



最优控制与状态估计

最优控制部分内容（**1—5**周）

王青 联系电话 **13391928998**



第一章 最优控制绪论



目录

一、控制理论简介

二、最优控制简介

三、最优控制发展过程

四、最优控制应用举例

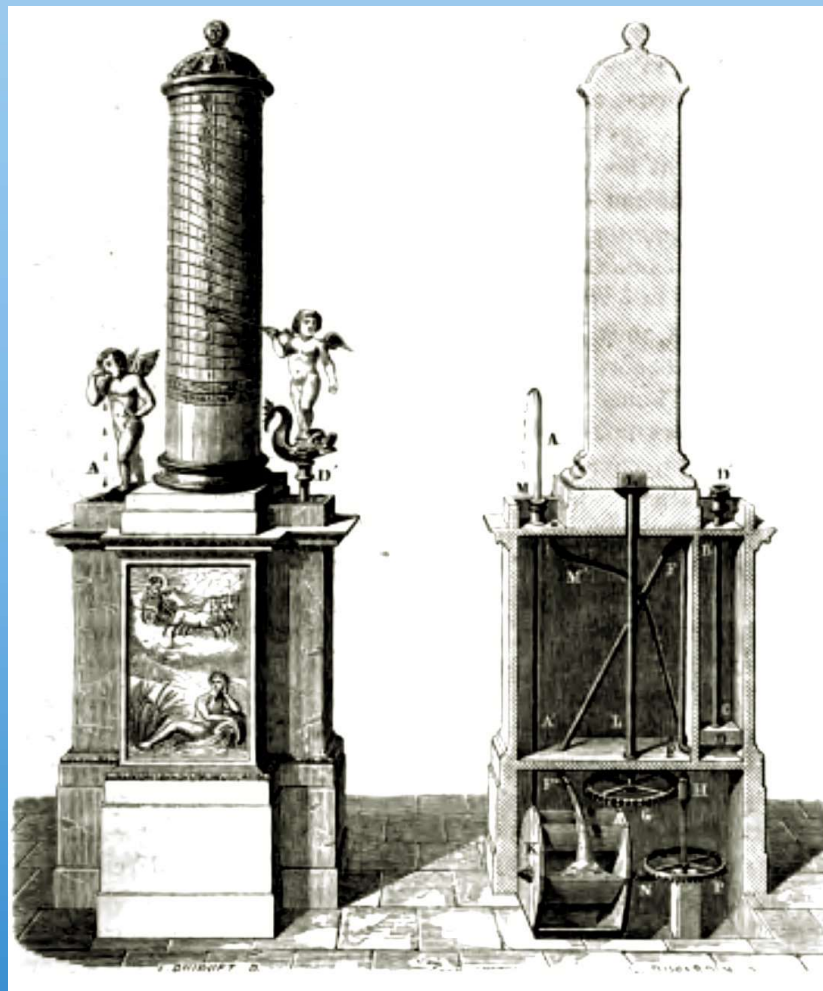
五、小结





一、控制理论简介

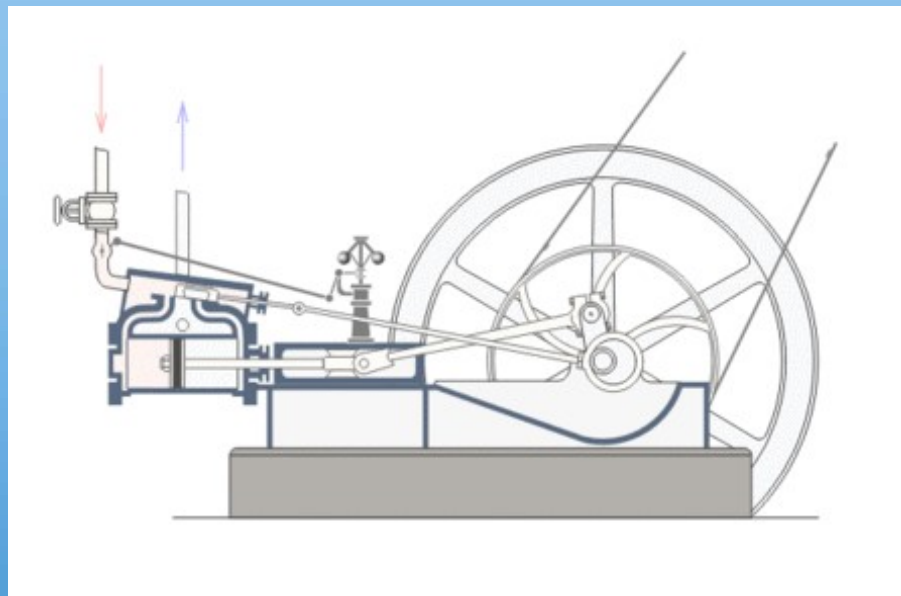
自动控制理论是人类在了解自然和改造自然的过程中逐渐形成的一门学科。简单反馈控制的最早应用，可以追溯到古代亚历山大时期的克泰希比斯 (Ctesibius) 水钟，它就是利用反馈原理来调节流量的。





一、控制理论简介

19世纪中叶，建立了电磁波理论的英国物理学家**马克斯韦尔 (J.C.Maxwell)**对具有调速器的蒸汽机（这也利用了反馈原理来调速）系统进行了稳定性的研究。





一、控制理论简介

1895年劳斯(Routh)与赫尔维兹(Hurwitz)把马克斯韦尔的思想扩展到高阶微分方程描述的更复杂的系统中，各自提出了两个稳定性判据——劳斯判据和赫尔维兹判据。

赫尔维兹判据：系统特征方程的赫尔维兹行列式全部为正。

劳斯判据：劳斯表中第一列所有元素符号相同。





一、控制理论简介

1932年奈奎斯特(H.Nyquist)提出了频域内研究系统的频率响应法，即著名的波特图。

1948年伊万斯(W.R.Ewans)提出了复数域内研究系统的根轨迹法。

这一系列研究工作奠定了经典自动控制的理论基础。





二战后，随着经济的恢复发展，工业界对自动化提出了普遍的要求，进一步激发了人们对自动控制理论研究的热情，并使自动控制在许多领域获得实际应用。至此，经典控制理论趋于成熟，一般把它称为第一代（经典）控制理论。它对工业发展和技术进步起到了十分重大的作用。





20世纪60年代卡尔曼（**Kalman**）提出用状态空间的描述方法来建立被控对象的数学模型。这种方法也称为内部描述法，它是建立在“系统状态”这个概念上的。在此基础上相继提出并解决了系统的可控、可观性问题。接着又发展了多变量控制、最优控制、估计理论、自适应控制理论、滤波理论和辨识理论等，从而形成了一个理论体系，被称为第二代（现代）控制理论。

鲁道夫·卡尔曼（匈牙利语：**Kálmán Rudolf Emil**，1930年5月19日—），匈牙利裔美国数学家，1930年出生于匈牙利首都布达佩斯。1953年于麻省理工学院获得电机工程学士，翌年硕士学位。1957年于哥伦比亚大学获得博士学位。



Kálmán Rudolf Emil





一、控制理论简介

五十年代后期，贝尔曼(Bellman)等人提出了状态分析法；在1957年提出了动态规划。

1961年庞特里雅金(Pontryagin)提出了极小值原理。

罗森布洛克(Rosenbrock)等将经典控制理论传递函数的概念推广到多变量系统，并探讨了传递函数矩阵与状态方程之间的等价转换关系，为进一步建立统一的线性系统理论奠定了基础。





在今天，只要有了精确的线性的数学模型和只要能提供足够的功率（能量），那么无论你要求怎样的性能，都是可以实现的。但现实世界的很多被控对象，不要说难以建立精确的线性的数学模型，有的甚至根本无法建数学模型。20世纪70—80年代发展的自适应控制、自校正控制和鲁棒控制，它们虽然能在一定程度上解决不确定性的问题，但它们还是直接或间接依赖过程和对对象的精确线性模型。在此背景下，智能控制得到了发展，利用模糊逼近和神经网络等技术可以对未知复杂模型的系统进行控制。





一、控制理论简介

控制发展过程中的对象可以分为以下四类：

线性定常系统： $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$x \in R^n, u \in R^m, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}$$

线性时变系统： $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

$A(t), B(t)$ 为时变矩阵

线性不确定系统： $\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t)$

$\Delta A, \Delta B$ 为不确定参数

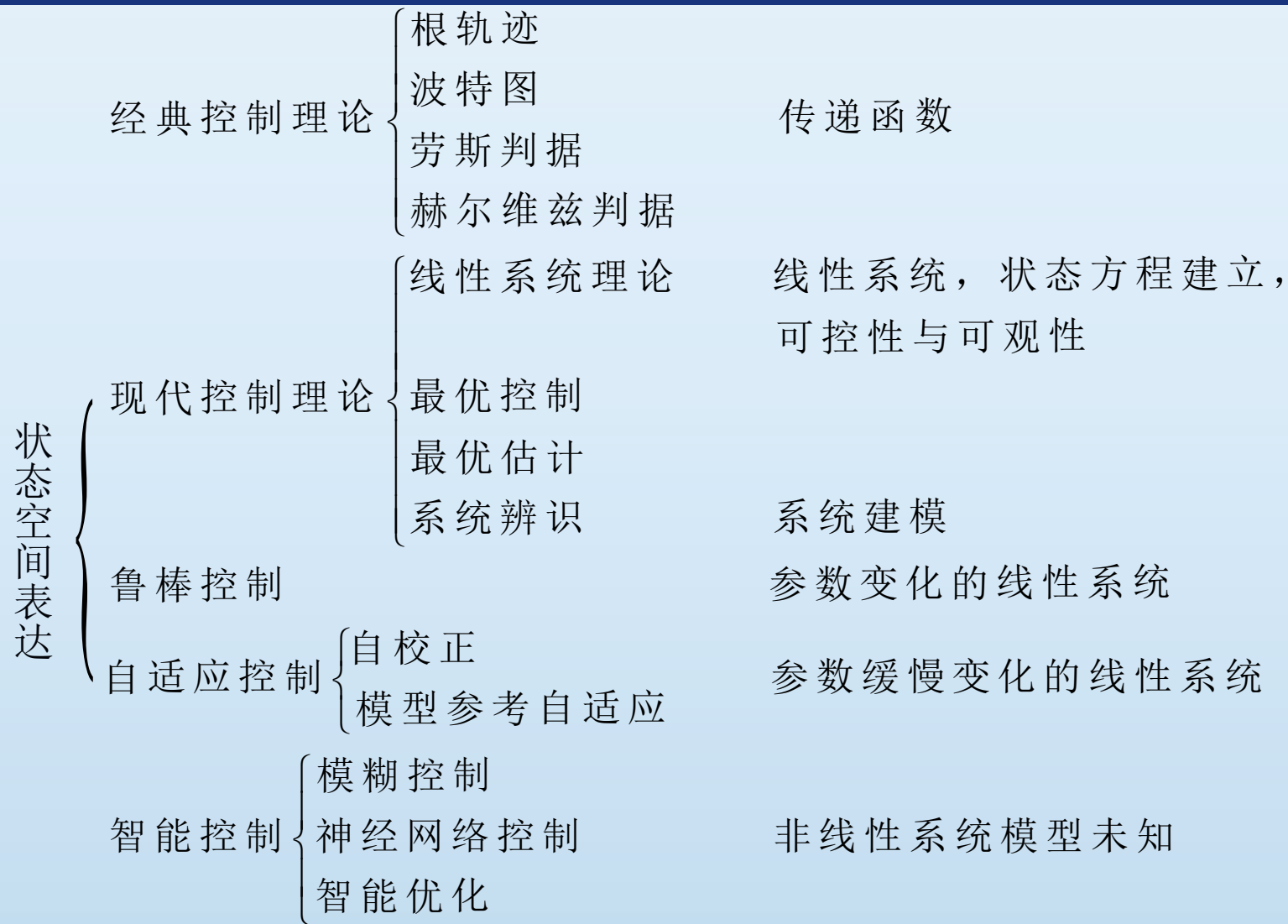
非线性系统： $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

f 为非线性函数





一、控制理论简介





一、控制理论简介

最优控制作为现代控制理论的核心之一，研究的主要问题是根据被控对象的数学模型，在容许范围设计控制律，使得被控对象的性能指标达到最优。





目录

一、控制理论简介

二、最优控制简介

三、最优控制发展过程

四、最优控制应用举例

五、小结

六、本课程主要内容





二、最优控制简介

在生产过程、军事行动、经济活动以及人类的其它有目的的活动中，常需要对被控系统或被控过程施加某种控制作用以使某个性能指标达到最优，这种控制作用称为最优控制。





二、最优控制简介

最优控制由于其良好的控制效果，在国民经济和国防建设中继续发挥重要的作用。



应用于深空探测轨迹控制



应用于导弹攻击拦截



应用于空间交汇对接



应用于火箭制导控制





目录

一、控制理论简介

二、最优控制简介

三、最优控制发展过程

四、最优控制应用举例

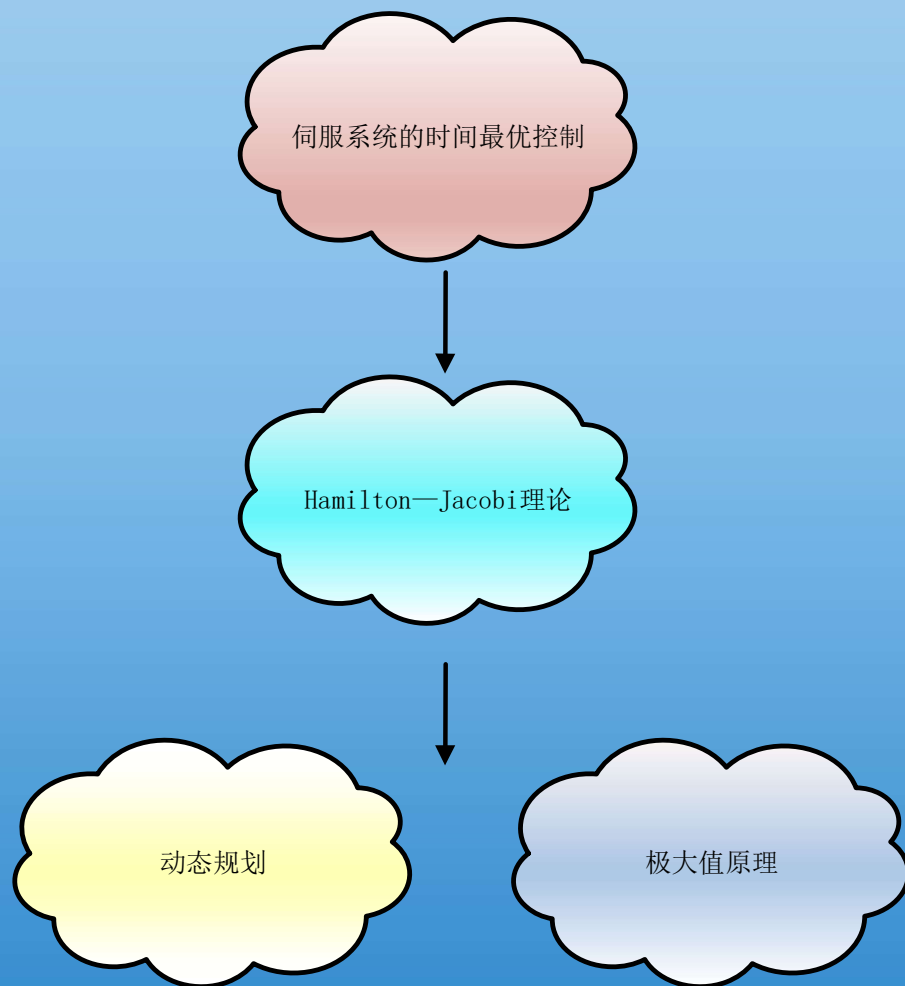
五、小结

六、本课程主要内容





三、最优控制发展过程



上世纪五十年代初期布绍（**Bushaw**）研究了伺服系统的时间最优控制问题。

1953至1957年间美国学者贝尔曼（**Bellman**）创立了“动态规划”理论，发展了变分学中的哈密顿—雅可比（**Hamilton—Jacobi**）理论。

1956至1958年间苏联学者庞特里雅金等创立了“极大值原理”。





三、最优控制发展过程

变分法、极大值原理及动态规划这三种方法成为了目前最优控制理论的三大基石。

时至今日，最优控制理论的研究无论在深度上和广度上都有了很大的发展，例如发展了对分布参数系统、随机系统、大系统的最优控制理论的研究等等。





目录

一、控制理论简介

二、最优控制简介

三、最优控制发展过程

四、最优控制应用举例

五、小结

六、本课程主要内容





四、最优控制应用举例

例1-1 火车快速运行问题。设有一列火车从甲地出发，要求算出容许的控制使其到达乙地的时间最短。



火车的运动方程

$$m\ddot{x} = u(t) \quad (1-1)$$

式中, m 是火车的质量, \ddot{x} 是火车的加速度, 为使旅客舒适, 其值有限制。 $u(t)$ 是产生加速度的控制作用 (即推力), 其值也应有限制, 设

$$|u(t)| \leq M \quad (1-2)$$





四、最优控制应用举例

初始条件

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = 0 \quad (1-3)$$

终端条件

$$x(t_f) = x_f \quad \dot{x}(t_f) = 0 \quad (1-4)$$

性能指标

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (1-5)$$

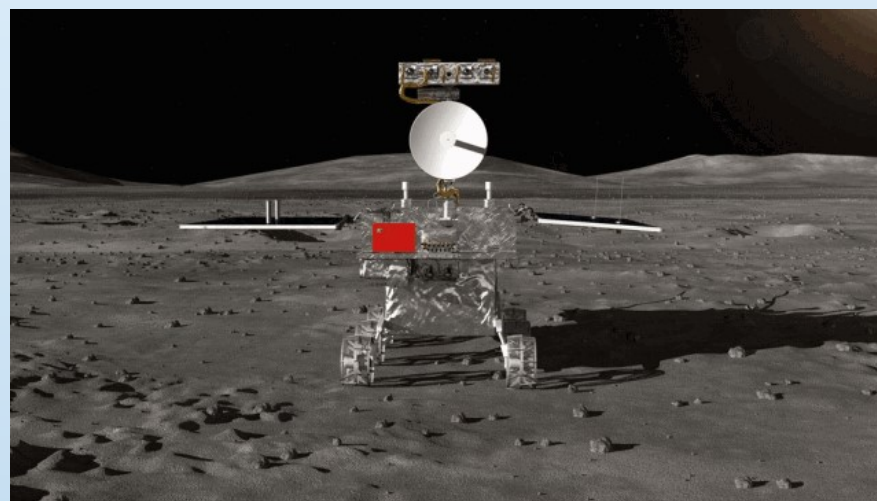
选择 $u(t)$ 使 $J(u)$ 为最小。





四、最优控制应用举例

例1-2 月球软着陆问题。为了使宇宙飞船在月球表面上实现软着陆（即着陆时速度要为零），要寻求着陆过程中发动机推力的最优控制规律，使得燃料的消耗最少。设飞船的质量为 $m(t)$ ，离月球表面的高度为 $h(t)$ ，飞船的垂直速度为 $v(t)$ ，发动机推力为 $u(t)$ ，月球表面的重力加速度为 g ，设不带燃料的飞船质量为 M ，初始燃料的质量为 F ，则飞船的运动方程可表示为（参见图1-1）





四、最优控制应用举例

$$\dot{h}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = -g + \frac{u(t)}{m(t)} \quad (1-6)$$

$$\dot{m}(t) = -ku(t)$$

式中 k 为比例系数，
表示了推力与燃料
消耗率的关系。

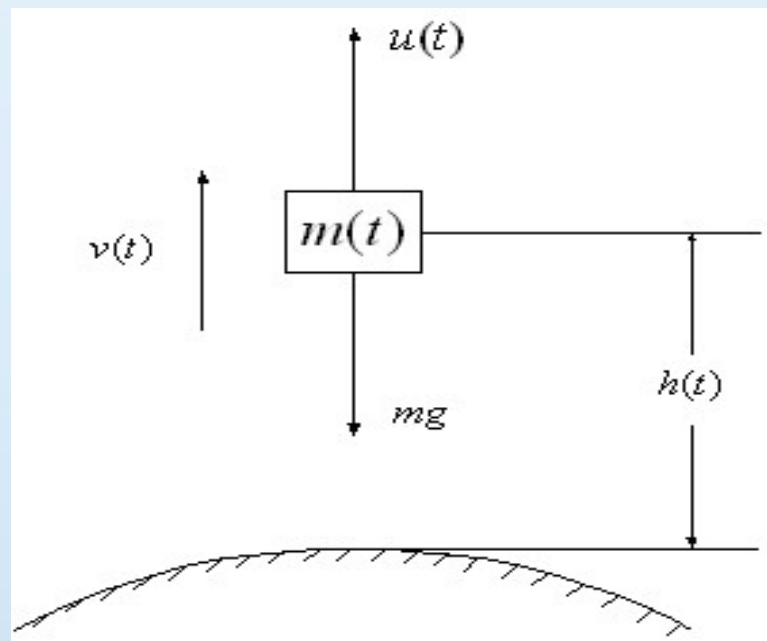


图1-1 月球软着陆最优控制问题



四、最优控制应用举例

初始条件

$$h(t_0) = h_0 \quad v(t_0) = v_0 \quad m(t_0) = M + F \quad (1-7)$$

终端条件

$$h(t_f) = 0 \quad v(t_f) = 0 \quad (1-8)$$

容许控制

$$0 \leq u(t) \leq a \quad (1-9)$$

控制目的是使燃料消耗量最小，即飞船在着陆时的质量保持最大，即

$$J(u) = m(t_f) \quad (1-10)$$

为最大。





四、最优控制应用举例

例1-3 生产计划问题。设 $x(t)$ 表示商品存货量， $r(t) \geq 0$ 表示对商品的需求率，是已知函数， $u(t)$ 表示生产率，它将由计划人员来选取，故是控制变量。 $x(t)$ 满足下面的微分方程

$$\dot{x}(t) = -r(t) + u(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (1-11)$$

$$x(0) = x_0 \quad (1-12)$$

x_0 是初始时刻的商品存货量，且 $x_0 \geq 0$ 。从 $x(t)$ 的实际意义来看，显然必须选取生产率使得

$$x(t) \geq 0 \quad t \in [0, t_f] \quad (1-13)$$





四、最优控制应用举例

其次，生产能力应该有限制，即容许控制为

$$0 \leq u(t) \leq A \quad t \in [0, t_f]$$

这里 $A > 0$ 表示最大生产率，另外为了保证满足需求，必须有

$$A > r(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (1-14)$$





四、最优控制应用举例

假定每单位时间的生产成本是生产率 $u(t)$ 的函数，即 $h[u(t)]$ 。设 $b > 0$ 是单位时间储存单位商品的费用，于是，单位时间的总成本为

$$f[x(t), u(t), t] = h[u(t)] + bx(t) \quad (1-15)$$

由 $t = 0$ 到 $t = t_f$ 的总成本为

$$J(u) = \int_0^{t_f} f[x(t), u(t), t] dt \quad (1-16)$$

要求寻找最优控制 $u^*(t)$ ，使总成本 J 最小。





四、最优控制应用举例

例1-4 空间拦截问题

所谓空间拦截是指发射空间武器拦截敌方空间武器。空间拦截设计的首要任务是为空间拦截器设计可实现拦截的导引律。为便于分析，在解释该问题时将空间拦截器和目标都看成质量集中于质心的质点。



在惯性坐标系内，设 x_L 和 \dot{x}_L 为拦截器质心的位置矢量和速度矢量，而 x_M 和 \dot{x}_M 为目标质心的位置矢量和速度矢量。





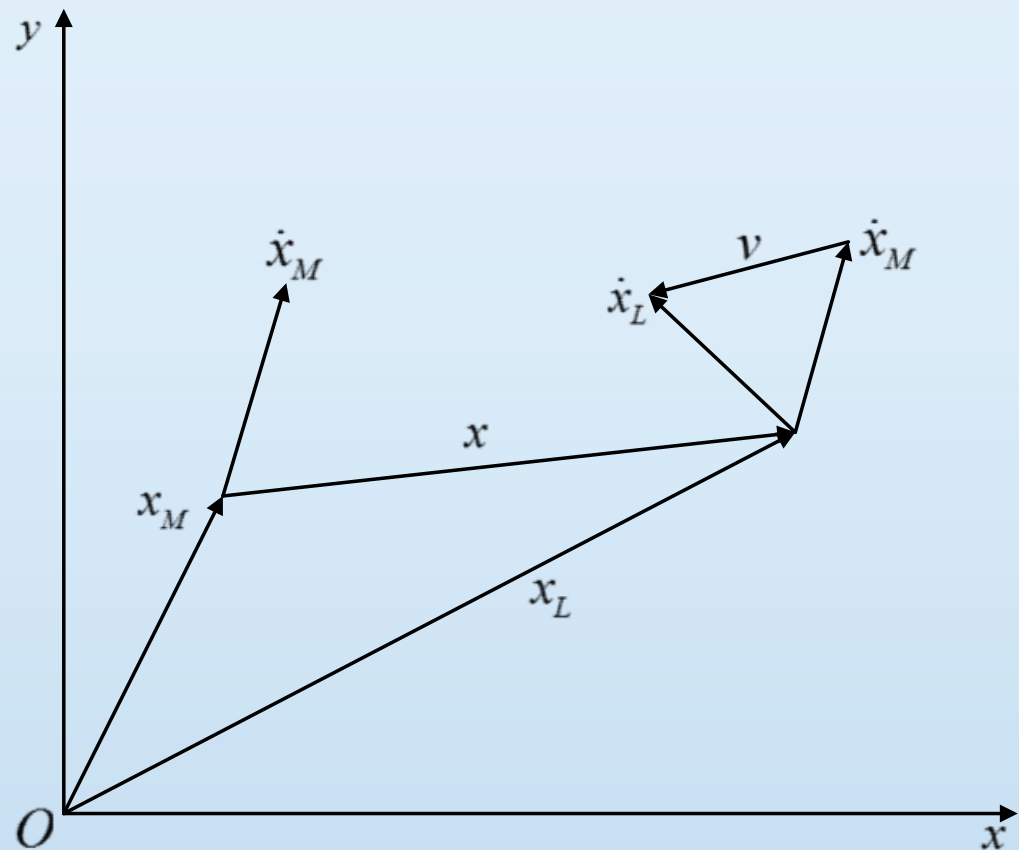
四、最优控制应用举例

如图1-2所示，取

$$x = x_L - x_M$$

$$v = \dot{x}_L - \dot{x}_M$$

式中， x , v 称为
相对位置和速度矢量。





四、最优控制应用举例

假设目标无机动飞行且空间拦截器和目标均在已知空域内， $m(t)$ 为空间拦截器 t 时刻的质量， $F(t)$ 为空间拦截器 t 时刻的推力， $u(t)$ 为拦截器 t 时刻推力方向矢量， c 为发动机有效喷气速度常数，则空间拦截器与目标的相对运动方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= a(t) + \frac{F(t)}{m(t)} u(t) \\ \dot{m}(t) &= -\frac{F(t)}{c}\end{aligned}\tag{1-17}$$





四、最优控制应用举例

式中, $\alpha(t)$ 是固有相对加速度矢量。系统状态为 x, v, m , 其初始条件为

$$x(t_0) = x_0, v(t_0) = v_0, m(t_0) = m_0 \quad (1-18)$$

系统控制变量为 $F(t), u(t)$ 。从工程实际考虑, 它们应满足

$$0 \leq F(t) \leq \max F(t) \triangleq F_{\max} \quad (1-19)$$

$$\|u\|^2 = u^T u = 1$$





四、最优控制应用举例

第一个关系式表示推力大小受限制，第二个关系式表示 u 为单位矢量，其方向不受任何限制。记 $u^T = (u_1, u_2, u_3)$ ，则 u 的欧式范数 $\|u\|$ 为

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (1-20)$$

由于空间拦截器的质量不能小于所有燃料消耗后剩余质量 m_e 。因此终端时刻 t_f 的质量 $m(t_f)$ 应满足

$$m(t_f) \geq m_e \quad (1-21)$$





四、最优控制应用举例

所谓空间拦截就是要求在终端时刻 t_f 时，空间拦截器和目标的相对距离矢量为 $\mathbf{0}$ ，而相对速度矢量可任意，即 $x(t_f) = 0, v(t_f)$ 任意。

(1-22)

如果即要求拦截过程的时间尽量短，又要求燃料消耗尽量省，那么可取如下的性能指标：

$$J[F(\bullet), u(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_f} [c_1 + F(t)] dt \quad (1-23)$$

并使其最小。式中， c_1 为正常数。





四、最优控制应用举例

综上所述，空间拦截问题即为选择满足式(1-19)的控制 $F(t)$, $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ ，使得状态方程(1-17)从初态(1-18)出发，在某终端时刻 $t_f > t_0$ 时满足式(1-21)和式(1-22)，且性能指标(1-23)最小。





四、最优控制应用举例

由上面的例子可见，求解最优控制问题时要给定系统的状态方程，状态变量所满足的初始条件和终端条件，性能指标的形式（时间最短、消耗燃料最小，误差平方积分最小等）以及控制作用的容许范围等。





目录

一、控制理论简介

二、最优控制简介

三、最优控制发展过程

四、最优控制应用举例

五、小结

六、本课程主要内容





五、小结

用数学语言来比较详细地表达最优控制问题的内容：

1) 建立被控系统的状态方程

$$\dot{X} = f[X(t), U(t), t] \quad (1-24)$$

其中, $X(t)$ 为 n 维状态向量, $U(t)$ 为 m 维控制向量 $f[X(t), U(t), t]$ 为 n 维向量函数, 它可以是非线性时变向量函数, 也可以是线性定常的向量函数。状态方程必须精确的知道。





五、小结

2) 建立被控系统的状态方程

确定状态方程的边界条件。一个动态过程对应于 n 维状态空间中从一个状态到另一个状态的转移，也就是状态空间中的一条轨线。在最优控制中初态通常是知道的，即

$$X(t_0) = X_0 \quad (1-25)$$

而到达终端的时刻 t_f 和状态 $X(t_f)$ 则因问题而异。





五、小结

例如，在流水线生产过程中， t_f 是固定的；在飞机快速爬高时，只规定爬高的高度 $X(t_f) = X_f$ ，而 t_f 是自由的，要求 $t_f - t_0$ 越小越好。终端状态 $X(t_f)$ 一般属于一个目标集 S ，即

$$X(t_f) = X_f \quad (1-26)$$





五、小结

当终端状态是固定的，即 $X(t_f) = X_f$ 时，则目标集退化为 n 维状态空间中的一个点。而当终态满足某些约束条件，即

$$G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (1-27)$$

这时 $X(t_f)$ 处在 n 维状态空间中某个超曲面上。若终态不受约束，则目标集便扩展到整个 n 维空间，或称终端状态自由。





五、小结

3) 选定性能指标 J 。性能指标一般有下列的形式:

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t] dt \quad (1-28)$$

上述性能指标包括两个部分, 即积分指标 $\int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t] dt$ 和终端指标 $\phi[X(t_f), t_f]$, 这种综合性指标所对应的最优控制问题称为波尔扎 (**Bolza**) 问题。当只有终端指标时, 称为迈耶尔 (**Mayer**) 问题; 当只有积分指标时, 称为拉格朗日 (**Lagrange**) 问题。





五、小结

性能指标的确定因问题的性质而异。在导弹截击目标的问题中，我们要求弹着点的散布度最小，这时可用终端指标来表示。在快速控制问题时，要求系统从一个状态过渡到另一个状态的时间最短，即 $\int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min$ ，这就是积分指标。





五、小结

性能指标 J 是控制作用 $U(t)$ 的函数，也就是函数 $U(t)$ 的函数，这种以函数为自变量的函数称为泛函，所以

又称为性能泛函。有的文献中也把性能指标称为代价函数、目标函数等等。





五、小结

4) 确定控制作用的容许范围 Ω ，即

$$U(t) \in \Omega \quad (1-29)$$

Ω 是 m 维控制空间 R^m 中的一个集合。例如，控制飞机的舵偏角是受限制的，控制电机的电流是受限制的，即有 $|U(t)| \leq M$ 。这时控制作用属于一个闭集。当 $U(t)$ 不受任何限制时，称它属于一个开集。下面将看到处理这两类问题的方法是不同的。 Ω 可称为容许集合，属于 Ω 的控制则称为容许控制。





目录

一、控制理论简介

二、最优控制简介

三、最优控制发展过程

四、最优控制应用举例

五、小结

六、本课程主要参考文献





六、本课程主要参考文献

推荐参考书目：

- [1] 王青，陈宇等，最优控制——理论、方法与应用。北京：高等教育出版社，2011。
- [2] 张杰，王飞跃等，最优控制。北京：清华大学出版社，2017。
- [3] 吴沧浦，最优控制理论与方法。北京：国防工业出版社，2000。
- [4] 王朝珠，秦化淑。最优控制理论。北京：科学出版社，2003。
- [5] J Burl. Linear optimal control: H_2 and H_∞ methods. Addison Wesley Longman, 1999.





谢谢！