第二章　　变分法

从绪论的讲解中，可以看出，最优控制问题从数学角度可以看作动态系统性能指标的泛函极值问题。

即考虑如下性能指标J的泛函极值问题：

$$\min_u J = \phi\left[X(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} F\left[X(t), U(t), t\right] dt$$

其中$X(t)$是系统状态，$U(t)$是控制输入，t_0 和 t_f 分别是初始时刻和终端时刻。

最优控制的根本目的即为确定最优控制输入 $U(t)$ 使得性能指标J最小，该问题称之为**Bolza**问题，当性能指标中没有$\phi\left[X(t_f),t_f\right]$时，称之为**Lagrange**问题。

变分法是解决泛函极值问题的有力工具。变分法的基本思想是将变分问题转换为微分方程的边值问题进行求解，是最优控制的理论基石之一。

本章主要内容

2.1泛函与变分的数学基础

2.2 无条件泛函极值的变分原理

2.3 等式约束泛函极值的变分原理

2.4 小结

2.5 习题

首先介绍变分法所需要的泛函与变分的相关定义，并给出泛函极值存在的必要条件。

1、泛函：

如果对某一类函数 $\{X(t)\}$ 中的每一个函数 $X(t)$，有一个实数值与之相对应，则称 J 为依赖于函数 $X(t)$ 的泛函，记为

$$J = J\left[X(t)\right]$$

2、泛函的连续性：

若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 当 $\left\|X(t)-\hat{X}(t)\right\|<\delta$ 时

$$\left|J(X)-J(\hat{X})\right|<\varepsilon$$

则称 $J(X)$ 在 $\hat{X}$ 处是连续的。

3、线性泛函：

满足下面条件的泛函称为线性泛函

$$J[\alpha X] = \alpha J[X]$$

$$J(X+Y) = J(X) + J(Y)$$

这里 α 是实数，X 和 Y 是函数空间中的函数。

4、自变量函数的变分：

自变量函数 $X(t)$ 的变分 δX 是指同属于函数类$\{X(t)\}$中两个函数 $X_1(t)$ 、$X_2(t)$之差 $\delta X = X_1(t) - X_2(t)$

当 $X(t)$ 为一维函数时，δX 可用图2-1来表示。

2.1泛函与变分的数学基础

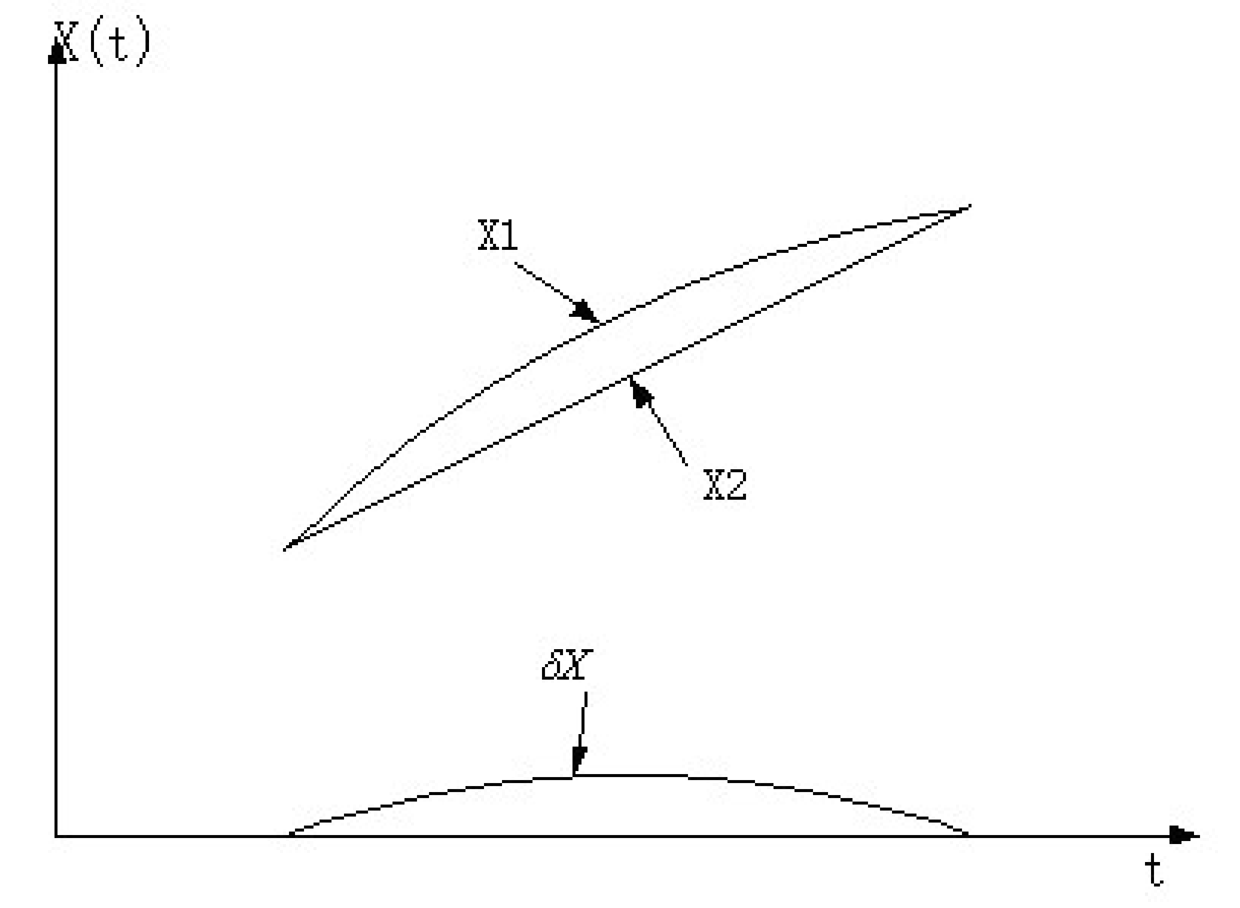

图2-1自变量函数的变分

5、泛函的变分：

当自变量函数 $X(t)$ 有变分 δX 时，泛函的增量为

$$\Delta J = J\left[X+\delta X\right]-J\left[X\right]=\delta J\left[X,\delta X\right]+\varepsilon\left\|\delta X\right\|$$

其中， $\delta J\left[X,\delta X\right]$ 是 δX 的线性泛函，若当 $\left\|\delta X\right\|\to 0$ 时，有 $\varepsilon\to 0$，则称 $\delta J\left[X,\delta X\right]$ 是泛函 $J\left[X\right]$ 的变分。δJ 是 ΔJ 的线性主部。

6、泛函的极值：

若存在 $\varepsilon > 0$ ，对满足的 $\|X - X^*\| < \varepsilon$ 一切 X，$J(X) - J(X^*)$ 具有同一符号，则称 $J(X)$ 在 $X = X^*$ 处有极值。

2.1泛函与变分的数学基础

定理：$J(X)$ 在 $X=X^*$ 处有极值的必要条件是对于所有容许的增量函数 δX（自变量的变分），泛函 $J(X)$ 在 X^* 处的变分为零

$$\delta J(X^*,\delta X)=0$$

本章主要内容

2.1泛函与变分的数学基础

2.2 无条件泛函极值的变分原理

2.3 等式约束泛函极值的变分原理

2.4 小结

2.5 习题

2.2 无条件的泛函极值的变分原理

2.2.1 泛函的自变量函数为标量函数的情况

为简单起见，先讨论自变量函数为标量函数的情况。我们要寻求极值曲线 $x(t)=x^{*}(t)$ ，使下面的性能泛函取极值

$$J=\int_{t_0}^{t_f} F\left[x(t),\dot{x}(t),t\right]dt \qquad （2-1）$$

2.2　无条件的泛函极值的变分原理

由此，考虑 $x(t)$ 、$\dot{x}(t)$ 在极值曲线 $x^*(t)$、$\dot{x}^*(t)$ 附近发生微小变分 δx、$\delta\dot{x}$，即

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t)$$

于是泛函J 的增量 ΔJ 可计算如下（以下将*号省去）

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \{F[x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t] - F[x, \dot{x}, t]\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + o\left[(\delta x)^2, (\delta\dot{x})^2\right] \right\} dt$$

上式中 $o[(\delta x)^2, (\delta\dot{x})^2]$ 是高阶项。

2.2　无条件的泛函极值的变分原理

考虑到，泛函的变分 δJ 是 ΔJ 的线性主部，即

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt$$

对上式第二项作分部积分，按公式

$$\int_{t_0}^{t_f} udv = uv \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} vdu$$

有

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) \delta x dt$$

进一步得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) \right] \delta x dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} \qquad \textbf{（2-2）}$$

2.2　无条件的泛函极值的变分原理

J取极值的必要条件是 δJ 等于零。因 δx 是任意的，要使（2-2）中第一项（积分项）为零，必有

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0 \qquad \textbf{(2-3)}$$

上式称为欧拉——拉格朗日方程。

下面我们讨论(2-2)式中第二项为零的条件，共有两种情况

2.2 无条件的泛函极值的变分原理

1、 固定端点的情况

这时 $x(t_0)=x_0, x(t_f)=x_f$ ，它们不发生变化，所以有 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$ 。而（2-2）中第二项可写成

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}=(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})_{t=t_f}\cdot\delta x(t_f)-(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})_{t=t_0}\cdot\delta x(t_0) \qquad \textbf{(2-4)}$$

当 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$ 时，（2-4）式自然为零。

2.2　无条件的泛函极值的变分原理

2、自由端点的情况

这时 $x(t_0)$ 和 $x(t_f)$ 可以发生化，$\delta x(t_0)\neq 0, \delta x(t_f)\neq 0$，而且可以独立地变化。于是要使（2-2）中第二项为零，由（2-4）式可得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_f}\cdot \delta x(t_f)=0 \qquad \textbf{（2-5）}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_0}\cdot \delta x(t_0)=0 \qquad \textbf{（2-6）}$$

2.2 无条件的泛函极值的变分原理

因为这里讨论 $x(t)$ 是标量函数的情况，$\delta x(t_0)$ 和 $x(t_f)$ 也是标量，且是任意的，故（2-5）、（2-6）可化为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_f} = 0 \qquad \text{（2-7）}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_0} = 0 \qquad \text{（2-8）}$$

（2-7）、（2-8）称为横截条件。

2.2 无条件的泛函极值的变分原理

当边界条件全部给定（即固定端点）时，不需要这些横截条件。当 $x(t_f)$ 给定时，不需（2-8）。当 $x(t_0)$ 给定时，不需要（2-7）。

2.2 无条件的泛函极值的变分原理

现在，将上面对 $x(t)$ 是标量函数时所得到的公式推广到 $X(t)$ 是n维向量函数的情况。这时，性能泛函为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(X,\dot{X},t)dt \tag{2-9}$$

式中

$$X=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix} \qquad \dot{X}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\vdots\\\dot{x}_n(t)\end{bmatrix} \tag{2-10}$$

2.2　无条件的泛函极值的变分原理

泛函变分由（**2-2**）式改为

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\delta X^T\left[\frac{\partial F}{\partial X}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}})\right]dt+\delta X^T\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\Bigg|_{t_0}^{t_f}$$

向量欧拉——拉格朗日方程为

$$\frac{\partial F}{\partial X}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}})=0 \qquad \textbf{(2-11)}$$

式中

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial F}{\partial x_n}\end{bmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(2-12)}$$

2.2 无条件的泛函极值的变分原理

横截条件为（自由端点情况）

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = 0 \qquad （当 \quad t = t_0 \ 和 \quad t = t_f \ 时）$$

例2-1求通过点（0，0）及（1，1）且使性能指标

$$J=\int_0^1 (x^2+\dot{x}^2)dt$$

取极值的轨迹 $x^*(t)$ 。

解 这是固定端点问题，相应的欧拉——拉格朗日方程为

$$2x - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0$$

即

$$\ddot{x} - x = 0$$

它的通解形式为

$$x(t) = Acht + Bsht$$

式中：

$$cht = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \quad , \quad sht = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$$

2.2　无条件件的泛函极值的变分原理

由初始条件 $x(0)=0$ ，可得A=0。

再由终端条件 $x(1)=1$ ，可得 $B=1/sh1$ ，

因而极值轨迹为

$$x^*(t)=sht/sh1$$

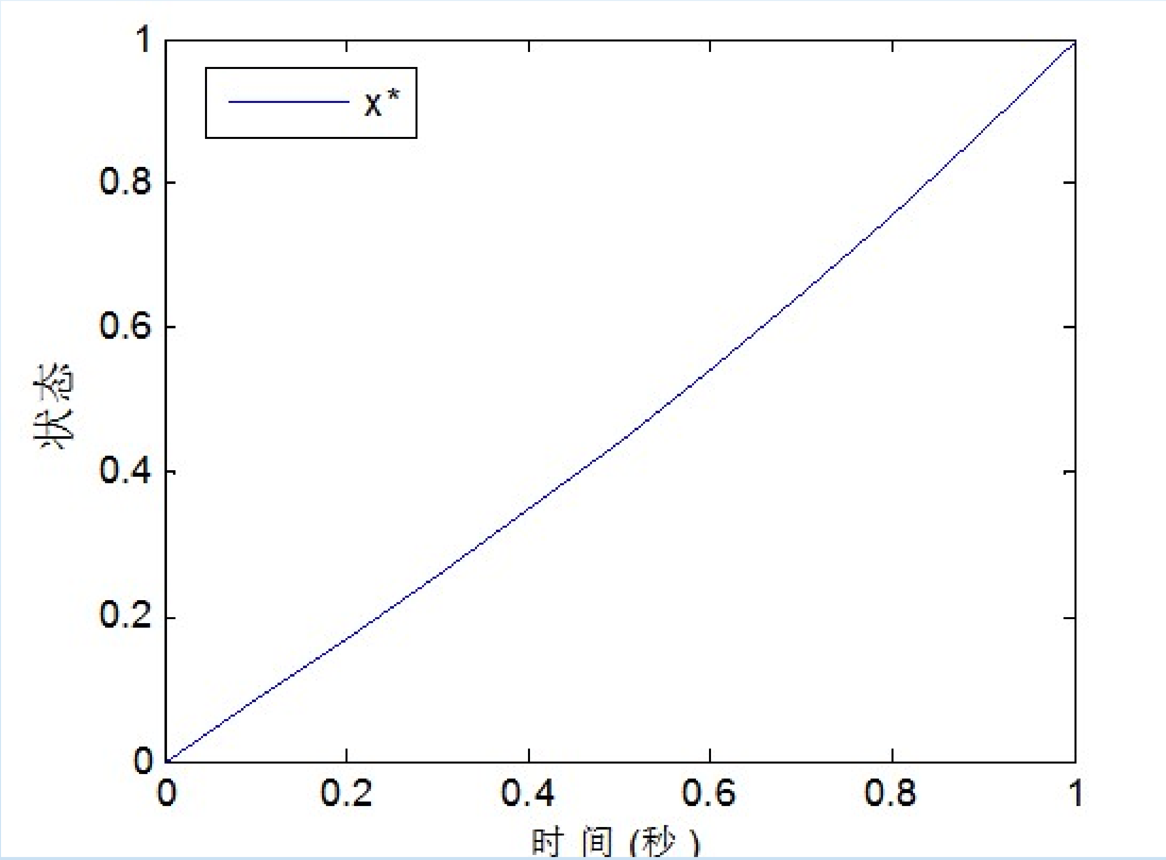

图2-2 极值轨迹x^*

本章主要内容

2.3等式约束泛函极值的变分原理

2.2节中，对极值轨迹 $X^*(t)$ 没有附加任何约束条件。但在动态系统最优控制问题中，极值轨迹需要满足系统的状态方程，也就是要受到状态方程的约束。考虑下列系统

$$\dot{X} = f\left[X(t), U(t), t\right] \tag{2-13}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

式中， $X(t)$ 为n 维状态向量,$U(t)$ 为 m 维控制向量，$f[X(t),U(t),t]$ 是n维连续可微的向量函数，需要指出此处 $U(t)$ 不受限制，以便采用变分法求解，若 $U(t)$ 受限，应采用极小值原理或动态规划求解，我们将在后续章节陈述。设定的性能指标如下：

$$J=\phi[X(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F[X(t),U(t),t]dt \quad (2\text{-}14)$$

最优控制的目标是求出最优控制 $U^*(t)$ 和满足状态方程的极值轨迹 $X^*(t)$ ，使性能指标取极值。

2.3等式约束泛函极值的变分原理

在下面的讨论中，在以下各节中，我们将先后讨论如下三种情况下的最优控制求解问题：

1. 终端时刻固定，终端状态自由；
2. 终端时刻自由，终端状态受约束；
3. 终端时刻固定，终端状态受约束；

2.3等式约束泛函极值的变分原理

（1）终端时刻给定，终端状态自由

将状态方程（2-13）写成等式约束方程的形式

$$f(X,U,t)-\dot{X}(t)=0 \qquad \textbf{（2-15）}$$

与有约束条件的函数极值情况类似，引入待定的n维拉格朗日乘子向量函数

$$\lambda^T(t)=\left[\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots\cdots,\lambda_n(t)\right] \qquad \textbf{（2-16）}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

与以前不同的是，在动态问题中拉格朗日乘子向量 $\lambda(t)$ 是时间函数。

在最优控制中经常将 $\lambda(t)$ 称为伴随变量，协态（协状态向量）或共轭状态。引入 $\lambda(t)$ 后可作出下面的增广泛函

$$J_a = \phi\left[X(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} \left\{F[X,U,t] + \lambda^T(t)\left[f(X,U,t) - \dot{X}\right]\right\} dt \qquad \text{（2-17）}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

于是有约束条件的泛函 J 的极值问题化为无约束条件的增广泛函 J_a的极值问题。

考虑引入一个标量函数

$$H(X,U,\lambda,t) = F(X,U,t) + \lambda^T f(X,U,t) \quad \text{（2-18）}$$

它称为哈密顿（Hamilton）函数，在最优控制中起着重要的作用

2.3等式约束泛函极值的变分原理

于是 J_a 可写成

$$J_a = \phi\left[X(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(X,U,\lambda,t)-\lambda^T\dot{X}\right]dt$$

对上式积分号内第二项作分部积分后可得

$$\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T\dot{X}dt=\lambda^T(t_f)X(t_f)-\lambda^T(t_0)X(t_0)-\int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T Xdt$$

于是有：

$$J_a = \phi\left[X(t_f),t_f\right]-\lambda^T(t_f)X(t_f)+\lambda^T(t_0)X(t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(X,U,\lambda,t)+\dot{\lambda}^T X\right]dt \qquad \textbf{（2-19）}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

设 $X(t)$ 、 $U(t)$ 相对于最优值 $X^*(t)$ 、$U^*(t)$ 的变分分别为 $\delta X(t)$ 和 $\delta U(t)$

因为 $X(t_f)$ 自由，故还要考虑变分 $\delta X(t_f)$ 。

下面来计算由这些变分引起的泛函 J_a 的变分 δJ_a。

2.3等式约束泛函极值的变分原理

$$\delta J_a = \delta X^T(t_f)\frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} - \delta X^T(t_f)\lambda(t_f) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[\delta X^T\left(\frac{\partial H}{\partial X}+\dot{\lambda}\right)+\delta U^T\frac{\partial H}{\partial U}\right]dt \qquad (2\text{-}20)$$

J_a为极小的必要条件是：对任意的 δX 、δU、$\delta X(t_f)$，变分 δJ_a 等于零。由（2-18）及（2-20）可得下面的一组关系式

2.3等式约束泛函极值的变分原理

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$ （协态方程） （2-21）

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$ （状态方程） （2-22）

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$ （控制方程） （2-23）

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)}$$ （横截条件） （2-24）

2.3等式约束泛函极值的变分原理

（2-21）-（2-24）即为 J_a 取极值的必要条件，由此即可求得最优值 $U^*(t)$ ，$X^*(t)$，$\lambda^*(t)$ 。

（2-22）式即为状态方程，这可由 H 的定义式（2-18）看出，实际解题时无需求 $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ ，只要直接用状态方程即可。

（2-21）与（2-22）一起称为哈密顿正则方程。

2.3等式约束泛函极值的变分原理

（2-23）是控制方程，它表示 H 在最优控制处取极值。

注意，这是在 δU 为任意时得出的方程，当 $U(t)$有界且在边界上取得最优值时，就不能用这方程，而应采用极小值原理求解。

（2-24）是在 t_f 固定、$X(t_f)$ 自由时得出的横截条件。当 $X(t_f)$ 固定时， $\delta X(t_f)=0$ ，就不需要这个横截条件了。横截条件表示协态终端所满足的条件。

2.3等式约束泛函极值的变分原理

在求解（2-21）-（2-24）时，我们只知道初值$X(t_0)$和由横截条件（2-24）求得的协态终端值 $\lambda(t_f)$，这种问题称为两点边值问题，一般情况下它们是很难求解的。

因为 $\lambda(t_0)$未知，如果假定一个$\lambda(t_0)$，然后正向积分（2-21）-（2-24），则在 $t=t_f$ 时的 λ 值一般与给定的 $\lambda(t_f)$不同，于是要反复修正 $\lambda(t_0)$ 的值，直至$\lambda(t_f)$与给定值的差可忽略不计为止。

2.3等式约束泛函极值的变分原理

非线性系统最优控制两点边值问题的数值求解是一个重要的研究领域。对于线性系统两点边值问题求解，可寻找缺少的边界条件并仅进行一次积分。

例2-2　　设系统状态方程为

$$\dot{x} = -x(t) + u(t)$$

$x(t)$的边界条件为$x(0)=1, x(t_f)=0$ 。求最优控制$u(t)$,

使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left(x^2 + u^2\right)dt$$

为最小。

2.3等式约束泛函极值的变分原理

序号	拉氏变换 E(s)	时间函数 e(t)	Z 变换 E(z)
1	1	δ (t)	1
2	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}(\frac{z}{z-e^{-aT}})$
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}$
11	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
13	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
14	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
15	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$

解

这里$x(0)$、$x(t_f)$均给定，故不需要横截条件（**2-24**）式。

作哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x + u)$$

则协态方程和控制方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x + \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$$

即

$$u = -\lambda$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

故可得正则方程

$$\dot{x}(t) = -x(t) - \lambda(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -x(t) + \lambda(t)$$

对正则方程进行拉氏变换，可得

$$sX(s) - x(0) = -X(s) - \lambda(s) \quad \text{（2-25）}$$

$$s\lambda(s) - \lambda(0) = -X(s) + \lambda(s) \quad \text{（2-26）}$$

由（2-25）式可求得

$$X(s) = \frac{x(0) - \lambda(s)}{s+1} \quad \text{（2-27）}$$

代入（**2-26**），即得

$$(s^2-2)\lambda(s)=(s+1)\lambda(0)-x(0)$$

于是，解出 $\lambda(s)$ 为

$$\lambda(s)=\frac{(s+1)\lambda(0)-x(0)}{s^2-2}=\frac{s+1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}\lambda(0)-\frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}x(0) \quad \text{（2-28）}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

反变换可求得

$$\lambda(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-\sqrt{2}\,t}-e^{\sqrt{2}\,t})x(0)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}\,t}+(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}\,t}\right]\lambda(0) \qquad \textbf{（2-29）}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

将（2-28）代入（2-26）可得

$$X(s)=\frac{s-1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}x(0)-\frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}\lambda(0)$$

故

$$x(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}\,t}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}\,t}\right]x(0)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[e^{-\sqrt{2}\,t}-e^{\sqrt{2}\,t}\right]\lambda(0)$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

由 $x(0)=1 \quad x(t_f)=0$，从上式可得

$$\lambda(0)=\frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}\,t_f}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}\,t_f}}{e^{\sqrt{2}\,t_f}-e^{-\sqrt{2}\,t_f}}$$

把$\lambda(0)$ 代入（**2-29**），可得$\lambda(t)$，而最优控制为

$$u^*(t)=-\lambda(t)$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{e^{-\sqrt{2}t}-e^{\sqrt{2}t}+\frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{\sqrt{2}t_f}-e^{-\sqrt{2}t_f}}\left[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}+(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}\right]\right\}$$

例2-3　　设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

初始条件为

$$x_1(0) = 1 \qquad x_2(0) = 1$$

终端条件为

$$x_1(1) = 0 \qquad x_2(1) \quad \text{自由}$$

要求确定最优控制$u^*(t)$，使指标泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt$$

取极小值

解：这里$x_2(1)$是自由的，所以要用到横截条件（**2-24**）式，因终端指标 $\phi[X(t_f),t_f]=0$

所以

$$\lambda_2(1)=\frac{\partial\phi}{\partial X_2(1)}=0 \qquad \textbf{（2-30）}$$

取哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u \qquad \textbf{（2-31）}$$

由（**2-21**）~（**2-23**）可求得

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

即

$$u + \lambda_2 = 0$$

得

$$u^*(t) = -\lambda_2(t) \qquad \textbf{（2-32）}$$

将 $u^*(t)$ 代入状态方程，可得

2.3等式约束泛函极值的变分原理

$$\dot{x}_1 = x_2(t) \qquad (2\text{-}33)$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda_2(t) \qquad (2\text{-}34)$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \qquad (2\text{-}35)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1(t) \qquad (2\text{-}36)$$

边界条件为

$$x_1(0) = 1 \qquad x_2(0) = 1$$

$$x_1(1) = 0 \qquad \lambda_2(1) = 0 \qquad (2\text{-}37)$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

可见这是两点边值问题，对正则方程（**2-33**）~（**2-36**）进行拉氏变换，可得

$$sX_1(s)-x_1(0)=X_2(s) \quad \textbf{（2-38）}$$

$$sX_2(s)-x_2(0)=-\lambda_2(s) \quad \textbf{（2-39）}$$

$$s\lambda_1(s)-\lambda_1(0)=0 \quad \textbf{（2-40）}$$

$$s\lambda_2(s)-\lambda_2(0)=-\lambda_1(s) \quad \textbf{（2-41）}$$

由（**2-38**）~（**2-41**）可解出

$$s^4 X_1(s) = s^3 x_1(0) + s^2 x_2(0) - s\lambda_2(0) + \lambda_1(0)$$

代入初始条件 $x_1(0)=1$，$x_2(0)=1$，可得

$$X_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\lambda_2(0) + \frac{1}{s^4}\lambda_1(0)$$

故

$$x_1(t) = 1 + t - \frac{1}{2}\lambda_2(0)t^2 + \frac{1}{6}\lambda_1(0)t^3 \qquad \text{（2-41）}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

同样可解得

$$\lambda_2(s)=\frac{1}{s}\lambda_2(0)-\frac{1}{s^2}\lambda_1(0)$$

$$\lambda_2(t)=\lambda_2(0)-\lambda_1(0)t \qquad （\textbf{2-43}）$$

利用终端条件 $x_1(1)=0$ ，$\lambda_2(1)=0$，由（**2-42**）、（**2-43**）

可得

$$2-\frac{1}{2}\lambda_2(0)+\frac{1}{6}\lambda_1(0)=0$$

$$\lambda_2(0)-\lambda_1(0)=0$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

由上二式可解出

$$\lambda_1(0)=6 \qquad \lambda_2(0)=6$$

由（**2-42**）式可得最优状态轨迹

$$x_1^*(t)=1+t-3t^2+t^3$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

由（2-43）式可得最优协态

$$\lambda_2^*(t) = 6(1-t)$$

由（2-32）式可得最优控制

$$u^*(t) = 6(t-1)$$

同理还可求出

$$x_2^*(t) = 1 - 6t + 3t^2$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

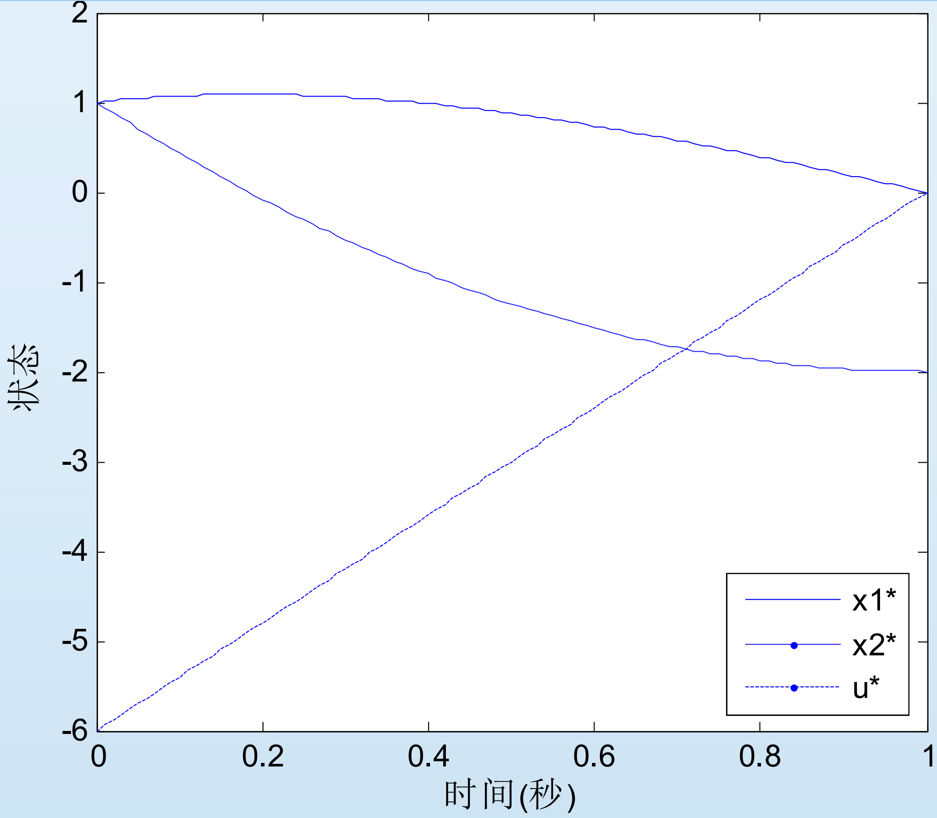

图2-3 最优控制和最优状态轨迹解

2.3等式约束泛函极值的变分原理

（2）终端时刻自由，终端状态受约束

设终端状态 $X(t_f)$ 满足下面约束方程

$$G\left[X(t_f),t_f\right]=0 \tag{2-44}$$

其中

$$G=\begin{bmatrix} G_1\left[X(t_f),t_f\right] \\ G_2\left[X(t_f),t_f\right] \\ \cdots\cdots \\ G_q\left[X(t_f),t_f\right] \end{bmatrix} \tag{2-45}$$

性能指标为

$$J=\phi\left[X(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}F\left[X(t),U(t),t\right]dt \tag{2-46}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

引入n维拉格朗日乘子向量函数$\lambda(t)$和q维拉格朗日乘子向量 ν，作出增广性能泛函

$$J_a=\varphi\left[X(t_f),t_f\right]+\nu^T G\left[X(t_f),t_f\right]$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{F(X,U,t)+\lambda^T(t)\left[f(X,U,t)-\dot{X}\right]\right\}dt \qquad （2-47）$$

引入哈密顿函数

$$H(X,U,\lambda,t)=F\left[X,U,t\right]+\lambda^T f(X,U,t) \qquad （2-48）$$

将 H 代入（2-47），可得

$$J_a=\phi\left[X(t_f),t_f\right]+\nu^T G\left[X(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(X,U,\lambda,t)-\lambda^T\dot{X}\right]dt \qquad （2-49）$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

$$\theta\left[X(t_f),t_f\right]=\phi\left[X(t_f),t_f\right]+v^T G\left[X(t_f),t_f\right] \qquad (2\text{-}50)$$

则

$$J_a=\theta\left[X(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(X,U,\lambda,t)-\lambda^T\dot{X}\right]dt \qquad (2\text{-}51)$$

与 t_f固定时的情况不同，现在δJ_a由 δU、δX、$\delta X(t_f)$和δt_f所引起。这里 δt_f不再为零，而$\delta X(t_f)$可如下方式计算，

2.3等式约束泛函极值的变分原理

令 $t_f = t_f^* + \delta t_f$

$$\delta X(t_f) = X(t_f) - X^*(t_f^*) = X(t_f^* + \delta t_f) + \delta X(t_f^*) - X(t_f^*)$$

$$\approx \delta X(t_f^*) + \dot{X}(t_f^*)\delta t_f \qquad (2\text{-}52)$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

注意，这里 $\delta X(t_f)$和$\delta X(t_f^*)$不同，故*号不能省去。上式表明 $\delta X(t_f)$由两部分组成：

一是在t_f^*时函数$X(t_f)$相对$X^*(t_f)$的变化 $\delta X(t_f^*)$.

二是因 t_f 的变化所引起的函数值的变化量$\left\lfloor X(t_f^*+\delta t_f)-X(t_f^*)\right\rfloor$

后者也用它的线性主部$\dot{X}^*(t_f^*)\delta t_f$来近似。

2.3等式约束泛函极值的变分原理

现在来计算 δJ_a（只计算到一阶小量）。

$$\Delta J_a = \theta\left[X(t_f)+\delta X(t_f), t_f+\delta t_f\right]_*$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*+\delta t_f}\left[H(X+\delta X, U+\delta U, \lambda, t)-\lambda^T(\dot{X}+\delta\dot{X})\right]_* dt$$

$$-\theta\left[X(t_f), t_f\right]-\int_{t_0}^{t_f^*}\left[H(X,U,\lambda,t)-\lambda^T\dot{X}\right]dt$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

上式中方括号外的下标*表示X、U、t_f 是最优值X^*、U^*、t_f^*。δJ_a是上式的线性主部，故

$$\delta J_a=\left[\frac{\partial\theta}{\partial X(t_f)}\right]_*^T\delta X(t_f)+\left[\frac{\partial\theta}{\partial t_f}\right]_*\delta t_f+\int_{t_0}^{t_f^*}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T\delta X+\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T\delta U-\lambda^T\delta\dot{X}\right]_*dt$$

$$+\int_{t_f^*}^{t_f^*+\delta t_f}\left[H\left(X+\delta X,U+\delta U,\lambda,t\right)-\lambda^T(\dot{X}+\delta\dot{X})\right]_*dt$$

对第三项作分部积分，有：

$$\int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^T\delta\dot{X}dt=\lambda^T(t_f^*)\delta X(t_f^*)-\int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T\delta Xdt$$

于是有：

$$\int_{t_0}^{t_f^*}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial X}+\dot{\lambda}\right)^T\delta X+\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T\delta U\right]_*dt-\lambda^T(t_f^*)\delta X(t_f^*)$$

第四项可表示为（忽略二阶小量）

$$\int_{t_f^*}^{t_f^*+\delta t_f}\left[H(X,U,\lambda,t)+(\frac{\partial H}{\partial X})^T\delta X+(\frac{\partial H}{\partial U})^T\delta U-\lambda^T\dot{X}-\lambda^T\delta\dot{X}\right]_* dt$$

$$\approx H^*(X,U,\lambda,t)\delta t_f-\lambda^T(t_f^*)\dot{X}(t_f^*)\delta t_f$$

$$=H^*\delta t_f-\lambda^T(t_f^*)\left[\delta X(t_f)-\delta X(t_f^*)\right]$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

上式最后一个等号用到了（**2-52**）式。H^*表示H的自变量取最优值时 H 的值。

根据上面的结果可得

$$\delta J_a = \left[\frac{\partial \theta}{\partial X(t_f)}\right]_*^T \delta X(t_f) + \left[\frac{\partial \theta}{\partial t_f}\right]_* \delta t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial X}+\dot{\lambda}\right)^T \delta X + \left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T \delta U\right]_* dt + H^* \delta t_f - \lambda^T(t_f^*)\delta X(t_f)$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

J_a 取极值的必要条件为$\delta J_a = 0$因 $\delta X(t_f)$、δt_f 、δX、δU为任意，故得（省去*号）

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$ （协态方程） （2-53）

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$ （状态方程） （2-54）

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$ （控制方程） （2-55）

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial X(t_f)} = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu$$ （横截方程） （2-56）

2.3等式约束泛函极值的变分原理

$$H(t_f) = -\frac{\partial\theta}{\partial t_f} = -\frac{\partial\phi}{\partial t_f} - \frac{\partial G^T}{\partial t_f}\nu \qquad \textbf{（2-57）}$$

与 t_f 固定情况相比，这里多了一个方程：

$$t_f = t_f^*$$

用它可求出最优终端时间：

$$H(t_f) = -\frac{\partial\theta}{\partial t_f}$$

例2-4 $\dot{x} = u$

边界条件为

$x(0)=1$ $x(t_f)=0$ t_f 自由

性能指标为

$$J = t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2 dt$$

要求确定最优控制 u^*，使 J最小。

2.3等式约束泛函极值的变分原理

解

这是 t_f 自由问题。终端状态固定， $x(t_f)=0$ 是满足约束集的特殊情况，即

$$G[X(t_f),t_f]=x(t_f)=0$$

作哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}u^2+\lambda u$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

正则方程是

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

控制方程是

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \qquad u = -\lambda$$

因边界条件全部给定，故不用横截条件。

确定最优终端时刻的条件（**2-57**）式为

$$H(t_f) = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f} = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} = -\frac{\partial t_f}{\partial t_f} = -1$$

$$\frac{1}{2}u^2(t_f) + \lambda(t_f)u(t_f) = -1$$

将 $u(t) = -\lambda(t)$ 代入，可得

$$\frac{1}{2}\lambda^2(t_f) - \lambda^2(t_f) + 1 = 0$$

由上式求得 $\lambda(t_f)=\sqrt{2}$

因为由正则方程 $\dot{\lambda}=0$ ，所以 $\lambda(t)=\lambda(t_f)=\sqrt{2}$ ，于是最优控制

$$u^*(t)=-\sqrt{2}$$

再由正则方程 $\dot{x}=u=-\lambda$ ，可得

$$x(t)=-\sqrt{2}\,t+c$$

由初始条件 $x(0)=1$ ，求得 $c=1$ ，故最优轨迹为

$$x^*(t) = -\sqrt{2}\,t + 1$$

以终端条件

$$x^*(t_f^*) = 0$$

代入上式，即求得最优终端时刻

$$t_f^* = \sqrt{2}\big/2$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

（3）终端时刻自由，终端状态受约束

设终端状态$X(t_f)$满足下面约束方程

$$G\left[X(t_f),t_f\right]=0 \qquad \textbf{（2-58）}$$

其中

$$G=\begin{bmatrix} G_1\left[X(t_f),t_f\right] \\ G_2\left[X(t_f),t_f\right] \\ \cdots\cdots \\ G_q\left[X(t_f),t_f\right] \end{bmatrix} \qquad \textbf{（2-59）}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

本节讨论的最优控制问题是在约束 $\dot{X}(t)=f(X,U,t)$ 和式(2-58)条件下确定使性能指标 $J=\phi\left[X(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}F[X(t),U(t),t]dt$ 最小的最优控制问题。如前所述，引入n维拉格朗日乘子向量函数 $\lambda(t)$ 和 q 维拉格朗日乘子向量 ν，并设定如下增广性能泛函：

$$J_a=\varphi\left[X(t_f),t_f\right]+\nu^T G\left[X(t_f),t_f\right]$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{F(X,U,t)+\lambda^T(t)\left[f(X,U,t)-\dot{X}\right]\right\}dt \qquad \textbf{(2-60)}$$

引入哈密顿函数

$$H(X,U,\lambda,t)=F\left[X,U,t\right]+\lambda^T f(X,U,t) \qquad \textbf{(2-61)}$$

2.3等式约束泛函极值的变分原理

采用类似的推导方法，依据J_a取极值的必要 $\delta J_a = 0$ 条件可得如下关系式：

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$ （协态方程） （2-62）

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$ （状态方程） （2-63）

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$ （控制方程） （2-64）

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial X(t_f)} = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu$$ （横截方程） （2-65）

2.3等式约束泛函极值的变分原理

下面讨论几种特殊的横截条件：

1. 若 $\boldsymbol{X}(t_f)$ 为n维状态空间中的某一固定点，即 $\boldsymbol{X}(t_f)=\boldsymbol{X}_f$ 则

由于 t_f 固定，可以得到 $G\left[X(t_f),t_f\right]=\boldsymbol{X}(t_f)-\boldsymbol{X}_f=0$

$$\phi\left[\boldsymbol{X}(t_f),t_f\right]=\phi\left[\boldsymbol{X}_f,t_f\right]=\text{常数} \tag{2-66}$$

$$\frac{\partial\phi\left[\boldsymbol{X}(t_f),t_f\right]}{\partial\boldsymbol{X}}=0,\quad \frac{\partial G\left[X(t_f),t_f\right]}{\partial\boldsymbol{X}}=0 \tag{2-67}$$

进而

因此 $\lambda^T(t_f)=v^T$（v^T 待定)

2.3等式约束泛函极值的变分原理

2. 设 $\phi\left[X(t_f),t_f\right]=0$， $X(t_f)$ 的某些分量取固定值而其他分量自由。不失一般性，设 $X(t_f)$的前**m**个分量固定，即

$$X_i(t_f)=X_{if},i=1,2,\ldots,m \qquad 1\leq m<n \qquad \textbf{(2-68)}$$

而其他分量自由。

$$\lambda^{\mathrm{T}}(t_f)=[v_1,v_2,\ldots,v_m,\overbrace{0,0,\ldots,0}^{n-m}] \qquad \textbf{(2-69)}$$

3. 设 $\phi\left[X(t_f),t_f\right]=0$，且$X(t_f)$的所有分量均自由，则有

$$\lambda^{\mathrm{T}}(t_f)=0 \qquad \textbf{(2-70)}$$

本章主要内容

2.1泛函与变分的数学基础

2.2 无条件泛函极值的变分原理

2.3 等式约束泛函极值的变分原理

2.4 小结

2.5 习题

2.4 小结

1、设系统状态方程为 $\dot{X}=f(X,U,t)$，性能指标为

$$J=\phi\left[X(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}F\left[X,U,t\right]dt$$

初始状态 $X(t_0)$ 给定，终端状态 $X(t_f)$ 满足向量约束方程 $G\left[X(t_f),t_f\right]=0$ （包括 $X(t_f)$ 给定的情况）。

性能指标为 $J=\varphi\left[X(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}F\left[X,U,t\right]dt$，则由变分法可得终端时刻 t_f 给定时，J 取极值的必要条件

2.4 小结

$$\left.\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial X} \\ \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}\end{aligned}\right\}$$ （正则方程）

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$ （控制方程）

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} v$$ （横截条件）

其中，$H(X,U,\lambda,t) = F(X,U,t) + \lambda^T \cdot f(X,U,t)$ 称为哈密顿函数。

2.4 小结

从上述结果可知，正则方程有 $2n$个变量，积分时要 n 个边界条件，初始条件$X(t_0)$ 给定时提供了n个边界条件，若$X(t_f)$也完全给定则又提供了n个边界条件，这时可不需要横截条件。

$$J=\int_{t_0}^{t_f} F(X,\dot{X},t)dt$$

当$X(t_f)$ 自由或部分分量自由就要靠横截条件来提供缺少的边界条件

2.4 小结

（2）终端条件 t_f 自由，J 取极值的必要条件与 t_f 给定时的不同处，仅在于多一个求最优终端时刻的条件

$$H(t_f)=-\frac{\partial\phi}{\partial t_f}-\frac{\partial G^T}{\partial t_f}\nu$$

2、

用经典变分法求解最优控制时，假定 δU 不受限制,$u(t)$ 为任意，故得出控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial U}=0$$

当控制输入$u(t)$受限制而不满足这种情况时，需采用极小值原理或动态规划求解最优控制问题。

本章主要内容

2.1泛函与变分的数学基础

2.2 无条件泛函极值的变分原理

2.3 等式约束泛函极值的变分原理

2.4 小结

2.5 习题

习题1　电枢控制直流电动机在忽略阻尼时的系统方程为 $\ddot{\theta}=u(t)$，其中，θ为转轴角位移,$u(t)$ 为输入。若性能指标 $J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left(\ddot{\theta}\right)^2 dt$，使得初态 $\theta(0)=1,\dot{\theta}(0)=1$ 转移到终态$\theta(2)=0,\dot{\theta}(2)=0$，求最优控制 $u^*(t)$ 以及最优角位移$\theta^*(t)$和最优角速度 $\dot{\theta}^*(t)$ 。

这里初始和终止条件均给定，故不需要横截条件。可以令

$$x_1 = \dot{\theta} \qquad x_2 = \theta$$

则状态方程变为

$$\dot{x}_1 = u \qquad \dot{x}_2 = x_1$$

作哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 u + \lambda_2 x_1$$

于是可以得到如下方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial X} \Rightarrow \begin{cases} -\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \\ -\dot{\lambda}_2 = 0 \end{cases} & \text{协 态 方 程} \\ \dot{X} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} & \text{状 态 方 程} \\ \dfrac{\partial H}{\partial U} = u + \lambda_1 = 0 & \text{控 制 方 程} \end{cases}$$

进一步解出

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{c_1}{6}t^3 - \dfrac{c_2}{2}t^2 + c_3 t + c_4 \\ x_1 = \dfrac{c_1}{2}t^2 - c_2 t + c_3 \end{cases}$$

带入初始条件

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_1(2) = 0 \\ x_2(2) = 0 \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} c_4 = 1 \\ c_3 = 1 \\ c_2 = \dfrac{7}{2} \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

于是最优控制结果为

$$\begin{cases} u^*(t) = 3t - \dfrac{7}{2} \\ \theta^*(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - \dfrac{7}{4}t^2 + t + 1 \\ \dot{\theta}^*(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{7}{2}t + 1 \end{cases}$$

习题2　系统状态方程为 $\dot{x}(t)=u(t)$ 初始条件为 $x(0)=1$

指标函数为

$$J=\frac{s^2}{2}x^2(2)+\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

求最优控制 $u^*(t)$ 以及轨迹线 $x^*(t)$

这是终端时刻确定，终端状态自由问题，故需要横截条件。同时性能指标由终端指标和积分指标两部分构成。

终端指标为

$$\phi(x(2),2)=\frac{s^2}{2}x^2(2)$$

作哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}u^2+\lambda u$$

于是可以得到如下方程

$$
\begin{cases}
\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial X} = 0 & \text{协 态 方 程} \\
\dot{X} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = u & \text{状 态 方 程} \\
\dfrac{\partial H}{\partial U} = u + \lambda = 0 & \text{控 制 方 程} \\
\lambda(t_f) = \dfrac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \dfrac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} v & \text{横 截 条 件}
\end{cases}
$$

进一步解出

$$\begin{cases} \lambda = c_0 \\ u = -c_0 \\ x = c_0 t + c_1 \end{cases}$$

带入初始条件和横截条件　　解出

$$\begin{cases} \lambda(2) = s^2 x(2) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_0 = \dfrac{s^2}{1-2s^2} \end{cases}$$

于是最优控制结果为

$$\begin{cases} u^*(t) = -\dfrac{s^2}{1-2s^2} \\ x^*(t) = \dfrac{s^2}{1-2s^2}t + 1 \end{cases}$$