1、 P71-72，习题 1、2、3、4、5、6、7、8

1、解：由已知 $f(\lambda)$ 的友矩阵为 A

设 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

则 $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

∴ $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$ 记为 A_n.

$$A_n = a_0 \cdot (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} + \lambda \cdot (-1)^{1+1} \cdot A_{n-1} = \lambda A_{n-1} + a_0$$

∵ $$A_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}$$

由递推关系式 $A_3 = \lambda A_2 + a_{n-3} = \lambda^3 + a_{n-1}\lambda^2 + a_{n-2}\lambda + a_{n-3}$

以此类推 $A_n = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

∴ 证得 A 的特征多项式为 $f(\lambda)$

2、解：由已知 $\mathcal{L}: f(t) \to F(s)$ $\quad F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$

$\forall f_1(t), f_2(t) \in$ 定义在 R^+ 实值函数

① 可加性： $\mathcal{L}\cdot(f_1(t) + f_2(t)) = \int^{+\infty} [f_1(t) + f_2(t)] e^{-st} dt$

2、解：由已知 $\mathcal{L}: f(t) \to F(s)$ $\quad F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$

$\forall f_1(t), f_2(t) \in$ 定义在 R^+ 实值函数

① 可加性： $\mathcal{L}\cdot(f_1(t) + f_2(t)) = \int_0^{+\infty} [f_1(t) + f_2(t)] e^{-st} dt$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-st} dt = F_1(s) + F_2(s)$$

② 齐次性： $\mathcal{L}(k \cdot f(t)) = \int_0^{+\infty} k f(t) e^{-st} dt = k \cdot \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$

$\forall k \in R$ $\qquad = kF(s)$

$\forall f(t)$ 定义在 R^+ 实值函数

∴ 可以证得 $\mathcal{L}: f(t) \to F(s)$ 是线性变换.

3.设 V_1 和 V_2，V_3 均是数域 F 上的线性空间，若 $T_1 \in L(V_1, V_2)$，$T_2 \in L(V_2, V_3)$，证明 $T_2T_1 \in L(V_1, V_3)$.

解：$x \in V_1$，$y \in V_2$，$z \in V_3$.

$T_1: V_1 \to V_2$ $\quad T_1: x_1 \to y_1 = T_1(x_1)$，$x_2 \to y_2 = T_1(x_2)$.

$T_2: V_2 \to V_3$ $\quad T_2: y_1 \to z_1 = T_2(y_1)$，$y_2 \to z_2 = T_2(y_2)$.

T_1 为 V_1 到 V_2 的一个线性映射 $\Rightarrow T_1(x_1+x_2) = T(x_1) + T(x_2)$，$\forall x_1, x_2 \in V_1$

$T_1(\lambda x_1) = \lambda T_1(x_1)$，$\forall \lambda \in F$

T_2 为 V_2 到 V_3 的一个线性映射 $\Rightarrow T_2(y_1+y_2) = T_2(y_1) + T_2(y_2)$，$\forall y_1, y_2 \in V_2$.

$T_2(\mu y_1) = \mu T_2(y_1)$，$\forall \mu \in F$.

$T_2T_1 \Rightarrow T_2(T_1(x_1+x_2)) = T_2(T_1(x_1) + T_1(x_2))$

$= T_2(y_1+y_2) = T_2(y_1) + T_2(y_2) = z_1 + z_2$.

$T_2(T_1(\lambda x_1)) = T_2(\lambda T_1(x_1)) = T_2(\lambda y_1)$

$= \lambda T_2(y_1) = \lambda z_1$.

$T_2T_1: x_1 + x_2 \to z_1 + z_2$，$x_1 \to z_1$.

$\therefore T_2T_1: V_1 \to V_3$.

T_2T_1 为 V_1 到 V_3 的一个线性映射

故 $T_2T_1 \in L(V_1, V_3)$.

4. 设$V_1, V_2 \in L(\mathbb{R}^{1\times 2})$，对任意$[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$，有$T([x_1, x_2]) = [x_2, -x_1]$，$T_2([x_1, x_2]) = [x_1, -x_2]$，试求$T_1+T_2$，$T_1T_2$和$T_2T_1$.

解：$T_1+T_2 = T_1([x_1, x_2]) + T_2([x_1, x_1])$

$= [x_2, -x_1] + [x_1, -x_2]$

$= [x_1+x_2, -x_1-x_2]$

$T_1T_2 = T_1(T_2([x_1, x_2])) = T_1([x_1, -x_2]) = [-x_2, -x_1]$

$T_2T_1 = T_2(T_1([x_1, x_2])) = T_2([x_2, -x_1]) = [x_2, x_1]$

5. 设V和W均是数域F上的线性空间，$\xi_1, \dots, \xi_n$是V的一组基，若$T_1, T_2 \in L(V, W)$，且$\forall k = 1, 2, \dots, n$，$T_1(\xi_k) = T_2(\xi_k)$. 证明$T_1 = T_2$.

解：$\xi_1, \dots, \xi_n$是V的一组基.

$\forall \alpha \in V$，∃不全为0的$a_1, \dots, a_n$使得

$\alpha = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$

$T_1(\alpha) = T_1(a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n) = a_1T_1(\xi_1) + \dots + a_nT_1(\xi_n)$

$T_2(\alpha) = T_2(a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n) = a_1T_2(\xi_1) + \dots + a_nT_2(\xi_n)$

$\forall k = 1, 2, \dots, n$ 有 $T_1(\xi_k) = T_2(\xi_k)$

$\therefore T_1(\alpha) = T_2(\alpha)$

$\therefore T_1 = T_2$.

6. 解： 构造一个映射 $f: C \to R^2$ $\forall a+bi \in C$ $f(a+bi) = (a, b)$

① 可加性： $\forall a_1+b_1 i, a_2+b_2 i \in C$ $f(a_1+b_1 i + a_2+b_2 i) = f(a_1+a_2+b_1 i+b_2 i)$

$= (a_1+a_2, b_1+b_2) = \cancel{(a_1+a} (a_1, b_1)+(a_2, b_2)$

② 齐次性： $\forall a+bi \in C$ $\forall k \in R$ $f(k(a+bi)) = f(ka+kbi)$

$= (ka, kb) = k(a, b)$

∴ 映射 f 是线性映射

假设 $\exists a_1+b_1 i, a_2+b_2 i \in C$， $a_1+b_1 i \neq a_2+b_2 i$， $f(a_1+b_1 i) = f(a_2+b_2 i)$

$\Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{matrix}$ 与 $a_1+b_1 i \neq a_2+b_2 i$ 不符

∴ 映射 f 是单射

$\forall (a, b) \in R^2$ $\exists$ $a+bi \in C$ $f(a+bi) = (a, b)$ ∴ 映射 f 是满射

综上： 映射 f 是双射 且双射 $f: C \to R^2$ 满足可加性、齐次性

∴ 线性空间 C 与 R^2 同构 $C \cong R^2$

7. 设线性映射$T\in L(V,W)$，若$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$和$\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'$是V的两组基，由$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$到$\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'$的过渡矩阵为Q，证明$T(\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n')=T(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)Q$.

解：$[\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n]Q=[\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n']$

$$\varepsilon_1 Q_{11}+\dots+\varepsilon_n Q_{n1}=\varepsilon_1' \Rightarrow T(\varepsilon_1 Q_{11}+\dots+\varepsilon_n Q_{n1})=T(\varepsilon_1')$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\varepsilon_1 Q_{1n}+\dots+\varepsilon_n Q_{nn}=\varepsilon_n' \Rightarrow T(\varepsilon_1 Q_{1n}+\dots+\varepsilon_n Q_{nn})=T(\varepsilon_n')$$

$$\Rightarrow T(\varepsilon_1 Q_{11})+\dots+T(\varepsilon_n Q_{n1})=T(\varepsilon_1')$$
$$\vdots$$
$$T(\varepsilon_1 Q_{1n})+\dots+T(\varepsilon_n Q_{nn})=T(\varepsilon_n')$$

$$\Rightarrow T(\varepsilon_1)Q_{11}+\dots+T(\varepsilon_n)Q_{n1}=T(\varepsilon_1')$$
$$\vdots$$
$$T(\varepsilon_1)Q_{1n}+\dots+T(\varepsilon_n)Q_{nn}=T(\varepsilon_n')$$

$$\Rightarrow [T(\varepsilon_1),\dots,T(\varepsilon_n)]Q=[T(\varepsilon_1'),\dots,T(\varepsilon_n')]$$

$$\Rightarrow T(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)Q=T(\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n')$$ 得证.

8. 解：$T_1(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\dots,\eta_m)A$

$T_2(\eta_1,\dots,\eta_m)=(\zeta_1,\dots,\zeta_l)B$

$$T_2(T_1(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n))=T_2((\eta_1,\dots,\eta_m)A)=T_2(\eta_1,\dots,\eta_m)A$$
$$=(\zeta_1,\dots,\zeta_l)BA$$

$\therefore T_2T_1$在V_1的基$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$和$V_3$的基$\zeta_1,\dots,\zeta_l$下的矩阵为BA.