty)$  上线性无关?

a,  $\{t, t^2, e^t, te^t\}$

b,  $\{t^2e^t, te^t, e^t, e^{2t}\}$

c,  $\{\sin t, \cos t, \sin 2t\}$

**2-2** 检验下列诸动态方程的可控性和可观测性。

$$a, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$b, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \mathbf{x}$$

$$c, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = [0 \quad 1] \mathbf{x}$$

$$d, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = [1 \quad e^{-t}] \mathbf{x}$$

**2-3** 证明，当且仅当对于任何  $\mathbf{x}(t_0)$  和  $\mathbf{x}^1$ ，存在有限时间  $t_1 > t_0$  和一个输入  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$ ，能在  $t_1$  时

刻将状态  $\mathbf{x}(t_0)$  转移到  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ ，则线性动态方程  $t_0$  可控。上述命题对离散线性系统是否成立？

**2-4** 试证：若线性动态方程在  $t_0$  可控，则在任何  $t < t_0$  该方程亦可控。又若线性动态方程在  $t_0$  可控，试问在  $t > t_0$  是否也可控？为什么？

**2-5** 试证 在所有能够转移  $(\mathbf{x}^0, t_0)$  到  $(0, t_1)$  的输入中，(2-9) 式所定义的输入消耗的能量最小，即有

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt = \text{Min}$$

**2-6** 试证可控性矩阵  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  满足下列矩阵微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{W}(t, t_1) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{W}(t, t_1) + \mathbf{W}(t, t_1) \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ \mathbf{W}(t_1, t_1) &= 0 \end{aligned}$$

**2-7** 试证  $\text{rank}[\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = n$  是时不变系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控的必要条件。并举例说明这并非系统可控的充分条件。

**2-8** 系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

若控制输入  $u$  取如下形式

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & 0 \leq t < \frac{2}{3}\pi \\ u_2 & \frac{2}{3}\pi \leq t < \frac{4}{3}\pi \\ u_3 & \frac{4}{3}\pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

问是否存在常数  $u_1$ 、 $u_2$  和  $u_3$ ，使系统状态能完全由  $x(0) = (1 \ 0)^T$  向  $x(2\pi) = (0 \ 0)^T$  的转换？

**2-9** 系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

若控制输入取下列形式

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ u_2 & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

这里  $u_1$  和  $u_2$  为常数。试证存在常数  $u_1$  和  $u_2$  使系统由  $x(0) = (x_{10} \ x_{20})^T$  转到  $x(\pi) = (0 \ 0)^T$  的

充分必要条件是系统状态可控。

**2-10** 若线性动态方程在  $t_0$  可控，则对于任何初态，能将它转移到零，并使它在以后的所有  $t$  保持不变。现问是否有可能将它转移到  $x^1 \neq 0$  并在其后一直保持  $x^1$ ？

**2-11** 证明在任何等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$  下，线性时变系统可观测性不变，其中  $\mathbf{P}(t)$  对所有  $t$  为非奇异且元为  $t$  的连续可微函数。

**2-12** 若系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = e^{-At} \mathbf{B} e^{At} \mathbf{x} + e^{-At} \mathbf{b} u$$

其中  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

问是否可使系统由  $t = 0$  的任意状态向  $t = 1$  的零状态转移。

**2-13** 对单输出时不变系统，试证明当系统可观测时，状态可由输出及其  $k(k = 1, 2, \dots, n-1)$  阶导数瞬时地确定。并问以上结论对多输出系统是否成立？

**2-14** 设有线性时不变系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ，试证明若系统可观测，则方程的所有模式将出现的输出中。反之即使在输出中出现全部模式，系统也未必可观测。

**2-15** 试叙述离散时不变线性系统的可控性和可观测性判据。

**2-16** 连续时间系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, c)$  的离散化时不变动态方程为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(n) + \bar{\mathbf{b}}u(n) \\ y(n) &= \bar{\mathbf{c}}\mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

证明，当且仅当

$$I_m[\lambda_i(\mathbf{A}) - \lambda_j(\mathbf{A})] \neq \frac{2\pi q}{T} \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots$$

而  $\text{Re}[\lambda_i(\mathbf{A}) - \lambda_j(\mathbf{A})] = 0$  时，系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, c)$  的可控性就意味着系统  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$  的可控性。其中  $\lambda_i(\mathbf{A})$  表示  $\mathbf{A}$  的一个特征值，输入  $u$  在同一采样周期  $T$  内为常量。

**2-17** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是对称传递函数阵  $\mathbf{G}(s)$  的不可简约实现，试证明  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T)$  也是  $\mathbf{G}(s)$  的不可简约实现，且存在唯一的非奇异对称阵  $\mathbf{P}$ ，使得

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}^T, \mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{C}^T, \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{B}^T$$

**2-18** 给定时不变系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [-4 \quad -3 \quad 1 \quad 1]$$

*a*，计算可控子空间  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  和不可观测子空间  $\boldsymbol{\eta}$ ，并计算下列空间： $\boldsymbol{\eta} \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$ ， $\boldsymbol{\eta} \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp$ ， $\boldsymbol{\eta}^\perp \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$ ， $\boldsymbol{\eta}^\perp \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp$ ；讨论在上述空间的直和空间中能否取到状态空间的基底。

*b*，计算  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$  和  $\mathbf{X}_4$ ，并选取  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，把系统按定理 2-19 的形式进行分解。

**2-19** 给定一个不稳定系统，其传递函数  $\mathbf{G}(s) = 1/(s-1)$ ，假定我们希望利用串联另一个系统  $\mathbf{G}_c(s)$  的办法来稳定它。若  $\mathbf{G}_c(s) = (s-1)/(s+1)(s+2)$  时，所得的结果为

$$\mathbf{G}(s)\mathbf{G}_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

你是否认为“因为  $s=1$  的不稳定极点已被消去，串联系统是稳定的”为什么？

**2-20** 设  $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$  和  $(\bar{\mathbf{A}}(t), \bar{\mathbf{B}}(t), \bar{\mathbf{C}}(t), \bar{\mathbf{D}}(t))$  之间有以下关系：

$$\bar{\mathbf{A}}(t_0 + t) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{A}^T(t_0 - t), \quad \bar{\mathbf{B}}(t_0 + t) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{C}^T(t_0 - t)$$

$$\bar{\mathbf{C}}(t_0 + t) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{B}^T(t_0 - t), \quad \bar{\mathbf{D}}(t_0 + t) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{D}^T(t_0 - t)$$

证明  $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$  在  $t_0$  可控性（可观测性）等价于  $(\bar{\mathbf{A}}(t), \bar{\mathbf{B}}(t), \bar{\mathbf{C}}(t), \bar{\mathbf{D}}(t))$  在  $t_0$  的可重  
构性（可达性）。

**2-21** 动态方程如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

计算可控子空间  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  和不可观测子空间  $\boldsymbol{\eta}$ ，并计算下列空间：

$$\boldsymbol{\eta} \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle, \quad \boldsymbol{\eta} \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp, \quad \boldsymbol{\eta}^\perp \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle, \quad \boldsymbol{\eta}^\perp \cap \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle^\perp$$

选取基底矩阵，分别将动态方程进行可观性分解，进行标准分解。



### 第三章 线性时不变系统的标准形与最小阶实现

把系统动态方程化为等价的简单而典型的形式,对于揭示系统代数结构的本质特征,以及系统的分析与设计将会带来很大的方便,因此利用等价变换化系统动态方程为标准形的问题成为线性系统理论中的一个重要课题。

在第一章中已经指出,动态方程等价变换的矩阵  $\mathbf{P}$  是由状态空间基底的选取来决定的。因此常把构造  $\mathbf{P}$  阵的问题化为选取状态空间适当基底的问题来讨论。由于所给的条件不同和选取基底的方法不同,从而可以得到各种不同形式的标准形。在实际实用中,常是根据所研究问题的需要而决定采用什么样的标准形。本章所介绍的几种标准形,是以后讨论极点配置和观测器设计等问题时要用到的。

实现问题,也是线性系统理论的重要课题之一。这是因为:状态空间方法在系统设计和计算上都是以动态方程为基础的,为了应用这些方法,我们需要把传递函数阵用动态方程予以实现,特别是在有些实际问题中,由于系统物理过程比较复杂,通过分析的方法来建立它的动态方程十分困难,甚至不可能,这时可能采取途径之一就是先确定输入输出间的传递函数阵,然后根据传递函数阵来确定系统的动态方程。其次,复杂系统的设计往往希望能在模拟计算机或数字计算机上仿真,以便在构成物理系统之前就能检查它的特性,系统的动态方程描述则比较便于仿真,例如在模拟机上指定积分器的输出作为变量,就很容易仿真系统。在实际应用中,动态方程实现也提供了运算放大器电路综合传递函数的一个方法。

每一个可实现的传递函数阵,可以有无限多个实现。我们感兴趣的是这些实现中维数最小的实现,即最小阶实现。在实用中,最小阶实现在网络综合和系统仿真时,所用到的元件和积分器最少,从经济和灵敏度的角度来看是必要的。关于有理函数阵的最小阶实现问题,定理 2—20 及定理 2—21 是基本的,本章则着重于构成最小阶实现的方法。

#### § 3—1 系统的标准形

**关于等价变换** 等价变换的关系

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$$

其中  $\mathbf{P}$  为坐标变换阵,即有  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ 。 $\mathbf{P}^{-1}$  为基底变换阵。

1, 选取基底阵时,即已知  $\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{n-1} \quad \mathbf{q}_n]$ , 通过下列关系式

$$\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{A}} \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$$

可求出  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ 。实际上

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{n-1} \quad \mathbf{q}_n] &= [\mathbf{A}\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{q}_{n-1} \quad \mathbf{A}\mathbf{q}_n] \\ &= [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{n-1} \quad \mathbf{q}_n] \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \bar{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

$Aq_i$  是基向量  $q_i$  在线性变换  $A$  作用下的像,简称基的像。而  $\bar{A}$  的列就是基的像  $Aq_i$  在这组基下的坐标。 $\bar{B}$  的列就是  $B$  的列在这组基下的坐标。

2, 选取坐标矩阵时, 即已知

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}$$

通过下列关系式:  $PA = \bar{A}P$   $C = \bar{C}P$  可求出  $\bar{A}, \bar{C}$ 。实际上

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} p_1 A \\ p_2 A \\ \vdots \\ p_n A \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad C = \bar{C} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

$p_i$  是行向量, 上式也可和“情

况 1”一样理解, 即  $\bar{A}$  的第  $i$  行是行向量  $p_i$  的像  $p_i A$  在对偶基  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$  下的坐标。 $\bar{C}$  的第  $i$  行是  $C$  的第  $i$  行在对偶基  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$  下的坐标。

### 1—1 单输入系统的可控标准形

一个单输入系统具有如下面(3—1)式的形式, 它一定是可控的。这可计算可控性矩阵来验证。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3-1)$$

(3—1)式的形式被称为单输入系统的可控标准形。(3—1)式中的  $A$  阵的特征式可计算如下

$$|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

对于一般的单输入、单输出  $n$  维动态方程

$$\dot{x} = Ax + bu \quad y = cx + du \quad (3-2)$$

其中  $A$ 、 $b$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times 1$  的矩阵。成立以下定理:

**定理 3—1** 若  $n$  维单输入系统(3—2)可控, 则存在可逆线性变换将其变换成可控标准形(3—1)。

下面给出变换矩阵  $P$  的构成方法。

- 1) 计算可控性矩阵  $U$ ;
- 2) 计算  $U^{-1}$ , 并记  $U^{-1}$  的最后一行为  $h$ ;
- 3) 构造矩阵  $P$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{hA} \\ \mathbf{hA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{hA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

4) 令  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$ , 由  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}$  式即可求出变换后的系统状态方程。

**证明** 因  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{I}$ , 因而  $\mathbf{hU} = \mathbf{h}[\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$ , 即

$$\mathbf{hb} = 0, \ \mathbf{hAb} = 0, \ \mathbf{hA}^2\mathbf{b} = 0, \dots, \mathbf{hA}^{n-2}\mathbf{b} = 0, \ \mathbf{hA}^{n-1}\mathbf{b} = 1 \quad (3-4)$$

为了证明  $\mathbf{P}$  是可逆矩阵, 取  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]$ , 令  $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{P} = 0$ , 即有

$$\alpha_1\mathbf{h} + \alpha_2\mathbf{hA} + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{hA}^{n-2} + \alpha_n\mathbf{hA}^{n-1} = 0$$

将上式右乘  $\mathbf{b}$ , 运用(3—4)式, 可得  $\alpha_n = 0$ ; 将上式右乘  $\mathbf{Ab}$ , 运用(3—4)式, 可得  $\alpha_{n-1} = 0$ ; 依此类推, 可得  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ 。即证明了  $\mathbf{P}$  是可逆矩阵。

根据  $\mathbf{PA} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}$      $\mathbf{Pb} = \bar{\mathbf{b}}$  可以证明  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}$  所具有的形式。

**附注:** (1) 系统(3—2)可控, 因此向量组  $\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$  线性无关, 按下式定义的向量组

$$[\mathbf{q}^1 \ \mathbf{q}^2 \ \dots \ \mathbf{q}^n] = [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

也线性无关, 并可取为状态空间的基底。这时等价变换矩阵  $\mathbf{P} = [\mathbf{q}^1 \ \mathbf{q}^2 \ \dots \ \mathbf{q}^n]^{-1}$ 。同样可直接证明系统(3—2)也可化为(3—1)的形式。

(2) 由于化同一标准形的变换矩阵是唯一的, 故可知(3—5)式的基底矩阵的逆阵就是(3—3)式的坐标变换阵, 即

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{hA} \\ \mathbf{hA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{hA}^{n-1} \end{bmatrix} = \{[\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}\}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}^{-1} [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]^{-1}$$

## 1—2 单输出系统的可观测标准形

一个单输出系统如果其  $\mathbf{A}, \mathbf{c}$  阵有(3—6)的标准形式, 它一定是可观测的, 这可计算可观测性矩阵的秩来验证。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad (3—6)$$

(3—6)式称为单输出系统的可观测标准形。

**定理 3—2** 若  $n$  维单输出系统(3—2)可观测, 则存在可逆线性变换将其变换成可观测标准形(3—6)。

现在通过对偶原理来找出将系统化为可观标准形的变换矩阵。

给定系统方程如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

若有等价变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}} \quad (\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}) \quad (3—7)$$

将其化为可观测标准形

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u, \quad y = \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{x}}$$

式中  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{c}}$  具有(3—6)的形式。现在构造原系统的对偶系统为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T\mathbf{z} + \mathbf{c}^T u, \quad w = \mathbf{b}^T\mathbf{z} \quad (3—8, 3—9)$$

(3—8, 3—9)的系统可控, 可以通过  $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{P}\mathbf{z}$  化为下列的可控标准形, 其变换矩阵为  $\mathbf{P}$ 。

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{b}}_1 u, \quad w = \bar{\mathbf{c}}_1\bar{\mathbf{z}} \quad (3—10)$$

这里

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{P}\mathbf{A}^T\mathbf{P}^{-1}, \quad \bar{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{P}\mathbf{c}^T, \quad \bar{\mathbf{c}}_1 = \mathbf{b}^T\mathbf{P}^{-1}$$

(3—10)式的对偶系统即是原系统的可观测标准形,

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \bar{\mathbf{A}}_1^T\bar{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{c}}_1^T v, \quad \bar{w} = \bar{\mathbf{b}}_1^T\bar{\mathbf{z}} \quad (3—11, 3—12)$$

因此有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_1^T &= (\mathbf{P}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}^T & \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \\ \bar{\mathbf{c}}_1^T &= (\mathbf{P}^T)^{-1}\mathbf{b} & \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{b}}_1^T &= \mathbf{c}\mathbf{P}^T & \bar{\mathbf{c}} &= \mathbf{c}\mathbf{M} \end{aligned} \quad (3—13)$$

比较上面两组式子, 可知

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^T \quad (3—14)$$

**例题 3—1** 系统动态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

将系统动态方程化为可观标准形，并求出变换矩阵。

**解** 显然该系统可观测，可以化为可观标准形。写出它的对偶系统的  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$  阵，分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据这里的  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$  阵，按化可控标准形求变换阵的步骤求出  $\mathbf{P}$  阵：

1, 计算可控性矩阵

$$\mathbf{U} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2, 对  $\mathbf{U}$  求逆，并求出  $\mathbf{h}$

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = [0.5 \quad -0.5]$$

3, 由(3—3)式求出  $\mathbf{P}$  阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{h}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4, 由(3—14)式求出  $\mathbf{M}$  阵

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5, 由(3—13)式求出

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{c}} &= \mathbf{c}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 1—3 多变量系统的可控（观）标准形(伦伯格第二标准形)

对于一般的多输入、多输出  $n$  维动态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3—15)$$

其中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times p$ 、 $q \times n$  的矩阵。

**定理 3—3** 设系统(3—15)可控，则存在等价变换将其化为 (3—16)式的伦伯格第二可控标准形。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3—16)$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{A}_{p1} & & & & \mathbf{A}_{pp} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \times & \times & \cdots & \times & \times \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{ii}, \mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_i$  这里  $\mathbf{A}_{ii}, \mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_i$  分别是  $\mu_i \times \mu_i, \mu_i \times \mu_j, \mu_i \times p$  的矩阵。

下面介绍变换的具体做法以及补充说明(3—16)式中某些符号的意义。

(1) 先列出可控性矩阵

$$\mathbf{U} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_p \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_p]$$

按上面的排列顺序，自左向右挑选出  $n$  个线性无关向量，再重新排列如下

$$\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_p \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\mu_p-1}\mathbf{b}_p$$

显然有  $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p = n$ ，令

$$\mathbf{P}_1^{-1} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_p \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\mu_p-1}\mathbf{b}_p]$$

(2) 求出  $\mathbf{P}_1$ ，以  $\mathbf{h}_i$  表示  $\mathbf{P}_1$  阵的  $\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \cdots, \sum_{i=1}^p \mu_i$  行，然后构成矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_1\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_1\mathbf{A}^{\mu_1-1} \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_p \\ \vdots \\ \mathbf{h}_p\mathbf{A}^{\mu_p-1} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

(3) 取非奇异变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_2\mathbf{x}$ ，( $\mathbf{x} = \mathbf{P}_2^{-1}\bar{\mathbf{x}}$ ) 可得到  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_2\mathbf{A}\mathbf{P}_2^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_2\mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}_2^{-1}$ 。

**例题 3—2** 设系统动态方程(A,B,C)为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -22 & -11 & -4 & 0 \\ -23 & -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试求其可控标准形。

**解** 计算可控性矩阵可知其前四个线性无关列为 1,2,3,5 列, 故  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1$ , 并可求出  $\mathbf{h}_1 = [2 \ 1 \ 0 \ 0], \mathbf{h}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ , 从而可得

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{h}_1 \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由计算  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_2 \mathbf{A} \mathbf{P}_2^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_2 \mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}_2^{-1}$ , 从而可得可控标准形

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 \\ -11 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

类似地可建立多输出系统的可观标准形, 这里省略。

**定理 3—4** 设系统 (3—15) 可观测, 则存在等价变换将其变换为 (3—18) 所示的伦伯格第二可观标准形

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}_2 \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3-18)$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \cdots & \mathbf{A}_{1q} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{A}_{q1} & & & & \mathbf{A}_{qq} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \times \\ 1 & 0 & & \times \\ & 1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \times \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \cdots & \times \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{ii}, \mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_i$  这里  $\mathbf{A}_{ii}, \mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_i$  分别是  $\nu_i \times \nu_i, \nu_i \times \nu_j$  的矩阵。

$$\bar{\mathbf{C}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \times & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \vdots & 0 & \times & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

该定理证明与定理 3—3 类似，也可以用对偶定理，作为习题留给读者（见习题 3—6）。

#### 1—4 多变量系统的三角标准形

若动态方程（3—15）可控，则其可控性矩阵

$$\mathbf{U} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_p \mathbf{A} \mathbf{b}_1 \mathbf{A} \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{A} \mathbf{b}_p \cdots \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}_1 \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}_p]$$

的秩为  $n$ 。

现在这样来选取  $\mathbf{U}$  阵中  $n$  个线性无关的列向量。从向量  $\mathbf{b}_1$  开始，然后继续选  $\mathbf{A} \mathbf{b}_1, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_1, \cdots$  至  $\mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1} \mathbf{b}_1$  直到向量  $\mathbf{A}^{\bar{\mu}_1} \mathbf{b}_1$  能用  $\mathbf{b}_1, \mathbf{A} \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1} \mathbf{b}_1$  的线性组合来表示为止。若  $\bar{\mu}_1 = n$ ，则方程能单独由  $\mathbf{B}$  的第一列控制。若  $\bar{\mu}_1 < n$ ，则继续选  $\mathbf{b}_2, \mathbf{A} \mathbf{b}_2$  至  $\mathbf{A}^{\bar{\mu}_2-1} \mathbf{b}_2$ ，直到向量  $\mathbf{A}^{\bar{\mu}_2} \mathbf{b}_2$  能用  $\mathbf{b}_1, \mathbf{A} \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1} \mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2, \mathbf{A} \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{A}^{\bar{\mu}_2-1} \mathbf{b}_2$  的线性组合表示为止。若  $\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 < n$ ，则再继续选  $\mathbf{b}_3, \mathbf{A} \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{A}^{\bar{\mu}_3-1} \mathbf{b}_3$ ，依次进行下去，可以得到  $n$  个线性无关的向量

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{A} \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1} \mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2, \mathbf{A} \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{A}^{\bar{\mu}_2-1} \mathbf{b}_2; \cdots \mathbf{b}_p, \mathbf{A} \mathbf{b}_p, \cdots, \mathbf{A}^{\bar{\mu}_p-1} \mathbf{b}_p \quad (3-19)$$

式中  $\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \cdots \bar{\mu}_p = n$ ，以这组线性无关的向量作为状态空间的基底，或等价地令  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{x}$ ，其中

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{A} \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{A} \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{A}^{\bar{\mu}_2-1} \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_p \mathbf{A} \mathbf{b}_p \cdots \mathbf{A}^{\bar{\mu}_p-1} \mathbf{b}_p] \quad (3-20)$$

**定理 3—5** 设系统（3—15）可控，则存在等价变换将其变换为如（3—21）式所示的三角形标准形

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3-21)$$

其中



$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overline{\mu}_1 \\ \\ \\ \\ \\ \overline{\mu}_2 \\ \\ \\ \\ \\ \overline{\mu}_p \end{matrix}$$

和 (3—16) 中的  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  是不同的量, 这可用以下例子来说明。

87

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

其中  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  互异。系统的可控性矩阵为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_1^2 & 0 & \lambda_1^3 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^3 \\ 1 & 0 & \lambda_3 & 0 & \lambda_3^2 & 0 & \lambda_3^3 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda_4 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_2 \end{matrix}$$

按照 (3—16) 的方式可选出  $\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{A}\mathbf{b}_2$ , 即  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2$ ; 而按 (3—21) 的方式可选出  $\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1, \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1$ , 即  $\bar{\mu}_1 = 4, \bar{\mu}_2 = 0$ 。

## § 3—2 单变量系统的实现

### 2—1 可控性、可观测性与零、极点对消问题

本节首先研究单变量系统动态方程的可控性、可观性与传递函数零、极点相消问题之间的关系。考虑单变量系统，其动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (3—22)$$

(3—22)式对应的传递函数为

$$g(s) = \mathbf{c}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}adj(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}}{|\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A}|} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3—23)$$

式中：

$$\begin{aligned} N(s) &= \mathbf{c}adj(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} \\ D(s) &= |\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

$N(s) = 0$  的根称为传递函数  $g(s)$  的零点， $D(s) = 0$  的根称为传递函数  $g(s)$  的极点。下面是本段的主要结果。

**定理 3—6** 动态方程(3—22)可控、可观测的充分必要条件是  $g(s)$  无零、极点对消，即  $D(s)$  和  $N(s)$  无非常数的公因式。

**证明** 首先用反证法证明条件的必要性。若有  $s = s_0$  既使  $N(s_0) = 0$ ，又使  $D(s_0) = 0$ ，由(3—23)式即得

$$|s_0\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0, \quad \mathbf{c}adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0 \quad (3—24)$$

利用恒等式

$$(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})\frac{adj(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A}|} = \mathbf{I}$$

可得

$$(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})adj(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A}) = D(s)\mathbf{I} \quad (3—25)$$

将  $s=s_0$  代入(3—25)式，并利用(3—24)式，可得

$$s_0adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{A}adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (3—26)$$

将上式前乘  $\mathbf{c}$ 、后乘  $\mathbf{b}$  后即为

$$\mathbf{c}\mathbf{A}adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = s_0\mathbf{c}adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = s_0N(s_0) = 0$$

将(3—26)式前乘  $\mathbf{c}\mathbf{A}$ 、后乘  $\mathbf{b}$  后即为

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^2adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = s_0\mathbf{c}\mathbf{A}adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0$$

依次类推可得

$$\begin{aligned} N(s) &= \mathbf{c}adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{c}\mathbf{A}adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} &= 0 \\ &\vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1}adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} &= 0 \end{aligned}$$

这组式子又可表示为

$$\begin{pmatrix} c \\ c\mathbf{A} \\ \vdots \\ c\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \text{adj}(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0 \quad (3-27)$$

因为动态方程可观测，故上式中前面的可观性矩阵是可逆矩阵，故有

$$\text{adj}(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0 \quad (3-28)$$

又由于系统可控，不妨假定  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$  具有可控标准形(3—1)的形式，直接计算可知

$$\text{adj}(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_0^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3-29)$$

出现矛盾，矛盾表明  $N(s)\mathbf{D}(s)$  和  $D(s)$  无相同因子，即  $g(s)$  不会出现零、极点相消的现象。

下面再证充分性，即若  $N(s)$  和  $D(s)$  无相同因子，要证明动态方程(3—22)是可控、可观的。用反证法，若系统不是既可控又可观测的，不妨设(3—22)是不可控的，这时可按可控性分解为(2—36)的形式，并且可知这时传递函数有

$$\begin{aligned} g(s) &= c(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{c\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} = \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= c_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{b}_1 = \frac{c_1\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)\mathbf{b}_1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1|} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \end{aligned}$$

在上面的式子中， $D(s)$  是  $n$  次多项式，而  $D_1(s)$  是  $n_1$  次多项式，由于系统不可控，所以  $n_1 < n$ ，而  $N(s)$  和  $D(s)$  无相同因子可消去，显然

$$\frac{N(s)}{D(s)} \neq \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

这和两者应相等矛盾，同样可以证明动态方程也不可能不可观测。充分性证毕。

**例题 3—4** 设系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad -2 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

不难验证系统是可控、可观的。分别计算

$$N(s) = c\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = s^2 - 2s + 1$$

$$D(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

显然  $N(s)$  和  $D(s)$  无非常数的公因式，这时传递函数没有零、极点相消。事实上

$$g(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)^4}$$

**推论 3—6** 单输入(出)系统可控(可观测)的充分必要条件是  $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}$  ( $c\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ) 和  $\Delta(s)$  无非常数公因式。

## 2—2 传递函数的最小阶动态方程实现

已知动态方程，可以用(2—57)式计算出传递函数。如果给出传递函数如何找出它所对应的动态方程？这一问题称为传递函数的实现问题。如果又要求所找出的动态方程阶数最低，就称为传递函数的最小实现问题。

这一问题具有重要的实用意义，因为传递函数是系统的输入输出关系的描述，它可以借助于实验的手段给出，例如可以通过对系统阶跃响应、频率响应的数据处理求出传递函数。但是利用状态空间方法来分析和设计系统的出发点是动态方程，所以将传递函数这一数学模型转化为等效的状态空间模型，就是状态空间研究方法中不可缺少的一步，又因为人们总是希望所得到的动态方程阶数尽可能的低，这样可使计算简单，并且在进行动态仿真时用的积分器最少，所以需要寻找最小阶的动态方程。

设给定有理函数

$$g_0(s) = \frac{ds^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1s + d_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (3—30)$$

(3—30)式中的  $d$  就是下列动态方程中的直接传递部分

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx + du \quad (3—31)$$

所以只需讨论(3—30)式中的严格真有理分式部分。

问题的提法是：给定严格真有理函数

$$g(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (3—32)$$

要求寻找  $A$ 、 $b$ 、 $c$ ，使得

$$c(sI - A)^{-1}b = g(s) \quad (3—33)$$

并且在所有满足(3—33)式的  $A$ 、 $b$ 、 $c$  中，要求  $A$  的维数尽可能的小。下面分两种情况讨论。

(1)  $g(s)$  的分子和分母无非常数公因式的情况

对(3—32)式，可构造出如下的实现( $A$ 、 $b$ 、 $c$ )

a) 可控标准形的最小阶实现 (3—34):

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} & b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ c &= [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}] \end{aligned} \quad (3—34)$$

b) 可观标准形的最小阶实现(3—35):

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} & b &= \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \\ c &= [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \end{aligned}$$

(3—35)

(3—34)式给出的 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 具有可控标准形, 故一定是可控的。可直接计算它对应的传递函数就是(3—32)的传递函数。由于 $g(s)$ 无零、极点对消, 故可知(3—34)式对应的动态方程也一定是可观的。这时 $\mathbf{A}$ 阵的规模不可能再减小了, 因为再减小就不可能得出传递函数的分母是 $n$ 次多项式的结果。所以(3—34)式给出的就是(3—32)的最小阶动态方程实现。同样可以说明(3—35)式是(3—32)的可观标准形的最小实现。

**C)** 若当标准形的最小阶实现

若 $g(s)$ 的分母已经分解成一次因式的乘积, 通过部分分式分解, 容易得到若当标准形的最小阶实现。

**例题 3—5** 给定传递函数 $g(s)$ 如下

$$\frac{y(s)}{u(s)} = g(s) = \frac{3s^3 - 12s^2 + 18s - 10}{(s-1)^3(s-2)}$$

求若当标准形的动态方程实现, 并讨论所求实现的可控性和可观测性。

**解** 因为 $g(s)$ 的分母已经分解成一次因式的乘积, 可以通过部分分式分解的方法, 容易得到

$g(s)$ 以下的形式

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{u(s)} = g(s) &= \frac{3s^3 - 12s^2 + 18s - 10}{(s-1)^3(s-2)} \\ &= \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{-2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)} + \frac{2}{(s-2)} \end{aligned}$$

因为 $g(s)$ 无零、极点对消, 在以上的分解式中, 第一项和第四项不会消失。上式可写为

$$y(s) = \frac{1}{(s-1)^3} u(s) + \frac{-2}{(s-1)^2} u(s) + \frac{1}{(s-1)} u(s) + \frac{2}{(s-2)} u(s)$$

令

$$\begin{aligned} x_3(s) &= \frac{1}{s-1} u(s) \\ x_2(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} u(s) = \frac{1}{s-1} x_3(s) \\ x_1(s) &= \frac{1}{(s-1)^3} u(s) = \frac{1}{s-1} x_2(s) \\ x_4(s) &= \frac{1}{s-2} u(s) \end{aligned}$$

上面这组式子又可表示为

$$\begin{aligned} sx_3(s) - x_3(s) &= u(s) \\ sx_2(s) - x_2(s) &= x_3(s) \\ sx_1(s) - x_1(s) &= x_2(s) \\ sx_4(s) - 2x_4(s) &= u(s) \end{aligned}$$

它们分别对应于下列微分方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_3 \\ \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_4 &= 2x_4 + u\end{aligned}$$

重新排列为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + u \\ \dot{x}_4 &= 2x_4 + u\end{aligned}$$

而

$$y = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4$$

综合上面各式并令  $\mathbf{x}=[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ , 可得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -2 \quad 1 \quad 2] \mathbf{x}\end{aligned}$$

由若当形方程的可控性判据和可观测性判据可知上式是可控、可观测的, 因而它是  $g(s)$  一个最小阶实现。

(2)  $g(s)$  的分子和分母有相消因式的情况

若  $g(s)$  的分母是  $n$  阶多项式, 但分子和分母有相消的公因式时, 这时  $n$  阶的动态方程实现就不是最小阶实现, 而是非最小实现, (或是不可控的, 或是不可观的, 或是既不可控也不可观的)。  $g(s)$  的最小实现的维数一定小于  $n$ 。

**例题 3—6** 设  $g(s)$  的分子  $N(s)=s+1$ , 而分母  $D(s)=s^3 + 2s^2 + 2s + 1$ , 分子与分母有公因子  $(s+1)$ 。仿照(3—34)式, 可写出  $g(s)$  的一个三维的可控标准形实现

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}\end{aligned}$$

无须验证这个实现是可控的, 但是计算可观测性矩阵

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{rank} \mathbf{V} = 2$$

因此这一实现是不可观的。同理, 如果按(3—35)式构造如下的可观测标准形的三维实现, 它一定是不可控的。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

当然也可以构造出  $g(s)$  的既不可控又不可观测的三维实现。现在将分子和分母中的公因式消去，可得

$$g(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s+1} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

如果用上式中最后的式子，仿照(2—68)式或(2—69)式，构造出二维的动态方程实现，它是  $g(s)$  的最小实现，再参考可控性或可观性分解的叙述，将此最小阶实现扩展为既不可控又不可观测的三阶的实现。 $g(s)$  的一个最小实现为

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$g(s)$  的一个既不可控又不可观测的三阶的实现为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & 0 \end{bmatrix}$$



## § 3—3 多变量系统的实现

### 3—1 动态方程的可控、可观性与传递函数矩阵的关系

设多变量系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3—36)$$

其中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  分别是  $n \times n, n \times p, q \times n$  的实常量矩阵, 其传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{|\mathbf{sI} - \mathbf{A}|} \quad (3—37)$$

式中  $|\mathbf{sI} - \mathbf{A}|$  称为系统的特征式。传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  是一个严格真有理函数阵, 即它的每一元素都是  $s$  的有理函数, 且分母的阶次严格高于分子的阶次。

在第一章中已对有理函数矩阵的极点、零点作了定义。现利用极点多项式的概念研究多变量系统最小实现问题。设  $\mathbf{G}(s)$  的每一个元素都是既约的  $s$  的有理函数。并设

$$\text{rank} \mathbf{G}(s) = r。$$

**定义 3—1** 有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  称为真(严格真)有理函数阵, 如果  $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{G}(s) = \mathbf{D} (\mathbf{D} = 0)$ 。

**定义 3—2**  $\mathbf{G}(s)$  的极点多项式中  $s$  的最高次数称为  $\mathbf{G}(s)$  的麦克米伦阶, 用记号  $\delta \mathbf{G}(s)$  表示。

对例题 1—7, 显然  $\delta \mathbf{G}(s) = 5$ 。

**定理 3—7** 若(3—37)式中,  $\mathbf{A}$  的特征式与  $\mathbf{C} \text{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) \mathbf{B}$  之间没有非常数公因式, 则系统(3—36)是可控、可观的。

本定理中的条件是系统可控可观的充分条件而不是必要条件, 这点与单变量系统不同。可用以下例题来说明。

**例题 3—7** 设系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

显然系统可控且可观, 但传递函数阵为

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

在  $\mathbf{A}$  的特征式与  $\mathbf{C} \text{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) \mathbf{B}$  之间存在公因式  $(s-1)$ 。故定理中的条件不是必要的。

**定理 3—8** 系统(3—36)可控可观的充分必要条件是  $\mathbf{G}(s)$  的极点多项式等于  $\mathbf{A}$  的特征多项式。

**例题 3—8** 设系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

其特征多项式为  $s^2(s+1)^2$ 。系统的传递函数阵为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{s-1}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}(s)$  相应的极点多项式为  $s^2(s+1)^2$ ，可知系统动态方程是可控可观的。

极点多项式和麦克米伦阶的概念以及定理 3—7 和定理 3—8，对于构造  $\mathbf{G}(s)$  的最小动态方程实现是基本的。这些概念和定理也是单变量情况相应概念的推广。

任一真有理函数矩阵  $\mathbf{G}_1(s)$  总可分解为  $\mathbf{G}(s) + \mathbf{D}$ ，其中  $\mathbf{G}(s)$  为严格真有理函数阵。所以这里只讨论严格真有理函数阵如何用动态方程来实现的问题。

### 3—2 向量传递函数的实现

(1) 行分母展开时，得可观标准形最小实现

#### 例题 3—9

$$\left[ \frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)} \quad \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)^3} \right]$$

解

$$\frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} s^3 + \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}}{s(s+1)^3(s+3)}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 列分母展开时，得可控标准形最小实现

#### 例题 3—10

$$\left[ \frac{2s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)(s+4)} \right]^T$$

解

$$\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} s^4 + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} s^3 + \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}}{s^5 + 10s^4 + 35s^3 + 50s^2 + 24s}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 2 & 0 \\ 12 & 22 & 18 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

注意：因为  $\mathbf{G}(s)$  的诸元素已是既约形式，故行分母（列分母）的次数就是麦克米伦阶，所构造的实现一定是最小实现。这点和标量传函一样。

### 3—3 传递函数矩阵的实现

可以将矩阵  $\mathbf{G}(s)$  分成列(行)，每列(行)按列(行)分母展开。以 2 列为例说明列展开时的做法，设第  $i$  列展开所得的可控形实现为  $\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{C}_i$ ，可按以下方式形成  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2]$$

这一实现是可控的，并可计算出上述实现的传函阵为  $\mathbf{G}(s)$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} &= [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \quad \mathbf{C}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{C}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{b}_2] \end{aligned}$$

同理，可以将  $\mathbf{G}(s)$  分成行，每行按行分母展开。以 2 行为例说明行展开时的做法，设第  $i$  行展开所得的可观形实现为  $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{c}_i$ ，可按以下方式形成  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}$$

这一实现是可观的，并可计算出上述实现的传函阵为  $\mathbf{G}(s)$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{c}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**定理 3—9** 严格真有理函数阵  $\mathbf{G}(s)$  的一个动态方程实现为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3-38)$$

其中矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  可用如下方法构造。

(1) 按行分母展开的可观形实现

将  $\mathbf{G}(s)$  写成下列形式

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_1(s)}{d_1(s)} \\ \frac{N_2(s)}{d_2(s)} \\ \vdots \\ \frac{N_q(s)}{d_q(s)} \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

式中  $d_i(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) 是  $\mathbf{G}(s)$  第  $i$  行的最小首一公分母

$$d_i(s) = s^{n_i} + a_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + a_1^i s + a_0^i,$$

$\mathbf{G}(s)$  第  $i$  行的分子可以写成  $n_i$  次  $s$  的多项式，其系数为  $p$  维常数行向量

构造如下矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  作为  $\mathbf{G}(s)$  的可观形实现：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_q \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_q \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & & \\ & \mathbf{c}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{c}_q \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0^i \\ & & & -a_1^i & \\ & \mathbf{I}_{n_i-1} & & & \\ & & & & -a_{n_i-1}^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0^i \\ \mathbf{N}_1^i \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{n_i-1}^i \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

$$\mathbf{c}_i = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

(3—41)式中  $\mathbf{c}_i$  表示  $n_i$  维行向量。

(2) 按列分母展开的可控形实现

将  $\mathbf{G}(s)$  写成下列形式

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{N}_1(s)}{d_1(s)} & \frac{\mathbf{N}_2(s)}{d_2(s)} & \cdots & \frac{\mathbf{N}_p(s)}{d_p(s)} \end{bmatrix} \quad (3-42)$$

上式中的  $d_i(s)$  是  $\mathbf{G}(s)$  第  $i$  列的最小首一公分母

$$d_i(s) = s^{n_i} + a_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \cdots + a_1^i s + a_0^i,$$

$\mathbf{G}(s)$  第  $i$  列的分子可以写成  $n_i$  次  $s$  的多项式, 其系数为  $q$  维常数列向量

$$\mathbf{N}_i(s) = \mathbf{N}_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \mathbf{N}_{n_i-2}^i s^{n_i-2} + \cdots + \mathbf{N}_1^i s + \mathbf{N}_0^i,$$

构造如下矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  作为  $\mathbf{G}(s)$  的可控形实现

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & & \\ & \mathbf{b}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_p] \quad (3-43)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n_i-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0^i & -a_1^i & \cdots & -a_{n_i-1}^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

$$\mathbf{C}_i = [\mathbf{N}_0^i \quad \mathbf{N}_1^i \quad \cdots \quad \mathbf{N}_{n_i-1}^i]$$

式(3—44)中的  $\mathbf{b}_i$  表示  $n_i$  维的列向量。特别注意: 式(3—40)和式(3—43)中采用的记号相同, 但含义是不同的。

**例题 3—11** 给定有理函数阵为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}$$

试用行展开和列展开构造  $\mathbf{G}(s)$  实现。

**解** 采用行展开方法, 将  $\mathbf{G}(s)$  写成

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$d_1(s) = s^2 + 4s + 3, \quad d_2(s) = s^2 + 3s + 2,$$

$$\mathbf{N}_0^1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_0^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix},$$

按(3—41)式, 可得可观性实现如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & & \\ 1 & -4 & & \\ & & 0 & -2 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易验证这一实现是可观的但不是可控的。直接计算可知  $\delta\mathbf{G}(s) = 3$ , 而  $\mathbf{A}$  阵的维数是 4, 由定理 3—8 可知, 该实现一定不可控。要得到可控可观的实现, 可以对此四阶实现进行可控性分解, 进而得到一个三阶的实现。但如果用列展开方法, 就可以得到可控可观的实现, 做法如下: 将  $\mathbf{G}(s)$  写成

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{s+1} & \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$d_1(s) = s+1 \quad d_2(s) = s^2 + 5s + 6 \quad \mathbf{N}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_0^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

由(3—38)式可构成如下的实现

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

这是可控性实现, 它也是可观的, 因而是  $\mathbf{G}(s)$  的最小阶实现。显然, 在本例中一开始就应选择列展开方法。这是因为各列分母次数之和为 3, 小于各行分母次数之和 4。如果不论行展开或列展开都不能得到最小阶实现, 那么利用可控性分解或可观性分解进一步降低系统的阶次就是不能少的了。

**定理 3—10** 若  $q \times p$  有理函数阵  $\mathbf{G}(s)$  可表成下列形式  $\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^r \mathbf{R}_i(s - \lambda_i)^{-1}$  其中  $\lambda_i$  互不相同,  $\mathbf{R}_i$  为  $q \times p$  常数矩阵。则有  $\delta\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^r \text{rank} \mathbf{R}_i$ 。

**证明** 设  $\text{rank} \mathbf{R}_i = n_i$ , 将  $\mathbf{R}_i$  进行满秩分解, 即  $\mathbf{R}_i = \mathbf{C}_i \times \mathbf{B}_i$ , 其中  $\mathbf{C}_i$  为  $n_i \times q$  阵,  $\text{rank} \mathbf{C}_i = n_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  为  $n_i \times p$  阵,  $\text{rank} \mathbf{B}_i = n_i$ , 构成  $\mathbf{R}_i / (s - \lambda_i)$  的最小阶实现为  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$ , 其中  $\mathbf{A}_i$  是  $n_i \times n_i$  的对角矩阵, 对角元为  $\lambda_i$ 。再用直和的方式构成:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_r]$$

利用若当形判据易证这一实现  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是  $\mathbf{G}(s)$  的最小实现，其维数为  $\sum_{i=1}^r \text{rank} \mathbf{R}_i$ ，故所证命题成立。

定理 3—10 给出了一种通过满秩分解来构造最小实现的方法。

**例题 3—12** 给定

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

求  $\mathbf{G}(s)$  的最小实现。

**解** 经计算可知  $\delta \mathbf{G}(s) = 5$ ，若按行分母展开或按列分母展开均得到六阶实现。现用定理 3—9 的方法做。

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

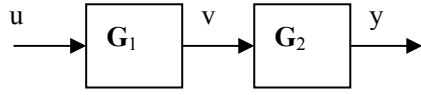
$\mathbf{G}(s)$  的一个最小实现为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

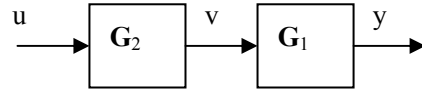
### 3—4 组合结构的状态空间实现

在实际问题中常常遇到下列形式的组合结构。

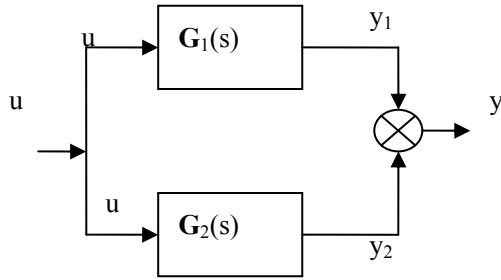
1, 串联方式一:



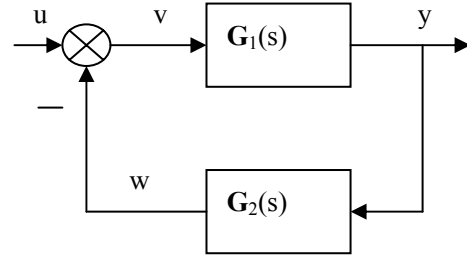
2, 串联方式二:



3, 并联方式:



4, 反馈结构:



设  $G_i(s)$  的状态空间实现为  $(A_i, B_i, C_i) (i=1,2)$ , 其中  $A_i, B_i, C_i$  分别是  $n_i \times n_i$   $n_i \times p_i$   $q_i \times n_i$  的矩阵。下面将分别给出这些组合结构的一个状态空间实现和相应的传递函数阵, 并同时说明  $n_i, p_i, q_i$  应满足的条件。

1, 串联方式一: 传函为  $y = G_2 G_1 u$ , 这意味着  $q_1 = p_2$

$G_1$  实现为:  $\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \quad v = C_1 x_1$

$G_2$  实现为:  $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 v = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \quad y = C_2 x_2$

$G_1 G_2$  实现为:  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

2, 串联方式二: 传函为  $y = G_1 G_2 u$ , 这意味着  $q_2 = p_1$

$G_2$  实现为:  $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \quad y = C_2 x_2$

$G_1$  实现为:  $\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 v = A_1 x_1 + B_1 C_2 x_2 \quad y = C_1 x_1$

$G_1 G_2$  实现为:  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

3, 并联方式: 传函为  $G_1 + G_2$ , 这意味着  $p_1 = p_2, q_1 = q_2$

$G_1$  实现为:  $\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \quad y_1 = C_1 x_1$

$G_2$  实现为:  $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \quad y_2 = C_2 x_2$

$G_1 + G_2$  实现为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4, 反馈结构: 这意味着  $q_1 = p_2, p_1 = q_2$ 。

$\mathbf{G}_1$  实现为:  $\dot{x}_1 = \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{B}_1 v \quad y = \mathbf{C}_1 x_1$

$\mathbf{G}_2$  实现为:  $\dot{x}_2 = \mathbf{A}_2 x_2 + \mathbf{B}_2 y \quad w = \mathbf{C}_2 x_2 \quad v = u - w$

$$\dot{x}_1 = \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_1 w = \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = \mathbf{A}_2 x_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 x_1$$

反馈结构实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

下面来计算反馈结构的传递函数矩阵。

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_1 \mathbf{v} \quad (a)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}_2 \mathbf{y} \quad (b)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{G}_2 \mathbf{y} \quad (c)$$

(c)代入(a)可得

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_1 \mathbf{u} - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{y} \quad (\mathbf{I}_q + \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2) \mathbf{y} = \mathbf{G}_1 \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = (\mathbf{I}_q + \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_1 \mathbf{u}$$

或者另一做法: (a)式代入(b)、(c)后得  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{v} \quad \mathbf{v} = (\mathbf{I}_p + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{u}$

将  $\mathbf{v}$  代入(a)式, 可得

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_1 (\mathbf{I}_p + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{u}.$$

**注意:** 即使  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i) (i = 1, 2)$  是  $\mathbf{G}_i(s)$  的最小实现, 以上列出的组合结构的实现也未必是最小实现。



### § 3—4 正则有理函数矩阵的最小阶实现（一）

定理 1—9 已经指出，一个正则有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ ，可以由有限维线性时不变动态方程予以实现，§ 3—3 给了实现的方法。但是那里所构成的  $\mathbf{G}(s)$  的实现一般不是  $\mathbf{G}(s)$  的最小阶实现。为了得到最小阶实现，需要把非最小阶实现进行降价化简，可控性分解定理、可观性分解定理以及标准分解定理已经在原则上给出了这种降价化简的方法。然而在实际计算上，对于不同类型非最小阶实现的化简也可采用许多不同的具体算法。

本节介绍非最小实现降价化简为最小阶实现的罗森伯罗克（*Rosenbrock*）方法。

**罗森伯罗克降价化简算法** 罗森伯罗克将系统方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (3-45)$$

集合成一个  $(n+q) \times (n+p)$  的矩阵，并称为系统矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

#### 1) 按可控性分解形式

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \bar{\mathbf{x}}$$

上式中的两零块，意味着  $\bar{\mathbf{A}}_{22}$  是不可控部分。可控性分解还有另一形式，两零块的位置为

$$\begin{bmatrix} \times & 0 \\ \times & \times \\ \times & \times \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \times \end{bmatrix}$$

#### 2) 等价变换可用对系统矩阵的初等变换来表示

$$\begin{bmatrix} \mathbf{PAP}^{-1} & \mathbf{PB} \\ \mathbf{CP}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \\ & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \\ & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

首先定义两种初等变换：

- ① 对前  $n$  行和前  $n$  列进行：交换  $i$ 、 $j$  行，接着交换  $i$ 、 $j$  列；
- ② 用  $\alpha (\alpha \neq 0)$  乘第  $i$  行，接着用  $\alpha$  除以第  $i$  列；或者：  $i$  行乘  $\beta$  加到  $j$  行，接着，用第  $j$  列乘  $(-\beta)$  加到  $i$  列。

#### 3) *Rosenbrock* 算法：

现在可按下列算法来变换系统矩阵：

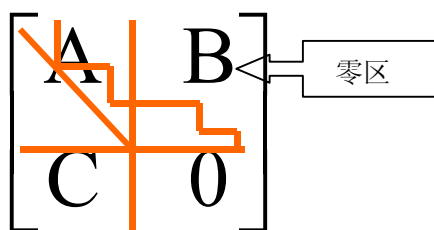
指标  $i$  将表示  $n+p-i$  列。指标  $j$  将表示  $n-j$  行。

算法步骤如下：

- (1) 令指标  $i = 0, j = 0$ ，并继续进行 (2)；
- (2) 若  $(1, n + p - j), (2, n + p - j), \dots, (n - j, n + p - j)$  位置上每个元素都是零，便转而行 (6)，否则继续进行 (3)；
- (3) 用  $\alpha = 1, \beta = n - j$  的变换①，把一个非零元素移到位置  $(n - j, n + p - i)$  上继续进行 (4)；
- (4) 用类似 ② 的变换，把位置  $(n - j, n + p - i)$  上的元素倍数加到  $(1, n + p - j), (2, n + p - j), \dots, (n - j - 1, n + p - j)$  位置的元素上，使这些元素最后变为零，继续进行 (5)；
- (5) 把  $i$  增加 1 和  $j$  增加 1。当  $j = n$ ，则过程终止，若  $j < n$ ，则转而行 (2)；
- (6) 把  $i$  增加 1，若  $i - j = p$ ，则过程终止，若  $i - j < p$ ，则又转而行 (2)。

显然，这个过程必然要终止。当它终止时，令  $j = n - b$ 。

算法的目的是在系统矩阵中产生尽可能多的行(顺序是行  $n$ ，行  $n - 1$ ， $\dots$ )，这些行的最后非零分量是常数，而在同一列中这些分量以上的元素都是零。这样的行显然都线性无关。从系统矩阵的第  $n$  行，第  $n + p$  列的元素开始，依次进行。化出一个“零区”，若零区和  $\mathbf{A}$  的对角线相交，分解完成；若零区和  $\mathbf{A}$  的对角线不相交，表示系统可控。



**4) 进行可观测性分解：**可对对偶系统进行可控分解即可

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

**例 3—13** 设  $\mathbf{G}(s)$  给定如下

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} 2(s - 1) & 2 \\ s - 1 & s - 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}(s)$  的可观测型实现为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

但系统的  $\delta \mathbf{G}(s) = 3$ ，故需用可控性分解的方法进行降阶。将  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  集中成下列系统矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-61)$$

将矩阵(3—61)第四行加到第三行，相应地第四列减去第三列；第四行的-2倍加到第一行，相应地第四列减去第一列的-2倍；第二、三行交换，相应地第二、三列交换，可得

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将以上矩阵再作如下变换：第三行的2倍加到第一行，相应地第三列减去第一列的2倍；第一、二行交换，相应地第一、二列交换，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得小阶实现为

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这也可由计算（ $\bar{\mathbf{A}}$ 、 $\bar{\mathbf{B}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ ）的可控性和可观测性矩阵以及传递函数矩阵来验证。

### § 3—5 正则有理函数矩阵的最小阶实现（二）

前节建立  $\mathbf{G}(s)$  最阶小实现的方法，通常是先建立一个或者是可控的实现或者是可观测的实现，而后降阶化简为最小阶实现。本节将介绍从  $\mathbf{G}(s)$  形成的亨克尔(Hankel)阵直接计算最小阶实现的方法。

**最小阶实现的问题的提法** 考虑  $q \times p$  的正则有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ ，将它展成

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}(\infty) + \mathbf{H}_0 s^{-1} + \mathbf{H}_1 s^{-2} + \cdots \quad (3-62)$$

其中  $\mathbf{H}_i (i = 0, 1, 2, \dots)$  是  $q \times p$  的常量矩阵，通常将  $\mathbf{H}_i$  称为  $\mathbf{G}(s)$  的马尔科夫参数矩阵。

若线性时不变动态程方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3-63)$$

是  $\mathbf{G}(s)$  的一个实现，则根据定义有

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

利用公式  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}}$ ，上式可展成

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{B}s^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}s^{-2} + \cdots \quad (3-64)$$

**引理 1** 动态方程 (3—63) 是  $\mathbf{G}(s)$  的一个实现，必要且只要

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}(\infty), \mathbf{H}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B} (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (3-65)$$

本引理可直接由比较 (3—62) 和 (3—64) 而得到。因为  $\mathbf{G}(\infty)$  直接给出了动态方程实现中的  $\mathbf{D}$  阵。故仅需要研究严格真有理函数矩阵。根据引理，最小实现问题可重述如下：给定矩阵序列  $\{\mathbf{H}_i\}$ ，寻找一个三元组  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ，使得  $\mathbf{H}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B}$ ，且  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是可控且可观测的。

由矩阵序列  $\{\mathbf{H}_i\}$  可定义矩阵  $\mathbf{H}_{ij}$  如下

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \cdots & \mathbf{H}_{i-1} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{H}_i \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & \cdots & \\ \cdots & & & \\ \mathbf{H}_{i-1} & \mathbf{H}_i & \cdots & \mathbf{H}_{i+j-2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}_{ij}$  称为由序列  $\{\mathbf{H}_i\}$  生成的亨克尔阵序列。下面讨论由  $\mathbf{G}(s)$  的马尔柯夫参数矩阵序列  $\{\mathbf{H}_i\}$  所生成的亨克尔矩阵的特点。

若记  $\mathbf{G}(s)$  各元素的首一最小公分母为

$$s^r + a_1 s^{r-1} + \cdots + a_{r-1} s + a_r$$

将  $\mathbf{G}(s)$  展开成

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{R}_1 s^{r-1} + \mathbf{R}_2 s^{r-2} + \cdots + \mathbf{R}_r}{s^r + a_1 s^{r-1} + \cdots + a_r} \quad (3-66)$$

因为已假定  $\mathbf{G}(s)$  是严格真的，故 (3—66) 式分子的最高幂次至多为  $r-1$ 。合并 (3—62) 和 (3—66)，可得

$$\mathbf{R}_1 s^{r-1} + \mathbf{R}_2 s^{r-2} + \cdots \mathbf{R}_r = (s^r + a_1 s^{r-1} + \cdots + a_r)(\mathbf{H}_0 s^{-1} + \mathbf{H}_1 s^{-2} + \cdots)$$

令  $s$  的同次幂系数相等，即有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{H}_1 + a_1 \mathbf{H}_0 &= \mathbf{R}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{H}_{r-1} + a_1 \mathbf{H}_{r-2} + \cdots a_{r-1} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{R}_r \\ \mathbf{H}_{r+i} + a_1 \mathbf{H}_{r+i-1} + \cdots a_r \mathbf{H}_i &= 0 (r = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned} \quad (3-67)$$

写出  $\mathbf{H}_{ij} (i, j > r)$  如下

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \cdots & \mathbf{H}_{r-1} & | & \mathbf{H}_r & \cdots & \mathbf{H}_{j-2} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{H}_r & | & \mathbf{H}_{r+1} & \cdots & \mathbf{H}_j \\ & \vdots & & & | & & & \\ \mathbf{H}_{r-1} & \mathbf{H}_r & & \mathbf{H}_{2r-2} & | & \mathbf{H}_{2r-2} & \cdots & \\ \mathbf{H}_r & \cdots & & \mathbf{H}_{2r-1} & | & \mathbf{H}_{2r} & \cdots & \\ \mathbf{H}_{r+1} & \cdots & & & | & \cdots & & \\ & \vdots & & & | & & & \\ \mathbf{H}_{i-1} & & & & | & \cdots & & \end{pmatrix} \quad (3-68)$$

根据 (3—67) 式，可知  $\mathbf{H}_{ij}$  的秩是有限数，至少  $\mathbf{H}_{rr}$  之后，(3—68) 中的线性无关列不会再增加了。

我们已经知道严格正则的有理函数矩阵是可实现的，如上所述，它所对应的亨克尔阵序列的秩是有限的。更一般的问题，任意给定一个无穷矩阵序列  $\{\mathbf{H}_i\}$ ，它可以实现的条件是否是由  $\{\mathbf{H}_i\}$  所生成的亨克尔阵的秩是有限的呢？

**主要定理及其证明** 这里所给出的定理及定理的证明方法对于直接从亨克尔阵计算出最小实现来说具有重要的作用。

**定理 3—14** 无穷矩阵序列  $\{\mathbf{H}_i\}$  是能实现的充分必要条件是存在整数， $\beta$ 、 $\alpha$ 、 $n$ ，使得

$$\text{rank} \mathbf{H}_{\beta\alpha} = \text{rank} \mathbf{H}_{\beta+1, \alpha+j} = n \quad (j = 1, 2, \cdots) \quad (3-69)$$

**证明** 必要性。若  $\{\mathbf{H}_i\}$  可实现，因此有最小实现，令  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是它的最小实现，于是

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \quad (i=0, 1, 2, \cdots)$$

因为  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可观测，因此存在正整数  $\beta$ ，使

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{\beta-1} \end{pmatrix} = n$$

这里  $n$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的维数。又因为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控，所以也存在着整数  $\alpha$ ，使

$$\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\alpha-1}\mathbf{B}] = n$$

而根据定义

$$\mathbf{H}_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\beta-1} \end{pmatrix} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\alpha-1}\mathbf{B}]$$

$$\mathbf{H}_{\beta+1,\alpha+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\beta-1} \\ \mathbf{CA}^{\beta} \end{pmatrix} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\alpha+j-1}\mathbf{B}] \quad (j=1, 2, \cdots)$$

于是有  $\text{rank}\mathbf{H}_{\beta\alpha} = \text{rank}\mathbf{H}_{\beta+1,\alpha+j} = n \quad (i=1, 2, \cdots)$

从这一证明过程可知，整数  $n$  即最小阶实现的维数，而且  $\beta$ 、 $\alpha$  分别是最小阶实现的观测性指数和可控性指数。

充分性。通过构造出  $\{\mathbf{H}_i\}$  的一个最小阶实现的方法来证明。从亨克尔阵的定义可知其第  $i$  行第  $j+p$  列的元素与  $i+q$  行第  $j$  列的元素相同，运用这一性质和(3—69)式可得

$$\text{rank}\mathbf{H}_{\beta\alpha} = \text{rank}\mathbf{H}_{\beta+i,\alpha+j} = n \quad \forall i, j$$

设用  $\mathbf{G}_\alpha$  表示由  $\mathbf{H}_{\beta\alpha}$  的前  $n$  个线性无关行构成的子矩阵。用  $\mathbf{G}_\alpha^*$  表示由  $\mathbf{H}_{\beta+1,\alpha}$  中低于  $\mathbf{G}_\alpha$   $q$  行的  $n$  行组成的子矩阵，即将  $\mathbf{H}_{\beta\alpha}$  的前  $n$  个线性无关行下移  $q$  行，在  $\mathbf{H}_{\beta+1,\alpha}$  中得到的子矩阵。然后由  $\mathbf{H}_{\beta+1,\alpha}$  中确定下列四个矩阵，这四个矩阵是唯一的。

**F** 由  $\mathbf{G}_\alpha$  的前  $n$  个线性无关列构成的  $n \times n$  阵。

**F\*** 根据 **F** 在  $\mathbf{G}_\alpha$  中所占的列位。在  $\mathbf{G}_\alpha^*$  中选出的  $n \times n$  阵，亦即 **F** 下移  $q$  行对应方阵。

**F<sub>1</sub>** 根据 **F** 在  $\mathbf{G}_\alpha$  中所占的列位在  $\mathbf{H}_{1\alpha}$  中选出的  $q \times n$  阵。

**F<sub>2</sub>** 由  $\mathbf{G}_\alpha$  的前  $p$  列组成的  $n \times p$  阵。

令

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^*\mathbf{F}^{-1} \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}_2 \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}_1\mathbf{F}^{-1} \quad (3-70)$$

可以证明 (3—70) 式所给的  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是  $\{\mathbf{H}_i\}$  的实现，并且  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控， $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可观测。**证明过程略。**

这一定理用另外一个方法证明了正则有理函数矩阵的可实现性，因为前面已经指出，严格真有理函数矩阵总满足条件 (3—69)。定理的充分性证明过程给出了直接从亨克尔阵提取最小阶实现的方法。

**计算步骤和例题** 现根据定理 3—14 充分性的证明过程，将严格正则有理函数矩阵最小阶实现的计算步骤而纳如下：

1，将  $\mathbf{G}(s)$  展成  $s$  的负幂级数的形式

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{H}_{i-1} s^{-i}$$

从而得到马尔柯夫参数矩阵。

2, 用马尔柯夫参数矩阵排列成亨克尔阵  $\mathbf{H}_{ij}$  这里  $i, j$  最多可取为  $\mathbf{G}(s)$  各元的最小公分母次数。参看 (3—67) 与 (3—68) 式。

3, 从  $\mathbf{H}_{\beta\alpha}$  中由第一行开始选取  $n$  个线性独立的行构成矩阵  $\mathbf{G}_\alpha$ , 同时在  $\mathbf{H}_{\beta+1,\alpha}$  中取出  $\mathbf{G}_\alpha^*$ 。

4, 在  $\mathbf{G}_\alpha$  中选取前  $n$  个线性无关的列构成矩阵  $\mathbf{F}$ , 相应地在  $\mathbf{G}_\alpha^*$  中选出  $n$  个列构成  $\mathbf{F}^*$ 。

5, 按照定义从  $\mathbf{H}_{1\alpha}$  中选出矩阵  $\mathbf{F}_1$ 。

6, 从  $\mathbf{G}_\alpha$  中取出前  $p$  列组成矩阵  $\mathbf{F}_2$ 。

7, 取  $\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{F}^{-1}, \mathbf{B} = \mathbf{F}_2, \mathbf{C} = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}^{-1}$ , 则  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  就是  $\mathbf{G}(s)$  的一个最小阶实现。

**例 3—14** 求有理函数矩阵

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{s-1}{s(s+1)} \end{pmatrix}$$

的最小阶实现

1, 将  $\mathbf{G}(s)$  展成幂级数:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{H}_0 s^{-1} + \mathbf{H}_1 s^{-2} + \mathbf{H}_2 s^{-3} + \dots$$

其中

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = -\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_3 = -\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1$$

2, 作亨克尔矩阵

$$\mathbf{H}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

显然  $\text{rank} \mathbf{H}_{22} = 4$ , 而且当  $i, j \geq 2$  时,  $\text{rank} \mathbf{H}_{ij} = 4$ 。故  $\mathbf{G}(s)$  最小阶实现的维数为 4, 参数

$\alpha = \beta = 2$ 。

3, 取  $\mathbf{G}_\alpha$  和  $\mathbf{G}_\alpha^*$

$$\mathbf{G}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{\alpha}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4, 作  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}^*$ :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5, 作  $\mathbf{F}_1$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6, 作  $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

7, 计算  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ , 为此计算  $\mathbf{F}^{-1}$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这时

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0-1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

现在验证  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是  $\mathbf{G}(s)$  的最小阶实现, 因为

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$



故有

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{s-1}{s(s+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G}(s)$$

这说明所求得  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是  $\mathbf{G}(s)$  的一个实现，容易难证  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控， $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可观测。

**定理的推论及由推论所得到的算法** 若  $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{F}^*$  和  $\mathbf{F}_2$  如定理 3—14 所定义，我们可以得到以下的推论。

**推论 3—14** 设  $\{\mathbf{H}_i\}$  可实现，则它的任一最小阶实现可表示为  $(\bar{\mathbf{F}}^* \bar{\mathbf{F}}^{-1}, \bar{\mathbf{F}}_2, \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{F}}^{-1})$ 。其

中  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T}\mathbf{F}$ ， $\bar{\mathbf{F}}^* = \mathbf{T}\mathbf{F}^*$ ， $\bar{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{T}\mathbf{F}_2$ ， $\mathbf{T}$  是某一个非奇异矩阵。特别地，当  $\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1}$ ，则  $(\bar{\mathbf{F}}^*$ 、 $\bar{\mathbf{F}}_2$ 、 $\mathbf{F}_1)$  是  $\{\mathbf{H}_i\}$  的最小阶实现。

推论 3—14 为具体计算最小阶实现提供了有效的方法。考察  $\mathbf{F}^*$ ，它也是  $\mathbf{G}_{\alpha+1}$  的子阵，若对  $\mathbf{G}_{\alpha+1}$  左乘非奇异阵，即对  $\mathbf{G}_{\alpha+1}$  进行变换，也就是  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{F}^*$ 、 $\mathbf{F}_2$  同时进行了行变换。若  $\bar{\mathbf{G}}_{\alpha+1} = \mathbf{T}\mathbf{G}_{\alpha+1}$ ，推论 3—14 中的  $\bar{\mathbf{F}}^*$ 、 $\bar{\mathbf{F}}$ 、 $\bar{\mathbf{F}}_2$  都是在  $\bar{\mathbf{G}}_{\alpha+1}$  中，若  $\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1}$ ，则  $\bar{\mathbf{F}}$  就是单位阵了， $\bar{\mathbf{F}}^*$ 、 $\bar{\mathbf{F}}_2$  都可按规则在  $\bar{\mathbf{G}}_{\alpha+1}$  中找出，但  $\mathbf{F}_1$  仍然在  $\mathbf{H}_{1\alpha}$  中找。具体做法为：对  $\mathbf{H}_{\beta, \alpha+1}$  作一系列行变换，总可将  $\bar{\mathbf{G}}_{\alpha+1}$  置换在  $\bar{\mathbf{H}}_{\beta, \alpha+1}$  的前  $n$  行上，并且必可使它前  $n$  个独立列构成一个单位阵，这意味着在  $\bar{\mathbf{H}}_{\beta, \alpha+1}$  的前  $n$  行已左乘了  $\mathbf{F}^{-1}$ ，这时  $\bar{\mathbf{H}}_{\beta, \alpha+1}$  的前  $n$  行就是  $\bar{\mathbf{G}}_{\alpha+1}$ ， $\bar{\mathbf{G}}_{\alpha+1}$  的前  $n \times p$  子阵就是  $\bar{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{B}$ ， $\bar{\mathbf{G}}_{\alpha+1}$  中的单位阵就是  $\mathbf{F}$ ，而它“右移” $p$  列对应的  $n \times n$  阵构成的  $\mathbf{A}$  阵， $\mathbf{F}_1$  是根据  $\mathbf{F}$  所占的列位， $\mathbf{H}_{i\alpha}$  中选出的  $q \times n$  阵，也就是  $\mathbf{C}$  阵。

### 例 3—15

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} 2(s-1) & 2 \\ s-1 & s-1 \end{bmatrix}$$

的最小阶实现。

由计算得出  $\delta\mathbf{G}(s) = 3$ ，

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

对  $\mathbf{H}_{23}$  进行行变换，可得

$$\overline{\mathbf{H}}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \right\} \overline{\mathbf{G}}_{\alpha+1}$$

根据前面所阐明的规则，可得  $\mathbf{G}(s)$  的最小阶实现为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**用行变换化矩阵为赫密特标准型** 从例 3—15 可以看出，如果将  $\mathbf{H}_{23}$  用行变换为  $\overline{\mathbf{H}}_{23}$  这种特殊形式，就可以很快找出最小阶实现。形如  $\overline{\mathbf{H}}_{23}$  这种形式的矩阵称为赫密特标准形。如果给出用行变换化一个矩阵为赫密特型的标准算法，那么求最小阶实现的问题就会更方便。

**定义 3—3** 方阵  $\mathbf{H}$  称为赫密特标准型（简称  $\mathbf{H}$  型），若它满足下列条件：

- (1)  $\mathbf{H}$  是上三角阵，主对角线上的元素是零或 1；
- (2) 主对角线为零的元素所在的行全部元素均为零；
- (3) 主对角线称为 1 的元素所在列的其它元素全为零。

一个非方阵称为  $\mathbf{H}$  型，如果在其中插入零行或零列后能化为  $\mathbf{H}$  型。

一个任意矩阵用行变换化为  $\mathbf{H}$  型的算法可参考习题 3—17。

## 小 结

本章与后面的第四、五章所研究的对象仅限于线性时不变系统。在系统理论中,线性时不变系统是研究得比较深入与广泛的。因此它就必然在基本性的教材中占有比较重要的地位和比较多的篇幅。

对线性时不变系统进行设计的时候,为了便于讨论和计算,需要把系统(A,B,C)化为所需要的标准形式。另外只有标准形式才更明确地表示了系统的代数结构。定理 3—1 和定理 3—2 所提供的单变量系统标准形是分别在进行极点配置和观测器设计中所要用到的。§ 3—1 中用克罗尼柯不变量讨论了多变量系统的可控(观)标准形(定理 3—3, 定理 3—4), 和三角标准形(定理 3—5)。

在第二章的基础上, § 3—2 进一步讨论了动态方程的不可简约性质和传递函数阵零极对消问题的联系。应当注意的是单变量系统的定理 3—6 和 § 3—3 多变量系统的定理 3—7、定理 3—8 提法上的区别。对多变量系统与定理 3—6 相对应的是定理 3—8。从这里也可看出定义 1—5 所定义的极点多项式的意义。

关于标量有理函数与有理函数矩阵的最小阶实现问题,第二章定理 2—20 及定理 2—21 是基本的。本章所介绍的是关于最小实现的构造方法。对于有理函数矩阵介绍了两种方法。§ 3—4 介绍了降价化简的罗森伯罗克算法,这种算法依赖于先构造出一个非最小实现,一般说来或是可控的,或是可观的,然后利用所介绍的方法消除解耦零点,从而得到最小阶实现。§ 3—5 介绍的是,从  $G(s)$  所生成的亨克尔阵中直接提取最小实现的方法,主要的结果是定理 3—14。这里我们没有介绍 *HO—Kalman* 最先提出的算法,这种算法在许多教材中都可找到(参考习题 3—23)。为了进一步缩减一开始所取的亨克尔阵的规模,可用变形后亨克尔阵并且可以得到标准形的最小阶实现。

## 习 题

**3—1** 画出可控标准形(定理 3—1)式的信号流图并计算传递函数阵。

**3—2** 直接证明定理 3—3 (3-17)式  $P$  是可逆矩阵

**3—3** 动态方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

试将其化为可控标准形及可观测标准形的形式,并计算出变换矩阵。

**3—4** 计算例 3—2 的  $\bar{\mu}_i$  并和  $\mu_i$  比较。

**3—5** 动态方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

试将其化为第二可控标准形,并计算传递函数阵。

**3—6** 证明定理 3—4。并问在定理 3—1 至定理 3—5 中所涉及的变换阵是否唯一?

**3—7** 求下列有理函数矩阵的麦克米伦阶

$$a, \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s+5} \\ \frac{1}{(s+3)^2} & \frac{s+1}{s+4} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad b, \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s+3}{s+1} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix}$$

**3—8** 试求传递函数

$$a, \frac{s^4 + 1}{4s^4 + 2s^3 + 2s + 1} \quad b, \frac{s^2 - s + 1}{s^5 - s^4 + s^3 - s^2 + s - 1}$$

的动态方程实现。并说明所求出的实现是不是最小阶实现。

**3—9** 求下列传递函数的若当型实现

$$a, \frac{s^2 + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad b, \frac{s^2 + 1}{(s+2)^3}$$

**3—10** 设有

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b \\ \bar{b} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ y = \begin{bmatrix} c & \bar{c} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

其中  $\bar{\lambda}, \bar{b}, \bar{c}$  表示  $\lambda, b, c$  共轭, 试证明用变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\bar{\lambda}b & b \\ -\lambda\bar{b} & \bar{b} \end{bmatrix}$$

可将方程变为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda\bar{\lambda} & \lambda + \bar{\lambda} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad y = \begin{bmatrix} -2Re(\bar{\lambda}bc) & 2Re(bc) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}$$

**3—11** 证明推论 3—6。

**3—12** 试求  $1/(s^3 + 1)$  的不可简约实现, 不可控实现, 不可观测实现以及既不可控又不可观测的实现。

**3—13** 试求  $1/s^4$  的可控标准形、可观测标准形和若当标准形的最小阶实现。

**3—14** 试求下列向量传递函数的可控或可观测标准形最小阶实现

$$a, \begin{bmatrix} \frac{2s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \frac{s^2 + 2s + 2}{s(s+1)^2(s+4)} \end{bmatrix} \quad b, \begin{bmatrix} \frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)} & \frac{s^2 + 2s + 2}{s(s+1)^3} \end{bmatrix}$$

并问在实现传递函数和实现向量传递函数的过程之间是否存在本质差别。

**3—15** 用所讲过的几种方法求下列有理函数阵的最小阶实现。

$$a, \begin{bmatrix} \frac{2+s}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix} \quad b, \begin{bmatrix} \frac{s^2+1}{s^2} & \frac{2s+1}{s^2} \\ \frac{s+3}{s^2} & \frac{2}{s} \end{bmatrix} \\ c, \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} \begin{bmatrix} s+1 & 2s^2 + s - 1 & s^2 - 1 \\ -s^2 - s & -s^2 + s & s \end{bmatrix}$$

**3—16** 证明有理函数阵各元的首一最小公分母是其最小实现中  $\mathbf{A}$  阵的最小多项式。

**3—17** 计算

$$\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{I} - \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{i_1})}{\mathbf{e}_{i_1}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_1} \mathbf{e}_{i_1}^T$$

的行列式。式中符号  $\mathbf{e}_i$  表示  $n$  阶单位阵的第  $i$  列,  $\mathbf{Q}$  是  $m \times l$  的矩阵。

**3—18** 若  $q \times p$  有理函数阵  $\mathbf{G}(s)$  可表成下列形式

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^r \mathbf{R}_i (s - \lambda_i)^{-1}$$

其中  $\lambda_i$  互不相同,  $\mathbf{R}_i$  为  $q \times p$  常数量矩阵。试证

$$\delta \mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^r \text{rank} \mathbf{R}_i$$

**3—19** 若给定  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

试用罗森伯罗克降阶化简方法求出最小实现。

**3—20** 分别验证 (3—16) 的可控性, (3—18) 式的可观测性。

**3—21** 设系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控,  $\mathbf{B}$  阵满列秩, 且系统具有伦伯格第二可控标准形, 证明系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = [\bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{S}(s) + \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_p^{-1} \delta(s)] [\bar{\mathbf{B}}_p^{-1} \delta(s)]^{-1}$$

式中  $\bar{\mathbf{B}}_p$  是由  $\bar{\mathbf{B}}_2$  的  $\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \dots, \mu_1 + \dots + \mu_p$  行构成的  $p \times p$  上三角形阵。而多项式矩阵  $\mathbf{S}(s)$

和  $\delta(s)$  定义如下

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\mu_1-1} & & & \\ & 1 \\ & s \\ & \vdots \\ & s^{\mu_2-1} & & \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & & 1 \\ & & & s \\ & & & \vdots \\ & & & s^{\mu_p-1} \end{bmatrix} \quad \delta(s) = \begin{bmatrix} s^{\mu_1} & & & \\ & s^{\mu_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{\mu_p} \end{bmatrix} - \bar{\mathbf{A}}_p \mathbf{S}(s)$$

其中  $\bar{\mathbf{A}}_p$  是  $\bar{\mathbf{A}}_2$  中的  $\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \dots, \mu_1 + \dots + \mu_p$  行构成的  $p \times n$  矩阵。

**3—22** 给定  $p \times q$  严格正则有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ 。令  $r$  是  $\mathbf{G}(s)$  的所有元素的最小公分母的次数。组成  $qr \times pr$  矩阵  $\mathbf{T}$  和  $\tilde{\mathbf{T}}$  如下

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \cdots & \mathbf{H}_{r-1} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{H}_r \\ & & \cdots & \\ \mathbf{H}_{r-1} & \mathbf{H}_r & \cdots & \mathbf{H}_{2r-2} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & \cdots & \mathbf{H}_{r+1} \\ & & \cdots & \\ \mathbf{H}_r & \mathbf{H}_{r+1} & \cdots & \mathbf{H}_{2r-1} \end{bmatrix}$$

若  $\mathbf{T}$  的秩为  $n$ , 并令  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{L}$  为  $qr \times qr$  和  $pr \times pr$  非奇异常量矩阵, 它们满足

$$\mathbf{KTL} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{n,qr}^T \mathbf{I}_{n,pr}$$

这里  $\mathbf{I}_{n,m}$  是形式为  $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix}$  的  $n \times m$  矩阵。试证明

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_{n,qr} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{L} \mathbf{I}_{n,pr}^T$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}_{n,qr} \mathbf{K} \mathbf{T} \mathbf{I}_{p,pr}^T$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_{q,qr} \mathbf{K} \mathbf{L} \mathbf{I}_{n,pr}^T$$

是  $\mathbf{G}(s)$  的一个最小阶实现。

**3—23** 用习题 3—22 所提供的方法, 求习题 3—15a 题的一个最小阶实现。

## 第四章 用状态反馈进行极点配置和解耦控制

反馈控制是自动控制理论的基础。一个反馈控制系统具有对控制结果进行了解，从而校正控制信号的作用。换句话说，反馈系统的控制信号，不仅依赖于输入参考信号，还依赖于控制的结果。因为系统的状态包含有关于系统的全部动态信息，因此可预料，若控制信号  $u(t)$  是输入参考信号  $v(t)$  及状态变量  $x(t)$  的函数： $u(t) = f(v(t), x(t), t)$  便可得到较好的效果。关系式  $u(t) = f(v(t), x(t), t)$  称为控制规律。如何寻找和实现给定指标下的最优控制规律是最优控制理论所讨论的内容。

现在我们仅讨论线性时不变系统，因此自然假定  $u(t)$  是  $v$  和  $x$  的线性函数，其具体形式为  $u = Hv + Kx$ ，这里  $H$ 、 $K$  是常量矩阵。本章将讨论引入如上的线性反馈后，系统的主要特性可能发生的影响。除了讨论可控性和可观测性之外，主要讨论对系统进行极点配置以及实现解耦控制等问题。

讨论可控性和可观测性之外，主要讨论对系统进行极点配置以及实现解耦控制等问题。

### § 4—1 状态反馈与极点配置

假定线性时不变系统的动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\quad (4-1)$$

其中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times p$ 、 $q \times n$  和  $q \times p$  的实常量矩阵。如果在系统上加上线性状态反馈

$$u = v + Kx \quad (4-2)$$

其中  $v$  是  $p$  维控制输入向量， $K$  为  $p \times n$  的实常量矩阵。(4—1) 和 (4—2) 构成的闭环系统的动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x + Bv \\ y &= (C + DK)x + Dv\end{aligned}\quad (4-3)$$

(4—3) 式所代表的闭环系统可以用图 4—1 来表示

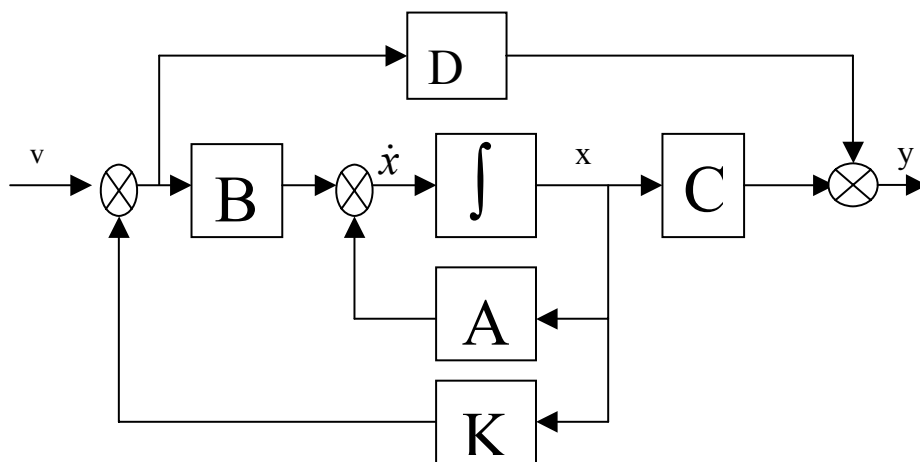


图 4—1 状态反馈后的闭环系统

### 状态反馈对可控性、可观性的影响

在研究用状态反馈进行极点配置之前,首先研究在引入(4—2)式的状态反馈后,闭环系统动态方程(4—3)的可控性与可观性有无变化。

**定理 4—1** 对于任何实常量矩阵  $\mathbf{K}$ , 动态方程(4—3)可控的充分必要条件是动态方程(4—1)可控。

**证明** 显然对任何实常量矩阵  $\mathbf{K}$ , 均有

$$[\lambda \mathbf{I}_n - (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \quad \mathbf{B}] = [\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ -\mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

上式中最后一个矩阵对于任意实常量的  $\mathbf{K}$  阵都是非奇异阵。因此对任意的  $\lambda$  和  $\mathbf{K}$ , 均有

$$\text{rank}[\lambda \mathbf{I}_n - (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \quad \mathbf{B}] = \text{rank}[\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \quad (4—4)$$

由此可知(4—1)和(4—3)同时具有或者没有不可控的振型,即(4—3)可控的充要条件是(4—1)可控。这说明引入形如(4—2)的反馈控制律不改变系统的可控性。

(4—4)式还说明,当  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  不可控时,即有某些  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_0$ , 使  $[\lambda_0 \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}]$  的秩小于  $n$ , 而这些  $\lambda_0$  同时也使  $[\lambda_0 \mathbf{I}_n - (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \quad \mathbf{B}]$  的秩小于  $n$ , 因而也必然是  $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$  的特征值。这表明,状态反馈不能改变系统(4—1)中的不可控的振型,(4—1)的不可控振型仍在(4—3)中得到保持。因此可见,状态反馈至多只能改变系统的可控振型。

令系统(4—1)和(4—3)的可控性矩阵分别为  $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  和  $\mathbf{U}_2 = [\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}]$ 。  $I_m \mathbf{U}_1$  和  $I_m \mathbf{U}_2$  表示由  $\mathbf{U}_1$  和  $\mathbf{U}_2$  的列向量所张成的空间,即可控子空间。下面的定理给出了可控子空间  $I_m \mathbf{U}_1$  和  $I_m \mathbf{U}_2$  的关系。

**定理 4—2** 对于任何实常量矩阵  $\mathbf{K}$ ,  $I_m \mathbf{U}_1 = I_m \mathbf{U}_2$ 。

**证明** 任取  $\mathbf{x}_0 \in [I_m \mathbf{U}_1]^\perp$ , 即有  $\mathbf{x}_0^T \mathbf{U}_1 = 0$  于是有  $\mathbf{x}_0^T \mathbf{A}^i \mathbf{B} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 。利用这一

关系可以证明对  $i = 0, 1, \cdots, n-1$  都有  $\mathbf{x}_0^T (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^i \mathbf{B} = 0$ , 这表示  $\mathbf{x}_0 \in [I_m \mathbf{U}_2]^\perp$ , 即有

$$(I_m \mathbf{U}_2)^\perp \supset (I_m \mathbf{U}_1)^\perp。$$

反之,同样可证  $(I_m \mathbf{U}_1)^\perp \supset (I_m \mathbf{U}_2)^\perp$ 。因而就有  $I_m \mathbf{U}_1 = I_m \mathbf{U}_2$ 。

这一定理说明,状态反馈保持了可控子空间不变,当然由此也可以推知状态反馈保持系统可控性不变。

但是(4—2)形式的状态反馈有可能影响系统的可观性,为此,考察下面的例子。

**例 4—1** 系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 2] \mathbf{x}$$

容易验证这个系统是可控可观的。如果加上反馈  $u = v + [-3 \quad -1] \mathbf{x}$ , 闭环系统方程为



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad y = [1 \quad 2] \mathbf{x}$$

这一例子说明，原来可观测的系统引入状态反馈后可以变成不可观测的；同样也可以举出不可观测的系统在引入状态反馈后变成可观测的例子。

**单变量系统的极点配置** 前面已经指出，状态反馈加入系统，不能改变系统的不可控振型。状态反馈对可控振型可以发生影响，本节要研究的中心问题就是状态反馈对可控振型的影响能力如何。这也是状态反馈最主要的性质。先研究单变量系统。

考虑单变量线性时不变动态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x} + du \end{aligned} \quad (4-5)$$

其中  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times 1$  和  $1 \times n$  的实常量矩阵。状态反馈控制律为

$$u = v + \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (4-6)$$

其中  $\mathbf{K}$  为  $1 \times n$  的实常量矩阵。(4—5) 和 (4—6) 构成闭合系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{b}v \\ y &= (\mathbf{c} + d\mathbf{K})\mathbf{x} + dv \end{aligned} \quad (4-7)$$

(4—7)式所表示的反馈系统如图 4—2 所示。

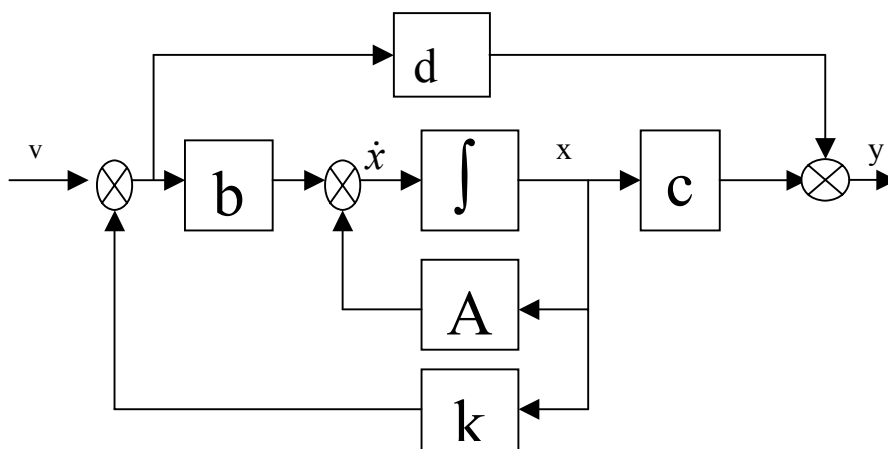


图 4—2 状态反馈后的单变量系统

**定理 4—3** 若动态方程 (4—5) 可控，则利用状态反馈 (4—6)，可以任意配置  $(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K})$  的特征值。注意  $n$  个特征值中若有复数必共轭成对出现。(今后我们不再特别指出“共轭成对出现”这一说明，但都应作这样的理解。)

**证明** 因为 (4—5) 可控，则利用等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  可将 (4—5) 变换为如下的可控标准形

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \cdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= [\beta_n \quad \beta_{n-1} \quad \cdots \quad \beta_2 \quad \beta_1] \bar{\mathbf{x}} + du\end{aligned}\quad (4-8)$$

令  $\bar{\mathbf{A}}$  和  $\bar{\mathbf{b}}$  表示 (4-8) 第一式中的矩阵, 则  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Pb}$ 。因为等价变换, 状态反馈控制律变为

$$u = v + \mathbf{Kx} = v + \mathbf{KP}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = v + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}} \quad (4-9)$$

其中  $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{KP}^{-1}$ 。由于  $(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{K}}) = \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{bK})\mathbf{P}^{-1}$ , 故  $\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{K}}$  和  $\mathbf{A} + \mathbf{bK}$  的特征值集合相同、特征多项式也相同。设它们的特征多项式为

$$s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n$$

它具有所期望的特征值。若选  $\bar{\mathbf{K}}$  为

$$\bar{\mathbf{K}} = [a_n - \bar{a}_n \quad a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \quad \cdots \quad a_2 - \bar{a}_2 \quad a_1 - \bar{a}_1] \quad (4-10)$$

则由 (4-8)、(4-9) 所表示的有状态反馈的动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ -\bar{a}_n & -\bar{a}_{n-1} & \cdots & \cdots & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \\ y &= [\beta_n + d(a_n - \bar{a}_n) \quad \beta_{n-1} + d(a_{n-1} - \bar{a}_{n-1}) \quad \cdots \quad \beta_1 + d(a_1 - \bar{a}_1)] \bar{\mathbf{x}} + dv\end{aligned}\quad (4-11)$$

因为 (4-11) 中的系统矩阵的特征多项式是  $s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n$ , 故可知 (4-11) 具有所期望的特征值。

(4-10) 的反馈增益矩阵  $\bar{\mathbf{K}}$  是相对于  $\bar{\mathbf{x}}$  而选择的, 故相对于原状态变量  $\mathbf{x}$ , 增益矩阵  $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{P}$ 。

以上定理的证明是构造性的。即证明过程给出了所需要的反馈增益阵  $\mathbf{K}$ , 现将进行特征值配置的计算步骤归纳如下:

1、 $\mathbf{A}$  的特征多项式:  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$ ;

2、由所给定的  $n$  个特征值, 计算

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n;$$

3、计算  $\bar{\mathbf{K}} = [a_n - \bar{a}_n \quad a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 - \bar{a}_1]$ ;

4、计算  $\mathbf{q}^{n-i} = \mathbf{A}\mathbf{q}^{n-i+1} + a_i \mathbf{q}^n (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ ,  $\mathbf{q}^n = \mathbf{b}$ ;

5、构成  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}^1 \quad \mathbf{q}^2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}^n]$ , 求  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ ;

## 6、 $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{P}$

在这一算法中，动态方程必须先变成可控标准形。下面讨论另一种不需要变换，直接计算  $\mathbf{K}$  的方法。首先计算  $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K}$  的特征多项式，在计算时  $\mathbf{K}$  用  $n$  个未知量  $k_1, k_2, \dots, k_n$  表示。另外根据期望的特征值  $\lambda_i$ ，计算出多项式  $(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)$ ，比较两个多项式，令  $s$  的同次幂的系数相等，便可得一组  $n$  个未知数的方程组，解这组方程可确定出  $\mathbf{K} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ 。（ $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ ）可控性的假定保证了  $n$  个代数方程的可解性。这  $n$  个方程虽然是线性方程，但其求解问题为许多人所研究过，并已给出了很多算法和相应的公式。

为了说明状态反馈对传递函数的影响，由（4—8）计算出系统（4—5）的传递函数为

$$g(s) = \frac{ds^n + (\beta_1 + da_1)s^{n-1} + \cdots + (\beta_n + da_n)}{s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

由（4—11）式可计算出引入状态反馈后系统的传递函数为

$$g_f(s) = \frac{ds^n + (\beta_1 + da_1)s^{n-1} + \cdots + (\beta_n + da_n)}{s^n + \bar{a}_1s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n}$$

比较  $g(s)$  和  $g_f(s)$  可以发现，由于状态反馈把  $\mathbf{A}$  的特征值配置到了所期望的位置，因而也就把  $g(s)$  的极点配置到了所期望的位置。而  $g(s)$  的零点和  $g_f(s)$  的零点是相同的，即在引入状态

反馈后，零点的位置保持不变。如果所引入的状态反馈引起  $g_f(s)$  的零极对消，即意味着该

状态反馈将把原动态方程由可观测的变为不可观测的。

**多变量系统的极点配置** 设系统的动态方程、反馈规律以及加状态反馈后的系统动态方程分别为（4—1）、（4—2）及（4—3）。下面我们将证明，若（ $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ ）可控，则能适当选择  $\mathbf{K}$  阵，使  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$  的特征值可以任意配置。这一证明过程将分两个步骤来进行，即首先引入一个状态反馈，使得到的方程对  $\mathbf{v}$  的单一分量可控，然后运用单变量的已有结果。

若（ $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ ）可控，则其可控性矩阵

$$\mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] =$$

$$[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_p \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_p]$$

的秩为  $n$ 。其中  $\mathbf{b}_i$  是  $\mathbf{B}$  的第  $i$  列。若存在  $\mathbf{b}_i$  能使  $[\mathbf{b}_i \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_i \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_i]$  的秩为  $n$ ，则可以仅用  $u$  的第  $i$  个分量控制（4—1）所有状态。如不存在这样的  $\mathbf{b}_i$ ，就不能仅用  $u$  的单一分量达到状态的控制。然而，若引入适当的状态反馈，可以使得引入状态反馈以后的多变量系统可以由输入的单一分量达到状态可控。

**定理 4—4** 若（ $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ ）可控，则对  $\mathbf{B}$  值域中的任一非零向量  $\mathbf{b}$ ，均存在一个状态反馈增益阵  $\mathbf{K}_1$ ，使得  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1, \mathbf{b})$  可控。

**证明：**

1、引理：（见习题 4—3）

若（ $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ ）可控，可选取向量  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ ，使得由下式定义的  $n$  个向量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  线性无关：

$$x_1 = \mathbf{b}, \dots, x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4-12)$$

**习题 4—3 的证明**

用归纳法。  $k = 1$ ，  $x_1 = \mathbf{b}$ 。

若存在  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$  使  $x_1, x_2, \dots, x_k (k < n)$  线性无关，要证：存在  $u_k$ ，使  $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$  与  $x_1, x_2, \dots, x_k$  线性无关，即  $x_{k+1}$  不属于  $L_k$ ，此处  $L_k$  是  $x_1, x_2, \dots, x_k$  所张成的空间。

用反证法。 $\forall u_k, x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$  均属于  $L_k$ ，特别的取  $u_k = 0$ ， $x_{k+1} = Ax_k$  属于  $L_k$ 。由于  $x_{k+1} - Ax_k = Bu_k$  ( $\forall u_k$ )，因为  $x_{k+1} - Ax_k \in L_k$ ，所以  $\text{Im } B \in L_k$ 。又因为  $L_k$  中的任一向量  $x_i (i \leq k)$  有  $Ax_i = x_{i+1} - Bu_i \in L_k \quad i = 1, 2, \dots, k$ 。 $L_k$  是  $A$  的不变子空间，且包含了  $B$  的值域，所以  $L_k$  包含了  $\langle A | B \rangle$ ，这与  $\langle A | B \rangle$  的维数为  $n$  相矛盾。

## 2、定义矩阵 $K_1$

$$\begin{aligned} K_1 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \\ K_1 &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (4-13)$$

$K_1$  是  $p \times n$  矩阵，将  $n$  维向量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  映射为  $p$  维向量  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, 0$ ，

$$K_1 x_1 = u_1 \quad K_1 x_2 = u_2 \cdots K_1 x_{n-1} = u_{n-1}$$

## 3、证明 $(A + BK_1 \quad b)$ 可控。

$$\begin{aligned} x_1 &= b \\ x_2 &= Ab + Bu_1 = Ab + BK_1 x_1 = (A + BK_1)b \\ x_3 &= Ax_2 + Bu_2 = Ax_2 + BK_1 x_2 = (A + BK_1)x_2 = (A + BK_1)^2 b \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= Ax_{n-2} + Bu_{n-2} = (A + BK_1)x_{n-2} = (A + BK_1)^{n-2} b \\ x_n &= Ax_{n-1} + Bu_{n-1} = (A + BK_1)x_{n-1} = (A + BK_1)^{n-1} b \end{aligned}$$

因为  $x_1, x_2, \dots, x_n$  线性无关，即

$$\text{rank} \begin{bmatrix} b & (A + BK_1)b & (A + BK_1)^2 b & \cdots & (A + BK_1)^{n-1} b \end{bmatrix} = n$$

**定理 4—5** 若系统 (4—1) 可控，则存在状态反馈增益阵  $K$ ，使得  $A + BK$  的  $n$  个特征值配置到复平面上  $n$  个任意给定的位置（复数共轭成对出现）。

**证明** 首先选取非零向量  $L$ ，可得  $b = BL$ ，由定理 4—4 可知存在  $K_1$ ，使  $(A + BK_1, b)$  可控。由单变量极点配置定理可知存在  $n$  维行向量  $k$ ，使得  $A + BK_1 + bk$  的特征值可任意配置，由于  $A + BK_1 + bk = A + BK_1 + BLk = A + B(K_1 + Lk)$ ，所以取  $K = K_1 + Lk$ ，即可证明定理 4—5。

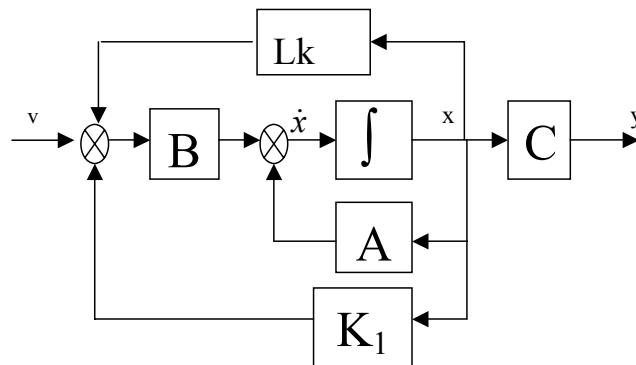


图 4—3 状态反馈后的多变量系统

## 例题 4—2 系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

试构造  $\mathbf{K}_1$ , 使  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1, \mathbf{b} = \mathbf{BL})$  可控。

**解** 取  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{BL} = \mathbf{b}$ , 由

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}, \dots, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{Ax}_k + \mathbf{Bu}_k (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

因为  $\mathbf{Ax}_1$  与  $\mathbf{x}_1$  线性无关, 故取  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{Ax}_1$ , 可得  $\mathbf{u}_1 = [0 \ 0]^T$ 。又因为  $\mathbf{Ax}_2$  与  $\mathbf{x}_1$ 、 $\mathbf{x}_2$  构成线性相关组,  $\mathbf{u}_2$  不能取  $[0 \ 0]^T$ , 可取  $\mathbf{u}_2 = [-1 \ 1]^T$ , 这样可得  $\mathbf{x}_3 = \mathbf{Ax}_2 + \mathbf{B} \mathbf{u}_2 = [2 \ 0 \ 2]^T$ 。由  $\mathbf{K}_1$  的计算式(4—13)可得

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)\mathbf{b} & (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)^2\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

不难验证  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1, \mathbf{b})$  可控。

**例题 4—3** 系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

欲使闭环系统  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$  具有特征值 -2, -2, -1+j, -1-j, 试确定状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$ 。

**解** 取  $\mathbf{L} = [1 \ 0]^T, \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ ; 取  $\mathbf{u}_1 = [-1 \ 0]^T$ , 可得  $\mathbf{x}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ;  $\mathbf{u}_2 = [0 \ 0]^T$ , 可得  $\mathbf{x}_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ; 取  $\mathbf{u}_3 = [0 \ 1]^T$ , 可得  $\mathbf{x}_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ ; 于是由  $\mathbf{K}_1$  的计算式可得:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然,  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1, \mathbf{b}_1)$  可控。令  $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$ , 直接计算

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 + \mathbf{b}_1\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

它的特征式为： $s^4 - (1 + k_3)s^3 + (k_3 - k_2)s^2 + (k_2 - k_1)s + k_1 - k_4$ ，

期望特征式为： $s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 16s + 8$

比较上述两多项式的系数，可得： $k_1 = -37$ ， $k_2 = -21$ ， $k_3 = -7$ ， $k_4 = -45$

状态反馈阵可取为：

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{Lk} = \begin{bmatrix} -37 & -21 & -8 & -45 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在上面的做法中，在  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{u}_i$  取定后， $\mathbf{K}$  就唯一的确定了。但  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{u}_i$  是非唯一的，这一事实至少可以说明达到同样极点配置的  $\mathbf{K}$  值有许多， $\mathbf{K}$  的这种非唯一性是多输入系统与单输入系统极点配置问题主要区别之一。如何充分利用  $\mathbf{K}$  的自由参数，以满足系统其它性能的要求，是多输入系统状态反馈设计的一个活跃的研究领域。

多输入系统状态反馈配置极点问题的另一特点是“非线性方程”，说明如下：如将  $\mathbf{K}$  阵的元素用待定系数  $k_{ij}$  表示，闭环的多项式可以写为

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] = s^n + f_1(\mathbf{K})s^{n-1} + f_2(\mathbf{K})s^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(\mathbf{K})s + f_n(\mathbf{K})$$

式中  $f_i(\mathbf{K})$  表示某一个以  $\mathbf{K}$  的元素  $k_{ij}$  为变量的非线性函数。如果将期望多项式表成

$$s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

比较两式的系数，可知应有

$$f_i(\mathbf{K}) = a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (4-14)$$

上式在单输入情况始终是线性方程组，在多输入时，一般是非线性方程。定理 4—4 所提供的事实表明：当系统可控时，可以通过牺牲  $\mathbf{K}$  的自由参数，可以使(4—14)简化为一组能解出的线性方程组。对例题 4—3，也可以用求解上述方程来做，通过  $\mathbf{K}$  中自由参数的适当选取，往往可以方便地求出需要的  $\mathbf{K}$  阵。

**例题 4—4** 对例题 4—2 中的系统，用直接求解(4—14)式的方法，计算达到极点配置的  $\mathbf{K}$  阵。

**解** 因为这时

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & 1 + k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & 1 + k_8 \end{bmatrix}$$

方案 1：取  $k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = 0$ 、 $1 + k_8 = -2$ 。由  $(s + 2)[(s + 1)^2 + 1] = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$ ，

易得  $k_1 = -4$ ， $k_2 = -6$ ， $1 + k_3 = -4$ ，即有

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

方案 2: 取  $k_1 = k_2 = 0$ 、 $k_3 = -1$ 、 $k_4 = 1$ 。由

$$(s+2)^2[(s+1)^2+1] = s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 16s + 8$$

可得  $k_5 = -8$ ,  $k_6 = -16$ ,  $k_7 = -14$ ,  $k_8 = -7$ , 即有

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -8 & -16 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

以上的做法中, 充分利用了将矩阵分块和相伴标准形的有关知识, 从而方便了计算。

如同单输入系统一样, 定理 4—4 中可控条件对于任意配置极点是充分必要条件, 但对于某一组指定的特征值进行配置时, 系统可控只是充分条件, 而不是必要条件。给定极点组可用状态反馈达到配置的充分必要条件是给定极点组需包含系统的不可控模态。因此判别原来系统的模态可控性就成了关键。

**例题 4—5** 系统动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

给定两组极点, 分别为:  $\{-1, -2, -3\}$  和  $\{-2, -3, -4\}$ , 问哪组极点可用状态反馈进行配置。

**解** 计算出  $\mathbf{A}$  阵的特征值, 分别为  $-1$ ,  $-0.5 \pm j0.5\sqrt{3}$ , 可验证  $-1$  是不可控的, 其它两个特征值是可控的。极点组  $\{-1, -2, -3\}$  包含了不可控模态  $-1$ , 所以可用状态反馈进行配置; 极点组  $\{-2, -3, -4\}$  则不能达到配置。

现用直接求解方法研究。令  $\mathbf{k} = (k_1 \ k_2 \ k_3)$ , 则

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{bk})| &= \begin{vmatrix} s - k_1 & -k_2 & 1 - k_3 \\ -1 - k_1 & s - k_2 & 2 - k_3 \\ 0 & -1 & s + 2 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + (-k_1 - k_2 + 2)s^2 + (-2k_1 - 3k_2 - k_3 + 2)s + 1 - k_1 - 2k_2 - k_3 \end{aligned} \quad (4-15)$$

期望多项式:  $(s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

比较上述两多项式的系数, 可得:

$$\begin{aligned} -k_1 - k_2 + 2 &= 6 \\ -2k_1 - 3k_2 - k_3 + 2 &= 11 \\ 1 - k_1 - 2k_2 - k_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

上述方程的可解性分析:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{前三列进行列变换}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩 (等于 2), 有解。

系统可控性矩阵的秩为 2:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

可控子空间的基为  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 、 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ , 正是前述方程组的系数矩阵值域空间的基。

方程组 (4—16) 相容条件就是所给极点组应包含不可控模态。由此可见, “任意配置” 要求系数矩阵满秩, 系数矩阵满秩的条件正是系统可控的条件。

由 (4—16) 可解出  $k_1, k_2, k_3$ :

$$-k_1 - k_2 = 4, \quad -k_3 - k_2 = 1;$$

(4—15) 式又可表成:

$$(s+1)[s^2 + (-k_1 - k_2 + 1)s - k_1 - k_3 - 2k_2 + 1]。$$

将二阶因式与  $(s+2)(s+3)$  相比较, 可得同样结果。(4—15) 式也表明不可控模是用状态反馈改变不了的。

定理 4—3 与定理 4—5 通常称为极点配置定理, 它是线性系统理论中一个重要而且有用的结果。它告诉我们, 对一个可控的系统, 用状态反馈可以任意移动系统的极点。它提示了状态反馈移动系统极点的能力与系统结构性质的密切关系。对单变量系统的极点配置问题首先由我国学者黄琳、郑应平和张迪于 1964 年解决; 多变量系统的极点配置问题是由加拿大多伦多大学 Wonham 教授在 1967 年解决的。

**镇定问题** 若动态方程可控, 则能用引入状态反馈的方法任意配置闭环系统的特征值。若动态方程不可控, 根据定理 2—17, 则可适当选择基底向量, 使状态方程变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

且其子方程  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}$  是可控的。由于  $\bar{\mathbf{A}}$  是三角块阵, 故  $\bar{\mathbf{A}}$  的特征值的集合是  $\bar{\mathbf{A}}_{11}$  和  $\bar{\mathbf{A}}_{22}$  特征值集合的并。由于  $\bar{\mathbf{B}}$  的特殊形式, 容易看出, 引入任何  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}}$  的状态反馈不会影响到  $\bar{\mathbf{A}}_{22}$  的特征值, 所以的特征值是不能控制的。又因为  $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1)$  可控, 则  $\bar{\mathbf{A}}_{11}$  的特征值可以通过状态反馈来任意配置。

在系统设计中, 往往仅需改变它的不稳定的特征值 (具有非负实部的特征值) 使之成为稳定的特征值 (具有负实部的特征值), 这一过程称为系统镇定。由以上讨论可知:



**定理 4—6** 系统可用状态反馈镇定的充要条件为它的不可控振型都是稳定的。

现在我们把系统动态方程加以分类

$$\text{系统} \begin{cases} \text{可控系统} \\ \text{不可控系统} \end{cases} \begin{cases} \text{可镇定} \\ \text{不可镇定} \end{cases}$$

对于可控系统，用状态反馈可任意配置极点，因此可控就一定是可镇定的；对可镇定系统，虽然可以使它从不稳定变成稳定，但不能使它具有任意的特征值分布。可镇定系统也称为可稳的系统。对于不可镇定的系统，由于它含有的不稳定振型是不可控的，故无法用状态反馈使之镇定。

## § 4—2 跟踪问题的稳态特性

研究线性系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (4-18)$$

其中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  同 (4—1) 的定义,  $\mathbf{d}$  是  $n$  维未知的干扰向量。如果我们希望输出跟踪给定的参考输入信号  $y_r$ , 可以采取反馈的方法来实现这一目的, 研究偏差  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_r(t)$  当  $t \rightarrow \infty$  时的极限值, 也就是系统的稳态误差。

为了简单起见, 假定  $y_r(t), \mathbf{d}$  都是阶跃形式的信号, 为了实现理想的跟踪, 控制中应增加偏差的积分项

$$q(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t [y(\tau) - y_r(\tau)] d\tau \quad (4-19)$$

这相当于引入  $q$  个积分器, 在  $q(0)=0$  的情况下,  $q(t)$  满足的微分方程为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{e}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}_r(t) \quad (4-20)$$

这样可把 (4—18) 式的系统增广如下

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{y}_r \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4-21)$$

这里, 新的状态向量维数为  $n+q$ , 等于原系统状态维数与积分器个数之和。

首先出现的问题是, 增广系统 (4—21) 是否可控。若系统可控, 可以改变极点分布, 若系统不可控但可镇定, 也可以使之进入稳态。否则, 若系统不稳定, 就无法正常工作。关于这个问题有以下定理。

**定理 4—7** 系统 (4—21) 可控的充分必要条件为系统 (4—18) 可控, 且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n+q \quad (4-22)$$

注意, 条件 (4—22) 式只有当  $p \geq q$  (即输出数至多等于输入数) 且  $\text{rank} \mathbf{C} = q$  时才有可能。

**证明** 考虑矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -s\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

当  $s$  不等于零时, (4—23) 式中的矩阵, 由于  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控, 它的从上往下数的  $n$  行是线性无关的, 并且下面的  $q$  行由于  $s$  不是零, 它和前述  $n$  行也是线性无关的。这时 (4—23) 矩阵的秩为  $n+q$ 。当  $s=0$  时, 由于 (4—22) 式, 它的秩也是  $n+q$ 。因此, 对任意的  $s$ , (4—23) 式矩阵的秩均为  $n+q$ , 故 (4—21) 式的系统可控。反之, 同样易于说明。

在定理 4—7 的条件下, (4—21) 式的系统是可控的。因此可以利用状态反馈配置闭环系统的特征值的方法来改善系统的动态性能和稳态性能。引入状态反馈

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{K}_2 \mathbf{q} \quad (4-24)$$

由(4—21)式和(4—24)式组成的闭环系统的方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 & \mathbf{BK}_2 \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{y}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

(4—25)式的系统表示在下面的图中，(4—24) 式中第一项  $\mathbf{K}_1 \mathbf{x}$  是对象的某个普通的状态反馈，第二项  $\mathbf{K}_2 \mathbf{q}$  是为了改善稳态性能而引入的偏差的积分信号。

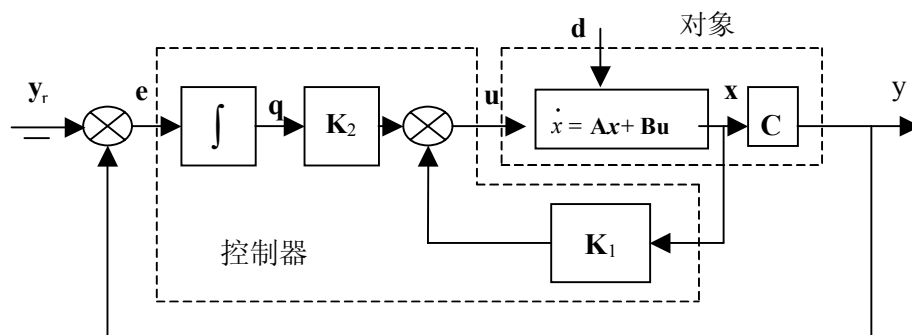


图 4-4 引入积分器和状态反馈的闭环

**定理 4—8** 设  $\mathbf{K}_1$  和  $\mathbf{K}_2$  选得使(4—25)的特征值均具有负实部，而且干扰和参考输入均为阶跃信号，即

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0 \mathbf{1}(t), \quad \mathbf{y}_r = \mathbf{y}_0 \mathbf{1}(t)$$

其中  $\mathbf{d}_0$ 、 $\mathbf{y}_0$  为  $n$  维和  $q$  维的常值向量。则  $x(t)$  及  $q(t)$  趋向于常值稳态值，而输出趋向于给定的参考值，即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_r] = 0 \quad (4-26)$$

**证明** 对(4—25)式进行拉氏变换，并解出象函数的代数方程，得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \mathbf{q}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1) & -\mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{C} & s\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ -\mathbf{y}_0 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

因为(4—25)式中的系统是稳定的，应用拉氏变换的终值定理，可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} = \lim_{s \rightarrow 0} s \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \mathbf{q}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1) & -\mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ -\mathbf{y}_0 \end{bmatrix}$$

即  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{q}(t)$  趋向于常值向量，这意味着  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  和  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  都趋向于零。又因为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_r(t)$$

故有(4—26)式成立。

条件(4—22)式的说明：若(4—22)式不满足，即有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -s\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{s=0} < n + q$$

这表明增广系统(4—21)式有  $s = 0$  这一特征值不可控，状态反馈(4—24)不能改变这个特征

值，它在闭环动态方程中仍存在，从而导致闭环系统不稳定。但在闭环传递函数形成时，产生了零、极对消，闭环传函无此  $s = 0$  的极点，这一零、极对消的原因是正向通道中引入了积分环节(参考本节插图)，也就是引入了一个  $s = 0$  的极点，它一定是与对象的零点发生了相消。因此(4—22)式不成立意味着对象有  $s = 0$  的零点。在单变量的情况，就是对象传递函数的零点，但是在系统回路中不稳定的零、极对消是不允许的。以上说明的例子如下

**例题 4—6** 系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \mathbf{d}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试问是否可以用本节的方法设计控制器，使得在  $y_r(t)=1(t)$  作用下无稳态误差。

**解** 验证(4—22)式

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2 < n + q = 3$$

计算对象部分的传递函数

$$\mathbf{G}(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

对这一系统无法用本节的方法进行控制器设计以消去稳态误差。

**例题 4—7** 系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

要求输出跟踪参考输入  $y_r 1(t)$ ， $y_r$  为阶跃函数的幅值。

**解** 为了消去稳态误差，应如(4—19)式引入积分器，得到增广系统方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 4w \\ 0 \\ 6w \\ y_r \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

验证系统可控应满足的条件

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 10$$

故增广系统可控。用状态反馈可以任意配置特征值。令反馈增益阵为 $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5]$ 。下面来选 $k_i$ ，以使闭环系统有特征值-2, -2, -1,  $-1 \pm j$ ，即实现期望的多项式

$$s^5 + 7s^4 + 20s^3 + 30s^2 + 24s + 8$$

加了状态反馈后的系统矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 - 1 & k_4 & k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 11 - k_3 & -k_4 & -k_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

特征多项式为

$$s^5 + (k_4 - k_2)s^4 + (k_3 - k_1 - 11)s^3 + (10k_2 - k_5)s^2 + 10k_1s + 10k_5$$

比较上面两个多项式同幂次的系数，可以求出反馈增益阵为

$$\mathbf{K} = [2.4 \ 3.08 \ 33.4 \ 10.08 \ 0.8]$$

并且得到闭环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.4 & 3.08 & 32.4 & 10.08 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2.4 & -3.08 & -22.4 & -10.08 & -0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4w \\ 0 \\ 6w \\ -yr \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

现在来验证上式的稳态特征。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) &= -\mathbf{c}\mathbf{A}_1^{-1} \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix} \\ &= -[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.85 & -2.8 & -12.6 & -4.05 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix} \\ &= y_r \end{aligned}$$

上式中 $\mathbf{A}_1$ 为闭环系统矩阵，由此可见 $y(t)$ 最终趋近于稳态值 $y_r$ ，这正是所期望的结果。

### §4—3 用状态反馈进行解耦控制

系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4—32)$$

这里  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times p$ 、 $p \times n$  的矩阵。系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (4—33)$$

**定义 4—1** 若(4—33)中的传函阵  $\mathbf{G}(s)$  是对角形非奇异矩阵，则称系统(4—32)是解耦的。

下面研究的是如何利用状态反馈使系统解耦。

状态反馈控制律为

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v} \quad (\mathbf{H} \text{ 为非奇异阵}) \quad (4—34)$$

(4—32)式的系统加上(4—34)式状态反馈后，得到的闭环动态方程和闭环传递函数矩阵分别为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BH}\mathbf{v}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{G}_f(s, \mathbf{K}, \mathbf{H}) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BH} \quad (4—35)$$

利用状态反馈使系统解耦：找出矩阵  $\mathbf{K}$ ， $\mathbf{H}$ ，使  $\mathbf{G}_f(s)$  为对角、非奇异阵。

#### (1) 准备知识

a、开、闭环传递函数矩阵的关系(见习题 4—2)：

$$\mathbf{G}_f(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{I} + \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{H} \quad (4—36)$$

$$\mathbf{G}_f(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{H} \quad (4—37)$$

b、非负整数  $d_i$  及非零向量  $\mathbf{E}_i$ ：

记  $\mathbf{C}$  的第  $i$  行为  $\mathbf{c}_i$ ； $\mathbf{G}(s)$  的第  $i$  行为  $\mathbf{G}_i(s)$ 。根据  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i s^{-(i+1)}$ ，可将  $\mathbf{G}_i(s)$  表示成

$$\mathbf{c}_i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{c}_i\mathbf{B}s^{-1} + \mathbf{c}_i\mathbf{A}\mathbf{B}s^{-2} + \cdots + \mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i-1}\mathbf{B}s^{-d_i} + \mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}s^{-(d_i+1)} + \cdots \quad (4—38)$$

非负整数  $d_i$ ，定义，为(4—38)式中由左向右  $s$  负幂次系数是零的个数，即有

$$\mathbf{c}_i\mathbf{B} = \mathbf{c}_i\mathbf{A}\mathbf{B} = \cdots = \mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i-1}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B} \neq 0 \quad (4—39)$$

由传递函数阵  $\mathbf{G}(s)$  出发，可知非负整数  $d_i$  及非零向量  $\mathbf{E}_i$  的等价定义分别为

$$d_i = \min[\mathbf{G}_i(s) \text{ 各元素分母次数与分子次数之差}] - 1 \quad (4—40)$$

$$\mathbf{E}_i = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1}\mathbf{G}_i(s) = \mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B} \neq 0 \quad (4—41)$$

**例题 4—8** 给定如下的  $\mathbf{G}(s)$ ，试计算  $d_i$  和  $\mathbf{E}_i$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+1} & \frac{1}{s^2+s+2} \\ \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{3}{s^2+2s+4} \end{bmatrix}$$

解:

$$d_1 = \min[1, 2] - 1 = 0, \quad d_2 = \min[2, 2] - 1 = 1$$

$$\mathbf{E}_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathbf{G}_1(s) = [1 \ 0], \quad \mathbf{E}_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \mathbf{G}_2(s) = [1 \ 3]$$

例题 4—9 系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试计算  $d_i$  和  $\mathbf{E}_i$

解:

$$\mathbf{c}_1 \mathbf{B} = [1 \ 0], \quad d_1 = 0; \quad \mathbf{E}_1 = [1 \ 0]$$

$$\mathbf{c}_2 \mathbf{B} = [0 \ 1], \quad d_2 = 0; \quad \mathbf{E}_2 = [0 \ 1]$$

c、开、闭环传递函数矩阵

引入非负整数  $d_i$  及非零向量  $\mathbf{E}_i$  后, 开环传递函数阵可以表示为(4—42)式, 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} &= s^{-(d_i+1)} (\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} + \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i+1} \mathbf{B} s^{-1} + \cdots) \\ &= s^{-(d_i+1)} [\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} + \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_i+1} (\mathbf{I} s^{-1} + \mathbf{A} s^{-2} + \mathbf{A} s^{-3} + \cdots) \mathbf{B}] \\ &= s^{-(d_i+1)} [\mathbf{E}_i + \mathbf{F}_i (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] \end{aligned}$$

记

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^{d_2+1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p \mathbf{A}^{d_p+1} \end{bmatrix} \quad (4—42)$$

则可得

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} s^{-(d_1+1)} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-(d_p+1)} \end{bmatrix} [\mathbf{E} + \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] \quad (4—43)$$

再利用(4—36)式与(4—37)式, 将闭环传递函数阵表为

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{bmatrix} s^{-(d_1+1)} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-(d_p+1)} \end{bmatrix} [\mathbf{E} + \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] [\mathbf{I} + \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}] \mathbf{H} \quad (4—44)$$

或

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{bmatrix} s^{-(d_1+1)} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-(d_p+1)} \end{bmatrix} [\mathbf{E} + \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}][\mathbf{I} - \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{H} \quad (4-45)$$

按照非负整数  $d_i$  及非零向量  $\mathbf{E}_i$  的定义, 用(4—44)式可以求出闭环传函阵所对应的  $\bar{d}_i$   $\bar{\mathbf{E}}_i$ , 并且有  $\bar{d}_i = d_i$ ,  $\bar{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i \mathbf{H}$ 。

**定理 4—9** 系统(4—32)可用(4—34)式的反馈进行解耦的充分必要条件是(4—42)式定义的  $\mathbf{E}$  为非奇异阵。

**证明** 必要性。因为  $\mathbf{G}_f(s)$  对角非奇异, 故有  $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\mathbf{H}$  是对角的, 又因为  $\bar{\mathbf{E}}_i$  是非零向量, 因此有  $\bar{\mathbf{E}}$  非奇异, 故可知  $\mathbf{E}$  非奇异。

充分性。将

$$\mathbf{K} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} \quad \mathbf{H} = \mathbf{E}^{-1} \quad (4-46)$$

代入(3—31)可得

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{bmatrix} s^{-(d_1+1)} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-(d_p+1)} \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

(4—47)式中的传递函数阵, 由于其对角元都是积分器, 故被称为积分器解耦系统。它不满足稳定性要求, 故在实际中不能使用。但是在理论上, 它提供了可解耦系统的一种中间形式, 可供进一步研究解耦问题时使用。

**例题 4—10** 将例题 4—9 中的系统化为积分器解耦系统。

**解** 根据例题 4—9 的计算可知  $\mathbf{E}$  是单位阵, 故系统可解耦。现采用定理 4—9 充分性证明中提供的(4—46)式将其化为积分器解耦系统。计算  $\mathbf{F}$  阵,  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{c}_1\mathbf{A} = [0 \ 0 \ 1]$ ,  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{c}_2\mathbf{A} = [-1 \ -2 \ -3]$ , 故得

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

由此求得

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

故反馈控制律

$$u = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

闭环系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BH}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

闭环系统的传递函数矩阵



$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

由闭环动态方程可知，闭环系统不可观测，这一解耦的状态反馈改变了系统的可观测性。如前所述，积分器解耦系统是不稳定的。还需在此基础上进一步改善控制律，这一问题由于比较复杂，现省略。下面介绍一种简单情况。

**定理 4—10** 若系统可用状态反馈解耦，且  $d_1 + d_2 + \cdots + d_p + p = n$ ，则采用状态反馈

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}^{-1}, \quad \mathbf{K} = -\mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(\mathbf{A}^{d_1+1} + k_{1d_1}\mathbf{A}^{d_1} + \cdots + k_{11}\mathbf{A} + k_{10}\mathbf{I}) \\ \mathbf{c}_2(\mathbf{A}^{d_2+1} + k_{2d_2}\mathbf{A}^{d_2} + \cdots + k_{21}\mathbf{A} + k_{20}\mathbf{I}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p(\mathbf{A}^{d_p+1} + k_{pd_p}\mathbf{A}^{d_p} + \cdots + k_{p1}\mathbf{A} + k_{p0}\mathbf{I}) \end{bmatrix} \quad (4-48)$$

可以将闭环传函矩阵化为

$$\mathbf{G}_f(s) = \text{diag}[\cdots \frac{1}{s^{d_i+1} + k_{id_i}s^{d_i} + k_{id_i-1}s^{d_i-1} + \cdots + k_{i1}s + k_{i0}} \cdots] \quad (4-49)$$

其中  $k_{ij}$  是可调参数，可用来对闭环传递函数矩阵的对角元进行极点配置。由(2—24)式可知  $\mathbf{G}_f(s)$  的麦克米伦阶为  $n$ ，说明这时解耦状态反馈律 (2—23) 未改变系统的可观测性。

**例题 4—11** 系统动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

问可否用状态反馈律  $\mathbf{u}=\mathbf{K}\mathbf{x}+\mathbf{H}\mathbf{v}$ ，将闭环传递函数阵变为  $\mathbf{G}_f(s)$ ，如有可能求出  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{H}$ 。

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2+3s+1} \end{pmatrix}$$

**解：**

$$\mathbf{c}_1\mathbf{B}=[0 \quad -1], \quad d_1=0; \quad \mathbf{c}_2\mathbf{B}=[0 \quad 0], \quad \mathbf{c}_2\mathbf{AB}=[2 \quad 1], \quad d_2=1,$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad d_1+d_2+p=0+1+2=3=n$$

由 (4—49) 可知状态反馈律应按 (4—48) 选取

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \\ \mathbf{c}_2(\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + \mathbf{I}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.5 & -8 & -7.5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**可解耦系统的解耦控制律及  $\mathbf{G}_f(s, \mathbf{K}, \mathbf{H})$  的结构** 综合定理 4—9 至定理 4—10 的结果, 可得可解耦系统的解耦反馈控制律和解耦后系统传递函数阵的结构形式

**定理 4—11** 若系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可解耦, 则

1、它的解耦控制律为

$$\mathbf{K} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} + \mathbf{E}^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 & \theta_1^\mu \\ & \theta_2 & & 0 & \theta_2^\mu \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \theta_p & 0 & \theta_p^\mu \end{pmatrix} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \quad (4-58)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}^{-1} \text{diag}(\varphi_1 \ \varphi_2 \cdots \varphi_i) \quad \varphi_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots p) \quad (4-59)$$

式中  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}$  由所引理 4 所确定,  $\mathbf{P}_1$  是  $n \times n$  非奇异矩阵, 它是化系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  为可控部分和不可控部分时所用的等价变换矩阵。

2、解耦后系统的传递函数阵  $\mathbf{G}_f(s, \mathbf{K}, \mathbf{H})$ , 其对角线上的元素为

$$\frac{\alpha_i(s) \gamma_{ii} \phi_i}{\psi_i(s, \sigma_i)} \quad (4-60)$$

并且

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] = \prod_{i=1}^p \psi_i(s, \sigma_i) \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{p+1}) \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{p+2}) \quad (4-61)$$

定理的证明及  $\alpha_i(s)$ ,  $\psi_i(s, \sigma_i)$ ,  $\gamma_{ii}$  的意义可参考文献[14]。

## § 4-4 状态反馈与静态解耦

按照定义 4—1 是解耦的系统，习惯上称为动态解耦系统，因为系统的传递函数阵是对角阵，其第  $i$  个输入在系统工作的整个动态过程中均不影响第  $j(j \neq i)$  个输出。但是这类解耦系统在实际当中有很大的限制，在许多情况下，要求采用复杂的高敏感度的控制规律，而在另外一些情况下，例如不可观的子系统是不稳定的，或者  $\mathbf{E}$  是奇异的情况，则仅仅用状态反馈不采用附加的校正装置就不能实现动态解耦。显然，如果放宽动态过程中的无相互影响的要求，仅考虑稳态性能，问题的可解性条件与稳定解耦相比就会宽一些。

**定义 4—2** 一个稳定系统，具有对角形非奇异的静态增益矩阵，则称系统是静态解耦的。

对静态解耦系统，当输入  $\mathbf{u} = \mathbf{a}1(t)$  时，其输出的稳态为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{G}_{ii}(0)a_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

现在考虑采用状态反馈规律  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$ ，使得系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

实现静态解耦的条件。加上反馈的闭环系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BH}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

传递函数阵为

$$\mathbf{G}_f(s) = \mathbf{C}[\mathbf{sI} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BH}$$

**定理 4—12** 使系统能静态解耦的充分必要条件是状态反馈能使系统稳定，且

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4-63)$$

**证明** 若  $\mathbf{K}$  可使系统稳定，说明  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$  是非奇异阵，输出可以进入稳态。由于 (4—63) 成立，而

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

所以等式左端的矩阵也是非奇异阵。又因为

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \cdot \det[-\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}] \quad (4-64)$$

所以可知  $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$  非奇异，取  $\mathbf{H} = -[\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{M}$ ，这里  $\mathbf{M}$  为对角形非奇异阵，显然这时

$$\mathbf{G}_f(0) = \mathbf{M}$$

系统实现了静态解耦。

反之，由  $\mathbf{G}_f(0)$  对角形非奇异，实现静态解耦，可知  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$  非奇异，且  $\mathbf{K}$  必须使系统能稳定，由 (4—64) 式可知

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \neq 0$$

而由定理 4—9, 可得 (4—63) 式成立。

**例 4—12** 考虑下列动态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

不难验证这个系统是可控的, 可以用状态反馈使之稳定。又有

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

根据定理 4—12, 该系统可以静态解耦, 但是

$$\mathbf{c}_1 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

是奇异的, 显然用状态反馈控制律不能使系统动态解耦。

## 小 结

本章研究的对象是时不变线性系统,所研究的问题是状态反馈在改善系统性能方面的能力如何?这种能力表现在进行极点配置,实现稳态跟踪和解耦控制等问题上。

利用状态反馈可以任意配置闭环系统的特征值,这是状态反馈最重要的性质。这一性质也充分地体现了系统可控性概念的实用价值,在极点配置中,定理 4—3 与定理 4—5 是基本的。虽然可控性的条件在定理的叙述里是以充分条件的形式出现,但不难看出它也是必要条件。定理的证明是构造性的,提供了配置极点的具体途径。

多输入系统状态反馈配置极点问题的特点:1,达到同样极点配置的  $\mathbf{K}$  值有许多,  $\mathbf{K}$  的这种非唯一性是多输入系统与单输入系统极点配置问题主要区别之一。如何充分利用  $\mathbf{K}$  的自由参数,以满足系统其它性能的要求,是多输入系统状态反馈设计的一个活跃的研究领域。2,多输入系统状态反馈配置极点问题的另一特点是“非线性方程”,当系统可控时,可以通过牺牲  $\mathbf{K}$  的自由参数,简化为一组能解出的线性方程组。

系统输出跟踪给定的参考输入,这是某些具体控制系统的技术要求。与经典控制理论一样,在跟踪问题中积分环节起着重要的作用,但是积分环节的引入会使系统快速性变差,甚至可能破坏系统的稳定性,通过状态反馈可以很好解决这一矛盾。

解耦控制问题是控制理论中研究得非常广泛的问题之一。50 年代发展了有不变性控制的理论,1963 年摩尔根用状态空间的语言精确阐述了这一问题后,获得了重大的发展。本章介绍了吉尔伯特(Gilbert)的工作,主要的结果反映在定理 4—9,定理 4—11。

## 习 题

### 4—1 单变量系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

的传递函数为  $g(s)$ , 试证

$$g(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{c})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

### 4—2 试证矩阵等式

$$a. \quad [s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})]^{-1} = [\mathbf{I} - (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}]^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$b. \quad (\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{Y}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y}$$

并利用以上两等式导出状态反馈系统开环与闭环传递函数阵之间的关系式。

4—3 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控,  $\mathbf{b} \in I_m \mathbf{B} (\mathbf{b} \neq 0)$  证明存在  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  使得如下

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

的向量组  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  线性无关。

4—4 设有若当型动态方程

$$\mathbf{x} = \left( \begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & & \\ & -2 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{array} \right) \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

它有不稳定特征值 1。问能否利用状态反馈使方程稳定？若能，试求使闭环方程具有特征值  $-1, -1, -2, -2$  和  $-2$  所需要的增益向量  $\mathbf{K}$ 。

**4—5** 设有不可控状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

试问，能否找到增益向量  $\mathbf{K}$ ，使闭环方程具有特征值  $\{-2, -2, -1, -1\}$ ， $\{-2, -2, -2, -1\}$  或  $\{-2, -2, -2, -2\}$ 。

**4—6** 设一系统具有传递函数

$$\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试问，是否有可能利用状态反馈将传递函数变为

$$\frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)}$$

若有可能，应如何进行变换？

**4—7** 系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

1、将系统化为对角规范型；判断系统可否用状态反馈镇定；

2、给定两组希望闭环极点分别为  $\{-2, -2, -1\}$  和  $\{-2, -3, -2\}$ ，判断可否用状态反馈配置？

**4—8** 状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

用尽可能简单的方法设计状态反馈，使闭环系统的特征值为  $\{-2, -3, -4, -1+j, -1-j\}$ 。

**4—9** 对于斜坡输入

$$\begin{aligned} d(t) &= \bar{d}t1(t) \\ y_r(t) &= \bar{y}_r t1(t) \end{aligned}$$

系统(4—24)应作什么样的变动?这时相应于定理4—7和定理4—8的结果应如何叙述?

**4—10** 证明系统(A、B、C)可解耦的必要条件是B和C均满秩。

**4—11** 系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

问可否用状态反馈律  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$ , 将闭环化为积分器解耦系统?(要求求出K和H)。若可解耦, 问这时解耦与闭环稳定是否矛盾, 为什么?

**4—12** 问下列系统可否用状态反馈解耦, 若可解耦, 求出化为积分器解耦系统的解耦反馈律

a. 
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{s^3 + 1} & \frac{2}{s^2 + 1} \\ \frac{2s + 1}{s^3 + s + 1} & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

b. 
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$
  

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

**4—13** 系统动态方程如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$
  

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a. 状态反馈律, 使系统动态解耦。

b. 状态反馈律, 使系统静态解耦(设极点要求配置在-1, -2, -3)。

**4—14** 系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

a. 问可否用状态反馈律  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$ , 将闭环化为积分器解耦系统?

b. 问可否用状态反馈律  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$  实现静态解耦? 若可能, 求出K和H。(闭环特征值要求设置在{-1, -1, -2})

**4—15** 系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

问系统可否用状态反馈律  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$  实现动态解耦？可否用状态反馈律  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$  实现静态解耦？

**4—16** 设系统可解耦，若取控制律为

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}^{-1}$$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{E}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1[\mathbf{A}^{d_1+1} + \alpha_{11}\mathbf{A}^{d_1} + \cdots + \alpha_{1d_1+1}\mathbf{I}] \\ \mathbf{c}_2[\mathbf{A}^{d_2+1} + \alpha_{21}\mathbf{A}^{d_2} + \cdots + \alpha_{2d_2+1}\mathbf{I}] \\ \mathbf{c}_3[\mathbf{A}^{d_p+1} + \alpha_{p1}\mathbf{A}^{d_p} + \cdots + \alpha_{pd_p+1}\mathbf{I}] \end{pmatrix}$$

证明这时闭环传递函数阵为

$$\mathbf{G}_f(s) = \text{diag} \left[ \frac{1}{s^{d_1+1} + \alpha_{11}s^{d_1} + \cdots + \alpha_{1d_1+1}} \cdots \frac{1}{s^{d_p+1} + \alpha_{p1}s^{d_p} + \cdots + \alpha_{pd_p+1}} \right]$$

**4—17** 系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

问可否用状态反馈律  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$ ，将闭环传递函数阵变为

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{pmatrix}$$

如有可能求出  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{H}$ 。



## 第五章 静态输出反馈、观测器和动态补偿器

前一章讨论了状态反馈对系统性能的影响。但是在实际中，因为系统的状态变量常常是不能直接量测的。因此用状态变量作反馈难以直接实现。但系统的输出量总是可以量测的物理量，因此用输出量进行反馈是物理上能够直接实现的方法，它在系统设计中具有现实意义。本章一开始将研究静态输出反馈对系统性能可能产生的影响，并着重介绍静态输出反馈在极点配置问题上的一些结果。

虽然状态变量不能直接量测到，但是在可观测性的讨论中，曾经给出了由输入和输出确定初态的充分必要条件。这表明，若系统是可观测的，至少在理论上初态是可以确定的，而知道了初态就可算出任一时刻的状态，这就是说系统任意时刻的状态都可以间接地得到。如何通过系统输入量和输出量来估计出状态变量，是观测器理论所要讨论的基本问题。由此可见，观测器理论也是具有工程实用价值的内容。本章第二节将研究观测器的一般理论，包括观测器的存在性、极点配置、结构条件及观测器的最小维数等。

由于静态输出反馈在改善系统性能上有很大的局限性，例如利用静态输出反馈进行极点配置，至今尚未得到满意的结果。但是如果把动态环节加到反馈回路中，则线性输出反馈改善系统性能的能力就可以大大的提高。在 § 5—3 中讨论的由观测器和线性状态反馈组合而成的反馈就是构成动态反馈的一种方法。作为一般情况，§ 5—4 研究了固定阶次的动态输出反馈进行极点配置的能力。并且整个讨论都是用状态空间方法进行的。

### § 5—1 静态输出反馈和极点配置

静态输出反馈是最简单而且最容易实现的一种反馈方式，但是与状态反馈相比，在改善系统性能方面有一定的局限性，本节一开始研究静态输出反馈与状态反馈的区别，这样可使我们看到后面几节要讨论的观测器理论及动态补偿器设计的重要意义。

**静态输出反馈的性质** 若给定线性时不变系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (5-1)$$

其中各符号意义同前。如果我们取

$$\mathbf{u} = \mathbf{Ky} + \mathbf{v} \quad (5-2)$$

这里  $\mathbf{K}$  是  $p \times q$  的常值矩阵， $\mathbf{v}$  为  $p$  维输入向量。通常称 (5—2) 式为静态输出反馈控制律。联合 (5—1) 式和 (5—2) 式，可以得到闭环系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})\mathbf{x} + \mathbf{Bv} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (5-3)$$

闭环系统的示意图如图 5—1。

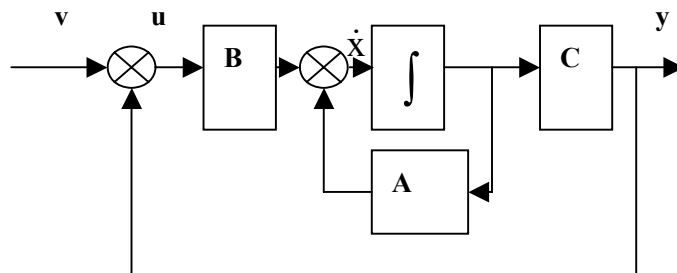


图 5-1 输出反馈系统

**定理 5—1** 反馈规律 (5—2) 不改变系统的可观测性。

**证明** 根据等式

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5—4)$$

由于 (5—4) 式右端第一个矩阵是非奇异阵, 因此对任意的  $s$  和  $\mathbf{K}$  均有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5—5)$$

由此可见, 系统 (5—3) 的可观测的充分必要条件是系统 (5—1) 可观测, 这表明静态输出反馈不改变系统的可观测性。

如果系统 (5—1) 不可观测, 由 (5—5) 可知, 使得 (5—5) 右边矩阵降秩的那些  $s$  值也使 (5—5) 式左边矩阵降秩。这表明静态输出反馈不会改变系统的不可观测振型。

令系统 (5—1) 与 (5—3) 的可观测性矩阵为  $\mathbf{V}_1$  和  $\mathbf{V}_2$ 。

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}) \\ \vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})^{n-1} \end{bmatrix}$$

不难证明,  $\text{Ker}\mathbf{V}_1 = \text{Ker}\mathbf{V}_2$  记  $\boldsymbol{\eta}_1 = \text{Ker}\mathbf{V}_1, \boldsymbol{\eta}_2 = \text{Ker}\mathbf{V}_2$ ,  $\boldsymbol{\eta}_1$  和  $\boldsymbol{\eta}_2$  分别是 (5—1) 和 (5—3) 的不可观测子空间, 因此, 从几何观点来看, (5—2) 式的输出反馈不改变不可观测子空间。

(5—2) 式的反馈律也不改变系统的可控性。事实上, 可以把 (5—3) 中的  $\mathbf{K}\mathbf{C}$  看作是一种状态反馈的增益阵, 显然这种特殊的状态反馈不改变系统的可控性。第四章证明了一个可控的系统通过状态反馈可以任意移动它的极点, 但是作为一种特殊的状态反馈的输出反馈一般不具有这一性质。

**例 5—1** 二维系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

取  $u = ky + v$ , 这样可以得到闭环系统的特征多项式为  $s^2 - k$ , 无论取何值, 闭环系统的极点只能在复平面的实轴或虚轴上移动。这说明输出反馈不能任意改变这个系统的极点。

### 输出反馈配置极点问题学习要点

- 1, 了解问题的困难和正确理解已有结果。(5—2) 式的输出反馈控制律中的  $\mathbf{K}$  阵与闭环极点之间的关系是复杂的(自由度少、非线性、非单值性), 可以说仍是线性控制理论至今尚未解决的问题。定理 5—8 的结论;
- 2, 了解一些(线性)处理方法(工具、概念)和局限性。推论 5—2、5—4 的作用;
- 3, 了解研究输出反馈的意义(状态反馈、部分状态反馈、动态补偿器);
- 4, 了解由此产生的一系列分支与结果。

## 用于极点配置问题中的几个定理

**循环矩阵**  $n \times n$  方阵  $\mathbf{A}$  称为循环的是指其最小多项式就是特征多项式。等价说法有：

- 1)  $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$  只有一个非 1 的不变因子；
- 2)  $\mathbf{A}$  的若当形中一个特征值只有一个若当块；
- 3) 存在向量  $\mathbf{b}$  (称为  $\mathbf{A}$  的生成元)，使  $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b}, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$  线性无关。

因此，单输入系统  $(\mathbf{A} \quad \mathbf{b})$  可控的充分必要条件是： $\mathbf{A}$  是循环的且  $\mathbf{b}$  是  $\mathbf{A}$  的生成元。

**推论 5—2** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控， $\mathbf{A}$  是循环矩阵，则存在向量  $\mathbf{b} \in I_m \mathbf{B}$ ，使  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  可控。

**推论 5—4** 设  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控可观，存在一个  $p \times q$  矩阵  $\mathbf{H}$ ，使  $(\mathbf{A} + \mathbf{BHC}, \mathbf{B})$  可控， $(\mathbf{A} + \mathbf{BHC}, \mathbf{C})$  可观，并且  $\mathbf{A} + \mathbf{BHC}$  是循环矩阵，即它的最小多项式是  $n$  次。

**用静态输出反馈配置极点** 首先研究单输入多输出的系统，以说明用静态输出反馈配置极点时所遇到的困难，而这些困难是用全部状态变量作反馈时所未遇到的。一个单输入多输出系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (5-11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{C}$  分别是  $n \times n$ ， $n \times 1$  和  $q \times n$  的常值矩阵。若采用静态输出反馈控制律为

$$u = \mathbf{K}\mathbf{y} + v \quad (5-12)$$

式中  $\mathbf{K}$  为  $1 \times q$  的常值向量，联合 (5—11) 和 (5—12) 可得闭环系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{bKC})\mathbf{x} + \mathbf{b}v \quad (5-13)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

设  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{A} + \mathbf{bKC}$  特征方程式分别为  $\Delta_o(s)$  和  $\Delta_c(s)$ ，

$$\Delta_o(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

$$\Delta_c(s) = s^n + \bar{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \bar{a}_1s + \bar{a}_0$$

若  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  可控，可用一等价变换化为可控标准形，变换矩阵为  $\mathbf{P}$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Pb} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

这时闭环系统矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{K} \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & \cdots & \cdots & -\bar{a}_{n-1} \end{pmatrix}$$

式中  $\bar{a}_i = a_i - \mathbf{K} \bar{\mathbf{c}}_{i+1}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ),  $\bar{\mathbf{c}}_i$  表示  $\bar{\mathbf{C}}$  的第  $i$  列。若给定了所要求的闭环极点,  $\bar{a}_i$  就确定了。极点配置问题就要选取  $\mathbf{K}$ , 使得下式成立

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}_1^T \mathbf{K}^T &= a_0 - \bar{a}_0 \\ \bar{\mathbf{c}}_2^T \mathbf{K}^T &= a_1 - \bar{a}_1 \\ &\vdots \\ \bar{\mathbf{c}}_n^T \mathbf{K}^T &= a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \end{aligned} \quad (5-14)$$

$$\text{或} \quad \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{K}^T = \delta \quad (5-15)$$

(5—15) 是一个  $q$  个未知量,  $n$  个方程的方程组, 而  $\delta$  是任意的  $n$  维向量, 它由所期望的极点所决定。方程 (5—15) 对任意的  $\delta$  有解, 显然要求  $\bar{\mathbf{C}}$  是  $n \times n$  可逆方阵, 这相当于全状态反馈的情况。一般来说当  $q < n$  时, 对于任意  $\delta$ , (5—15) 无解。对于给定的  $\delta$ , 方程 (5—15) 有解的条件是它们相容, 亦即当  $\mathbf{C}$  的秩为  $q$  时,  $q$  个方程的唯一解应满足剩下的  $n-q$  个方程。这时, 这  $n-q$  个等式给出了加在  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}$  上的约束, 这意味着  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}$  中仅有  $q$  个系数可以任意选取。若所期望的极点给得使那  $n-q$  个等式成立, 即表示这组极点可以用输出反馈所达到, 否则就不能。

**例 5—2** 给定 ( $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ ) 如下

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = [K_1 \ K_2]$$

根据 (5—15) 式可知  $\mathbf{K}$  应满足

$$K_1 = 3 - \bar{a}_0 \quad K_2 = 2 - \bar{a}_1 \quad 2K_1 + K_2 = 4 - \bar{a}_2$$

方程组相容的条件为

$$2\bar{a}_0 + \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = 4 \quad (5-16)$$

若所给三个极点使得闭环特征方程系数满足这一关系, 所给极点可用输出反馈配置, 否则不可用输出反馈配置。进一步分析约束条件 (5—16), 所给极点  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , 除复数极点应共轭成对之外, 满足

$$-2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4$$

显然不可用输出反馈达到  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = -2$  的配置, 若给定  $\lambda_1 = \frac{-5}{6}$ ,

$\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = -2$ , 需要即  $K_1 = \frac{4}{3}$ ,  $K_2 = \frac{-5}{2}$ , 即达要求的配置。

所给的例题是否可以任意配置两个极点呢？例如取  $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = -0.25$  就不能达配置，只能做到使极点任意接近于它，因为这时要满足约束条件， $\lambda_3$  需取无穷。

**定理 5—5** 设单输入系统 (5—11) 可控， $\text{rank } \mathbf{C} = q$ ，总存在常值向量  $\mathbf{K}$ ，使得  $\mathbf{A} + \mathbf{bKC}$  有  $q$  个特征值任意接近于预先给定的  $q$  个值，这  $q$  个值中如有复数，应是共轭成对出现。

**证明** 设预先给定  $q$  个值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ ，并设它们彼此不同，根据前面的推导，可得闭环系统的特征方程为

$$s^n + (a_{n-1} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{c}}_n)s^{n-1} + (a_{n-2} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{c}}_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_1 - \mathbf{K}\bar{\mathbf{c}}_2)s + a - \mathbf{K}\bar{\mathbf{c}}_1 = 0$$

将  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, q)$  代入上式可得

$$\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \dots + a_1\lambda_i + a_0 = \mathbf{K}\bar{\mathbf{c}}_n\lambda_i^{n-1} + \dots + \mathbf{K}\bar{\mathbf{c}}_2\lambda_i + \mathbf{K}\bar{\mathbf{c}}_1$$

即  $\Delta_o(\lambda_i) = \mathbf{K}\bar{\mathbf{c}}\mathbf{h}_i \quad i = 1, 2, \dots, q$

其中  $\mathbf{h}_i = (1\lambda_i\lambda_i^2 \dots \lambda_i^{n-1})^T$ ，并记  $\Delta_o(\lambda_i)$  为  $\Delta_i$ ，则

$$(\Delta_1\Delta_2 \dots \Delta_q) = \mathbf{K}\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_q)$$

若  $\mathbf{S} = \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_q)$  是非奇异阵，即有

$$\mathbf{K} = (\Delta_1\Delta_2 \dots \Delta_q)\mathbf{S}^{-1} \quad (5-17)$$

若  $\det \mathbf{S} = 0$ ，可对  $\lambda_i$  进行一些小的扰动，即用  $\lambda_i + \Delta\lambda_i$  代替  $\lambda_i$ ， $\Delta\lambda_i \rightarrow 0$  使得扰动后的  $\mathbf{S}$  非奇异，由于  $\bar{\mathbf{C}}$  的秩为  $q$ ，这总是可以做到的。式 (5—17) 给出了  $\mathbf{K}$  的一个明显表达式，并且  $\Delta_i, \mathbf{h}_i$  是给定的  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  的函数，如果所给的  $\lambda_i$  能使  $\mathbf{S}$  非奇异，则可精确地使闭环  $q$  个极点就是要求的  $\lambda_i$ ，若所给的  $\lambda_i$  值使  $\mathbf{S}$  奇异，那么只能使极点接近所给的  $\lambda_i$ 。

**例 5—3** 考察例 5—2，对  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$  及  $\lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = -0.25$  分别计算  $\mathbf{S}$  和选取  $\mathbf{K}$ 。

当  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$  可计算  $\Delta_1, \Delta_2, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  如下：

$$\Delta_1 = 4, \Delta_2 = 7, \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

因此，

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{S} \neq 0 \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$$

当  $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = -0.25$  时，可算出

$$\Delta_1 = 2.875, \Delta_2 = \frac{175}{64}, \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T, \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}^T$$

因此有

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & \frac{9}{2} \\ -1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{S} = 0$$

为了选取  $\mathbf{K}$ , 可取  $\lambda_1 + \varepsilon = \frac{-1}{2} + \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0, \lambda_2 = \frac{-1}{4}$  再计算  $\Delta_1, \mathbf{h}_1$  和  $\mathbf{S}$ , 经计算可知

$$\Delta_1 = \varepsilon^3 + 2.5\varepsilon^2 - 1.25\varepsilon + 2.875 \quad \mathbf{h}_1 = [1 \quad \varepsilon - 0.5 \quad \varepsilon^2 - \varepsilon + 0.25]^T$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon - 0.5 & -0.25 \\ \varepsilon^2 - \varepsilon + 0.25 & 0.0625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1.5 & -1.125 \\ \varepsilon^2 - 0.25 & -0.1875 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = [\varepsilon^3 + 2.5\varepsilon^2 - 1.25 + 2.875 \quad 175/64] \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{6}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

对只能接近  $\lambda_i$  这一事实, 可给一个直观的解释。当  $q=1$ , 使  $s$  是奇异的  $\lambda$  值相当于开环传递函数的零点。一个单变量系统, 对常值的反馈增益  $\mathbf{K}$  作的根轨迹图表明, 闭环极点 (根轨迹) 只能趋近于开环零点, 而达不到开环零点, 而且在接近开环零点时需要很大的  $\mathbf{K}$  值。

定理 5—5 可以推广到多输入的情况。

**定理 5—6** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控可观测,  $\text{rank} \mathbf{B} = p, \text{rank} \mathbf{C} = q$ . 总可找到常值矩阵  $\mathbf{K}$ , 使  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$  有  $\text{Max}(p, q)$  个特征值任意接近于预先给定的  $\text{Max}(p, q)$  个值 (复数应共轭成对出现)。

无论是定理 5—5 还是定理 5—6, 都未说明剩下的  $n - \text{Max}(p, q)$  个特征值的去向。

**定理 5—7** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控可观测,  $\text{rank} \mathbf{B} = p, \text{rank} \mathbf{C} = q$ , 有  $n$  个不同的特征值, 则对几乎所有的  $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$  对, 存在一个  $p \times q$  的输出反馈增益矩阵  $\mathbf{K}$ , 使得闭环系统  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$  的特征值有  $\text{Max}(p, q) - 1$  个是任意指定的  $\mathbf{A}$  的特征值 (复数成对指定), 以及  $s = \min(n, p + q - 1) - \text{Max}(p, q) + 1$  个是任意接近于任意指定的值 (复数成对)。

**定理 5—8** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控可观测,  $\text{rank} \mathbf{B} = p, \text{rank} \mathbf{C} = q$  则对几乎所有  $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$  对, 存在一个输出反馈增益阵  $\mathbf{K}$ , 使得  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$  有  $\min(n, p + q - 1)$  个特征值设置得任意接近于  $\min(n, p + q - 1)$  个任意指定的值 (复数成对)。在  $p + q \geq n + 1$  的情况下, 几乎所有的线性时不变系统都可通过输出反馈来使之稳定。

**例 5—4** 系统  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  阵如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

容易验证定理 5—8 的条件满足，现用输出反馈  $\mathbf{u}=\mathbf{K}\mathbf{Y}$  来配置极点。取  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}$ ,

$\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$  的特征方程式为

$$\lambda^4 + \lambda^2(K_1 - K_4) + (K_1K_4 - K_2K_3) = 0$$

不论  $\mathbf{K}$  取何值，仅能配置 2 个极点，而  $\min(n, p+q-1)=3$ ，这说明定理的结论并不是对所有的  $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$  对成立，而仅仅是对几乎所有的  $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$  对成立。

**例 5—5** 系统  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  阵如下

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

要找出一个输出反馈增益阵使得闭环极点任意接近指定的三个极点  $\{-1 \quad -2 \quad -5\}$ 。

设  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}$ ，可以求出闭环的特征多项式为

$$s^3 + (K_1 + K_2)s^2 - (K_1 + K_2 + K_4)s - (K_1 + K_3)(K_2 + 1) + K_1(K_2 + K_4) = -8$$

与期望的极点多项式  $(s+1)(s+2)(s+5) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10$  比较，可得

$$K_1 + K_2 = -8 \quad K_1 + K_2 + K_4 = -17$$

$$K_1 + K_3 + K_2K_3 - K_1K_4 = -10$$

可解出  $K_4 = -9, K_1, K_2, K_3$  满足两个方程

$$K_1 + K_2 = -8 \quad 10K_1 + (1 + K_2)K_3 = -10$$

可解出

$$K_3 \neq 10 \quad K_4 = -9 \quad K_2 = \frac{70 - K_3}{K_3 - 10} \quad K_1 = -8 - K_2$$

故  $\mathbf{K}$  有一个元素可任意选取。并且可以精确地达到上述指定的配置。

现用这个例子说明在证明定理 5—8 情况 2 时所采用的构造  $\mathbf{K}$  阵的方法，得到的反馈阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -16 & -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -10 & -9 \end{bmatrix}$$

闭环系统阵  $\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$  的特征值精确地取 -1, -2, -5。将两种做法相比，说明采取定理 5—8 的作法使  $\mathbf{K}$  的自由参数受到损失，引起的原因是在计算中两次使用了秩等于 1 的反馈阵。

这里介绍的用静态输出的反馈配置极点的方法，一般地说只要能使  $\min(n, p+q-1)$  个极点接近所希望的位置，其余极点不确定被移向何处，如果这些极点中的一个被移到了右半面，那这种做法就没有意义了。但是在  $n \leq p+q-1$  的特殊情况，可以使所有极点移到左半面，这是一个有实用意义的结果。

在上述介绍中，我们同时说明了定理 5—2 至定理 5—4 的应用。在极点配置问题的研究中，许多人从不同的解度运用这些定理得到反馈增益阵的算法，熟悉这些定理对于了解这方面的工作无疑是必要的。

另外，用静态输出反馈配置极点研究中，以单输入系统为例我们曾经谈到方程组（5—14）的相容性问题，如果相容性条件不满足，只能按照某种误差准则来求解方程（5—14）。同样的想法可以推广到多变量的情况，这时问题化为研究某些矩阵方程有解的条件，以及在不解时如何求近似解的问题。例如比较状态反馈阵  $\mathbf{K}_x$  和输出反馈阵  $\mathbf{K}_y$ ，可得出  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C}$  以  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  为其特征值，应有

$$\mathbf{K}_y\mathbf{C} = \mathbf{K}_x \quad (5-24)$$

这里  $\mathbf{K}$  是使  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_x$  有特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的状态反馈阵。求  $\mathbf{K}_y$  就相当于对某些  $\mathbf{K}_x$ ，求矩阵方程（5—24）的解。而方程（5—24）相容性条件为：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \mathbf{K}_y^T &= \mathbf{K}_x^T & \mathbf{C}^T k_{yi}^T &= k_{xi}^T \\ \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{K}_x^T \end{bmatrix} &= \text{rank} \mathbf{C}^T \\ \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} &= \text{rank} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (5-25)$$

（5—24）式是否有解依赖于  $\mathbf{K}_x$  的选择，在极点给定后， $\mathbf{K}_x$  有自由参数。但如何取一个符合要求的  $\mathbf{K}_x$ ，尚不清楚。

例

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

原系统特征值为 1, 2, 3，现要求配置为 -3, -3, -4。

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} -21 & 7 & 9 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{满足(5-25)} \quad \mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_x = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 126 & 154 & 64 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{不满足(5-25)} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \neq 2 \quad \mathbf{K}_y \text{ 无解}$$

但如何取一个符合要求的  $\mathbf{K}_x$ ，尚不清楚。

若相容性条件（5—25）不满足，（5—24）的解不存在。那可以研究（5—24）各种意义下的近似解。但是满意这些近似解未必导致特征值近似符合要求。



### 状态反馈与输出反馈比较(在极点配置方面)

**状态反馈:**  $\mathbf{K}$  是  $p \times n$  的矩阵, 闭环特征方程  $\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]$  与期望多项式比较得到的是非线性方程( $p > 1$ ), 线性方程( $p = 1$ )

对  $p > 1$ , 通过定理 4—4 化为  $p = 1$  情况, 这时方程仍有解。如果只是极点配置就没必要去讨论非线性方程了。多变量系统  $\mathbf{K}$  的非唯一性为极点要求之外的品质要求提供了余地, 但那是非线性方程问题。 $\mathbf{K}$  的自由参数的利用与开发仍是一个热点。

**输出反馈:**  $\mathbf{K}$  是  $p \times q$  的矩阵, 闭环特征方程  $\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})]$  与期望多项式比较得到一般是非线性方程, 直接讨论非线性方程难度极大。

也可以通过推论 5—2 及推论 5—4 化为单入多出问题, 从而讨论线性方程组。这种每次取秩为 1 的反馈阵逐步(一直到满秩)讨论的方法, 优点是讨论线性方程, 缺点是损失自由参数。得到的结论如定理 5—8, 结果不理想。至今仍是具挑战性的问题。

## § 5—2 状态观测器

根据系统可量测的物理量，例如输入  $u$  和输出  $y$ ，重新构造出状态变量，无论是对了解系统内部运动的情况，还是形成状态反馈组成闭环系统都是很有必要的。如前所述，如果系统可观测，从输入  $u$  和输出  $y$  间接地把状态变量  $x$  重构出来是可能的。这种必要性与可能性正是观测器理论的出发点。

**状态估计的方案** 为了估计动态系统的状态，一个最简单的直观想法是，人为地构成一个模型系统，这个模型系统以原系统的输入作为输入，它的状态变量用  $\hat{x}$  表示，则有

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

模型系统的状态  $\hat{x}$  可以测量出来，它可以作为原系统状态  $x$  的一个估计值。原系统和模型系统都表示在图 5—2 中。这个估计  $x$  的方案是开环的形式，显然存在两个问题。第一，要使  $x$  和  $\hat{x}$  一致，就需要保证  $x(t_0)$  和  $\hat{x}(t_0)$  设置得相同，这点实际上无法做到。第二，模型系统的  $A$ ， $B$  难以做到与真实系统的矩阵  $A$  和控制分布矩阵  $B$  完全一样。这两种情况，特别在  $A$  有不稳定特征值时，都会导致  $\hat{x}$  和  $x$  之间的差别越来越大。

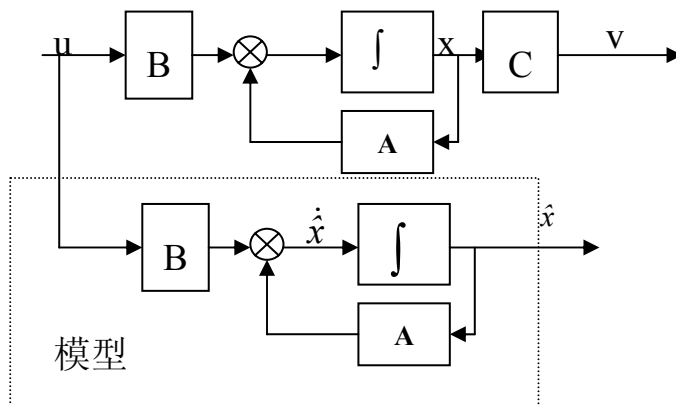


图 5—2  $x$  的开环估计方案

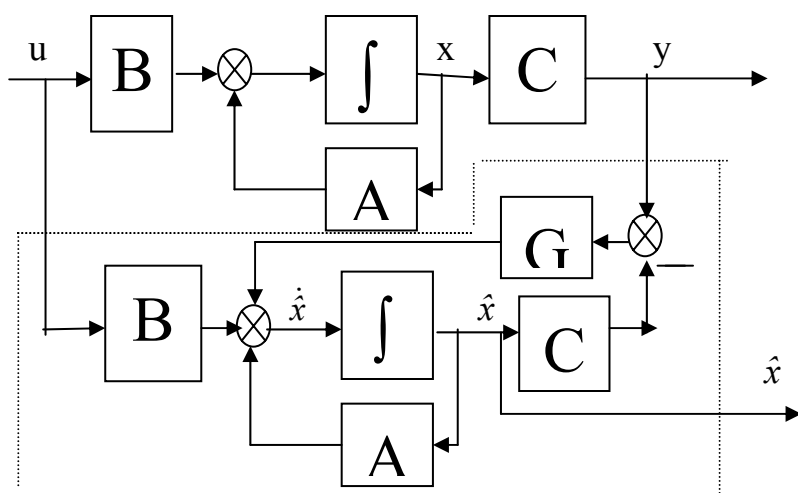


图 5—3  $x$  的闭环估计方案

因此图 5—2 的方案是不可用的。对这个开环方案，一个自然的改进方法是引入一个校正信

号，以形成闭环来抵消前述那些影响。如果将模型系统的输出  $\hat{y} = C\hat{x}$  和实际系统的输出  $y = Cx$  的差  $\tilde{y} = C(x - \hat{x})$  作为校正信号，就可形成图 5—3 所示的闭环方案。对图 5—3 的闭环方案，可以写出状态估计值的动态方程为

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu + G\tilde{y} = (A - GC)x + Gy + Bu$$

其中  $G$  为  $n \times q$  的矩阵。联合原来的系统方程可以得到估计误差  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  所满足的方程为

$$\dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x}$$

如果原系统可观测，总可选取  $G$  阵，使得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x} = 0 \quad \forall x_0, \hat{x}_0, u$$

而且  $\tilde{x}$  趋向于零的速度可以做到比系统中的动力学过程更快，那就可以实现用  $\hat{x}$  代替  $x$  的设想。

在一类工程实际问题中，产生状态估计值  $\hat{x}$  的目的是用以构成反馈控制规律  $K\hat{x}$ ，在这种情况下，完全可以直接讨论如何产生状态的线性组合  $Kx$  的估计值，而没有必要去产生状态的估计值，因此下面我们更一般地引入  $Kx$  观测器的概念。

**定义 5—1** 设线性时不变系统  $\Sigma$  :  $(A, B, C)$  的状态是不能直接量测的，另一状态变量为  $z$  的动态系统  $\Sigma_0$  称为系统  $\Sigma$  的  $Kx$  观测器，如果  $\Sigma_0$  以  $\Sigma$  的输入  $u$  和输出  $y$  为其输入，且对给定的常数矩阵  $K$ ， $\Sigma_0$  的输出  $w$  满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Kx - w) = 0 \quad \forall x_0, z_0, u \quad (5-26)$$

在上述定义中，如果  $K=I$ ，则  $\Sigma_0$  称为状态观测器或状态估计器。由定义可知，构成原系统  $Kx$  观测器的是另一个动态系统  $\Sigma_0$ ，它以原系统的输入量和输出量作为它的输入量，它的输出应满足 (5—26) 式，在  $\Sigma$  是线性时不变的情况，我们假定  $\Sigma_0$  也是线性时不变的。首先遇到的问题就是这样的动态系统  $\Sigma_0$  是否存在？

**状态观测器的存在性和极点配置** 前面已直观地说明，若系统可观测，它的状态观测器总是存在的。但可观测性只是一个充分条件，不是必要条件，关于状态观测器存在性有以下定理。

**定理 5—9** 对线性时不变系统  $(A, B, C)$ ，其状态观测器存在的充分必要条件是系统可检测 (**定义**:若系统中不可观模态是稳定模态，则称系统可检测)。

**证明** 因为  $(A, B, C)$  不是可观测时，可按可观测性进行结构分解，故这里不妨假定  $(A, B, C)$  已具有如下形式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{O}]$$

其中  $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{C}_1)$  可观测,  $\mathbf{A}_{22}$  的特征值具有负实部。现构造如下的动态系统

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})$$

即

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{y} \quad (5-27)$$

这时, 不难导出  $\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \tilde{\dot{\mathbf{x}}}$  的关系为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}_1\mathbf{C}_1)\tilde{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{G}_1\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 \\ (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{G}_2\mathbf{C}_1)\tilde{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{G}_2\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}_1\mathbf{C}_1)\tilde{\mathbf{x}}_1 \\ (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{G}_2\mathbf{C}_1)\tilde{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而可得

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}_1\mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{G}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

显然, 因为  $(\mathbf{A}_{11}^T, \mathbf{C}_1^T)$  可控, 适当选择  $\mathbf{G}_1^T$ , 可使  $\mathbf{A}_{11}^T - \mathbf{C}_1^T\mathbf{G}_1^T$  的特征值, 亦即  $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}_1\mathbf{C}_1$  的特征值均有负实部, 这时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}_1 = 0 \quad \forall \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}$$

另一方面

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{G}_2\mathbf{C}_1)\tilde{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2$$

当且仅当  $\mathbf{A}_{22}$  的特征值具有负实部时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}_2 = 0 \quad \forall \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}$$

而  $\mathbf{A}_{22}$  就是系统的不可观测部分, 由可检测的假定,  $\mathbf{A}_{22}$  的特征值具有负实部, 于是定理的充分性得证。定理的必要性证明将在以后补充说明。

定理 5—9 说明如果系统可检测, 状态观测器总是存在的, 并且观测器可取成 (5—27) 式的形式。同样,  $\mathbf{K}\mathbf{x}$  观测器也是存在的, 可以取为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{y} \quad (5-28)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

(5—27) 和 (5—28) 的观测器分别称为  $n$  维基本状态观测器和  $n$  维基本  $\mathbf{K}\mathbf{x}$  观测器。

**定理 5—10** 线性时不变系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的状态观测器 (5—27) 可任意配置特征值的充分必要条件是  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可观测。

**证明** 令定理 5—9 的证明中的  $\mathbf{A}_{22}$  维数为零, 即可证明本定理。事实上, 这个定理相当于  $(\mathbf{A},$

B、C) 的极点用状态反馈可任意配置的对偶形式。

**单输出系统状态观测器的极点配置** 在单输入单输出的情况, 若 (A、b、c) 可观测, 状态观测器的极点配置问题可用以下步骤来解决(这里介绍的只是单输入系统在可控时用状态反馈配置极点的对偶形式):

1、若  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$ , 因为 (A、c) 可观测, 对原系统作等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , P 的取法如下

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & & & 1 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_1 & 1 & & & \\ 1 & & & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{pmatrix}$$

这时系统方程化为可观测标准形

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & & -a_{n-1} \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_1 \end{pmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \bar{\mathbf{x}}$$

2、对可观测标准形 ( $\bar{\mathbf{A}}$ 、 $\bar{\mathbf{b}}$ 、 $\bar{\mathbf{c}}$ ) 构成观测器

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{c}})\hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u + \bar{\mathbf{g}}y$$

$$\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{A}} - \begin{pmatrix} g_n \\ g_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_1 \end{pmatrix} [0 \cdots 0 \quad 1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -(a_n + g_n) \\ 1 & & & -(a_{n-1} + g_{n-1}) \\ & & & \vdots \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -(a_1 + g_1) \end{pmatrix}$$

当给定了  $n$  个希望极点  $s_1, s_2, \cdots, s_n$  时, 则有

$$f(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = s^n + \bar{a}_1s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}s + \bar{a}_n$$

可取

$$\bar{\mathbf{g}} = (\bar{a}_n - a_n \quad \bar{a}_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \bar{a}_1 - a_1)^T$$

显然这时  $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{c}}$  具有特征式  $f(s)$  和所期望的极点配置。

3、取  $g = \mathbf{P}^{-1}\bar{g}$ ，就可得给定系统 ( $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ ) 的观测器方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - g\mathbf{c})\mathbf{x} + \mathbf{b}u + gy$$

**例 5—6** 给定系统 ( $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ ) 为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

容易验证这个系统是可观测的，现在来构成极点为  $-3$ ， $-4$ ， $-5$  的状态观测器。

1、 $\mathbf{A}$  的特征多项式为  $s^3 - 5s^2 + 8s - 4$

2、求换矩阵  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3、期望多项式

$$f(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

4、取  $\bar{g} = [60 - (-4) \quad 47 - 8 \quad 12 - (-5)]^T = [64 \quad 39 \quad 17]^T$

$$g = \mathbf{P}^{-1}\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 \\ 39 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{pmatrix}$$

5、计算

$$\mathbf{A} - g\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{pmatrix} [1 \quad 1 \quad 0] = \begin{pmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{pmatrix}$$

最后可得状态观测器的方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{pmatrix} y$$

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}}$$

**观测器的结构条件** 线性时不变系统 ( $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ ) 的观测器也是一个线性时不变系统， $\sum_0$ ，

其一般形式如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{Fz} + \mathbf{Nu} + \mathbf{Gy} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{Ez} + \mathbf{My} \end{aligned} \quad (5-29)$$

式中  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{M}$  分别为  $r \times r$ 、 $r \times p$ 、 $r \times q$ 、 $l \times r$  和  $l \times q$  的常值矩阵。下面讨论这些矩阵满足什么条件时，系统  $\sum_0$  才可以构成  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的一个  $\mathbf{Kx}$  观测器？由  $\mathbf{Kx}$  观测器的定义可知，若  $\sum_0$  是系统  $\sum$  的  $\mathbf{Kx}$  观测器，则  $\mathbf{w}$  给出了  $\mathbf{Kx}$  的渐近估计。一个自然的问题是，这时在状态向量  $\mathbf{z}$  和  $\mathbf{x}$  之间是否存在类似的线性渐近关系，即是否存在  $\mathbf{P}$ ，使  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{Px} - \mathbf{z}) = 0$ ，对一切  $\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{u}$  成立。

**定理 5—11** 若系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控，对于某  $\mathbf{P}$  阵，使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{Px}(t) - \mathbf{z}(t)] = 0 \quad (5-30)$$

对任意的  $\mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{z}_0$ 、 $\mathbf{u}$  都成立的充要条件为

- (1)  $\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{F}) < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$
- (2)  $\mathbf{PA} - \mathbf{FP} = \mathbf{GC} \quad (5-29)$
- (3)  $\mathbf{N} = \mathbf{PB}$

**证明** 充分性。令  $\mathbf{e} = \mathbf{Px} - \mathbf{z}$ ，对  $\mathbf{e}$  求导数

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) - (\mathbf{Fz} + \mathbf{Nu} + \mathbf{Gy}) \\ &= (\mathbf{PA} - \mathbf{GC})\mathbf{x} - \mathbf{Fz} = \mathbf{FPx} - \mathbf{Fz} = \mathbf{Fe} \end{aligned}$$

则对任意的  $\mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{z}_0$  和  $\mathbf{u}$  有

$$\mathbf{e}(t) = e^{\mathbf{F}t}(\mathbf{Px}_0 - \mathbf{z}_0) = 0$$

所以有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{Px} - \mathbf{z}) = 0$

必要性。设对任意的  $\mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{z}_0$  和  $\mathbf{u}$  都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{Px} - \mathbf{z}) = 0$ 。取  $\mathbf{u} \equiv 0$ ， $\mathbf{x}_0 = 0$ ，这时  $\mathbf{x} = 0$ ， $\mathbf{y} = 0$ ，

从而由(5—29)可得  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz}$ ，而且由(5—30)可得对任意的  $\mathbf{z}_0$  都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z} = 0$ ，由此(1)成立。

下面证(2)、(3)，因为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) - (\mathbf{Fz} + \mathbf{Nu} + \mathbf{Gy}) \\ &= \mathbf{Fe} + (\mathbf{PA} - \mathbf{FP} - \mathbf{GC})\mathbf{x} + (\mathbf{PB} - \mathbf{N})\mathbf{u} \end{aligned}$$

记  $(\mathbf{PA} - \mathbf{FP} - \mathbf{GC})$  和  $(\mathbf{PB} - \mathbf{N})$  分别为  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{Q}$ ，要证  $\mathbf{W}$ 、 $\mathbf{Q}$  为零。对上式取拉氏变换，并解出  $\mathbf{e}(s)$ 。

$$\begin{aligned} s\mathbf{e}(s) - \mathbf{e}(0) &= \mathbf{F}\mathbf{e}(s) + \mathbf{W}\mathbf{x}(s) + \mathbf{Q}\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{e}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{e}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{W}\mathbf{x}(s) + \mathbf{Q}\mathbf{u}(s)] \end{aligned}$$

由条件  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$  可知  $\lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{e}(s) = 0$ 。又取  $\mathbf{z}_0 = 0$ ， $\mathbf{x}_0 = 0$ ，这时  $\mathbf{e}(0) = 0$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} [\mathbf{W}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{Q}] s\mathbf{u}(s) = 0$$

由于  $\mathbf{u}(s)$  的任意性，又因为  $\mathbf{F}$  非奇异，故必然有

$$\mathbf{W}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{Q} = 0$$

所以

$$\mathbf{W}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{Q} = 0$$

由于系统是可控的，在复数域上  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$  行线性无关，故  $\mathbf{W}=0$ ，(2)、(3) 得证。

**推论 5—11** 若系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控，则 (5—29) 的系统成为它的状态观测器的充要条件为

- (1)  $\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{F}) < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$
- (2)  $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{GC}$
- (3)  $\mathbf{N} = \mathbf{B}$

推论 5—11 表明  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的状态观测器必具有 (5—27) 的形式。定理 5—9 的必要性由此可说明，事实上，若状态观测器存在，必具有 (5—27) 的形式，由条件 (1)、(2) 可知  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可检测。或者由定理 5—9 的充分性的证明中也可得  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可检测。

**定理 5—12** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控， $(\mathbf{F}, \mathbf{E})$  可观测，则 (5—29) 成为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的  $\mathbf{Kx}$  观测器的充要条件为存在  $r \times n$  矩阵  $\mathbf{P}$ ，使得下列条件满足

- (1)  $\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{F}) < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$
- (2)  $\mathbf{PA} - \mathbf{FP} = \mathbf{GC}$
- (3)  $\mathbf{N} = \mathbf{PB}$
- (4)  $\mathbf{K} = \mathbf{EP} + \mathbf{MC}$

(5—32)

**证明** (略)

综合定理 5—11 和定理 5—12，可得以下推论

**推论 5—12** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控， $(\mathbf{F}, \mathbf{E})$  可观测，则 (5—29) 式所表示的系统成为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的一个  $\mathbf{Kx}$  观测器的充要条件为存在某  $\mathbf{P}$  矩阵，满足

- (1) 对任意  $\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{u}$  有  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{Px} - \mathbf{z}) = 0$ ;
- (2)  $\mathbf{K} = \mathbf{EP} + \mathbf{MC}$

**定理 5—13** 设  $\mathbf{A}, \mathbf{F}$  和  $\mathbf{GC}$  分别是  $n \times n$ 、 $r \times r$  和  $r \times n$  矩阵，则方程

$$\mathbf{PA} - \mathbf{FP} = \mathbf{GC} \quad (5—33)$$

有  $r \times n$  阵  $\mathbf{P}$  唯一存在的充要条件为  $\mathbf{F}$  与  $\mathbf{A}$  无相同的特征值。

**证明** (略)。

根据定理 5—11、5—12 和 5—13，可以定出  $\mathbf{Kx}$  观测器的参数：



1. 确定一个  $\mathbf{F}$  阵，它的特征值在复平面左半部且与  $\mathbf{A}$  的特征值不同。

2. 选取  $\mathbf{G}$  阵，由  $\mathbf{PA} - \mathbf{FP} = \mathbf{GC}$  解出  $\mathbf{P}$ 。

3. 由  $\mathbf{PB} = \mathbf{N}$  定出  $\mathbf{N}$ 。

4. 求解  $\mathbf{K} = \mathbf{EP} + \mathbf{MC}$ ，求出  $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{M}$ 。

5. 验证  $(\mathbf{F}, \mathbf{E})$  是否可观测。

在以上步骤中，随着  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$  的不同选取，会得到不同的  $\mathbf{P}$ ，因而对一个系统可构造出不止一个  $\mathbf{Kx}$  观测器。下面讨论它们之间的内在联系。

若系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}_1 \mathbf{z} + \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{G}_1 \mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{E}_1 \mathbf{z} + \mathbf{M}_1 \mathbf{y}\end{aligned}\quad (5-35)$$

是  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的一个  $\mathbf{Kx}$  观测器，作变换  $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\mathbf{z}$  后可得

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{z}}} &= \mathbf{F}_2 \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{N}_2 \mathbf{u} + \mathbf{G}_2 \mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{E}_2 \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{M}_2 \mathbf{y}\end{aligned}\quad (5-36)$$

其中  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{T}\mathbf{F}_1\mathbf{T}^{-1}$ ， $\mathbf{N}_2 = \mathbf{T}\mathbf{N}_1$ ， $\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}\mathbf{G}_1$ ， $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1\mathbf{T}^{-1}$ ， $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1$ 。

式 (5-36) 给出了 (5-35) 的代数等价系统。

**定理 5—14** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控，(5-35) 式是它的一个  $\mathbf{Kx}$  观测器，则其代数等价系统 (5-36) 也是它的一个  $\mathbf{Kx}$  观测器。

**证明** 首先  $\mathbf{F}_2$  和  $\mathbf{F}_1$  有相同的特征值， $\mathbf{F}_1$  特征值在左半面，所以  $\mathbf{F}_2$  的特征值也在左半面，满足定理 5—12 的条件 (1)。另外可知有  $\mathbf{P}_1$  存在，使

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A} - \mathbf{F}_1 \mathbf{P}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{C} \quad \mathbf{N}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{B} \quad \mathbf{K} = \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{C}$$

令  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{T}\mathbf{P}_1$ ，可证系统 (5-36) 也满足定理 5—12 的 (2)、(3)、(4)。事实上

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_2 \mathbf{A} - \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_2 &= \mathbf{T}\mathbf{P}_1 \mathbf{A} - \mathbf{T}\mathbf{F}_1 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}\mathbf{P}_1 = \mathbf{T}(\mathbf{P}_1 \mathbf{A} - \mathbf{F}_1 \mathbf{P}_1) \\ &= \mathbf{T}\mathbf{G}_1 \mathbf{C} = \mathbf{G}_2 \mathbf{C} \\ \mathbf{N}_2 &= \mathbf{T}\mathbf{N}_1 = \mathbf{T}\mathbf{P}_1 \mathbf{B} = \mathbf{P}_2 \mathbf{B} \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{C}) = \mathbf{E}_2 \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_2 + \mathbf{M}_2 \mathbf{C} = \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2 + \mathbf{M}_2 \mathbf{C}\end{aligned}$$

这说明 (5-36) 是  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的  $\mathbf{Kx}$  观测器。

**基本观测器和  $n$  维观测器** 前面叙述观测器的结构条件时，假定观测器的维数为  $r$ ，进行了一般的讨论。这里讨论  $r=n$  的情况，引入基本观测器的概念，然后在此基础上导出建立一般  $n$  维观测器的方法。

本章一开始就建立了  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的  $n$  维状态观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{I}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (5-37)$$

和  $\mathbf{Kx}$  观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{K}\hat{x}\end{aligned}\quad (5-38)$$

这两个最简单的观测器分别称为  $n$  维基本状态观测器与  $n$  维基本  $\mathbf{K}\mathbf{x}$  观测器。基本观测器的一个突出优点是它设计上很方便，归结为求出  $\mathbf{G}$  阵。显然，根据结构条件  $\mathbf{G}$  阵的确定原则应是使  $\mathbf{A}-\mathbf{G}\mathbf{C}$  的特征值不同于  $\mathbf{A}$  的特征值，而且都在左半面所期望的位置上。

(5—37) 和 (5—38) 的特点是  $\mathbf{M}=0$ ，即对  $n$  维观测器而言，我们可取其一般形式如下：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{E}\mathbf{z}\end{aligned}\quad (5-39)$$

**定理 5—15** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控可观测，则 (5—39) 是  $n$  维状态观测器的充要条件是它与某个  $n$  维基本状态观测器代数等价。

**证明** 充分性显然成立。现只证必要性，若 (5—39) 是  $n$  维状态观测器，由定理 5—12 可知存在  $n \times n$  的  $\mathbf{P}$  阵，满足

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{F}) &< 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{F}\mathbf{P} = \mathbf{G}\mathbf{C}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} &= \mathbf{E}\mathbf{P} \quad (\mathbf{K} = \mathbf{E}\mathbf{P} + \mathbf{M}\mathbf{C}, \mathbf{K} = \mathbf{I}, \mathbf{M} = 0)\end{aligned}$$

由此可知  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{E}$ ，从而可令  $\mathbf{H} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}$ ，于是

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{P}\mathbf{B}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{P}^{-1}\end{aligned}$$

这样，如令  $\mathbf{z} = \mathbf{P}\hat{x}$ ，可将 (5—39) 化为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\hat{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \hat{x}\end{aligned}$$

这表明 (5—39) 与上面的基本状态观测器等价。

对于  $n$  维  $\mathbf{K}\mathbf{x}$  观测器，没有  $n$  维状态观测器那样好的结果，但对单输入单输出系统，仍有同样的结果。

**定理 5—16** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  可控可观测，则形如 (5—40) 的系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{n}\mathbf{u} + \mathbf{g}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{E}\mathbf{z}\end{aligned}\quad (5-40)$$

成为  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  的  $\mathbf{K}\mathbf{x}$  观测器的充要条件是 (5—40) 与  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  的一个基本  $\mathbf{K}\mathbf{x}$  观测器代数等价。其中  $(\mathbf{F}, \mathbf{E})$  可观测， $(\mathbf{F}, \mathbf{g})$  可控（证明略）。

为了估计系统的状态  $\mathbf{x}$  或是  $\mathbf{K}\mathbf{x}$ ，用  $n$  维的观测器总是可以做到的。现在提出的问题是观测器的维数是否可以降低？ $r$  可能的最小值是多少？因为维数的降低，意味着观测器可具有较为简单的形式，从而使工程实现更加方便。因此研究降维观测器以及最小维观测器的设计问题就成为观测器理论的重要课题之一。

**最小维状态观测器** 考虑  $n$  维线性时不变动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (5-42)$$

若假定  $\text{rank}\mathbf{C} = q$ ，那么输出  $y$  实际上已经给出了部分状态变量的估计，显然为了估计全部状态，只须用一个低阶的观测器估计出其余的状态变量就可以了，即状态观测器的维数显然可比  $n$  低。

**定理 5—17** 若系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可控可观测，且  $\text{rank}\mathbf{C} = q$ ，则系统的状态观测器的最小维数是  $n - q$ 。

**证明** 根据观测器的结构条件，对于状态观测器要求

$$\mathbf{E}\mathbf{P} + \mathbf{M}\mathbf{C} = [\mathbf{E} \quad \mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

其中  $\mathbf{P}$  是  $r \times n$  阵，且满足  $\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{F}\mathbf{P} = \mathbf{G}\mathbf{C}$ 。要使上式有解，应有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \geq n$$

而已知  $\text{rank}\mathbf{C} = q$ ，所以  $\text{rank}\mathbf{P} \geq n - q$ ，故  $\mathbf{P}$  的最小维数  $r_{\min} = n - q$ 。

下面来具体建立最小维数的状态观测器。不妨假定  $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2)$ ，这里  $\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2$  分别是  $q \times q$  和  $q \times (n - q)$  矩阵，而且  $\text{rank}\mathbf{C}_1 = q$  取等价变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ ，变换阵  $\mathbf{T}$  定义为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}$$

显然  $\mathbf{T}$  是满秩的，这时 (5—42) 式可化为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{I}_q \quad \mathbf{0}] \bar{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (5-43)$$

显然输出  $\mathbf{y}$  直接给出了  $\bar{\mathbf{x}}_1$ ，状态估计的问题就化为只需对  $n - q$  分量  $\bar{\mathbf{x}}_2$  进行估计。

**引理** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可观测，则  $(\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{A}}_{12})$  也可观测。

**证明** 因为等价变换不影响可观测性，故  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$  可观测，故对任意复数  $\lambda$  均有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} - \lambda \mathbf{I} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 2n$$

故对任意复数  $\lambda$  有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{22} - \lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} = n$$

所以  $(\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{A}}_{12})$  可观测。式 (5—43) 可写为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 &= \bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}\end{aligned}$$

上式第二式可写为

$$\bar{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y} - \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2$$

考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 &= \bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2 + (\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}) \\ \bar{\mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2\end{aligned}\quad (5-44)$$

它的状态观测器为

$$\dot{\hat{\bar{\mathbf{x}}}}_2 = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\bar{\mathbf{x}}_2 + (\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}) + \mathbf{G}_2(\dot{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y} - \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u})$$

或者

$$\dot{\hat{\bar{\mathbf{x}}}}_2 = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\bar{\mathbf{x}}_2 + (\bar{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{B}}_1)\mathbf{u} + (\bar{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{11})\mathbf{y} + \mathbf{G}_2\dot{\mathbf{y}}$$

其中  $\mathbf{G}_2$  为  $(n-q) \times q$  的增益矩阵, 并且  $\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12}$  的特征值可以任意配置。这一个  $n-q$  维的观测器就是最小阶的观测器。但是在观测器方程中用到了  $\dot{\mathbf{y}}$  信号, 当  $\mathbf{y}$  中含有量测噪声时, 将会造成较大的误差。为了避免在观测器方程中使用  $\dot{\mathbf{y}}$ , 可进行以下变换。令

$$\mathbf{z} = \hat{\bar{\mathbf{x}}}_2 - \mathbf{G}_2\mathbf{y}$$

$\mathbf{z}$  满足方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{z} + (\bar{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{B}}_1)\mathbf{u} \\ &+ [(\bar{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{11}) + (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{G}_2]\mathbf{y}\end{aligned}\quad (5-44)$$

这时  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \mathbf{z} + \mathbf{G}_2\mathbf{y}$ , 由于  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_1^T \quad \bar{\mathbf{x}}_2^T]^T$ , 而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{x}} - \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} + \mathbf{G}_2\mathbf{y} \end{bmatrix}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{x}}_2 - \hat{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = 0$$

这表明

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} + \mathbf{G}_2\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \hat{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

就是  $\bar{\mathbf{x}}$  的估计, 再由  $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}$  可得  $\mathbf{x}$  的估计值为

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}[(\mathbf{I}_q - \mathbf{C}_2\mathbf{G}_2)\mathbf{y} - \mathbf{C}_2\mathbf{z}] \\ \mathbf{z} + \mathbf{G}_2\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{I}_q - \mathbf{C}_2\mathbf{G}_2) \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \mathbf{y}\quad (5-46)$$

可以验证式 (5-45) 及式 (5-46) 的系数矩阵满足定理 5-12 的条件 (5-32), 并且  $\mathbf{P}$

阵取为  $(-\mathbf{G}_2 \quad \mathbf{I}_{n-q})\mathbf{T}$ , 因此 (5—45)、(5—46) 式是  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的一个  $n-q$  维观测器, 而且由定理 5—17 可知是一个最小阶观测器。于是有以下定理。

**定理 5—18** 若  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可观测,  $\text{rank} \mathbf{C} = q$ , 则对  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  可构造  $n-q$  维观测器 (5—45)、(5—46), 而且观测器的极点可任意配置。若再假定  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控, 则该观测器具有最小维数。

定理的证明已如前所述, 这样构成的降维状态观测器称为伦伯格观测器。

**例 5—7** 设系统如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此  $\text{rank} \mathbf{C} = 2$ , 故可设计一维观测器。首先作变换

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_{22} = 1$$

$$\bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}$$

代入 (5—45) 和 (5—46) 式可得

$$\dot{z} = (1 - g_2)z - g_1 u_1 + (1 - 2g_2)u_2 + (2g_1 - g_1 g_2)y_1 - g_2^2 y_2$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 - g_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$g_2$  可以选择得任意达到观测器极点配置的要求, 且  $g_2 > 1$  而  $g_1$  可任意, 若取  $g_1 = 0$ , 这时观测器的方程为

$$\dot{z} = (1 - g_2)z + (1 - 2g_2)u_2 - g_2^2 y_2$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 - g_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

### §5—3 利用观测器构成的状态反馈系统

虽然系统的状态变量不能直接量测到,但是利用状态观测器可以得到状态的渐近估计值  $\hat{x}$ ,如果用  $\hat{x}$  代替真实状态进行反馈,即反馈控制律取为

$$u = v + k\hat{x} \quad (5-47)$$

这一反馈规律表明在闭合系统中引入了状态观测器。显然将会发生两个问题:(1) 状态反馈增益阵  $K$  是对真实状态  $x$  而设计的,当采用  $\hat{x}$  代替  $x$  时,为了保持所期望的特征值, $K$  阵是否需重新设计?(2) 观测器的特征值是预先进行设置的,当观测器被引入系统后,这些特征值是否会发生变化? $G$  阵是否需重新设计?下面阐明的分离特性回答了这些问题。

**分离特性** 考虑可控可观测的动态方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5-48)$$

由状态反馈的性质可知,存在  $K$  阵,可使  $A+BK$  具有任意的期望特征值分布。现用 (5-47) 的反馈代替真实状态进行反馈,即在闭合系统中引入了状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy \quad (5-49)$$

通过观测器引入状态反馈的系统表示在图 5—4。

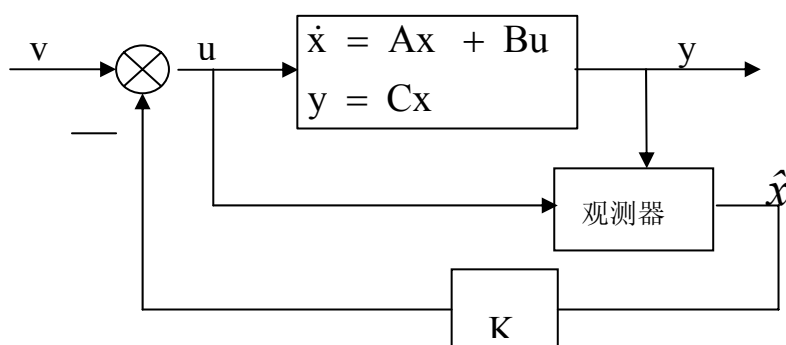


图 5—4 通过观测器引入状态反馈的系统

联合 (5-47)、(5-48) 和 (5-49) 可得所示的闭合系统的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \quad (5-50)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

利用如下的等价变换

$$\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix}$$

(5-50) 式变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (5-51)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

从(5-51)式可知, 这时闭环系统矩阵的特征式可计算如下

$$\det \left\{ s\mathbf{I}_{2n} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{GC} \end{bmatrix} \right\} = \det[s\mathbf{I}_n - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] \det[s\mathbf{I}_n - (\mathbf{A} - \mathbf{GC})]$$

上式表明, 整个闭合系统的特征多项式等于 $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$ 特征式和 $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$ 的特征式的乘积。因此可以断言, 就所关心的特征值问题来说, 在状态反馈系统中, 采用 $\hat{\mathbf{x}}$ 与采用 $\mathbf{x}$ 作反馈是没有区别的, 而且状态反馈增益阵 $\mathbf{K}$ 和观测器的增益阵 $\mathbf{G}$ 的设计可以相互独立地进行, 这一性质通常称为分离特性。

闭环系统的传递函数可以通过(5-51)式来计算。注意到(5-51)式是可控性分解的形式, 不可控部分 $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ 在传递函数中计算过程中将被消去, 闭环系统的传递函数由可控部分决定, 所以可得

$$\mathbf{G}_f(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{B}$$

上述关系表明图 5-4 所示系统的传递函数和用准确的 $\mathbf{x}$ 作反馈时的传递函数完全一致, 这说明用 $\hat{\mathbf{x}}$ 代替 $\mathbf{x}$ 作反馈未影响系统的输入输出关系。

同样可以证明, 当状态反馈采取降维观测器来实现时, 分离特性仍然成立。

**降维状态观测器作状态反馈** 这里应用分离特性设计一个用降维状态观测器实现状态反馈的系统。设计的主要步骤是首先设计反馈增益阵 $\mathbf{K}$ 以实现系统的极点配置, 再单独设计具有任意指定特征值的降维观测器, 得到状态的渐近估计值, 最后按图 5—4 的形式组成反馈控制系统。

**例 5-8** 给定系统如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

要用状态反馈将系统的特征值配到-1、-2、-3, 并且降维状态观测器来实现所需要的反馈。

由于 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 可控,  $\mathbf{A}$ 已是循环矩阵, 故在 $\mathbf{B}$ 的值域中可找到 $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ 1]^T$ , 使 $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 可控。引入记号:  $\mathbf{b} = \mathbf{BL}, \mathbf{L} = [1 \ 1]^T, \mathbf{u} = \mathbf{Lv}_1$  系统方程可写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bv}_1$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

利用等价变换 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$ , 可将上述方程化为可控标准形

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1$$

变换矩阵

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

期望的特征方程式为  $s^3 + 6s^2 + 11s + 6$ ，故可得

$$\bar{\mathbf{K}}_1 = [1 - 6 \quad -1 - 11 \quad -1 - 6] = [-5 \quad -12 \quad -7]$$

$$\mathbf{K}_1 = \bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{P} = [0 \quad -12 \quad 5]$$

这说明状态的反馈增益矩阵可取为

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad -12 \quad 5] = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 5 \\ 0 & -12.5 & 5 \end{bmatrix}$$

这里的  $\mathbf{K}$  阵是秩为 1 矩阵。

再设计降维观测器以产生状态的估计值。由例 5—7，可得一维状态观测为

$$\dot{z} = (1 - g_2)z + (1 - 2g_2)u_2 - g_2^2 y$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - g_2 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$g_2$  可用来配置观测器特征值，设所要的特征值为 -4，则可取  $g_2 = 5$ ，一维观测器方程为

$$\dot{z} = -4z - 9u_2 - 25y_2$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

这样可得整个包含状态反馈和降维观测器的闭合系统的方程式如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\dot{z} = -4z - 9[0 \quad 1]\mathbf{u} - 25[0 \quad 1]\mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 5 \\ 0 & -12 & 5 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}$$

将上面的方程合并后，可得闭环状态方程为



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 73 & 73 & 17 \\ 0 & 74 & 74 & 17 \\ 0 & 73 & 74 & 17 \\ 0 & -682 & -682 & -157 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} v$$

不难验证其特征式为  $(s+1)(s^3+9s^2+26s+24)$ 。若将上述闭环系统的方程用拉氏变换式表示, 可得

$$\begin{aligned} y(s) &= \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{u}(s) &= \mathbf{u}_1(s) + \mathbf{v}(s) \\ \mathbf{u}_1(s) &= \begin{bmatrix} 0 & -12 & 5 \\ 0 & -12 & 5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z(s) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} y(s) \right\} \\ z(s) &= \frac{1}{s+4} \left\{ -9 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(s) - 25 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} y(s) \right\} \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{u}_1(s) = \frac{1}{s+4} \left[ \begin{pmatrix} 0 & -153 \\ 0 & -153 \end{pmatrix} \mathbf{u}(s) + \begin{pmatrix} 0 & 73s-133 \\ 0 & 73s-133 \end{pmatrix} y(s) \right]$$

从而可得包括降维观测器及线性状态反馈的闭环系统的方块图, 如图 5—5 所示。

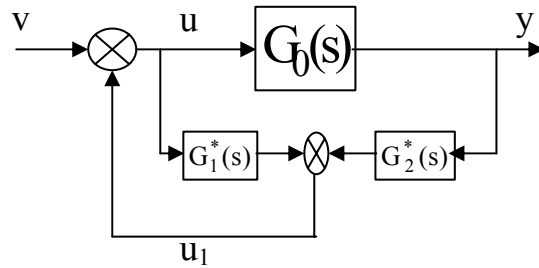


图 5—5 闭环系统的方块图

图 5—5 中的传递函数矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2s-1}{(s-1)^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_1^*(s) &= \frac{1}{s+4} \begin{bmatrix} 0 & -153 \\ 0 & -153 \end{bmatrix} & \mathbf{G}_2^*(s) &= \frac{1}{s+4} \begin{bmatrix} 0 & 73s-133 \\ 0 & 73s-133 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

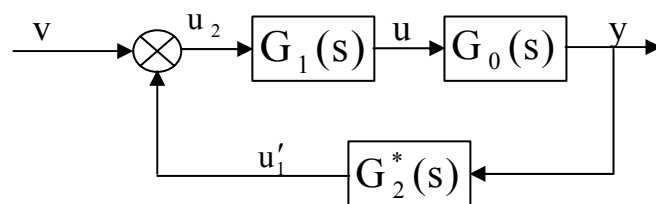


图 5—6

若令  $\mathbf{G}_1(s) = [1 - \mathbf{G}_1^*(s)]^{-1}$ ，则图 5—5 的方块图又可化为图 5—6 的形式。这里归化的原则是保持了系统输入和输出的关系不变，图 5—6 的形式正是所谓反馈校正和串联校正联合应用的形式，这种类型的校正的作用在经典理论中已为我们所熟悉。这样我们以直观的方式说明了观测器加状态反馈的效果就相当于对系统进行串联和反馈校正。反之，若对系统采用如图 5—6 的串联和反馈校正，只要  $\mathbf{G}_1(s)$  和  $\mathbf{G}_2^*(s)$  选得合适也可以起着状态反馈的作用。

除了用降维状态观测器作状态反馈之外，也可以用  $n$  维状态观测器作状态反馈，但是这时附加的观测器部分阶次提高，要多用积分器。尽管如此，在有噪声和初始条件不精确的情况下，宁可采取  $n$  维状态观测器，因为降维观测器对噪声的敏感度大，要选一组参数，使得观测器在各种不同干扰下都能满意的工作是不容易的。若是为了进一步减少观测器的阶次，可以采取最小阶  $\mathbf{Kx}$  观测器，即由观测器直接给出状态的线性函数的估计值。

在利用观测器的状态反馈系统中，观测器的极点在传递函数阵中没有反映，但是它对系统的动态性能仍然有着很大的影响。因此如何设置观测器的极点是一个重要的问题，这是最优控制所研究的，但这里我们可直观地进行如下说明，如果观测器的极点的实部与系统所要配置的极点的实部相差不大，那么显然  $\hat{x}$  的  $x$  接近程度较慢，用  $\hat{x}$  代替  $x$  的效果就差。但如果观测器的极点比系统所要配置的极点离虚轴远得多，这时观测器又起到微分器的作用，而引入微分器将会使系统抗干扰的能力降低，这也是不希望的(见习题 5—12)。

## § 5—4 动态输出反馈

在 § 5—1 中我们介绍了用静态输出反馈进行极点配置方面的一些结果。这些结果表明和状态反馈的情况不同，静态输出反馈一般不具有任意配置系统  $n$  个极点的能力。如果把动态环节加到输出反馈中去，形成动态输出反馈，那输出反馈的能力就会增大。动态输出反馈也称为动态补偿器(dynamic compensator)。

上节讨论的利用观测器构成的状态反馈系统，也是构成动态补偿器的一种方式。如前所述，这种动态补偿器可以完成系统极点配置的作用，它的阶数由观测器的阶数所决定。如果只从极点配置的角度来看，可令图 5—6 中的  $v = 0$ ，因而  $\mathbf{G}_1(s)$  可合并于  $\mathbf{G}_2^*(s)$ ，那么图 5—6 就可等效为动态输出反馈的形式了。

下面我们一般地讨论任一固定阶次的动态输出反馈。

### 动态输出反馈构成的闭环系统

系统方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (5-52)$$

$m$  阶动态输出反馈控制律

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{w} + \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{y}\end{aligned}\quad (5-53)$$

( $\mathbf{A}_1$  为  $m \times m$  矩阵。 $\mathbf{w}$  为  $p$  维向量)。(5—52, 53, 54) 构成的闭环系统如图 5—7 所示。,

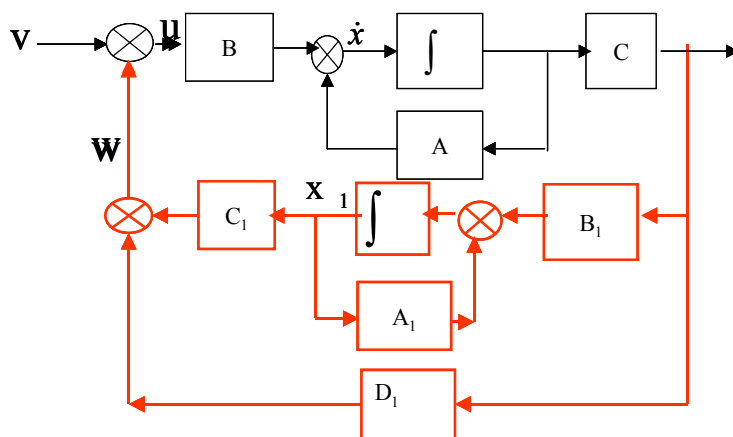


图 5—7 动态输出反馈系统

闭环系统方程

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_1\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{C} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-55)$$

动态输出反馈的设计问题可以化为一个静态输出反馈问题来讨论。为此，构造下列  $n+m$  维系统：

系统方程：

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (5-56)$$

控制律：

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{y}} \quad (5-57)$$

(5—56)，(5—57) 构成的闭环系统方程

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \right) \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{h}_{11}\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21}\mathbf{C} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \right) \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{h}_{11}\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21}\mathbf{C} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

比较 (5—55) 和 (5—58) 式，可知 (5—55) 系统动态输出反馈设计问题相当于 (5—56) 的静态输出反馈设计问题。且

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{h}_{22}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{h}_{21}, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{h}_{12}, \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{h}_{11},$$

### $p_0$ 阶极点配置动态补偿器

现在研究极点配置的一个特殊情况。令  $p_0 = \min\{v_0 - 1, \mu_0 - 1\}$ ，这里  $v_0$  和  $\mu_0$  分别表示系统的可观测性指数和可控性指数。

**定理** 若  $(\mathbf{A}、\mathbf{B}、\mathbf{C})$  可控可观测，则可设计  $p_0$  阶动态补偿器，使闭合系统  $n + p_0$  个特征值可以任意配置。

**例 5—9** 设给定系统如下

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

这个系统的可观性指数为 2，所以用一阶补偿器即可进行闭环 5 个极点的配置。

### 动态补偿器设计问题介绍提纲

#### 1、位置与形式

主要分输入、输出反馈结构(图 5—5 所示)，单回路结构(串联、并联)以及前馈形式，当然可以几种手段并用于一个系统中。

#### 2、目的：改善系统稳定性及品质

例如极点配置, 特征结构配置, 解耦、消除交链影响, 干扰抑制、跟踪, 模型匹配(*model matching*), 最优设计, 鲁棒性(*Robustness*)等。

### 3、方法

复数域方法: 主要是解多项式矩阵方程;

频率域方法(现代频率域方法): INA 方法、有理函数矩阵的特征值分解、极分解、奇异值分解等多种频域曲线。一般多用输入输出描述;

几何方法: 状态空间方法。如  $H_2 / H_\infty$

### 4、特色

多变量系统的多目标、多用途的控制器, 往往采用某种优化算法, 与多目标优化联系起来。

**阶次问题:** 补偿器设计中的低价或最小阶次设计一直是一个活跃的领域, 难度较大。一般做不下去就转向找一个充分性的阶次(指比最小阶高但能保证完成规定设计任务)。稳定且具有最小相位的补偿器也是另一难点。

## 小 结

本章研究的对象仍然是线性时不变系统,首先介绍了输出反馈在配置极点方面的主要结果,正是在认识了输出反馈的局限性的基础上,使我们很自然地感觉到引入观测器和动态补偿器的必要性。

用静态输出反馈进行极点配置方面的结果主要体现在定理 5—6 和定理 5—8 中。而定理 5—2、定理 5—3 以及定理 5—4,则是在探讨极点配置问题时最常用到的一些基本结果。它们不只是讨论静态输出反馈时用到,在讨论动态输出反馈时也曾用到。我们可以略去这些证明,而着重了解它们的结论和应用。对于需要了解证明细节的读者,可以先从甘特玛赫所著“矩阵论”一书中获得必要的准备知识。从所介绍的有关极点配置方面的结果可以看出,这些结果都不够完善和理想,因此输出反馈配置极点作为一个问题,目前仍然在继续探索。

在观测器理论中, § 5—2 介绍了状态观测器和  $\mathbf{Kx}$  观测器的有关问题,包括观测器的存在性条件、极点任意设置的条件、结构条件、维数问题以及观测器的代数等价问题。最小阶  $\mathbf{Kx}$  观测器的设计这里没有涉及。感兴趣的读者可参考有关文献。

设计满足不同技术要求的动态补偿器,是改善系统性能重要手段,因此动态补偿器的设计是控制理论中最有实用价值的内容。限于篇幅,我们这里只从达到系统极点配置的角度来研究动态补偿器的设计问题。§ 5—3 研究了观测器加线性状态反馈这种特殊形式的动态补偿器的设计,介绍了分离特性在设计时的应用,并指出这种形式的补偿器等价于输入输出反馈系统(图 5—5)的结构形式。§ 5—4 研究了“单回路”系统的动态补偿器的设计问题、这里“单回路”是指由对象与补偿器构成“一个回路”区别于图 5—5 的形式。为了保持方法上的延续性,仍采用状态空间的方法讨论了固定阶次的补偿器在进行极点配置上的能力,指出  $p_0$  阶动态补偿器是达到任意配置极点的补偿器阶数的上限。动态补偿器的设计,一般更多的是采用复数域的方法,限于篇幅,这里完全没有涉及。

## 习 题

5—1 给定可控状态方程为

$$a、\quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$b、\quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

在  $\mathbf{B}$  的值域中找出  $\mathbf{b}$ ,使  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  可控,并写出  $\mathbf{b}$  的一般形式。

5—2 给定系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

寻求  $2 \times 2$  矩阵  $\mathbf{H}$ , 使  $(\mathbf{A} + \mathbf{BHC}, \mathbf{B})$  可控,  $(\mathbf{A} + \mathbf{BHC}, \mathbf{C})$  可观测, 并且  $\mathbf{A} + \mathbf{BHC}$  是循环矩阵。

**5—3** 证明系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

用输出反馈可以任意配置极点。导出配置  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  的反馈增益阵  $\mathbf{K}$  的通式, 并求  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -3$  时的  $\mathbf{K}$  阵。

**5—4** 动态方程如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

其闭环特征式为  $\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})] = s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0$ , 试在参数空间  $(d_0 \ d_1 \ d_2)$  中, 求出可用输出反馈配置极点的区域。并在此区域中取一点, 具体进行配置, 即求出反馈增益阵。

**5—5** 若实数  $\lambda$  不是  $\mathbf{A}$  的特征值, 且有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^\perp(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n - p$$

证明  $\lambda$  必不可能成为  $\mathbf{A} + \mathbf{BKC}$  的特征值。其中  $\mathbf{B}^\perp$  是满足  $\mathbf{B}^\perp \mathbf{B} = 0, \text{rank} \mathbf{B}^\perp = n - p$  的任何一个矩阵。

**5—6** 动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{y} = [5 \quad -6 \quad 0] \mathbf{x}$$

问闭环系统  $\mathbf{A} + \mathbf{BKC}$  是否能以  $\{-1, [6 \quad 3 \quad 5]^T; -2, [12 \quad 4 \quad 11]^T\}$  为其特征值和特征向量? 闭环另一个特征值应是多少?

**5—7** 动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{y} = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

构造具有特征值  $-2$ 、 $-2$ 、 $-3$  的三维状态观测器。

**5—8** 对于 5—7 题中的动态方程, 求具有特征值为  $-2$ 、 $-3$  的二维状态观测器。

**5—9** 试对下列系统构造降维状态观测器

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad \mathbf{I}] \mathbf{x}$$

**5—10** 系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

构造最小维状态观测器。

*a*、取  $\mathbf{G}$  为一般形式。 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$ , 求出状态观测器方程。

*b*、若将观测器特征值全设置为  $-2$ , 试分别取 (1)  $g_1 = g_4 = 0$  (2)  $g_2 = g_3 = 0$  两种情况进行讨论。

**5—11** 动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 \quad 1] \mathbf{x}$$

用状态反馈将闭环极点设置在  $-1 \pm j$ 。若状态反馈不能直接被利用, 设计具有特征值为  $-3$ 、 $-4$  的二维状态观测器。画出包括线性状态反馈及观测器的整个闭环系统的方块图。

**5—12** 对 5—11 题的系统, 若是采用特征值为  $-3$  的降维状态观测器, 试画出包括线性状态反馈及降维观测器的整个闭环系统的方块图。若观测器的特征值设置在  $-a$ , 而  $a \gg 1$ , 试证明这时相当于在系统中引入了微分器。

**5—13** 设一个系统具有传递函数

$$\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试问是否有可能利用状态反馈将传递函数变成

$$\frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)}$$

若有可能, 问如何进行变换? 若状态变量不能直接被利用, 用特征值为  $-1, -1$  的降维状态观测器来产生状态变量。试写出整个闭环系统的动态方程与传递函数  $\mathbf{G}_1^*(s)$  与  $\mathbf{G}_2^*(s)$  (参考图 5—5)。

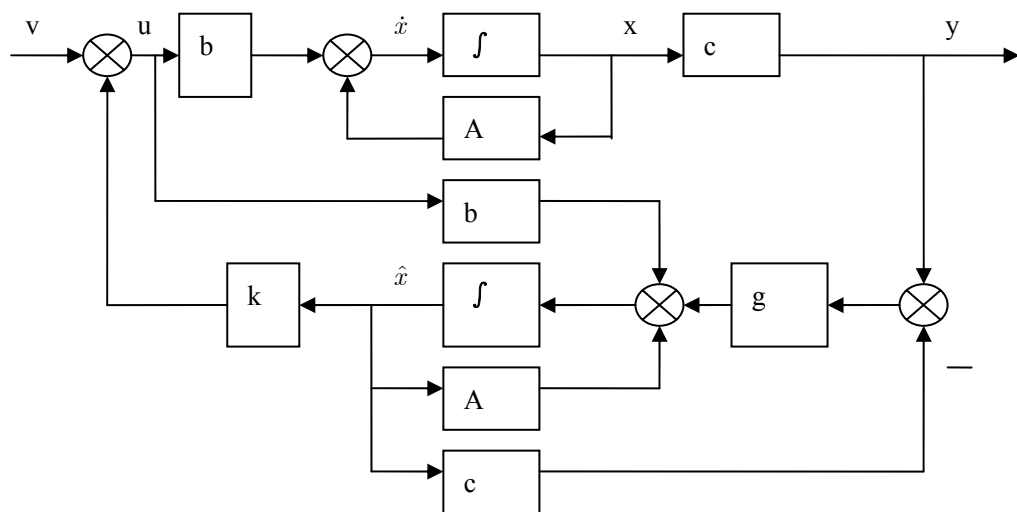
**5—14** 可控、可观的单变量系统  $(\mathbf{A} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c})$  和全维状态观测器及状态反馈组成的闭环系统如题 5—14 图所示。试建立闭环系统的动态方程式, 并证明闭环系统可观的充分必要条件为:

1、 $(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k} \quad \mathbf{c})$  可观测;

2、 $(\mathbf{A} - \mathbf{g}\mathbf{c} \quad \mathbf{k})$  可观测;



3、  $\det \begin{pmatrix} \lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ , 这里  $\lambda_0$  是观测器的任一极点。



题 5—14 图

## 第六章 时变线性系统

本章所考虑的  $n$  维线性时变系统的方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}\end{aligned}\quad (6-1)$$

式中  $\mathbf{u}$  是  $p$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  是  $q$  维输出向量,  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$  和  $\mathbf{C}(t)$  是相应规模的矩阵, 并假定状态方程满足解存和唯一性条件。这一时变系统, 我们在第一章和第二章已经进行过一些讨论。

和线性时不变系统相比, 线性时变系统的问题要复杂一些, 首先在于 (6—1) 中的矩阵均是时间的函数, 系统的性质如状态可控性、可达性、可观测性、可重构性等和所研究的时刻有关, 因此就提出这些性质对  $t$  是否具有一致性的问题。在时变系统的设计中, 一致性常是设计问题有解的条件。其次由于时变系统的特征值和系统的运动之间的联系不像时不变系统那样的密切, 在时不变系统中特征值对应于系统运动的模式, 而在时变系统中为了分析系统运动, 一般不能用对特征值的分析来代替, 有时不得不去研究与系统运动关系密切的状态转移矩阵, 而求出时变系统的状态转移矩阵的本身就是一件困难的事情。另外在研究方法上, 显然复数域的方法一般不再适用, 所采取的完全是时域的方法。

本章的目的是在第一、二章的基础上, 介绍一致完全可控性与一致完全可观测性的概念, 并对应于时不变系统的极点配置及估计器设计等问题, 讨论时变系统的类似问题。企图通过这些讨论, 介绍一些一般在研究时变系统时所遇到的困难和基本的方法。

### § 6—1 一致完全可控性与一致完全可观测性

对于时变系统 (6—1), 我们不仅要像第二章所做的那样, 讨论可控性、可达性、可观测性以及可重构性。而且要研究这些性质对  $t$  是否具有一致性。下面介绍一致完全可控和一致完全可观测的概念, 它对于最优控制和滤波问题解的存在性及稳定性来说都是非常重要的。

**一致完全可控性的定义及判据** 为了引入一致完全可控的概念, 我们先回忆 § 2—2 所阐明的可控性和可达性的概念, 在定义 2—3 和定义 2—4 中, 所要求的有限时间  $t_1$  和定义在  $[t_0 \ t_1]$

上的允许控制一般都是和  $t_0$  有关的, 这点和时不变的情况大不相同, 另外时变系统的可控性与可达性也不是像时变系统那样是等价的。我们希望定义一种“可控性”, 使得具有这种“可控性”的系统, 在以上所说的这些问题上类似于时不变系统, 即使得时变的影响能相对小一些。另外在最小能量消耗的控制中 (参看习题 2—5), 需要完成控制的  $\mathbf{u}_{[t_0 \ t_1]}$ , 因为它与可控性矩阵的逆阵成“正比”关系, 因此若可控性矩阵很“小”, 将导致控制很“大”, 而这是不期望的, 故也希望在所定义的“可控性”中, 对此也给出限制。

**定义 6—1** 线性时变系统 (6—1) 称为一致完全可控的, 如果存在  $\sigma > 0$  以及与  $\sigma$  有关的正数  $\alpha_i(\sigma) (i = 1, 2, 3, 4)$ , 使得对一切  $t$  有

$$0 < \alpha_1(\sigma)\mathbf{I} \leq \mathbf{W}(t, t + \sigma) \leq \alpha_2(\sigma)\mathbf{I} \quad (6-2)$$

$$0 < \alpha_3(\sigma)\mathbf{I} \leq \Phi(t + \sigma, t)\mathbf{W}(t, t + \sigma)\Phi^T(t + \sigma, t) \leq \alpha_4(\sigma)\mathbf{I} \quad (6-3)$$

这里  $\Phi(t_1, t_2)$  为系统的状态转移矩阵,  $\mathbf{W}$  的定义如式 (2—8), 是系统的可控性矩阵。

这一定义可以保证, 在时间定义域内任何时刻的状态转移均可在时间间隔  $\sigma$  内完成, 而与时间的起点无关。这里所说的状态转移, 包括了从  $t$  时刻的任何状态转移到  $t + \sigma$  时刻的零状态 (可控) 以及由  $t - \sigma$  时刻的零状态转移到  $t$  时刻的任意状态 (可达), 这两点分别由 (6—2) 式与 (6—3) 式所保证。实际上如用可达性矩阵的概念, (6—3) 式可以写成

$$0 < \alpha_3(\sigma)\mathbf{I} \leq \mathbf{Y}(t - \sigma, t) \leq \alpha_4(\sigma)\mathbf{I} \quad (6-4)$$

其中,  $\mathbf{Y}(t - \sigma, t) = \int_{t-\sigma}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau$ 。所以, 定义中的一致性包含了对可控性的一致与对可达性的一致。另外在这一时间间隔内,  $\mathbf{u}$  也可取得与时刻  $t$  无关, 同时由于 (6—2)、(6—3) 给出了  $\mathbf{W}(t, t + \sigma)$  及  $\mathbf{Y}(t - \sigma, t)$  的上界与下界, 这反映在进行控制时,  $\mathbf{u}$  的幅值也给出了限制, 从而消耗的能量也受到了限制, 有它的上界与下界。因而 (6—2)、(6—3) 就可与系统自由项的衰减速度和最优控制的最优化指标发生一定的联系。可以利用  $\alpha_i(\sigma)$  来估计系统自由项衰减的速度以及估计最优化指标的数值。由此可见定义 6—1 中的  $\alpha_i(\sigma)$  是很有价值的量。

按定义 2—3 是可控的系统, 可以不是一致完全可控的。

#### 例 6—1 一维线性系统

$$\dot{x} = e^{-|t|}u$$

该系统  $\mathbf{M}_0(t) = e^{-|t|}$  不等于零, 故按定义 2—3 是可控的。但它不是一致完全可控的, 因为

对  $t > 0$ , 使  $\mathbf{W}(t, t + \sigma) = \int_t^{t+\sigma} e^{-2t} dt = 0.5e^{-2t}(1 - e^{-2\sigma}) > \alpha(\sigma)$  成立的  $\alpha(\sigma)$  不存在, 因为当  $t$  充分大时, 因子  $e^{-2t}$  可任意地小。

#### 例 6—2 一维线性系统

$$\dot{x} = b(t)u$$

式中  $b(t)$  由图 6—1 所定义。

只要选择  $\sigma = 5$  就可证明在  $(-\infty, +\infty)$  内系统是一致完全可控的。

当然也是可控的。

在应用一致完全可控定义时, 要借助于可控性矩

阵, 而  $\mathbf{W}(t_0, t)$  的计算又有赖于  $\Phi(t_0, t)$ , 这对一般时变系统来说, 仍然是比较复杂的。关于可控性矩阵有以下定理:

**定理 6—1** 可控性矩阵  $\mathbf{W}(t_0, t)$  具有以下性质:

- (1)  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  是对称的,
- (2)  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  对于  $t_1 > t_0$  是非负定的,

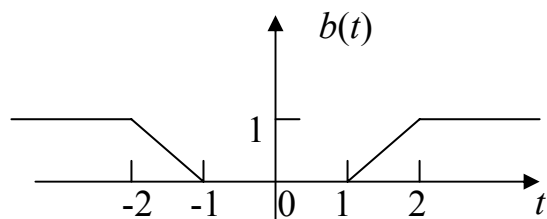


图 6—1 函数  $b(t)$  的图形

(3)  $\mathbf{W}(t_0, t)$  满足线性矩阵微分方程,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{W}(t, t_1) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{W}(t, t_1) + \mathbf{W}(t, t_1) \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ \mathbf{W}(t_1, t_1) &= 0 \end{aligned} \quad (6-5)$$

(4)  $\mathbf{W}(t_0, t_1)$  满足

$$\mathbf{W}(t_0, t_1) = \mathbf{W}(t_0, t) + \Phi(t_0, t) \mathbf{W}(t, t_1) \Phi^T(t_0, t_1) \quad (6-6)$$

**证明** 由于这些证明都很简单, 作为习题留给读者。

**定理 6—2** 若  $\mathbf{A}(t)$  及  $\mathbf{B}(t)$  有界, 即存在  $K$  使得对任意的  $t$ , 均有

$$\|\mathbf{A}(t)\| < K, \quad \|\mathbf{B}(t)\| < K \quad (6-7)$$

则系统一致完全可控的充分必要条件为: 存在  $\sigma > 0$  及  $\alpha_0(\sigma)$ , 使得对一切  $t$  成立

$$0 < \alpha_0(\sigma) \mathbf{I} \leq \mathbf{W}(t, t + \sigma) \quad (6-8)$$

条件 (6—8) 的必要性根据一致完全可控的定义是显然成立的。要证明条件 (6—8) 的充分性, 只要证明定义 6—1 中的另外三个不等式。为此, 先证明两个引理:

**引理 1** (*Gronwall-Bellman* 不等式) 设  $u(t), v(t) \geq 0$ , 而  $c > 0$ , 若

$$u \leq c + \int_0^t u v dt \quad \forall t \geq 0 \quad (6-9)$$

$$\text{则有} \quad u \leq c e^{\int_0^t v dt} \quad \forall t \geq 0 \quad (6-10)$$

**证明** 由 (6—9) 式可得

$$\frac{uv}{c + \int_0^t u v dt} \leq v$$

积分上式

$$\int_0^t \frac{uv}{c + \int_0^t u v dt} dt \leq \int_0^t v dt$$

引入  $w = c + \int_0^t u v dt$ ,  $dw = u v dt$ , 并注意到  $t = 0$  时,  $w = c$ , 所以

$$\ln \left( c + \int_0^t u v dt \right) - \ln c \leq \int_0^t v dt$$

即

$$c + \int_0^t u v dt \leq c e^{\int_0^t v dt}$$

再根据 (6—9) 式, 显然有 (6—10) 式成立。

**引理 2** 系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的矩阵  $\mathbf{A}(t)$  有界, 即存在  $K$ , 使得对一切  $t$  有  $\|\mathbf{A}(t)\| \leq K$  成立, 则其状态转移矩阵  $\Phi(t + \sigma, t)$  满足不等式

$$\|\Phi(t + \sigma, t)\| \leq e^{K\sigma} \quad (6-11)$$

更一般地  $\forall s, t$  均有  $\|\Phi(t, s)\| \leq e^{K|t-s|}$  成立。

**证明** 这里只证明(6—11) 式。设  $t \geq \tau$  , 则有

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, \tau) \quad \Phi(\tau, \tau) = \mathbf{I}$$

积分上式得到

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{I} + \int_{\tau}^t \mathbf{A}(\rho) \Phi(\rho, \tau) d\rho$$

对上式进行估值

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq 1 + \int_{\tau}^t \|\mathbf{A}(\rho)\| \|\Phi(\rho, \tau)\| d\rho$$

应用引理 1 的不等式, 得

$$\|\Phi(t + \sigma, t)\| \leq \exp \int_t^{t+\sigma} \|\mathbf{A}(\rho)\| d\rho \leq e^{K\sigma}$$

定理 6—2 充分性的证明, 由

$$\|\mathbf{W}(t, t + \sigma)\| \leq \int_t^{t+\sigma} \|\Phi(t, \tau)\|^2 \|\mathbf{B}(\tau)\|^2 d\tau \leq K^2 \int_t^{t+\sigma} \|\Phi(t, \tau)\|^2 d\tau$$

因为  $\|\mathbf{A}(t)\| < K$  , 由引理 2 可知  $\|\Phi(t, \tau)\| \leq e^{K(t-\tau)}$  , 所以

$$\|\mathbf{W}(t, t + \sigma)\| \leq K^2 \int_t^{t+\sigma} e^{2K(t-\tau)} d\tau = \frac{K}{2} (1 - e^{-2K\sigma}) = \alpha_1(\sigma)$$

即

$$\mathbf{W}(t, t + \sigma) \leq \alpha_1(\sigma) \mathbf{I}$$

上式与 (6—8) 式表明 (6—2) 成立。再证 (6—3) 也成立, 因为  $\mathbf{W}(t, t + \sigma) \geq \alpha_0(\sigma) \mathbf{I} > 0$  均为正定对称阵, 故

$$\mathbf{W}^{-1}(t, t + \sigma) \leq \frac{1}{\alpha_0(\sigma)} \mathbf{I}$$

因为  $\Phi(t, t + \sigma)$  非奇异, 可得

$$\Phi^T(t, t + \sigma) \mathbf{W}^{-1}(t, t + \sigma) \Phi(t, t + \sigma) \leq \frac{1}{\alpha_0(\sigma)} \Phi^T(t, t + \sigma) \Phi(t, t + \sigma)$$

已知  $\|\Phi(t, t + \sigma)\| = \|\Phi^T(t, t + \sigma)\| \leq e^{K\sigma}$  所以

$$\|\Phi^T(t, t + \sigma) \mathbf{W}^{-1}(t, t + \sigma) \Phi(t, t + \sigma)\| \leq \frac{1}{\alpha_0(\sigma)} e^{2K\sigma} = \frac{1}{\alpha_3(\sigma)}$$

$$\Phi^T(t, t + \sigma) \mathbf{W}^{-1}(t, t + \sigma) \Phi(t, t + \sigma) \leq \frac{1}{\alpha_3}(\sigma) \mathbf{I}$$

$$\Phi(t + \sigma, t) \mathbf{W}(t, t + \sigma) \Phi^T(t + \sigma, t) \geq \alpha_3(\sigma) \mathbf{I}$$

这里利用了关系式  $\Phi^{-1}(t, t + \sigma) = \Phi(t + \sigma, t)$ 。最后有

$$\begin{aligned} \|\Phi(t + \sigma, t) \mathbf{W}(t, t + \sigma) \Phi^T(t + \sigma, t)\| &\leq \|\Phi(t + \sigma, t)\|^2 \|\mathbf{W}(t, t + \sigma)\| \\ &\leq e^{2K\sigma} \alpha_1(\sigma) = \alpha_4(\sigma) \end{aligned}$$

$$\Phi(t + \sigma, t) \mathbf{W}(t, t + \sigma) \Phi^T(t + \sigma, t) \leq \alpha_4(\sigma) \mathbf{I}$$

定义 6—1 中的 (6—2)、(6—3) 均成立, 定理 6—2 充分性证毕。

特别指出定理 6—2 中的有界条件对于得出定理结论是不可少的。举例如下:

**例 6—3** 考虑一维系统

$$\dot{x} = 3t^2x + \sqrt{6}tu$$

取  $\sigma = 1$  时的可控性矩阵是

$$\mathbf{W}(t, t+1) = 1 - \exp[-6t^2 - 6t - 2]$$

因为对于所有的  $t$  均有

$$1 - e^{-\frac{1}{2}} \leq \mathbf{W}(t, t+1) \leq 1$$

因此 (6-2) 式成立, 但是

$$\mathbf{Y}(t - \sigma, t) = \exp[6\sigma t^2 - 6\sigma^2 t + 2\sigma^3] - 1$$

对于任何的  $\sigma > 0$ , (6-3) 均不可能成立, 因此该系统不是一致完全可控的。实际上一致完全可控性的概念中包含有对完全可控性的一致性与对完全可达性的一致性, 该例题说明对于可控性有一致性, 但对可达性无一致性, 因而不是一致完全可控的。定理 6-2 说明在有界的条件下, 对可控性具有一致性即对可达性也具有一致性, 因而是一致完全可控的。

**一致完全可观的定义和判据** 和一致完全可控的定义对应的有一致完全可观测性。

**定义 6-2** 线性时变系统 (6-1) 称为一致完全可观测的, 如果存在  $\sigma > 0$ , 及

$\beta_i(\sigma) (i = 1, 2, 3, 4)$ , 使得对一切的  $t$  有

$$0 < \beta_1(\sigma)\mathbf{I} \leq \mathbf{V}(t, t + \sigma) \leq \beta_2(\sigma)\mathbf{I} \quad (6-12)$$

$$0 < \beta_3(\sigma)\mathbf{I} \leq \Phi^T(t, t + \sigma)\mathbf{V}(t, t + \sigma)\Phi(t, t + \sigma) \leq \beta_4(\sigma)\mathbf{I} \quad (6-13)$$

其中  $\mathbf{V}$  为可观测性矩阵, 定义如下

$$\mathbf{V}(t, t + \sigma) = \int_t^{t+\sigma} \Phi^T(\tau, t) \mathbf{C}^T(\tau) \mathbf{C}(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (6-14)$$

显然一致完全可观测的系统在时间定义域内的任意时刻  $t$  的一个区间  $[t, t + \sigma]$  上都是可观测的, 在  $[t - \sigma, t]$  上都是可重构的。同时根据一致完全可观测的定义可知,  $\mathbf{V}(t, t + \sigma)$  及  $\Phi^T(t, t + \sigma)\mathbf{V}(t, t + \sigma)\Phi(t, t + \sigma)$  有上界与下界, 这种有界性在讨论最优估计和对估计误差进行判断时, 是十分有用的。

**定理 6-3** 可观测性矩阵 (6-14) 具有以下性质:

- (1)  $\mathbf{V}(t_0, t_1)$  是对称的,
- (2)  $\mathbf{V}(t_0, t_1)$  对于  $t_1 > t_0$  是非负定的,
- (3)  $\mathbf{V}(t_0, t_1)$  满足线性矩阵微分方程

$$\frac{d\mathbf{V}(t, t_1)}{dt} = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{V}(t, t_1) - \mathbf{V}(t, t_1)\mathbf{A}(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{C}(t) \quad (6-15)$$

$$\mathbf{V}(t_1, t_1) = 0$$

- (4)  $\mathbf{V}(t_0, t_1)$  满足

$$\mathbf{V}(t_0, t_1) = \mathbf{V}(t_0, t) + \Phi^T(t, t_0)\mathbf{V}(t, t_1)\Phi(t, t_0) \quad (6-16)$$

**定理 6—4** 若存在  $K$  使对任意的  $t$  有

$$\| \mathbf{A}(t) \| < K \quad \| \mathbf{C}(t) \| < K \quad (6-17)$$

则系统一致完全可观测的充分必要条件为：存在  $\sigma > 0$  及  $\beta_0(\sigma)$ ，使得对一切  $t$  成立

$$0 < \beta_0(\sigma) \mathbf{I} \leq \mathbf{V}(t, t + \sigma) \quad (6-18)$$

**证明** 必要性显然成立。充分性证明如下

$$\begin{aligned} \| \mathbf{V}(t, t + \sigma) \| &= \left\| \int_t^{t+\sigma} \Phi^T(\tau, t) \mathbf{C}^T(\tau) \mathbf{C}(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right\| \\ &\leq \int_t^{t+\sigma} \| \Phi(\tau, t) \|^2 \| \mathbf{C}(\tau) \|^2 d\tau \\ &\leq K^2 \int_t^{t+\sigma} \| \Phi(\tau, t) \|^2 d\tau \\ &\leq K^2 \int_t^{t+\sigma} (e^{K(\tau-t)})^2 d\tau = K^2 \int_t^{t+\sigma} e^{2K(\tau-t)} d\tau \\ &= \frac{K}{2} (e^{2K\sigma} - 1) \end{aligned}$$

取  $\beta_2(\sigma) = \frac{K}{2} (e^{2K\sigma} - 1) > 0$ ，从而就有

$$\mathbf{V}(t, t + \sigma) \leq \beta_2(\sigma) \mathbf{I}$$

上式与 (6-18) 表明 (6-12) 成立。再证 (6-13) 亦成立

$$\begin{aligned} \| \Phi^T(t, t + \sigma) \mathbf{V}(t, t + \sigma) \Phi(t, t + \sigma) \| &\leq \| \Phi(t, t + \sigma) \|^2 \| \mathbf{V}(t, t + \sigma) \| \\ &\leq e^{-2K\sigma} \cdot \frac{K}{2} (e^{2K\sigma} - 1) = \frac{K}{2} (1 - e^{-2K\sigma}) = \beta_4(\sigma) \end{aligned}$$

所以

$$\Phi^T(t, t + \sigma) \mathbf{V}(t, t + \sigma) \Phi(t, t + \sigma) \leq \beta_4(\sigma) \mathbf{I}$$

又因为  $\mathbf{V}^{-1}(t, t + \sigma) \leq (1/\beta_0(\sigma)) \mathbf{I}$ ，故可得

$$\begin{aligned} \| \Phi(t + \sigma, t) \mathbf{V}^{-1}(t, t + \sigma) \Phi^T(t + \sigma, t) \| &\leq e^{2K\sigma} / \beta_0(\sigma) = 1 / \beta_3(\sigma) \\ \Phi(t + \sigma, t) \mathbf{V}^{-1}(t, t + \sigma) \Phi^T(t + \sigma, t) &\leq (1 / \beta_3(\sigma)) \mathbf{I} \\ \Phi^T(t, t + \sigma) \mathbf{V}(t, t + \sigma) \Phi(t, t + \sigma) &\geq \beta_3(\sigma) \mathbf{I} \end{aligned}$$

定义 6—2 中的 (6-12) 和 (6-13) 式均成立，定理的充分性证毕。

## 第七章 线性系统的稳定性分析

稳定性是系统能正常工作所必须满足的要求，它和可控性可观测性一样是系统的定性性质。本章针对描述系统的两种方法，将讨论两种意义下的稳定性，即系统动态方程在李雅普诺夫意义下的稳定性和用输入输出描述系统时引入的有界输入有界输出稳定性。并且研究这两种稳定性之间的关系。

李雅普诺夫第二方法是研究微分方程解的稳定性的方法，它作为一种手段，在控制系统的分析与设计中越来越受到重视。本章将结合线性系统介绍李雅普诺夫第二方法的基本概念，并说明它在研究系统稳定性、估计动态过程的衰减时间和进行反馈系统综合等方面的应用。

### § 7—1 李雅普诺夫稳定性

简而言之，李雅普诺夫稳定性的概念是微分方程解对初值的连续依赖性这一概念在无穷时间区间上的推广和发展。因此下面讨论时均假定所研究方程的解在无穷区间  $[t_0, +\infty)$  满足存在和唯一性条件。

**稳定性的概念** 考虑一般的时变、非线性、多变量系统，它的微分方程式如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \quad (7-1)$$

其中  $\mathbf{x}$  为  $n \times 1$  向量， $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  为  $n \times 1$  的函数向量。不失一般性，可以设

$$\mathbf{F}(t, 0) = 0 \quad (7-2)$$

这时方程 (7—1) 有解  $x = 0$ ，称为 (7—1) 的显然解或零解。从物理概念上看，(7—2) 式表示系统的平衡状态，相应于状态空间中的坐标原点。

#### 一、平衡状态的稳定性

设有一个初始扰动，使系统的状态偏离了平衡状态  $x = 0$ 。若初始扰动为  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ，显然在这个初始扰动作用下，方程 (7—1) 所决定的运动是下列初值问题

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

的解。将这个解表示为  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ 。

根据微分方程解对初值的连续依赖性质，可知只要  $\mathbf{x}_0$  充分小，对于  $[t_0, T]$  之间的任一时刻， $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$  偏离  $x = 0$  也可以任意小。现在要问这一性质是否对  $[t_0, +\infty)$  均成立？

**定义 7—1** 对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，都存在  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ ，使得当  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon)$  时有

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

成立。则称平衡状态  $x = 0$  是（李雅普诺夫意义下）稳定的。

**定义 7—2** 若定义 7—1 中的  $\delta = \delta(\varepsilon)$ ，即  $\delta$  与  $t_0$  无关，则称所定义的稳定为一致稳定。

**定义 7—3** 若 (a)  $x = 0$  是稳定的。(b) 存在  $\delta(t_0) > 0$ ，使得对任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $T(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}_0)$ ，当  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(t_0)$ ， $t > t_0 + T(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}_0)$  时有  $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon$ 。则称  $x = 0$  为渐近稳定。

**定义 7—4** 若 (a)  $x = 0$  一致稳定。(b) 存在  $\delta_0 > 0$ ，使得对任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $T(\varepsilon)$ ，当  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta_0$ ， $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$  时有  $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon$ ，则称  $x = 0$  为一致渐近稳定。

在定义 7—4 中，(b) 不仅要求对  $t_0$  一致，而且要求  $T$  只依赖于  $\varepsilon$ ，这说明对于  $\delta_0$  中的任意初值  $\mathbf{x}_0$  所形成的解都必须是以同样的程度趋向于零，这一性质又称对  $\mathbf{x}_0$  同等。

**定义 7—5** 若存在  $\nu > 0$ ，对任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ ，使得当  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$ ，就有



$$\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon e^{-\nu(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

成立。则称  $x = 0$  是按指数渐近稳定的。

由以上的定义中可以看出，这里所定义的稳定、渐近稳定、一致渐近稳定和按指数渐近稳定都是局部的概念，即定义中的条件只要在  $x(t) = 0$  的附近成立即可。为了帮助理解定义中那些数学语言的含意，可以采取图示的方法，例如对定义 7—1，可用图 7—1 中的图来帮助理解。

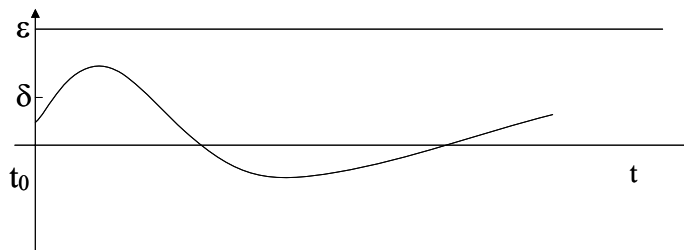


图 7—1 定义 7—1 的图示说明

前述五个定义中所定义的安全性有图 7—2 所示的关系。一般说来，图 7—2 中箭头的方向是不能反过来的，但如果对方程 (7—1) 中的  $F(t, x)$  作某些限制和规定，其中有些箭头也可以反过来，即较弱的定义在特定的条件下和较强的定义之间可以有等价关系。以后我们将对  $F(t, x)$  加上线性或线性时不变等条件来研究这些定义的关系。

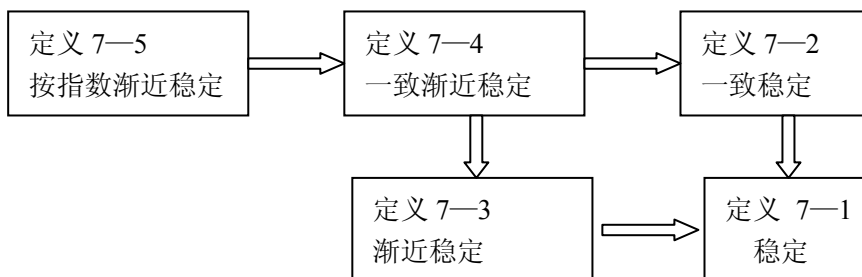


图 7—2 定性定义之间的关系

**二、运动的稳定性** 对于已知的动态系统 (7—1)，我们已经定义了它的平衡状态  $x(t) = 0$  的稳定性。现在讨论系统 (7—1) 任一运动稳定性概念。设  $x(t) = f(t, x_0, t_0) = f(t)$  是初值问题

$$\dot{x} = F(t, x) \quad x(t_0) = x_0 = f(t_0)$$

的解，称为 (7—1) 的未受干扰的运动，我们要研究它的稳定性。

若在  $t_0$  时刻给系统一个扰动  $y_0$ ，即初始状态变为  $x(t_0) = f(t_0) + y_0$ ，从这一初始状态  $f(t_0) + y_0$  出发的运动，即初值问题

$$\dot{x} = F(t, x) \quad x(t_0) = f(t_0) + y_0$$

的解称为被扰动运动。

若令  $y(t) = x(t) - f(t)$ ，则

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{f}(t) = F(t, x) - F(t, f(t))$$

$$= \mathbf{F}(t, \mathbf{y} + \mathbf{f}(t)) - \mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t)) = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}) \quad (7-3)$$

$$\mathbf{G}(t, 0) = 0$$

显然, 变换  $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{f}(t)$  将  $\mathbf{x}$  相对于  $\mathbf{f}(t)$  的关系化为  $\mathbf{y}(t)$  对  $\mathbf{y} = 0$  的关系。这说明通过这一变换, 可以把一个未受干扰运动的稳定性问题化为扰动方程 (7—3) 的零解的稳定性问题来研究。因此, 今后研究某一运动的稳定性问题时, 总是先列出其扰动方程, 再对扰动方程的零解进行研究。故没有必要重复给出运动稳定的各种定义了。

**线性系统稳定性的特点** 现研究线性状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (7-4)$$

(7—4) 式比一般的方程 (7—1) 式的结构要简单, 因此它在稳定性方面有更多的简单特性。

**定理 7—1** 对于方程所表示的线性系统, 若有一个运动稳定, 则其所有运动稳定。

**证明** 设已知 (7—4) 的一个运动  $\mathbf{x}_1(t)$  是稳定的。即任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ , 使得对满足 (7—4) 的任一运动  $\mathbf{x}(t)$ , 只要  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_1(t_0)\| > \delta(t_0, \varepsilon)$ , 就有  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_1(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$  成立。

令  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_1(t)$ , 显然  $\mathbf{x}_0(t)$  是 (7—4) 所对应的齐次方程  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的解。根据上述  $\varepsilon - \delta$  的语言, 可知  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的零解是稳定的。

设  $\mathbf{y}_1(t)$  为 (7—4) 的另一运动,  $\mathbf{y}(t)$  是 (7—4) 的任一运动, 则当  $\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_1(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon)$  时, 对一切  $t \geq t_0$ , 总有  $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_1(t)\| < \varepsilon$ 。这里  $\delta$  只要选择得同前面一样即可, 这表明  $\mathbf{y}_1(t)$  是稳定的。所以对于方程 (7—4), 若一个运动稳定, 就可导出所有运动都稳定。

上述证明过程表明, 对于方程 (7—4) 一个运动稳定, 任一运动稳定, 齐次方程零解稳定都是相同的概念。因此, 对线性系统而言, 可以用“系统是稳定的”来概括以上事实。对于渐近稳定也有类似的结果。

对于非线性系统, 我们不可笼统地说系统是否稳定, 而必须具体指明系统中某一运动是否稳定, 因为对于非线性系统, 可以存在着稳定的运动和不稳定的运动。

**例 7—1** 一维非线性系统方程为

$$\dot{x} = -x(1-x)$$

当  $x(0) = x_0$  时, 可解出该方程的解为

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

显然,  $x = 0$  及  $x = 1$  是系统的两个平衡状态, 由图 7—3 可见, 一个是渐近稳定的, 一个不稳定。

在讨论渐近稳定和一致渐近稳定时, 在定义中曾经指出  $\delta(t_0)$  与  $\delta_0$  的存在, 它的意义是始于其中的轨线最终趋于状态空间的原点, 我们可以把这一  $\delta(t_0)$  区域看成是状态空间原点

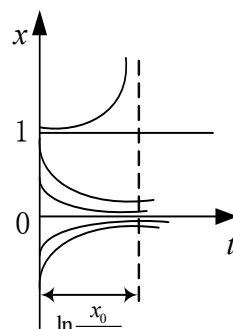


图 7—3  $\dot{x} = -x(1-x)$  的解

渐近稳定的吸引区。由于线性系统中的运动是成比例的，更确切的说，如起始条件为  $x_0$  时有运动  $x(t)$ ，那么对应起始条件  $kx_0$  就有运动  $kx(t)$ ，这里  $k$  为任意的实数。因此零解附近的特性可以放大至整个状态空间。具体地说，若线性系统零解是（一致）渐近稳定的，那么由状态空间任一点为起点的运动轨线都要收敛到原点，即原点的渐近稳定的吸引区遍及整个状态空间，这种情况在运动稳定性理论中称为全局（一致）渐近稳定或大范围（一致）渐近稳定。显然对于例 7—1 的平衡状态  $x = 0$ ，不是大范围一致渐近稳定的。

对于时不变线性系统，由于运动特性与时间起点  $t_0$  无关，因此定义 7—1 等价于定义 7—2，而定义 7—3 等价于定义 7—4。

**线性系统的稳定性判据** 由于线性动态方程的稳定性等价于其对应的齐次方程的零解的稳定性，故这里只讨论齐次方程

$$\dot{x} = A(t)x \quad (7-5)$$

对于（7—5）零解的稳定性问题，由于  $A(t)$  不是常量矩阵，因此一般地不能用特征值来讨论系统运动的性质，而应该采用与系统运动关系密切的状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$ 。

**例 7—2** 齐次方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

由于  $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2$ ，故  $A$  的特征值为 -1, -1。但是

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0.5(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

齐次方程解的一般形式是

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0.5(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

当  $t \rightarrow \infty$  时，只要  $x_2(0) \neq 0$ ，就有  $\|x(t)\|$  趋于无穷，故零解不稳定。若简单地由特征值来判断则导致了错误的结论。

**定理 7—2** 设  $A(t)$  是连续（或分段连续）的函数矩阵，则有以下充分必要条件成立：

(1) (7—5) 稳定：存在某常数  $N(t_0)$ ，使得对于任意的  $t_0$  和  $t \geq t_0$  有

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq N(t_0) \quad (7-6)$$

(2) (7—5) 一致稳定：(1) 中的  $N(t_0)$  与  $t_0$  无关。

(3) (7—5) 渐近稳定：  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0$  (7-7)

(4) (7—5) 一致渐近稳定：存在  $N, C > 0$ ，使得对于任意的  $t_0$  和  $t \geq t_0$  有

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq Ne^{-C(t-t_0)} \quad (7-8)$$

**证明：**

(1) 先证充分性，由于

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t, t_0)x_0\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x_0\| \leq N(t_0) \|x_0\|$$

对于任给的  $\varepsilon > 0$ ，可以取  $\delta(t_0) = \varepsilon/N(t_0)$ ，则当  $\|x_0\| < \delta(t_0)$  时，必有  $\|x(t)\| < \varepsilon$  对  $t \geq t_0$  成立。

再用反证法证明必要性。设零解  $x = 0$  稳定，但  $\Phi(t, t_0)$  无界，这时存在某  $t_1 \geq t_0$ ，使  $\Phi(t_1, t_0)$  中至少有一个元  $\Phi_{ij}(t_1, t_0)$  满足

$$|\Phi_{ij}(t_1, t_0)| > M$$

上式中的  $M$  是任意的正数。现取  $x_0 = (0 \cdots \cdots 0 \quad \delta \quad 0 \cdots \cdots)^T$

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 = \Phi_j(t_1, t_0)\delta$$

这里  $\Phi_j$  表示  $\Phi$  的第  $j$  列，若取  $M = \frac{\varepsilon}{\delta}$ ，则有

$$\|x(t_1)\| \geq |\Phi_{ij}(t_1, t_0)\delta| > \varepsilon/\delta \cdot \delta = \varepsilon$$

式中  $\delta$  不论取得多小，总有  $\|x(t_1)\| > \varepsilon$ ，这与零解稳定相矛盾。

(2) 的证明与 (1) 相类似。(3) 的证明也较简单，不再罗列。

(4) 由条件 (7—8) 可知  $\Phi(t, t_0)$  一致有界，故一致稳定，又因为

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x_0\| \leq Ne^{-C(t-t_0)} \|x_0\|$$

任给  $\varepsilon > 0$ ，对任意给定的  $\delta_0 > 0$ ，都存在与  $t_0$  无关的  $T = -\frac{1}{C} \ln \frac{\varepsilon}{N\delta_0}$ ，使得  $\|x_0\| < \delta_0$ ，

$t \geq t_0 + T$  时有

$$\|x(t)\| \leq Ne^{-CT} \|x_0\| = N \cdot \frac{\varepsilon}{N\delta_0} \|x_0\| < \varepsilon$$

故  $x = 0$  一致渐近稳定。

必要性。设系统 (7—5) 一致渐近稳定。要 (7—8) 式成立。由于系统一致稳定，故对任意的  $t_0$  及  $t \geq t_0$  有  $\|\Phi(t, t_0)\| < k$ 。又按一致渐近稳定的定义，有  $r > 0$ ，对任给的  $\varepsilon > 0$ ，都存在  $T > 0$ ，使得对任意的  $t_0$  及  $t \geq t_0 + T$ ， $\|x_0\| \leq r$ ，均有

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t, t_0)x_0\| \leq \varepsilon$$

上式当  $t = t_0 + T$ ， $\|x_0\| = r$  和  $\varepsilon = \frac{r}{2}$  也成立。现取满足  $\|x_0\| = r$  中的某些特殊的  $x_0$ ，

可以得到

$$\|\Phi(t_0 + T, t_0)x_0\| = \|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \|x_0\| \leq \frac{r}{2}$$

即对任何  $t_0$ 。均有  $\|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \leq \frac{1}{2}$ 。于是

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, t_0)\| &= \|\Phi(t, t_0 + T)\Phi(t_0 + T, t_0)\| \\ &\leq \|\Phi(t, t_0 + T)\| \|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \leq \frac{k}{2} \quad \forall t \in [t_0 + T, t_0 + 2T] \end{aligned}$$

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0 + 2T)\| \|\Phi(t_0 + 2T, t_0 + T)\| \|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \leq \frac{k}{2^2} \quad \forall t \in [t_0 + 2T, t_0 + 3T]$$

依此类推，可知当  $t \in [t_0 + nT, t_0 + (n+1)T)$  时，可得  $\|\Phi(t, t_0)\| \leq \frac{k}{2^n}$ 。以上结果如图 7—4 所示。

选取  $C$ ，使得  $e^{-CT} = \frac{1}{2}$ ，并令  $N = 2k$ ，便得到

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq Ne^{-C(t-t_0)} \quad \forall t_0 \text{ 及 } t \geq t_0$$

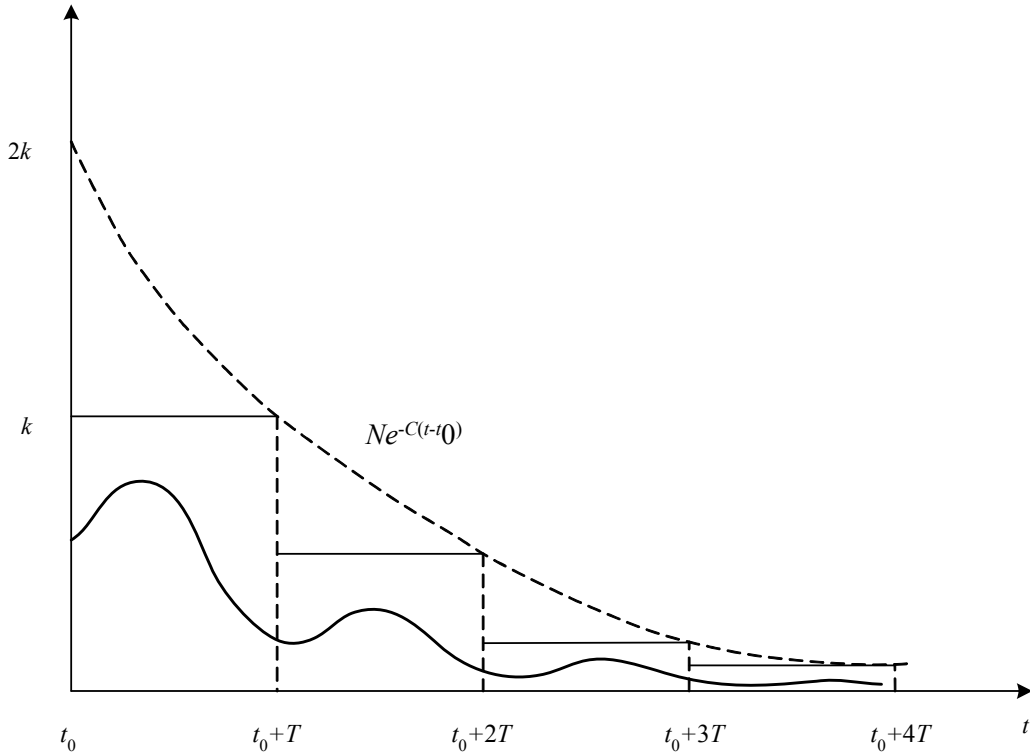


图 7—4  $\|\Phi(t, t_0)\|$  按指数规律收敛

定理 7—2 的 (4) 表明，对于线性系统，一致渐近稳定等价于定义 7—5 的按指数渐近稳定。如前所说定义 7—5 可以导出定义 7—4 但一般反过来是不成立的。

**例 7—3** 一维非线性系统方程为

$$\dot{x} = -x^3$$

解的一般表达式为

$$x = x_0[1 + 2x_0^2(t - t_0)]^{-\frac{1}{2}}$$

由于因子  $[1 + 2x_0^2(t - t_0)]^{-1/2}$  的一致有界性，可知  $x = 0$  是一致稳定，又由于  $t - t_0$  很大时，这个因子不论  $t_0$  为何值均可一致地小，故  $x = 0$  是一致渐近稳定，但是  $x(t)$  显然不是按指数衰减的，因为当  $t$  趋向无穷时，其衰减速度与  $t^{-1/2}$  的速度相当。

**时不变线性系统的稳定性**  $n$  维时不变系统的方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (7-10)$$

(7—10) 的特征方程式为

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (7-11)$$

系统 (7—10) 的稳定性完全可由 (7—11) 式的根来决定。

**定理 7—4** 系统 (7—10) 的稳定性有以下充分必要条件

- (1) 稳定: (7—11) 式实部为零的根对应的初等因子是一次, 且其余均有负实部。
- (2) 渐近稳定: (7—11) 式的所有根均有负实部。
- (3) 不稳定: (7—11) 式有实部为正的根或实部为零的根对应的初等因子不是一次。

**证明** 设有可逆阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}$  为若当标准形。因为  $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}$ , 对于  $t \geq 0$ ,

$\|e^{\mathbf{A}t}\|$  是有界还是指数规律衰减取决于  $\|e^{\mathbf{J}t}\|$ , 因此稳定性讨论只需对  $e^{\mathbf{J}t}$  进行。若  $\mathbf{A}$  的互异特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 对应于特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$  在  $\mathbf{J}$  中有相应的块阵  $\mathbf{J}_i$ , 而  $\mathbf{J}_i$  是由属于特征值  $\lambda_i$  的若当块  $\mathbf{J}_{i1}, \mathbf{J}_{i2}, \dots, \mathbf{J}_{ir(i)}$  组成的准对角阵, 而每一若当块  $\mathbf{J}_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, r(i))$  是如下的维数为  $n_{ij} \times n_{ij}$  的若当块:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

而

$$e^{\mathbf{J}_{ij}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \dots & \frac{t^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ & & & & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix} \quad (7-12)$$

由  $e^{\mathbf{J}_{ij}t}$  的形式可知, 只要有一个特征值实部为正, 必然有  $\|e^{\mathbf{A}t}\|$  无界, 或者当实部为零的特征值对应有阶次大于 1 的若当块, 由于出  $x = 0$  幂函数, 也会导致  $\|e^{\mathbf{A}t}\|$  无界, 系统不稳定。

定理中的 (3) 成立, 反之亦然。即定理中的 (1) 成立。而为了使系统渐近稳定,  $\|e^{\mathbf{A}t}\|$  中各项均按指数规律衰减, 则必须要在 (1) 中排除对应于零实部特征值的那些不发散也不收敛到零的项, 即要求所有特征值均有负实部。

**例 7—4** 若 (7—10) 式中的  $\mathbf{A}$  阵分别取

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

它们所对应的矩阵指数为

$$e^{\mathbf{A}_1 t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{A}_2 t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然  $\|e^{\mathbf{A}_1 t}\|$  因含有  $t$  而无界，而  $\|e^{\mathbf{A}_2 t}\|$  有界。故  $\mathbf{A}_1$  对应的系统不稳定， $\mathbf{A}_2$  对应的系统稳定，但因为  $\mathbf{A}_2$  的特征值不具有负实部，故不是渐近稳定。

## § 7—2 线性时不变系统动态方程的稳定性分析

系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (7-13)$$

(7—13)的解

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (7-14)$$

或用复数域表示

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \end{aligned} \quad (7-15)$$

由(7—14)可见 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ 由四部分组成, 因此稳定性分析要对这四部分进行, 显然只有这四项都有界时系统才能正常工作。因此, 对系统采用状态空间的描述方式时, 带来了新的稳定性概念。这些稳定性概念又和系统可控性、可观测性密切相关。

### 一、运动模式及其收敛、发散、有界的条件

(7—13) 式中 $\mathbf{A}$ 阵的特征值称为模态,  $n_i$ 重特征值 $\lambda$ 对应的运动形式可能有 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{n_i-1}e^{\lambda t}$ , 它们均称为系统的运动模式。但对应于 $\lambda$ 的这些模式并非全部都出现, 究竟出现多少项取决于 $\lambda$ 的几何结构。例如下面不同的若当形结构对应有不同的运动模式:

#### 例题 7—5

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \rightarrow e^{\mathbf{A}_1 t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{2t} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \rightarrow e^{\mathbf{A}_2 t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{2t} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \rightarrow e^{\mathbf{A}_3 t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (1)  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ ,  $\lambda$ 对应的所有运动模式收敛, 即随着时间趋于无穷而趋于零。
- (2)  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ,  $\lambda$ 对应的所有运动模式发散, 即随着时间趋于无穷而趋于无穷, 并且是按指数规律发散。
- (3)  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , 分两种情况: 若 $\lambda$ 对应的若当块全是一阶块, 这时 $\lambda$ 的代数重数与几何重数一致, 不会发生发散现象, 运动模式也不收敛, 运动模式是有界的; 当 $\lambda$ 的几何重数小于代数重数,  $\lambda$ 对应的若当块一定有二阶或二阶的以上出现, 这时运动模式发散, 但发散是按时间



间的幂函数的规律。因此当零实部重根出现时，一定要研究它的几何重数后，才可对运动模式的形态作出结论。只要将例题 7—5 中的特征值 2 换为零，就可证实。

如果对动态方程(7—13)进行等价变换，不会改变运动模式的性质，因而也不会改变(7—14)式中四项的有界性，即等价变换不改变稳定性。

齐次方程稳定性问题是  $\mathbf{A}$  的特征值问题，但在(7—14)式中以四项形式出现，也就是与  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  阵密切相关，即与系统的可控性、可观测性密切相关。

## 二、李雅普诺夫意义下的稳定、渐近稳定(参考§7—1)

首先研究齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (7-16)$$

它的解为  $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ ，这是(7—14)式中的第一项，也是  $\mathbf{u} = 0$  时  $x(t)$  的表达式。当  $x(0) = 0$  时，(7—16)有解： $x = 0$ ，它称为(7—16)的零解。

**定义** 对任意的  $x(0)$ ，均有  $x(t)$  有界，则称(7—16)的零解是李雅普诺夫意义下稳定的；

若对任意的  $x(0)$ ，均有  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ，则称(7—16)的零解为渐近稳定。

**说明：**这里一个时间函数  $x(t)$  称为有界的，是指存在与  $t$  无关的常数  $K$ ，使得当  $t \in (0, \infty)$ ，均有  $|x(t)| < K$  成立。

**定理 7—5** 对方程(7—16) 零解的稳定性有下列充分必要条件成立：

(1) 李雅普诺夫意义下稳定  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  的实部为零的特征值对应的若当块是一阶块，其余特征值均具有负实部；

(2) 渐近稳定  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  的特征值均具有负实部；

(3) 不稳定  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  或有正实部特征值；或实部为零的特征值有非一阶若当块。

**例题 7—6** 下面给出的四个系统矩阵  $\mathbf{A}$ ，分别对应于稳定、渐近稳定、不稳定的情况。对于同属于不稳定情况的第三、四个矩阵，发散的情况有所不同，前者按  $t$  规律发散，后者按指数规律( $e^t$ ) 发散。

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1+j & & \\ & -1-j & \\ & & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

## 三、有界输入、有界状态 (BIBS) 稳定

本节研究(7—14)式中的第二项，并综合研究第一、二项。

**定义** 若  $x(0) = 0$ ，及在任意有界输入  $u(t)$  作用下，均有  $x(t)$  有界，则称系统(7—13) BIBS 稳定。

若对任意的  $x(0)$ ，及在任意有界输入  $u(t)$  作用下，均有  $x(t)$  有界，则称系统(7—13) BIBS 全稳定。

**定理 7—6** 系统(7—13) *BIBS* 稳定  $\Leftrightarrow$  系统(7—13)全体可控模式收敛;

系统(7—13) *BIBS* 全稳定  $\Leftrightarrow$  系统(7—13)全体可控模式收敛、全体不可控模式不发散。

定理 7—6 可以用可控性分解式来说明。不妨假定(7—13)式中的矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  具有可控性分解形式。这时有

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & \times \\ & e^{\mathbf{A}_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)} \mathbf{B}_1 u(\tau) d\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

当  $x(0) = 0$  时,  $x(t)$  的表达式中只有第二项, 这项与不可控模式无关, 而

$$\left| \int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)} \mathbf{B}_1 u(\tau) d\tau \right| \leq K \int_0^\infty |e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{B}_1| dt$$

这里  $K$  是  $u(t)$  的界, 上式若有界当且仅当  $\mathbf{A}_1$  的特征值均具有负实部。当考虑全稳定时,  $\mathbf{A}$  的所有模式均要计及, 故需加上  $\|e^{\mathbf{A}_2 t}\|$  有界的条件, 而这个条件就是  $\mathbf{A}_2$  李氏稳定的条件。

从复数域的表达式(7—15)来看, *BIBS* 稳定的条件就是  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  的极点均具有负部, 因为不可控模均已消去, 故只要对可控模态提出要求即可。

李氏稳定条件加上了 *BIBS* 稳定条件就是 *BIBS* 全稳定的条件

#### 四、有界输入、有界输出 (*BIBO*) 稳定

本节研究(7—14)式中的第四项, 并综合研究第三、四项。

**定义** 若  $x(0) = 0$ , 及在任意有界输入  $u(t)$  作用下, 均有  $y(t)$  有界, 则称系统(7—13) *BIBO* 稳定。

若对任意的  $x(0)$ , 及在任意有界输入  $u(t)$  作用下, 均有  $y(t)$  有界, 则称系统(7—13) *BIBO* 全稳定。

**定理 7—7** 系统(7—13) *BIBO* 稳定  $\Leftrightarrow$  系统(7—13)全体可控可观模式收敛;

系统(7—13) *BIBO* 全稳定  $\Leftrightarrow$  系统(7—13)全体可控可观模式收敛、全体可观不可控模式不发散。

*BIBO* 稳定研究  $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{G}(s)$  的极点是否具有负实部, 这正是经典控制理论中研究的稳定性。判别  $\mathbf{G}(s)$  的极点是否全在左半面, 可用劳斯及古尔维茨判据。

定理 7—6, 7—7 明显地表明 *BIBS* 稳定、*BIBO* 稳定与系统可控性、可观性密切相关。

#### 五、总体稳定 (T 稳定)

**定义** 若对任意的  $x(0)$ , 及在任意有界输入  $u(t)$  作用下, 均有  $x(t)$ 、 $y(t)$  有界, 则称系统(7—13) 总体稳定。

一个用状态方程描述的系统, 要能够正常工作, 总体稳定是先决条件; 总体稳定包含了

*BIBO* 全稳定和 *BIBS* 全稳定；而 *BIBS* 全稳定的系统一定 *BIBO* 全稳定，所以总体稳定的充分必要条件是 *BIBS* 全稳定。

## 六、稳定性之间的关系

容易验证以下结论成立：

**定理 7—8** 若  $(A, C)$  可观，则有 *BIBO* 稳定  $\Leftrightarrow$  *BIBS* 稳定。

证明：“ $\Leftarrow$ ”显然。下面证“ $\Rightarrow$ ”：

$\frac{CH(s)B}{\psi(s)}$  极点在左半面，要证  $\frac{H(s)B}{\psi(s)}$  极点在左半面。反证法。若 *BIBS* 不稳定，存在不稳定的  $\lambda_0$ ，使  $\psi(\lambda_0) = 0$ ， $H(\lambda_0)B = 0$ ，这一个  $\lambda_0$  也一定使  $(CH(\lambda_0)B \neq 0)^*$ ，因而也是  $G(s)$  的极点，与 *BIBO* 稳定矛盾。

若  $CH(\lambda_0)B = 0$ ，由定理 3—12 的推导可得  $(VH(\lambda_0)B) = 0$ ，这里  $V$  是可控性矩阵。由可观性假定可得  $(H(\lambda_0)B) = 0$ ，矛盾

**定理 7—9** 若  $(A, B)$  可控，则有 *BIBS* 稳定  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ 。

证明  $(A, B)$  可控， $(sI - A)^{-1}B = \frac{H(s)B}{\psi(s)}$  无零、极对消。否则有  $\psi(\lambda_0) = 0$ ， $H(\lambda_0)B = 0$ ，由定理 3—12 的推导可得

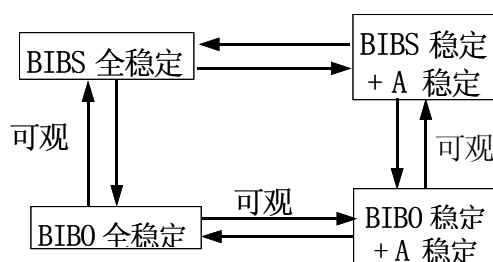
$$H(\lambda_0) \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0, \quad H(\lambda_0) = 0$$

与  $H(s)$  公因子为 1 相矛盾。*BIBS* 稳定， $\psi(s)$  的零点均在左半面，所以  $|sI - A|$  零点也在左半面。(二者数值一样，只是重数不同。)

**定理 7—10** 若  $(A, B, C)$  可观、可控，则有 *BIBO* 稳定  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ 。

**定理 7—11** *BIBS* 全稳定  $\Leftrightarrow$  *BIBS* 稳定， $A$  李氏稳定。

**定理 7—12** 若  $(A, C)$  可观，则有 *BIBO* 全稳定  $\Leftrightarrow$  *BIBO* 稳定， $A$  李氏稳定。



**定理 7—13** 若  $(A, B, C)$  可观、可控，以下事实等价

- (1) *BIBO* 稳定；
- (2) *BIBS* 稳定；
- (3)  $A$  渐近稳定；
- (4)  $A$  特征值具有负实部；
- (5) 传函阵极点具有负实部；
- (6) 总体稳定

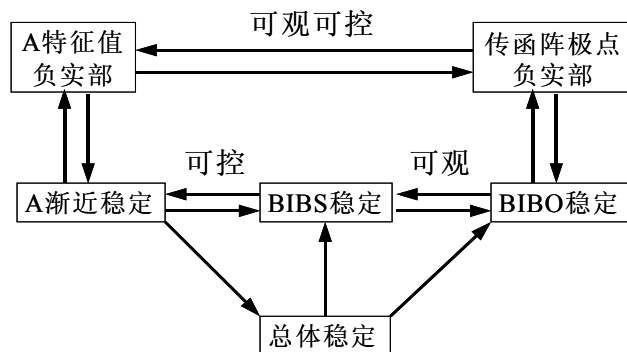


图 7—6 稳定性之间的关系(2)

时不变系统判断各种意义下的稳定性，一般要求出  $\mathbf{A}$  的特征值，再对这些特征值的可控、可观性进行研究，再根据定理作判断。因为系统的可控性、可观性与传函阵零、极点对消（或约去模态）有联系，因此可以不去判别各特征值的可控、可观性，直接计算

$$\mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}, (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

由计算的结果判别。

**例题 7—7** 系统状态方程和输出方程如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad -b] \mathbf{x}$$

其中  $a_1$ 、 $a_2$  和  $b$  均为实常数，试分别给出满足下列条件时， $a_1$ 、 $a_2$  和  $b$  的取值范围：

- (1) 李亚普诺夫意义下稳定；
- (2) 有界输入、有界输出(BIBO)稳定。

**解** (1) 李氏稳定：1)  $a_1 > 0$ ， $a_2 > 0$ 。特征值一个为 0，两个有负实部

2)  $a_1 = 0$ ， $a_2 > 0$ ，特征值两个为 0，一个有负实部。零特征值几何重数与代数重数相同，初等因子为一次。

3)  $a_1 > 0$ ， $a_2 = 0$ ，一个零特征值，一对共轭零实部特征值。

(2) BIBO 稳定：

$$\mathbf{G}(s) = \frac{b}{s} - \frac{bs}{s^2 + a_2s + a_1} = \frac{b(a_2s + a_1)}{s(s^2 + a_2s + a_1)}$$

1)  $b=0$ ， $\mathbf{G}(s) = 0$ ；

2)  $b \neq 0$ ， $a_1 = 0$ ， $a_2 = 0$ ， $\mathbf{G}(s) = 0$ ，

此外不会 BIBO 稳定。

**例题 7—8** 多变量系统结构图如图 7—7 所示，其中  $K_1$  和  $K_2$  都是非零常数， $v_1, v_2$  是输入量， $y_1, y_2$  是输出量。试给出系统总体稳定时参数  $K_1$ ， $K_2$  应满足的条件（只要给出不等式，不要求解出不等式）。

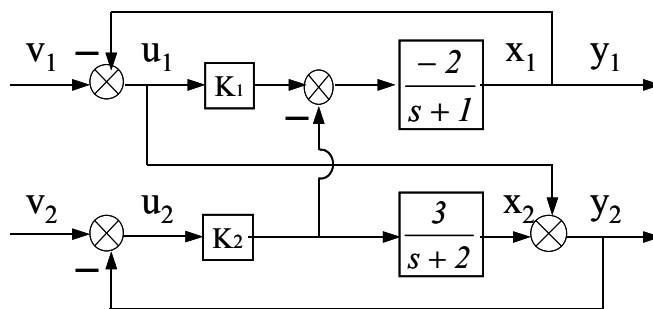


图 7—7 多变量系统结构图

**解** 根据图 7—7 中所给出的关系，列出方程组如下

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= -2(K_1 u_1 + K_2 u_2), \quad \dot{x}_2 + 2x_2 = 3K_2 u_2, \quad y_1 = x_1 \\ u_2 &= v_2 - (x_2 + u_1), \quad u_1 = v_1 - y_1, \quad y_2 = u_1 + x_2 \end{aligned}$$

消去中间变量  $u_1$ 、 $u_2$ ，得到下列系统的动态方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 + 2K_1 - 2K_2 & 2K_2 \\ 3K_2 & -2 - 3K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2K_1 + 2K_2 & -2K_2 \\ -3K_2 & 3K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**B**、**C** 矩阵的秩均为 2，系统可控、可观测，故总体稳定等价于渐近稳定，于是

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} s + 1 - 2K_1 + 2K_2 & -2K_2 \\ -3K_2 & s + 2 + 3K_2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + (3 - 2K_1 + 5K_2)s + (2 - 4K_1 + 7K_2 - 6K_1K_2) \end{aligned}$$

上面的多项式的根均在左半面的充要条件为

$$3 - 2K_1 + 5K_2 > 0, \quad 2 - 4K_1 + 7K_2 - 6K_1K_2 > 0$$

**例题 7—9** 系统动态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

式中  $a$ 、 $b$  为实常数，分别写出满足下列稳定性要求时，参数  $a$ 、 $b$  应满足的条件（要写清理由）：

- 1) 当  $u = 0$  时， $x = 0$  李雅普诺夫意义下稳定；
- 2) 系统 BIBS 稳定；
- 3) 系统 BIBO 稳定。

**解:**

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s + a & 0 & 0 \\ -5 & s + 5 & 15 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s(s + 5)(s + a)$$

1)  $a > 0$ , 三根为  $0, -5, -a$  李氏稳定;  $a < 0$ , 有正根, 不稳定;  $a = 0$ , 二根为零, 一根为  $-5$ ,  $\text{rank}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})_{s=0} = 1$  有两个线性无关的特征向量, 零根对应的若当块为两个一阶块, 故李氏稳定。

2)

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+a} & 0 & 0 \\ \frac{5}{(s+a)(s+5)} & \frac{1}{s+5} & \frac{-15}{s(s+5)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+a} \\ * \\ \frac{-1}{s} \end{bmatrix}$$

这说明不论  $a$  取何值, 均有一个  $s = 0$  是可控制的, 故  $BIBS$  不稳定 ( $a = 0, s = 0$  两根中至少有一个不可控, 因为可控性矩阵的秩至少为 2, 所以必有一个  $s = 0$  可控)。

3)  $\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{b}{s+a}$   $b \neq 0, a > 0$ ,  $BIBO$  稳定;  $b = 0$   $BIBO$  稳定。

**例题 7—10** 系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1 \quad b \quad 0] \mathbf{x}$$

试分别给出系统满足各种稳定性时, 参数  $a, b, \sigma, \lambda$  应满足的充分必要条件。

**解**  $x = 0$  李雅普略夫意义下稳定  $\sigma \leq 0 \quad \lambda < 0$

渐近稳定:  $\sigma < 0 \quad \lambda < 0$

$BIBS$  稳定:  $a = 0 \quad \lambda < 0 \quad a \neq 0 \quad \sigma < 0 \quad \lambda < 0$

$BIBO$  稳定:  $b = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a \neq 0 \quad \sigma < 0 \end{cases} \quad b \neq 0 \begin{cases} a = 0 \quad \lambda < 0 \\ a \neq 0 \quad \sigma < 0 \quad \lambda < 0 \end{cases}$

$BIBO$  全稳定:  $b = 0 \begin{cases} a = 0 \quad \sigma \leq 0 \\ a \neq 0 \quad \sigma < 0 \end{cases} \quad b \neq 0 \begin{cases} a = 0 \quad \sigma \leq 0 \quad \lambda < 0 \\ a \neq 0 \quad \sigma < 0 \quad \lambda < 0 \end{cases}$

$BIBS$  全稳定:  $a = 0 \quad \sigma \leq 0 \quad \lambda < 0 \quad a \neq 0 \quad \sigma < 0 \quad \lambda < 0$

总体稳定:  $a = 0 \quad \sigma \leq 0 \quad \lambda < 0 \quad a \neq 0 \quad \sigma < 0 \quad \lambda < 0$

### § 7—3 李雅普诺夫第二方法

为了分析运动的稳定性,李雅普诺夫提出了两种方法,第一方法包含许多步骤,包括最终用微分方程的显式来对稳定性进行分析,这是一个间接的方法;第二种方法不是直接求解微分方程组,而是通过构造所谓的李雅普诺夫函数来直接判断运动的稳定性,因此又称为直接法,它完全是一种定性的方法。本节主要介绍直接法及其在线性控制理论中的应用。

**基本概念和主要定理** 首先用一个简单的例子来阐明直接法的概貌。

**例 7—11** 研究一个自由度的阻尼振动,其微分方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ay - x \quad (a > 0)\end{aligned}$$

这里  $x$  表示物体的座标,  $\dot{x} = y$  表示其速度,列向量  $(x \ y)^T$  就表示了它的状态。系统的总机械能可表示为

$$T = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

若  $C > 0$ , 则  $T = C$  表示了相平面  $(x, y)$  上的一个等能量圆,并随着  $C$  的减小,这些等能量圆逐渐向原点收缩。

如图 7—8 所示。从力学的观点来看,这个系统由于阻尼力的存在,总能量随着时间的增加(即运动的进行)

而减小,而且当  $t \rightarrow \infty$  时有  $T \rightarrow 0, x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$ , 即运动趋向于平衡状态,系统是渐近稳定的。这一力学上的显然事实可以给以解析的描述。如果求出  $T$  沿着运动轨线的导数

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right] = x\dot{x} + y\dot{y} = xy + y(-ay - x) = -ay^2$$

可见当  $y \neq 0, \frac{dT}{dt} < 0$ , 只有当  $y = 0$  时才有  $\frac{dT}{dt} = 0$ , 因为  $\frac{dT}{dt} = 0$  只发生在相轨迹上孤立的点处,即相轨迹与  $x$  轴的交点,而这些点都不是系统平衡状态,例如图 7—8 中的点 A, 相轨迹到 A 处并未终止,运动仍继续进行,只要相点一离开 A 处,就有  $\frac{dT}{dt} < 0$ , 相点应继续进入 C 值更小的圆内。因此,在运动的过程中,  $T$  只能不断的减小,相平面上的轨线,应是从外向里穿过一个个等能量圆,最后趋向原点,因而运动是渐近稳定的。根据李雅普诺夫的定义,这里  $T$  就是一个可以用来判断系统稳定性的函数,称为李雅普诺夫函数。

在这个例子中函数  $T$  的特点是  $T \geq 0$ , 只有当  $x = y = 0$  时才为零。而  $\frac{dT}{dt} \leq 0$ , 但沿任一条运动轨线  $\frac{dT}{dt}$  没有在一段时间区间上为零(如果  $T$  是解析函数,在一段时间区间上为零,即表示  $T$  恒为零)。最终导出了  $x = y = 0$  平衡状态是渐近稳定的结论。显然在这一过程并未解微分方程,而只是利用研究函数  $T$  及  $\dot{T}$  的符号来判断稳定性,这就是李雅普诺夫第二方法解决稳定性问题的概貌。

以上的叙述涉及了标量函数的符号问题,为此首先明确定号函数,常号函数及变号函数的概念。考察定义在  $\|x\| < \Omega, t \geq t_0$  的实变量实值函数  $v(x, t)$ , 这里  $\Omega > 0$ 。并假定  $v(x, t)$  是连续的单值的,而且当  $x = 0$  时有  $v(0, t) = 0$ 。

**定义 7—12**

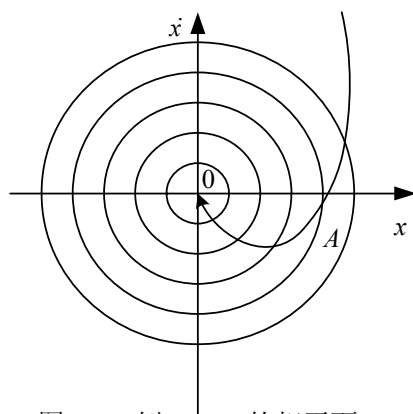


图 7—8 例 7—11 的相平面

(1) 若函数不显含  $t$ ，只是  $x$  的函数，当  $\|x\| < \Omega$  时有  $v(x) \geq 0 (\leq 0)$  则称为  $v(x)$  常正（常负）函数。当  $0 < \|x\| < \Omega$  时有  $v(x) > 0 (< 0)$  则称  $v(x)$  为定正（定负）函数，或称正定（负定）函数。

(2) 若  $v(x, t)$  在  $t \geq t_0$ ， $\|x\| < \Omega$  恒有  $v(x, t) \geq 0 (\leq 0)$  则称  $v(x, t)$  为常正（常负）函数。若在  $\|x\| < \Omega$  存在定正函数  $w(x)$ ，使得对于  $t \geq t_0$ 。成立  $v(x, t) \geq w(x)$ ，则称  $v(x, t)$  为定正函数；若对于  $t \geq t_0$  成立  $v(x, t) \leq -w(x)$ ，则称  $v(x, t)$  为定负函数。

(3) 不是常号函数和定号函数称为变号函数。

(4) 若  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} v(x, t) = 0$  对  $t$  一致则称  $v(x, t)$  具有无限小上界。显然对于具有无限小上界的函数  $v(x, t)$  存在定正函数  $w(x)$  使得对以  $t \geq t_0$  均有  $|v(x, t)| < w(x)$ 。

**例 7—12** 对于定义 7—12 中的各类函数可举例如下。

设  $x = (x_1 x_2)^T$  则有以下结论：

$$(a) \quad v(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{定正}$$

$$(b) \quad v(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \quad \text{常正}$$

$$(c) \quad v(x) = x_1x_2 \quad \text{变号}$$

$$(d) \quad v(x, t) = \frac{1}{1+t^2}(x_1^2 + x_2^2) \quad t \geq t_0 > 0 \quad \text{常正}$$

$$(e) \quad v(x, t) = (1 + \frac{1}{1+t^2})(x_1^2 + x_2^2) \quad t \geq t_0 > 0 \quad \text{定正。取 } w(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$(f) \quad v(x, t) = x_1^2 + t x_2^2 \quad \text{不具有无限小上界。}$$

$$(g) \quad v(x, t) = x_1^2 + \sin t x_2^2 \quad \text{有无限小上界，取 } w(x) = x_1^2 + x_2^2$$

另外应当指出，定义 7—12 中的  $\Omega$  为某一任意大于零的常数， $t_0$  可取得足够大。因为我们要讨论是状态空间原点附近的运动的性质，同时在  $t_0$  以前的有限时间内的运动总可运用解对初值的连续依赖性来研究，重要的是  $t > t_0$  以后的运动要借助于  $V$  函数研究。所以定义中的  $\Omega$  可是任意大于零的数，而  $t_0$  可取得充分大。

**引理** 若  $v(x, t)$  正定（负定），则存在一个上升函数  $\varphi(\|x\|)$ ，使得

$$v(x, t) \geq \varphi(\|x\|) \quad (v(x, t) \leq -\varphi(\|x\|))$$

**证明** 由定义可知  $v(x, t)$  正定，存在  $w(x)$  使得对于

$\|x\| \leq \Omega$  及  $t \geq t_0$ ，有  $v(x, t) \geq w(x)$  成立。由  $w(x)$  构造  $\varphi_1(\|x\|)$ ，令

$$\varphi_1(\|x\|) = \inf_{\|x\| \leq \|x'\| \leq \Omega} w(x'),$$

显然  $\varphi_1(\|x\|)$  是非减函数。令



$$\varphi(\|x\|) = \frac{\int_0^{\|x\|} \varphi_1(\theta) d\theta}{\|x\|}$$

根据洛必达法则, 可知  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi$  的上升性可由导数  $\varphi'(\|x\|) > 0$  而得到验证。

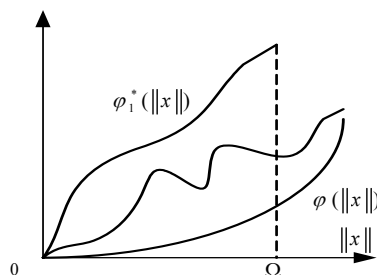


图 7—9 正定且有无穷小上界的函数

正定且有无穷小上界的函数  $v(x, t)$  的示意图表示在图 7—9 中, 图中  $\varphi(\|x\|)$  是如引理所要求的上升函数, 而  $\varphi_1^*(\|x\|)$  则是利用无穷小上界定义中  $|v(x, t)| \leq w_1(x)$  的  $w_1(x)$ , 按引理的方法构造的非减函数。

下面介绍有关微分方程组

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (7-39)$$

的平衡状态  $x = 0$  的稳定性定理, 此处  $f(0, t) = 0$

**定理 7—20** 若  $v(x, t)$  正定 (负定), 且  $v(x, t)$  沿方程 (7—39) 的始于  $x, t$  的运动的导数

$$\dot{v}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T f(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x, t) \leq 0 (\geq 0) \quad (7-40)$$

则 (7—39) 的零解稳定。

**证明** (略)

**定理 7—21** 若  $v(x, t)$  正定, 且具有无穷小上界  $v(x, t)$ , 沿 (7—39) 的解的导数负定。则 (7—39) 的零解渐近稳定。

**证明** (略)

为了揭示 (7—39) 零解的不稳定性, 只需找出一条轨线, 虽初始扰动  $x_0$  任意地小, 它总可以超出某一给定的区域。基于这一思想, 切塔也夫 (И. Г. Тейхман) 给出下列关于 (7—39) 零解不稳定的定理。

**定理 7—22** 设  $v(x, t)$  满足

(1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在一些  $x$  值, 使得当  $\|x\| < \varepsilon, t > t_0$  时,  $v(x, t)$  为负, 满足上述条件的点  $(x, t)$  组成的区域称为区域  $v < 0$ 。这种区域可能包含若干个子区域  $u_1, u_2, \dots, u_j$  的边界是由  $v = 0$  和  $\|x\| = \varepsilon$  所组成。

(2) 在某个子区域  $u_j$  中,  $v$  有下界。

(3) 在  $u_j$  中  $\dot{v}$  为负, 且  $\dot{v} \leq -\varphi(\|v\|) < 0$ , 这里  $\varphi$  是上升函数。

则 (7—39) 的零解是不稳定的。

**证明** (略)

李雅普诺夫曾经提出了两个运动不稳定的定理, 但它们都可由定理 7—22 推出。另外, 在定理 7—21 的条件下, Massera 证明了定理 7—23 的进一步结果, 但为了让读者了解这一历史过程, 前面在讲述定理 7—21 时仍保持了李雅普诺夫的原有的结论。

**定理 7—23** 在定理 7—21 的条件下, (7—39) 的零解一致渐近稳定。

**证明** (略)

上面介绍的关于运动稳定, 渐近稳定以及不稳定的定理, 对于非定常系统均适用。但我们这里的目的在于使读者了解这些定理的结论, 以便下面讨论线性系统时直接运用这些结论。

**线性系统的李雅普诺夫函数** 为了应用李雅诺夫的第二方法来判断运动的稳定性, 必须构造出合乎定理要求的  $v$  函数, 这正是使用第二方法时的困难。运动稳定性理论中对函数  $v$  的存在问题有专门的讨论。这里仅对线性系统介绍一些实用的结果。

考虑  $n$  维线性齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (7-41)$$

并假定  $\|\mathbf{A}(t)\| < K$ 。

**定理 7—24** 若  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  是按指数渐近稳定,  $\mathbf{Q}(t)$  是任意给定的正定对称阵, 它的元是  $t$  的连续函数, 且对  $t \geq t_0$  有

$$0 < \mathbf{C}_2 \mathbf{I} \leq \mathbf{Q}(t) \leq \mathbf{C}_1 \mathbf{I} \quad (7-42)$$

则积分

$$\mathbf{P}(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) \mathbf{Q}(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (7-43)$$

对一切实数  $t$  都收敛, 且  $v(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}$  是满足定理 7—23 的, 方程 (7—41) 的一个  $V$  函数。

**证明** (略)

现在考虑时不变线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , 它的二次型  $v$  函数的存在问题则是和某些矩阵代数方程是否有解联系在一起的, 所以下面我们直接由矩阵代数方程是否有解的方式来叙述。

**定理 7—25** 时不变动态方程  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  的零解是渐近稳定的充分必要条件是对给定的任一个正定对称阵  $\mathbf{N}$ , 都存在唯一的正定对称阵  $\mathbf{M}$ , 使得

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{A} = -\mathbf{N} \quad (7-44)$$

**证明** 充分性。令  $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ , 由于  $\mathbf{M}$  正定, 所以  $v(\mathbf{x})$  是正定函数,  $v(\mathbf{x})$  沿方程解的导数

$$\begin{aligned} \dot{v}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{A}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x} \end{aligned}$$

$\dot{v}(\mathbf{x})$  是负定二次型, 由定理 7—21 可知  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  的零解渐近稳定。

必要性。首先考虑矩阵方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{N} \quad (7-45)$$

容易验证它的解为  $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{N} e^{\mathbf{A} t}$  对 (7—45) 式积分, 可得

$$\mathbf{X}(\infty) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}^T \left( \int_0^\infty \mathbf{X} dt \right) + \left( \int_0^\infty \mathbf{X} dt \right) \mathbf{A}$$

因为  $\mathbf{A}$  是渐近稳定性, 故  $\mathbf{X}(\infty) = 0$  即有

$$-\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \left( \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{N} e^{\mathbf{A} t} dt \right) + \left( \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{N} e^{\mathbf{A} t} dt \right) \mathbf{A}$$

令  $\mathbf{M} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{N} e^{\mathbf{A} t} dt$ ,  $\mathbf{M}$  满足 (7—44) 式, 且

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M}, \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \int_0^\infty (e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x})^T \mathbf{N} (e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x}) dt \geq 0$$

等号当且仅当  $x = 0$  成立。故  $\mathbf{M}$  是正定对称阵。下面再证  $\mathbf{M}$  是唯一的, 若  $\mathbf{M}_1$  和  $\mathbf{M}_2$  均是 (7—44) 的解, 则有

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) + (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \mathbf{A} = 0$$

上式左乘  $e^{\mathbf{A}^T t}$  右乘  $e^{\mathbf{A} t}$  并考虑到矩阵指数的求导计算, 可得

$$\frac{d}{dt} [e^{\mathbf{A}^T t} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) e^{\mathbf{A} t}] = 0$$

这说明  $e^{\mathbf{A}^T t} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) e^{\mathbf{A} t}$  是一个常量矩阵, 当  $t = 0$  时代入可得

$\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = e^{\mathbf{A}^T t} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) e^{\mathbf{A} t}$ , 当  $t \rightarrow \infty$  因为  $\mathbf{A}$  是渐近稳定, 故有  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$  定理证毕。

定理 7—25 可看作定理 7—24 的特例。它说明, 对一个渐近稳定的线性时不变系统, 存在一个与  $t$  无关的二次型函数, 满足定理 7—21 所要求的条件, 这个二次型函数就是一个李雅普诺夫函数。矩阵方程 (7—44) 给出了构造这个二次型  $V$  函数的具体途径, 在指定正定对称的  $\mathbf{N}$  阵后可求解 (7—44) 所定义的  $\frac{1}{2}n(n+1)$  个未知量的代数方程组。定理的结论表明  $\mathbf{A}$  若是渐近稳定时, 这个代数方程组有唯一解存在。

在求解 (7—44) 时比较简单的是取  $\mathbf{N}$  为单位阵, 当  $\mathbf{A}$  中含有未确定参数时, 可以先指定一个  $\mathbf{N}$  阵, 例如是单位阵, 而后解 (7—44) 所确定的代数方程组, 从而得到  $\mathbf{M}$  阵, 用塞尔维斯特定理写出  $\mathbf{M}$  阵正定的条件, 这样就可得到系统稳定时,  $\mathbf{A}$  中的待定参数应满足的条件。应当指出, 这些待定参数应满足的条件是和  $\mathbf{N}$  阵的选择无关的。

**例 7—13** 考虑二维系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

求系统渐近稳定时参数应满足的条件。

令  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$ , 由 (7—44) 式可得

$$\begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & 2a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

上述方程组的系数矩阵  $\mathbf{A}_1$  的行列式为

$$\det \mathbf{A}_1 = 4(a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

若  $\det \mathbf{A}_1 \neq 0$ , 方程组就有唯一解, 其解为

$$\mathbf{M} = \frac{-2}{\det \mathbf{A}_1} \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} + a_{21}^2 + a_{22}^2 & -(a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11}) \\ -(a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11}) & \det \mathbf{A} + a_{11}^2 + a_{12}^2 \end{bmatrix}$$

由  $\mathbf{M}$  正定的条件可得

$$m_{11} = \frac{\det \mathbf{A} + a_{21}^2 + a_{22}^2}{-2(a_{11} + a_{22}) \det \mathbf{A}} > 0, \quad \det \mathbf{M} = \frac{(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2}{4(a_{11} + a_{22})^2 \det \mathbf{A}} > 0$$

因此系统渐近稳定的参数条件为

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \quad (a_{11} + a_{22}) < 0$$

需要引起注意的是, 定理 7—25 并不意味着成立以下的命题, 即 “ $\mathbf{A}$  渐近稳定,  $\mathbf{M}$  正定, 由 (7—44) 式所得的  $\mathbf{N}$  一定正定。”

**例 7—14** 设  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  显然  $\mathbf{A}$  的特征值均有负实部,  $\mathbf{M}$  正定, 但按 (7—44)

计算出的  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 26 \end{bmatrix}$  却不是正定的。

**定理 7—26** 若 (7—44) 中的  $\mathbf{N}$  取为半正定对称阵, 且有  $\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x}$  沿任意非零解不恒为零, 矩阵方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} = -\mathbf{N} \quad (7-46)$$

有正定对称解的充分必要条件为  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  渐近稳定。

证明 (略)

**例 7—15** 考虑三阶多项式  $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ , 其劳斯阵的第一列各元为

$1, a_1, \frac{1}{a_1}(a_1 a_2 - a_3)$  和  $a_3$ 。令  $b_1 = a_1, b_2 = \frac{1}{a_1}(a_1 a_2 - a_3), b_3 = \frac{a_3}{a_1}$ , 构成矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}$$

考虑方程  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ 。现用定理 7—26 来研究这一系统的渐近稳定性。取

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_1^2 \end{bmatrix}$$

显然  $\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x}$  沿  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  的任一非零解不恒为零, 由方程  $\mathbf{A}^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{A} = -\mathbf{N}$  解出

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b_1 b_2 b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}$  正定的充要条件是  $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$ 。这是  $\mathbf{A}$  为渐近稳定的充要条件, 也是  $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$  特征值全在左半面的充要条件, 也是  $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$  劳斯阵第一列全大于零的充要条件。这里  $\mathbf{A}$  阵的特征多项式正是  $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$  因此就证明了三阶多项式时的劳斯判据。若考虑  $n$  次多项式, 即可给出劳斯判据的一种证明的方法。

**定理 7—27** 若  $\mathbf{A}$  的特征值实部非正, 且对应于实部为零的特征值的初等因子为一次, 则存

在正定的二次型  $v(x) = x^T M x$  且  $\dot{v}$  为常负。

**证明** 首先用可逆变换  $\bar{x} = P x$  将方程化为若当形，即

$$\dot{\bar{x}} = P A P^{-1} \bar{x} = J \bar{x} \quad (7-47)$$

式中  $J$  为若当标准形，由定理的假设条件可知  $J$  是三类矩阵的直接和，

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0_{\nu \text{ 维}} \end{bmatrix} \quad J_2 = \text{diag}[J_{21}, J_{22} \cdots J_{2L}], \quad J_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_i \\ -\mu_i & 0 \end{bmatrix}$$

$J_3$  为具有负实部根的若当块所组成，其维数为  $n - \nu - 2L$ ，记

$$(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_r \cdots \bar{x}_{r+2L})^T = \bar{\bar{x}}_1, \quad (\bar{x}_{r+2L+1} \cdots \bar{x}_n)^T = \bar{\bar{x}}_2$$

(7-47) 式可分成下面两个方程

$$\dot{\bar{\bar{x}}}_1 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \quad (7-48)$$

$$\dot{\bar{\bar{x}}}_2 = J_3 \bar{\bar{x}}_2 \quad (7-49)$$

对于方程 (7-49)，根据定理 7-25，存在一个正定二次型  $w_2(\bar{\bar{x}})$ ，且  $\dot{w}_2$  为负定，对 (7-48) 式，令

$$\begin{aligned} w_1(\bar{\bar{x}}_1) &= \bar{x}_1^2 + \cdots + \bar{x}_r^2 + (\bar{x}_{r+1}^2 + \bar{x}_{r+2}^2) + \cdots + (\bar{x}_{r+2L-1}^2 + \bar{x}_{r+2L}^2) \\ \dot{w}_1(\bar{\bar{x}}) &= 2\bar{x}_1 \dot{\bar{x}}_1 + \cdots + 2\bar{x}_r \dot{\bar{x}}_r + 2(\bar{x}_{r+1} \dot{\bar{x}}_{r+1} + \bar{x}_{r+2} \dot{\bar{x}}_{r+2}) + \cdots \\ &\quad + 2(\bar{x}_{r+2L-1} \dot{\bar{x}}_{r+2L-1} + \bar{x}_{r+2L} \dot{\bar{x}}_{r+2L}) \\ &= 2\bar{x}_1 0 + \cdots + 2\bar{x}_r \cdot 0 + 2(\mu_1 \bar{x}_{r+1} \bar{x}_{r+2} - \mu_1 \bar{x}_{r+2} \bar{x}_{r+1}) + \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

令  $w(\bar{x}) = w_1(\bar{\bar{x}}_1) + w_2(\bar{\bar{x}}_2)$  显然  $w(\bar{x})$  正定，且  $\dot{w}(\bar{x}) \leq 0$ 。若  $w_2(\bar{\bar{x}}_2) = \bar{\bar{x}}_2^T M_2 \bar{\bar{x}}_2$  则

$$w(\bar{x}) = \bar{x}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \bar{x}, \quad \text{式中 } I \text{ 为 } r+2L \text{ 的单位阵，由于 } \bar{x} = P x, \text{ 所以二次型}$$

$$x^T P^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} P x = x^T M x \quad (7-50)$$

即为定理所要求， $M$  的正定性是显然的。

这一定理表明对于稳定而非渐近稳定的时不变线性系统，二次型的  $v$  函数存在。

**用  $v$  函数估计系统的动态性能** 若给定系统存在定理 7-21 所要求的李雅普诺夫函数不仅对系统的稳定性有明确的结论，而且这个李雅普诺夫函数也可以用来估计系统过渡过程的衰减特性。现在以系统  $\dot{x} = A x$  为例来说明，由定理 7-25 可知，若  $\dot{x} = A x$  渐近稳定，一定存在正定二次型作为它的  $v$  函数，并且  $\dot{v}$  是负定二次型，这一事实的几何意义可说明如下。

若  $v(x) = x^T M x$ ，这里  $M$  是正定对称阵，现取一正的数列  $\{C_n\}$ ，

$C_1 > C_2 > \dots > C_k > \dots$ ，且  $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$ 。考察曲面  $S_k: x^T M x = C_k (k = 1, 2, \dots)$ 。

$S_k$  是状态空间中以原点为中心的椭球面，并且当  $C_{k+1} < C_k$  时有  $S_{k+1} \subset S_k$  而当  $k \rightarrow \infty$  时， $S_k$  收缩到原点，即这些椭球面层层相套最终收缩于原点。反之状态空间的任一点可属于某个椭球面，因而对应于某一个正数  $C_i$ 。因此可认为通过  $v$  函数给状态空间的点赋予了一个正数，于是可把  $v$  函数看作状态空间到原点距离的一种度量。

另外从几何上看， $\dot{x} = Ax$  的非零解  $x(t)$  在状态空间中表示一条曲线，称为轨线。 $v(x)$  沿这些曲线的导数

$$\dot{v}(x) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T Ax = -x^T N x < 0$$

上式中的  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ，即  $grad v(x)$  表示那些椭球面的外法

向，而  $Ax$  表示了轨线的方向， $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T Ax < 0$  表明椭球面的外法向和轨线方向的夹角为钝角，即轨线应用由外向里穿过层层椭球面，最终趋向于原点， $\frac{\partial v}{\partial x}$  表示了随  $t$  增长，沿轨线  $V$  函数衰减的速度。以上几何的说明表示在图 7—10 中。

定义如下被称为品质因数的指标

$$\eta = \min \left\{ \frac{x^T N x}{x^T M x} \right\} \geq 0 \quad (7-51)$$

$\eta$  可作为  $x(t)$  衰减的快慢的标志，显然  $\eta^{-1}$  可解释为动态过

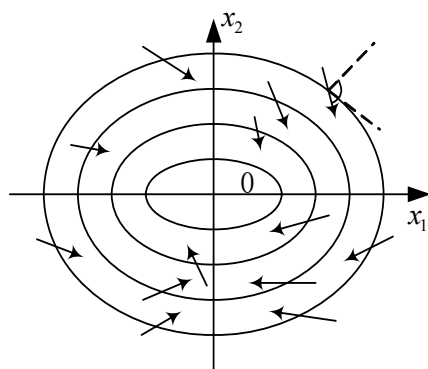


图 7-10 渐近稳定的几何说明

程的最大时间常数。当然对一个系统，我们希望  $\eta^{-1}$  小，即  $\eta$  大，因为  $\eta$  越大，表示轨线趋向于原点的速度大。但是在  $M$  取定后， $\eta$  就确定了，为此希望选取的  $M$  能使  $\eta$  最大。使较大的  $M$  如果能得到，我们就说这时所对应的  $v(x) = x^T M x$  是一个比较好的  $v$  函数，因为利用它可对系统动态过程作出较好的估计。显然若取

$$\eta_1 = \max_v \min_x \left\{ \frac{-\dot{v}}{v} \right\} \quad (7-52)$$

将会得到最好的估计。然而如何得到  $\eta_1$ ，尚不知道。

对于线性时不变系统的正定二次型形式的  $V$  函数，若取定了  $M$  阵， $\eta$  可用下列定理来确定

**定理 7—28** 若  $\dot{x} = Ax$  渐近稳定，则反映零输入响应趋于零的快慢的品质因数  $\eta$  为  $NM^{-1}$  阵的最小特征值。

**证明** 可以证明

$$\eta = \min \left\{ \frac{x^T N x}{x^T M x} \right\} = \min \left\{ x^T N x, x^T M x = 1 \right\} \quad (7-53)$$

上式右端是一个条件极值问题，可用拉格朗日乘子法来解。令

$\varphi(x) = x^T N x - \mu [x^T M x - 1]$  这里  $\mu$  是拉格朗日乘子，根据求极值的方法，列出极值处应满

足的条件

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2(\mathbf{N} - \mu\mathbf{M})\mathbf{x} = 0 \quad (7-54)$$

上式非零解存在的条件为  $|\mathbf{N} - \mu\mathbf{M}| = 0$  或  $|\mathbf{NM}^{-1} - \mu\mathbf{I}| = 0$  这表示  $\mu$  取  $\mathbf{NM}^{-1}$  的特征值时,

(7—54) 的非零解使  $\varphi(\mathbf{x})$  取极值, 由于  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{N} - \mu\mathbf{M})\mathbf{x} + \mu$ , 故  $\varphi(\mathbf{x})$  的极值显然为  $\mu$ ,

故  $\varphi(\mathbf{x})$  的最小值应是  $\mathbf{NM}^{-1}$  的最小特征值。即  $\eta$  为  $\mathbf{NM}^{-1}$  阵的最小特征值。

因  $\mathbf{M}^{-1}$  的特征值即为  $\mathbf{M}$  特征值的倒数, 故当  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$  时  $\eta$  即为  $\mathbf{M}$  的最大特征值的倒数。

下面在  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$  的条件下, 给出衰减时间的一个具体估计, 记  $\mathbf{M}$  的最大特征值为  $\lambda_M$ ,  $\mathbf{M}$  的最小特征值为  $\lambda_m$ , 因为  $\mathbf{M}$  正定, 故  $\lambda_M \geq \lambda_m > 0$

由习题 7—17 可知

$$\lambda_m \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \leq \lambda_M \|\mathbf{x}\|^2 \quad (7-55)$$

上式又可写成

$$\frac{1}{\lambda_M} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \leq \|\mathbf{x}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (7-56)$$

由于  $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}) = -\|\mathbf{x}\|^2$ , 所以有

$$-\frac{1}{\lambda_m} dt \leq \frac{d(\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \leq \frac{1}{\lambda_M} dt$$

从零到  $t$  积分上面的不等式, 可得

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 e^{-\frac{t}{\lambda_M}} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 e^{-\frac{t}{\lambda_m}}$$

利用不等式 (7—55), 得

$$\lambda_m^{-1} \mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 e^{-\frac{t}{\lambda_m}} \leq \|\mathbf{x}\|^2 \leq \lambda_M^{-1} \mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 e^{-\frac{t}{\lambda_M}} \quad (7-57)$$

设  $\varepsilon$  是任意给定的正数, 以原点为中心, 以  $\varepsilon$  为半径的球域为  $\|\mathbf{x}\|^2 \leq \varepsilon^2$ 。设  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  的

以  $\mathbf{x}_0$  为初态的轨线  $\mathbf{x}(t)$  进入  $\varepsilon$  域的时间为  $t_p$ , 通常称  $t_p$  为  $\mathbf{x}(t)$  的过渡过程时间, 即

$\|\mathbf{x}(t_p)\|^2 = \varepsilon^2$ 。从不等式 (7—57) 的右端可知  $t_p$  应满足

$$\varepsilon^2 \leq \lambda_m^{-1} \mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 e^{-\frac{t}{\lambda_M} t_p}$$

即

$$t_p \leq -\lambda_M \ln \left[ \frac{\lambda_m \varepsilon^2}{\mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0} \right] \quad (7-58)$$

(7—58) 式给出  $t_p$  了的上限估计, 同理可得  $t_p$  的下限估计为

$$t_p \geq -\lambda_m \ln \left[ \frac{\lambda_M \varepsilon^2}{\mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0} \right] \quad (7-59)$$

对于时变、非线性系统，上述做法可以类似进行，只不过所用的  $v$  函数是满足定理 7—21 要求的更一般形式的  $v(x, t)$ ，同样可以在其渐近稳定范围内定义品质因数

$$\eta = \text{Min} \left\{ \frac{-\dot{v}(x, t)}{v(x, t)} \right\}$$

并有， $v(x(t, x_0, t_0), t) \leq \exp[-\eta(t - t_0)] \cdot v(x_0, t_0)$  从而可对衰减情况作出一些估计。显然这一过程远比线性时不变的情况复杂。

利用  $v$  函数还可以估计作用在系统上的扰动和系统本身参数变化对系统动态特性的影响。考虑系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}(t) \quad (7-60)$$

这里  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq C_1$  表示有界的干扰， $\|\mathbf{G}(\mathbf{x})\| \leq C_0$  表示参数的变化，若  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  渐近稳定，存在  $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{x}$ ，其沿的轨线的导数  $\dot{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{N}\mathbf{x}$ ，这里  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{N}$  均是正定对称阵。现考虑  $v(\mathbf{x})$  沿 (7—60) 解的导数：

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{N}\mathbf{x} + 2[\mathbf{x}^T \mathbf{G}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T(t)]\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (7-61)$$

由许瓦兹不等式有

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{G}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\mathbf{x}| \leq C_0 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{M}\mathbf{x}\|$$

$$|\mathbf{u}^T \mathbf{M}\mathbf{x}| \leq C_1 \|\mathbf{M}\mathbf{x}\|$$

因此 (7—61) 成为

$$\dot{v}(\mathbf{x}) \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{N}\mathbf{x} + 2C_0 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{M}\mathbf{x}\| + 2C_1 \|\mathbf{M}\mathbf{x}\|$$

由 (7—55) 可知， $\|\mathbf{M}\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{M}^2 \mathbf{x} \leq \lambda_M \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{x}$  因而

$$\dot{v}(\mathbf{x}) \leq [-\eta + 2C_0 \lambda_M^{\frac{1}{2}} \lambda_m^{-\frac{1}{2}}]v + 2C_1 \lambda_M^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \quad (7-62)$$

若

$$\|\mathbf{x}\| \geq \left( \frac{1}{\lambda_M} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 2C_1 \left[ \eta - 2C_0 \lambda_M^{\frac{1}{2}} \lambda_m^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1} \quad (7-63)$$

那么  $\dot{v}$  是负定的。数  $\left[ \eta - 2C_0 \lambda_M^{\frac{1}{2}} \lambda_m^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1}$  可以看作考虑了参数变化的时间常数的上界，运动确实进入的区域，其半径的上界是正比于这个数和干扰的上界的。这时，零状态可能不是渐近稳定的，但是扰动后的系统的运动不会跑到离原点太远的地方去，而是在原点邻近的超球面内。而这个小区的半径可由 (7—63) 给出上界。这样就用第二方法给出了有扰动和参数变化时，对系统运动影响的估计。

**在解决系统综合问题方面的应用** 用李雅普诺夫第二方法解决综合问题，常见的有两类，一类是系统的性能要求是用闭环系统阵  $\mathbf{A}$  的特征值来给定的，这时综合问题是选取阵  $\mathbf{K}$ ，使  $\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$  具有要求的特征值。另一类是和广义二次型性能指标联系在一起的，例如某些参数最佳问题、状态最优调节器问题。下面将通过例子来说明第二方法是如何应用于这两



类不同的综合问题的。

考虑了状态反馈以后的闭环系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} \quad (7-64)$$

显然要求系统渐近稳定，即  $\mathbf{A}$  的特征值均具有负实部，综合问题就是要选  $\mathbf{K}$  阵，使得  $\mathbf{A}$  渐近稳定。由 (7-44) 式，可知  $\tilde{\mathbf{A}}$  就应满足

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{N} \quad (7-65)$$

这里  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  是正定对称阵。一种解法就是指定的  $\mathbf{N}$  后解出  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}$  的元素是  $\mathbf{K}$  的元素的函数，再由  $\mathbf{M}$  正定的条件决定出  $\mathbf{K}$  的元素应满足的条件，如例 7-9 所做的那样，但是由  $\mathbf{M}$  正定的条件我们得到的是包含  $\mathbf{K}$  的元素的非线性不等式，在具体计算上极不方便。一种更为简单的做法是在 (7-65) 中，直接令  $\mathbf{N}, \mathbf{M}$  是已知的正定对角阵或单位阵，而后由 (7-65) 解出  $\mathbf{K}$ ，这样得到的是含有  $\mathbf{K}$  的元素的线性方程组，容易完成计算。

**例 7-16** 考虑完全可控系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

可以直接求出

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} k_{11} + k_{21} & 1 + k_{12} + k_{22} \\ 2 - k_{11} + k_{21} & 2 - k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}$$

将  $\mathbf{A}$  代入 (7-65)，并取  $\mathbf{M} = \mathbf{N} = \mathbf{I}$ ，可得

$$\begin{aligned} 2k_{11} + 2k_{21} &= -1 \\ -2k_{11} + 2k_{12} + 2k_{21} + 2k_{22} &= -3 \\ -4k_{11} + 2k_{22} &= -5 \end{aligned}$$

这组方程可解，若取  $k_{11}=1$ ，可得

$$k_{12} = 1, k_{21} = -\frac{3}{2}, k_{22} = \frac{-1}{2}$$

在这组  $k_{ij}$  下，闭环的特征式为  $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 + s + \frac{5}{2}$ ，显然这种方法综合的闭环系统的特征值取决于  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  的选择，例如对这个例子，如取  $\mathbf{M} = 0.1\mathbf{N}$  所得的线性方程组为

$$\begin{aligned} -2k_{11} + 2k_{21} &= -10 \\ -2k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} &= -3 \\ -4k_{11} + 2k_{22} &= -14 \end{aligned}$$

当  $k_{11}=1$  这组方程的解为  $k_{12} = 4, k_{21} = -6, k_{22} = 1$ ，在这组  $k_{ij}$  值下， $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 + 10s + 61$

这时衰减速度快于  $\mathbf{M} = \mathbf{N} = \mathbf{I}$  的情况。

如果综合时要求  $\tilde{\mathbf{A}}$  的特征值的实部均小于  $\sigma$ ，由习题 7-21，可知  $\tilde{\mathbf{A}}$  应满足

$$-2\sigma\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{N} \quad (7-66)$$

这里  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  是正定对称阵。这时仍可像上面所说的那样来找  $\mathbf{K}$  阵。

但是在上面的解法中, 因为  $\mathbf{K}$  阵有  $p \cdot n$  个元素, 方程数为  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , 若  $p < \frac{1}{2}(n+1)$  将会出现矛盾的线性方程组, 这时需适当调整  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  的元素, 使方程组相容。

现在讨论最优状态调节器问题, 系统的方程和性能指标为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7-67)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (7-68)$$

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (7-69)$$

这里  $\mathbf{Q}$  是一个正定 (或半正定) 对称矩阵,  $\mathbf{R}$  是一个正定对称阵, 它们分别表示了误差和控制信号能量消耗的情况。要求确定最佳反馈阵  $\mathbf{K}$ , 使性能指标达到最小。

将  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$  代入 (7-67) 和 (7-69) 可得

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt$$

若取  $\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ , 这时有

$$\mathbf{J} = \int_0^{+\infty} -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}) dt = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{M} \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{M} \mathbf{x}(\infty)$$

于是可以得到方程

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{M} + \mathbf{M}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (7-70)$$

由于  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})$  渐近稳定, 性能指标为

$$\mathbf{J} = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{M} \mathbf{x}(0) \quad (7-71)$$

这样求解的步骤是首先解 (7-70), 得到  $\mathbf{M}$  为  $\mathbf{K}$  元素的函数, 而后将  $\mathbf{M}$  代入 (7-71) 式, 使  $\mathbf{J}$  为极小来确定  $\mathbf{K}$  的元素。

**例 7-17** 若系统方程和性能指标为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$u = (k_1 \quad k_2) \mathbf{x}$$

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{x} + u^T u) dt$$

将  $u = [k_1 \quad k_2]$ , 代入系统方程可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

要保证系统渐近稳定, 要求  $k_1, k_2$  均小于零。根据 (7-70) 式有

$$\begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 + k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & 1 + k_2^2 \end{bmatrix}$$

上面的矩阵方程可化为三个联立的代数方程组, 从这个代数方程组可解出  $m_{ij}$ , 可得

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) + \frac{-k_1}{2k_2} \left( \frac{1}{k_1} + k_1 \right) & \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{k_1} + k_1 \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_1} + k_1 \right) & \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{k_2} + k_2 \right) + \frac{1}{2k_2} \left( \frac{1}{k_1} + k_1 \right) \end{bmatrix}$$

将  $\mathbf{M}$  代入 (7—71) 式得

$$\begin{aligned} J = & \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) - \frac{k_1}{2k_2} \left( \frac{1}{k_1} + k_1 \right) \right] x_1^2(0) + \left( \frac{-1}{k_1} - k_1 \right) x_1(0)x_2(0) \\ & + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{k_2} - k_2 \right) + \frac{1}{2k_2} \left( \frac{1}{k_1} + k_1 \right) \right] x_2^2(0) \end{aligned}$$

为了使取  $J$  极小, 应使  $\frac{\partial J}{\partial k_1} = 0, \frac{\partial J}{\partial k_2} = 0$ , 对任意的  $x_1(0), x_2(0)$  成立。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial k_1} &= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{-k_2}{k_1^2} + \frac{1}{k_2} \right) - \frac{1}{2k_2} 2k_1 \right] x_1^2(0) + \left( \frac{1}{k_1^2} - 1 \right) x_1(0)x_2(0) + \frac{1}{2k_2} \left( \frac{-1}{k_1^2} + 1 \right) x_2^2(0) \\ \frac{\partial J}{\partial k_2} &= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_1} - \frac{k_1}{k_2^2} \right) + \frac{1}{2k_2^2} (1 + k_1^2) \right] x_1^2(0) + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_2^2} - 1 \right) + \frac{-1}{2k_2^2} \left( \frac{1}{k_1} + k_2 \right) \right] x_2^2(0) \end{aligned}$$

只有当  $k_1 = -1, k_2 = -\sqrt{3}$  时, 对任意的  $x_1(0), x_2(0)$  才有  $\frac{\partial J}{\partial k_1} = 0, \frac{\partial J}{\partial k_2} = 0$ ,  $J$  取极小值,

注意此处要求  $k_1$  与  $k_2$  取负值。这时  $J$  的最小值为

$$J = \sqrt{3}x_1^2(0) + 2x_1(0)x_2(0) + \sqrt{3}x_2^2(0)$$

## 小 结

本章针对线性系统的两种描述，在 § 7—1 至 § 7—2 中定义了各种稳定性，并阐明了有关的定理，现归纳列表如下

系统的数学表达式	所定义的稳定性	有关定理
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x})$ $\mathbf{x} = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 \quad (\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0)$	稳定，渐近稳定 一致稳定，一致渐近稳定 按指数渐近稳定 表示初态 $\mathbf{x}_0$ 对状态的影响	定理 7—2  定理 7—4
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x}(0) = 0$ $\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$ $\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$	BIBS 稳定。 表示零状态下， $\mathbf{u}(t)$ 对状态的影响	全体可控模式收敛
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$	BIBS 全稳定。 表示任意初态，及 $\mathbf{u}(t)$ 对状态的影响	全体可控模式收敛 全体不可控模式无发散
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = 0$ $\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$ $\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$	BIBO 稳定。 表示零状态下， $\mathbf{u}(t)$ 对输出的影响	全体可控可观模式收敛
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$	BIBO 全稳定。 表示任意初态及 $\mathbf{u}(t)$ 对输出的影响	全体可观可控模式收敛 全体可观不可控模式无发散
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$	总体稳定。 表示任意初态及 $\mathbf{u}(t)$ 对状态、输出的影响	等价于 BIBO 全稳定

这个表格给出了前三节所讲的内容的大概轮廓，但未给出定义和定理条件的细节。

§ 7-2 针对线性时不变系统动态方程来定义和讨论系统的稳定性问题。从本质上来说这类系统的稳定性是  $\mathbf{A}$  的特征值问题，但在  $x(t), y(t)$  表达式中以四项形式出现，也就是又与  $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{C}$  阵密切相关，即与系统的可控性、可观性密切相关。

判断各种意义下的稳定性，一般要求出  $\mathbf{A}$  的特征值，再对这些特征值的可控、可观性进行研究，再根据定理作判断。因为系统的可控性、可观性与传函阵零、极点对消（或约去模

态)有联系,因此可以不去判别各特征值的可控、可观性,直接计算  $C(sI - A)^{-1}, (sI - A)^{-1}B,$   
 $C(sI - A)^{-1}B,$  由计算的结果判别。

稳定性之间的关系之一: 若(A、C)可观, 则有 BIBO 全稳定等价于 BIBS 全稳定。可以用图 A 来表示

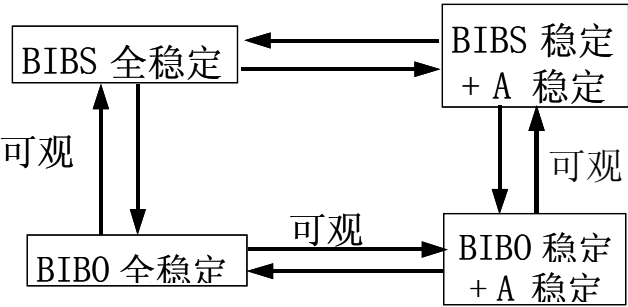


图 A

可控条件、可观条件的作用可用图 B 来表示。

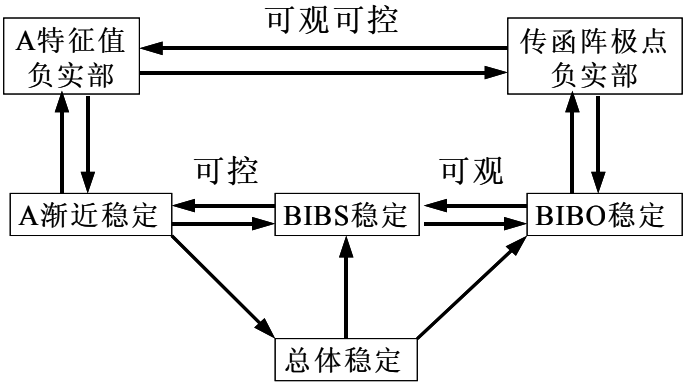


图 B

关于李雅普诺夫第二方法, 定理 7—20 至定理 7—23 纯粹是运动稳定性理论课程的基本内容。定理 7—24 至定理 7—28 有关线性系统的  $V$  函数构造及矩阵方程 (7—44) 求解等才是 § 7—3 的主要内容。李雅普诺夫第二方法在其他方面的应用, 这里只作概述性的介绍。

## 习 题

### 7—1 一维系统方程为

$$\dot{x} = -2t(t+1)^{-2}x \quad t \geq T > -1$$

问  $x = 0$ ，是否稳定？是否一致稳定？是否渐近稳定？是否一致渐近稳定？

### 7—2 系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -1 \end{bmatrix} u \quad t > t_0 \geq 0$$

- 1) 计算状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$ ，并判断状态可控性。
- 2) 当  $u = 0$  时， $x = 0$  是否李氏稳定？是否一致稳定？是否渐近稳定？（要说明理由）

### 7—3 系统动态方程如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & f(t) \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad f(t) = \frac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t}$$

问  $x = 0$  是否稳定？是否一致稳定？是否渐近稳定？（要写明理由）

### 7—4 系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ e^{2t} & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad t > t_0 \geq 0$$

- 1) 计算状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$ 。判断系统可控性。
- 2) 问  $x = 0$  是否稳定？（要写明理由，不写理由的答案无效）。

### 7—5 若存在 $C \geq 0, a > 0$ ，且对 $\forall t_0$ 及 $t \geq t_0$ 有

$$\int_{t_0}^t \lambda_m(\sigma) d\sigma \leq -a(t - t_0) + C$$

其中  $\lambda_m(\sigma)$  是  $\mathbf{A}(\sigma + \mathbf{A}^T(\sigma))$  的最大特征根。证明  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  按指数渐近稳定。[提示：运用不等式  $\frac{d}{dt} x^T x \leq \lambda_m x^T x$  ]。

### 7—6 令 $x_1(t) - x_2(t) = x(t)$ ，化 $\ddot{x} + 2\dot{x} + f(t)x = 0$ 为向量方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - f(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

若  $\int_0^t \text{Max}[-f(\sigma), f(\sigma) - 4] d\sigma$  有适当的界，证明系统按指数渐近稳定。

7—7 若  $\dot{x} = A(t)x$  一致稳定, 且  $\int_0^\infty \|f(\sigma)\| d\sigma$  存在, 证明  $\dot{x} = A(t)x + f(t)$  的所有解有界。

7—8 证明  $\dot{x} = 2tx$  的零解不稳定。但利用等价变换  $\bar{x} = e^{-t^2}x$  后, 所得到的新系统是稳定的。由此可见等价变换不能保证稳定性不变。

7—9 若对所有  $t, P(t)$  是非奇异阵且关于  $t$  是连续可微的, 且  $\|P(t)\|, \|P^{-1}(t)\|$  和  $\|\dot{P}(t)\|$  对所有  $t$  有界, 则等价变换称为李雅普诺夫变换。试证在任何李雅普诺夫变换下, 零状态的稳定性和渐近稳定性不变。定理 1—6 所作的变换是否是李雅普诺夫变换? 习题 7—8 的变换是否是李雅普诺夫变换?

7—10 设系统的脉冲响应为

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{其它 } t \end{cases}$$

若其输入为  $u(t) = \sin(2\pi t) \cdot 1(t)$ , 问其输出波形为何? 几秒钟后到达稳态?

7—11 具有传递函数  $g(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$  的系统是否 BIBO 稳定?

7—12 对于下列各动态方程, 问零状态是否稳定? 是否渐近稳定? 零状态响应是否 BIBO (全) 稳定? 是否 BIBO (全) 稳定? 系统是否总体稳定? (要说明理由)。

$$(a) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -10 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x$$

$$(b) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, y = [1 \quad 1 \quad 1]x$$

$$(c) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, y = [-1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]x$$

$$(d) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u, y = [2 \quad 3 \quad 0]x$$

7—13 系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & b & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

式中  $a, b$  为实常数, 分别写出满足下列稳定性要求时, 参数  $a, b$  应满足的充分必要条件 (要写清理由)。注意: 在做 3、4 题时取  $a = 0$ 。

- 1) 当  $u = 0$  时,  $\mathbf{x} = 0$  李雅普诺夫意义下稳定;
- 2) 系统 BIBS 稳定;
- 3) 系统 BIBO 稳定;
- 4) 系统 BIBO 全稳定。

**7—14** 动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

式中  $a, b$  为实常数, 分别写出满足下列稳定性要求时, 参数  $a, b$  应满足的充要条件 (要写清理由)。

- 1) 当  $u = 0$  时,  $\mathbf{x} = 0$  李雅普诺夫意义下稳定;
- 2) 系统 BIBS 稳定;
- 3) 系统 BIBO 稳定。

**7—15** 系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试分别给出系统满足各种稳定性时, 参数  $a$ 、 $b$ 、 $\sigma$ 、 $\lambda$  应满足的充分必要条件。

**7—16** 证明等价变换保持 BIBO 稳定性不变。

**7—17** 若  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$  是正定二次型,  $\lambda_M$  和  $\lambda_m$  分别为  $\mathbf{M}$  的最大和最小特征值, 试证

$$\lambda_m \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \leq \lambda_M \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

**7—18** 已知四阶系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b_4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad b_i \neq 0$$



欲使二次型  $V(x)$  沿系统运动的导数为  $-\mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}$ ，其中

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1^2 \end{pmatrix}$$

试求  $V(x)$ ，并给出  $V(x)$  正定条件。

**7—19** 令  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ ，并设  $a_1, a_2, a_3$  是不为零的任意实数，试用定理 7—26 证明矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1^2}{2\lambda_1} & -\frac{a_1 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} & -\frac{a_1 a_2}{\lambda_1 + \lambda_3} \\ -\frac{a_1 a_2}{\lambda_2 + \lambda_1} & -\frac{a_2^2}{2\lambda_2} & -\frac{a_2 a_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \\ -\frac{a_1 + a_3}{\lambda_1 + \lambda_3} & -\frac{a_3 a_2}{\lambda_2 + \lambda_3} & -\frac{a_3^2}{2\lambda_3} \end{pmatrix}$$

是正定矩阵。[提示：令  $\mathbf{A} = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]$ ]

**7—20** 已知系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{A}$  渐近稳定。  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, u = 0$ ，证明以下指标函数可表示为

$$I_0 = \int_0^\infty y^2(t) dt = \mathbf{x}_0^T \mathbf{v}_0 \mathbf{x}_0$$

$$I_m = \int_0^\infty t^m y^2(t) dt = m! \mathbf{x}_0^T \mathbf{v}_m \mathbf{x}_0$$

其中  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_m$  满足

$$\mathbf{A}^T \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0 \mathbf{A} = -\mathbf{c}^T \mathbf{c}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{V}_m + \mathbf{V}_m \mathbf{A} = -\mathbf{V}_{m-1} \quad m = 1, 2, \dots$$

**7—21** 证明对于任意给定的  $n \times n$  正定对称阵  $\mathbf{Q}$  及任意正数  $a$ ，矩阵方程

$$-2a\mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

有正定对称解的充分必要条件是  $\mathbf{A}$  的所有特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  满足： $\text{Re } \lambda_i < a$

**7—22** 可控系统方程如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

其中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为常阵，令  $\mathbf{W}(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} d\tau$ ，试证，当  $t_1 > 0$ ，线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W}^{-1}(0, t_1)] \mathbf{x}$$

渐近稳定。

## 参 考 文 献

- [1] C.T. Chen, Introduction to Linear System Theory, Holt, Rinehart and Winston. 1970.
- [2] 高为炳编: 线性系统理论, 北京航空学院讲义, 1980.4.
- [3] 王恩平、秦化淑编: 线性系统理论, 中国科学院系统科学研究所讲义, 1980.3.
- [4] 郑大钟编著: 线性系统理论, 清华大学出版社, 1992.
- [5] T.E.佛特曼, K.L.海兹著, 吕林等译: 线性控制系统引论, 机械工业出版社 1979.10.
- [6] H.H. Rosenbrock, State-Space and multivariable Theory, Nelson, London. 1970.
- [7] R.W. Brockett, Finite-Dimensional Linear Systems, Wiley. 1970.
- [8] Ю.Н. Агпеев 著, 韩京清译: 线性控制系统理论中的状态空间代数方法, 计算机应用与应用数学, 1978.5.
- [9] L. Weiss, R.E. Kalman .Contributions to Linear System Theory, Int. J. Engng. Sci. vol. 3, pp, 141-171, 1965.
- [10] R. E. Kalman, On the General Theory Control Systems, in Proc. Of 1th IFAC Congress. Moscow . Butterworths . London. 1960.
- [11] L. M. Silverman, Realization of Linear Dynamical Systems, IEEE Trans . Auto. Contr., AC-16, NO6, pp . 554-567, 1971.
- [12] C.T. Chen, D.P. Mitel, A Simplified Irreducible Realization Algorithm, IEEE Trans .Auto .Contr., AC-17, No.4, pp.535-537, 1972.
- [13] P.Rozsa, N. K. Sinbha, Minimal Realization of a Transfer Function Matrix in Canonical Form, Int. J.Control, Vol 21, No. 2, pp. 273-284, 1975.
- [14] E.G. Filber The Decoupling of Multivariable Systems by state Feedback. SIAM. J. Control, 7, February, pp.50-63, 1969.
- [15] E. J. Davison, ON Pole Assignment in Multivariable Systems, IEEE Trans .Auto Contr., AC-13, pp.747-748, 1968.
- [16] E. J. Davison, R. Chatterie, A note on pole Assignment in Linear System with Incomplete State Feedback, IEEE . Trans . Auto . Contr. AC-16, No.1, pp. 98-99, 1971.
- [17] E. J. Davison, S. Hwang, On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback, IEEE Trans., Contr. AC-20, No.4 pp.515-518, 1975.
- [18] N. Munro, Further Results on Pole -Shifting Using Output Feedback, Int .J. Control, Vol .20, NO.5, pp. 775-786, 1974.
- [19] F. M. Brasch , J.B. Pearson Pole Placement Using Dynamic Compensators IEEE Trans .Auto .Contr ., AC-15, No.1, pp.34-43, 1970.
- [20] R.Ahmari, A.G. Vactorx, On the Pole Assignment in Linear Systems With Fixed Order Compensators, Int.J. Control .Vol.17, No.2, pp.397-405, 1973.
- [21] L. M. Silverman, B.D.O. Anderson, Controllability, Observability and Stability of Linear Systems, SIAM J. Control, Vol.6, No 1, pp.121-130,1968.
- [22] M. Ikeda, H.Marda, S. Kodama, Estimation and Feedback in Linear Time- Varying Systems: A Deterministic Theory, SIAM J. control, Vol.13, NO.2, pp.304-326, 1975.
- [23] B.D.O. Anderson, J.B.Moore, New Results in Linear System Stability, SIAM J. Control,

Vol .7, No.3, pp.398-414, 1960.

- [24] R.E. Kalman, J.E. Bertram, Control System Analysis and Design Via the "Second method " of Lyapunov.1. Continuous-Time Systems, Trans .ASME J. Basic Engr .pp. 371-393, 1960.
- [25] B.W. Brockett, H.B. Lee, Frequency Domain Instability Criteria for Time -Varying and nonlinear Systems, in Proc. of IEEE, Vol .55, No.5, 1967.