北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

王磊

自动化科学与电气工程学院

第五章 广义逆矩阵

- 基本概念
- 矩阵方程$AXB = D$
- 减号逆
- 极小范数广义逆
- 最小二乘广义逆
- 加号逆
- 应用：区间线性规划（自学）

第五章 广义逆矩阵

基 本 概 念

定义5.1.1（广义逆矩阵） 设$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若$X \in \mathbb{C}^{n \times m}$满足以下四个Penrose方程：

（1）$AXA = A$

（2）$XAX = X$

（3）$(AX)^H = AX$

（4）$(XA)^H = XA$

的全部或者一部分，则称矩阵X是矩阵A的**广义逆矩阵**.

注1： 满足定义5.1.1中一个、两个、三个或四个Penrose方程的广义逆矩阵共计15种. 若矩阵G是满足第i个Penrose方程的广义逆矩阵, 则记为

$$G = A^{(i)}, i = 1,2,3,4$$

若矩阵G是满足第i和第j个Penrose方程的广义逆矩阵, 则记为

$$G = A^{(i,j)}, i, j = 1,2,3,4且i \neq j$$

若矩阵G是满足第i、第j个和第k个Penrose方程的广义逆矩阵, 则记为

$$G = A^{(i,j,k)}, i, j, k = 1,2,3,4且i, j, k互不相等$$

若矩阵G满足全部四个Penrose方程, 则记为

$$G = A^{(1,2,3,4)} \text{或} A^{+}$$

并将其称之为**加号逆**或**伪逆**, 或**Moore-Penrose广义逆**.

常见的广义逆有$A^{(1)}, A^{(1,3)}, A^{(1,4)}$和$A^{+}$, 其中$A^{(1)}$称为**减号逆**, 记为$A^{-}$; $A^{(1,3)}$称为**最小二乘广义逆**, 记为A_{l}^{-}; $A^{(1,4)}$为**极小范数广义逆**, 记为A_{m}^{-}.

矩 阵 方 程 $AXB = D$

定义5.2.1（相容矩阵） 已知矩阵$A \in \mathbb{C}_{r_A}^{m\times n}$，$B \in \mathbb{C}_{r_B}^{p\times q}$, $D \in \mathbb{C}_{r_D}^{m\times q}$, 待定矩阵$X \in \mathbb{C}_{r_X}^{n\times p}$, 定义矩阵方程

$$AXB = D \qquad (5.2.1)$$

若存在矩阵$X \in \mathbb{C}_{r_X}^{n\times p}$使矩阵方程$AXB = D$成立，则称方程$AXB = D$**相容**，否则称为**不相容方程**或**矛盾方程**.

定理5.2.1 考查矩阵方程$AXB = D$，如果存在非奇异矩阵P_i和Q_i（$i = A, B$）满足式

$$P_A A Q_A = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_B\, B Q_B = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则方程$AXB = D$相容的充分必要条件是

$$P_A D Q_B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时, 方程$AXB = D$的解为$X = Q_A \begin{bmatrix} J_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} P_B$.

式中，$J_{11} \in \mathbb{C}^{r\times r}$；$Y_{12}$，$Y_{21}$和$Y_{22}$是适当阶数的任意矩阵.

注1： 若$r_A=r_B=r$，由定理5.2.1知，方程$AXB=D$相容的必要条件为$r_D\le r$.

推论5.2.1 考查矩阵方程$AXA=A$, 存在非奇异矩阵P和Q使得$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则$G$是该方程解的充分必要条件是

$$G=Q\begin{bmatrix} I_r & K \\ L & M \end{bmatrix}P$$

式中, K,L和M是适当阶数任意矩阵. 当A可逆, G唯一.

注2： 推论5.2.1表明矩阵方程$AXA=A$的解一定存在.

例5.2.1 求解矩阵方程$AXA = A$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

注3： 推论5.2.1中可逆矩阵P和Q可通过初等变换求解, 即

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & I \\ I & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAQ & P \\ Q & * \end{bmatrix}$$

定理5.2.2 考查矩阵方程$AXB = D$，若矩阵A和B有奇异值分解

$$A = U_A \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_A^H, B = U_B \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_B^H$$

则方程$AXB = D$相容的充分必要条件是

$$U_A^H D V_B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时，方程$AXB = D$的解为

$$X = V_A \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} J_{11} \Lambda_r^{-1} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} U_B^H$$

推论5.2.2 考查矩阵方程$AXA = A$, 若矩阵A有奇异值分解$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$, 则矩阵$G$是该方程解的充分必要条件是

$$G = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & K \\ L & M \end{bmatrix}U^H$$

式中, Σ_r是r阶对角矩阵, 其对角线元素是矩阵A的r个正奇异值；K, L, M是适当阶数的任意矩阵. 当A为可逆矩阵时, G唯一.

定理5.2.3（Penrose定理）矩阵方程$AXB = D$相容的充分必要条件为$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D$，其中$A^{(1)} \in A\{1\}, B^{(1)} \in B\{1\}$；此时方程$AXB = D$的通解为

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}$$

式中, Y为任一$n \times p$矩阵.

推论5.2.3 非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$相容的充分必要条件是$AA^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$, 其通解为

$$\boldsymbol{x} = A^{(1)}\boldsymbol{b} + \left(I - A^{(1)}A\right)\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$$

推论5.2.4 齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = 0$的通解为

$$\boldsymbol{x} = \left(I - A^{(1)}A\right)\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$$

推论5.2.5 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

$$A\{1\} = A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)}$$

其中, Z为任一$n \times m$矩阵.

例5.2.2 求线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$的通解.

定义5.2.2（Kronecker积） 设$A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right) \in \mathbb{C}^{p\times q}$, 称如下分块矩阵

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp\times nq}$$

为A与B的**Kronecker积**（或**直积**, **张量积**），简记为$A\otimes B = \left(a_{ij}B\right)$.

例5.2.3 计算$A\otimes B$和$B\otimes A$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

命题5.2.1（直积的性质）矩阵的Kronecker积具有以下性质：

（1）对任意复数k, $(kA)\otimes B = A\otimes(kB) = k(A\otimes B)$；

（2）$(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$；

（3）$A\otimes(B + C) = A\otimes B + A\otimes C$；

（4）$(A\otimes B)^H = A^H\otimes B^H$；

（5）若矩阵A和C, 矩阵B和D均可相乘, 则$(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$；

（6）$\mathrm{rank}(A\otimes B) = \mathrm{rank}(A)\mathrm{rank}(B)$；

（7）$(A\otimes B)^+ = A^+\otimes B^+$.

定理5.2.4 设$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{k} c_{ij}x^i y^j$是变量$x$，$y$的复二元多项式，对任意矩阵$A\in\mathbb{C}^{m\times m}$和$B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，定义矩阵

$$f(A,B)=\sum_{i,j=0}^{k} c_{ij}(A^i\otimes B^j)\in\mathbb{C}^{mn\times mn}$$

式中，$A^0=I_m$，$B^0=I_n$．若A和B的特征值分别为$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$和$\mu_1,\cdots,\mu_n$，则$f(A,B)$的特征值为$f\left(\lambda_i,\mu_j\right)$，$i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n.$

推论5.2.6 设$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 其特征值分别为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$和$\mu_1, \cdots, \mu_n$, 则有

（1）$A \otimes B$的特征值为$\lambda_i \mu_j$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

（2）$A \otimes I_n + I_m \otimes B$的特征值为$\lambda_i + \mu_j$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

定义5.2.3（列拉直） 设$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 并记$\boldsymbol{a}_i = [a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi}]^T$, $i = 1,2,\cdots,n$. 令

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

则称vec(A)为矩阵A的**列拉直**（或**列展开**）.

定理5.2.5 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$和$C \in \mathbb{C}^{p\times q}$, 则

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}(B)$$

定理5.2.6 矩阵方程$AXB = D$相容的充分必要条件为

$$\operatorname{rank}\left(B^T \otimes A, \operatorname{vec}(D)\right) = \operatorname{rank}(B^T \otimes A)$$

注4： 定理5.2.3和定理5.2.6分别给出了矩阵方程$AXB = D$相容的充分必要条件．显然，这两个条件应该是互为等价的.

【应用】：Lyapunov矩阵方程定义为

$$AX + XA^H = -Q$$

该方程在控制理论、通讯和动力系统中起着非常重要的作用. 我们常根据Lyapunov矩阵方程的解来检测系统的稳定性、可控性和可观测性等问题.

定理5.2.7 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若矩阵$A$的所有特征值均具有负实部，则矩阵方程$AX+XA^H=-Q$有唯一解，且解$X\in\mathbb{C}^{n\times n}$可表示为

$$X=\int_0^{+\infty}e^{At}Q\,e^{A^Ht}dt$$

进一步，若Q是（半正定、正定）Hermite矩阵，则解X也是（半正定、正定）Hermite矩阵.

第五章 广义逆矩阵

减 号 逆

例5.3.1 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$的一个减号逆.

命题5.3.1（减号逆的性质）

（1）$\mathrm{rank}(A) \le \mathrm{rank}(A^-)$；

（2）AA^-和A^-A均为幂等矩阵，且$\mathrm{rank}(AA^-) = \mathrm{rank}(A^-A) = \mathrm{rank}(A)$；

（3）若$B = P^{-1}AQ^{-1}$, 则$QA^-P \in B\{1\}$.

命题5.3.2（线性方程组相容条件）设$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则以下表达等价

（1）$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, \boldsymbol{b})$；

（2）$\boldsymbol{b} \in R(A)$；

（3）$AA^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$

定理5.3.1（减号逆与方程解的关系）设$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$，则$G \in A\{1\}$的充分必要条件为$\boldsymbol{x} = G\boldsymbol{b}$是相容方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解.

【思考】：定理5.3.1表明了具有$\boldsymbol{x} = G\boldsymbol{b}$形式的解与减号逆的关系. 那么，相容方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解是否一定可以表示为$\boldsymbol{x} = G\boldsymbol{b}$这种形式呢？

推论5.3.1（减号逆与方程解的关系） 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 非零向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$，则相容方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解一定可以用$\boldsymbol{x} = G\boldsymbol{b}$表示, 其中$G \in A\{1\}$.

例5.3.2 考查$\boldsymbol{x} = A^{(1)}\boldsymbol{b}$与相容方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$解的关系, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

定理5.3.2（相容线性方程组唯一解条件） 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$A^{(1)}A = I_n$当且仅当矩阵$A$是列满秩的．此时，相容方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解.

注1： 当矩阵A是列满秩矩阵，此时它的任一减号逆$A^{(1)}$都是A的左逆．同理，当矩阵A是行满秩矩阵，则它的任一减号逆$A^{(1)}$都是A的右逆.

例5.3.3 求向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$在$R(A)$上的正交投影，其中$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

定理5.3.3 对任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A(A^HA)^-A^H$是正交投影矩阵.

注2： 对一般的矩阵A, $(AA^H)^- \neq (A^H)^-A^-$.

推论5.3.2 对任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A(A^HA)^-A^HA = A$.

例5.3.4（最小二乘问题） 考查线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中，矩阵$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$和向量$\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^{m}$给定，向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^{n}$待定. 求向量$\boldsymbol{x}$使得$\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2$最小.

第五章 广义逆矩阵

极 小 范 数 广 义 逆

定理5.4.1 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$的奇异值分解为

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$$

则$G \in A\{1,4\}$的充分必要条件是

$$G = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & K \\ 0 & M \end{bmatrix}U^H$$

式中, K和M为适当阶数的任意矩阵.

注1： 若$A\in\mathbb{C}_n^{m\times n}$，则$(A^HA)^{-1}A^H\in A\{1,4\}$；若 $A\in\mathbb{C}_m^{m\times n}$, 则$A^H(AA^H)^{-1}\in A\{1,4\}$.

【思考】： 能否利用Penrose定理求解矩阵的极小范数广义逆？

定理5.4.2 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

$$A\{1,4\} = \{X \in \mathbb{C}^{n\times m} | XA = A_m^- A\}.$$

定理5.4.3 设$A_m^- \in A\{1,4\}$, 则

$$A\{1,4\} = \{A_m^- + Z(I - AA_m^-) | Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

【应用】： 矩阵的极小范数广义逆与相容线性方程组的解有密切关系. 考查相容线性方程组

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

式中, $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^{m}$给定, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^{n}$为待定向量.

当相容方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有多个解时，往往需从中挑选一个合适的解. 此时，我们一般挑选所有解中范数最小的解（或其中之一），即定义如下优化问题：

$$\min_{\substack{A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ AA^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}}} \|\boldsymbol{x}\|_2$$

我们将满足该优化问题的解称为相容线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的**极小范数解**.

定理5.4.4 矩阵$G \in A\{1,4\}$的充分必要条件为$\boldsymbol{x} = G\boldsymbol{b}$是相容方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的极小范数解.

推论5.4.1 相容方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的**极小范数解是唯一**的.

例5.4.1 求相容方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的极小范数解, 其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

例5.4.2 求向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$在$R(A^H)$上的正交投影，其中$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

第五章 广义逆矩阵

最 小 二 乘 广 义 逆

定理5.5.1 设$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$的奇异值分解为

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$$

则$G \in A\{1,3\}$的充分必要条件是

$$G = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ L & M \end{bmatrix}U^H$$

式中, L和M为适当阶数的任意矩阵.

注1： 若$A \in \mathbb{C}_n^{m\times n}$, 则$(A^HA)^{-1}A^H \in A\{1,3\}$；若 $A \in \mathbb{C}_m^{m\times n}$, 则$A^H(AA^H)^{-1} \in A\{1,3\}$.

定理5.5.2 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

$$A\{1,3\} = \{X \in \mathbb{C}^{n\times m} | AX = AA_l^-\}.$$

定理5.5.3 设$A_l^- \in A\{1,3\}$, 则

$$A\{1,3\} = \{A_l^- + (I - A_l^- A)Z | Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

【应用】： 矩阵的最小二乘广义逆与最小二乘问题有密切关系. 考查线性方程组

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

式中, $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^{m}$给定, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^{n}$为待定向量.

若方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$不相容，则它没有通常意义的解. 对此，我们退而求其次求使得残量范数（向量2范数）最小的解，即求向量$\boldsymbol{x}$使得$\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2$最小. 我们通常将这一优化问题称为**线性最小二乘问题**, 向量$\boldsymbol{x}$为**不相容方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解**.

定理5.5.4 对任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, AA_l^-是正交投影矩阵.

推论5.5.1 向量$\boldsymbol{b}$在$R(A)$的正交投影为$AA_l^-\boldsymbol{b}$，其中$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$.

推论5.5.2 给定$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$和$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$,

$$A(A^H A)^- A^H \boldsymbol{b} = AA_l^- \boldsymbol{b}.$$

定理5.5.5 矩阵$G \in A\{1,3\}$的充分必要条件为$\boldsymbol{x} = G\boldsymbol{b}$是不相容方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解.

推论5.5.3 向量$\boldsymbol{x}$是不相容方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解当且仅当$\boldsymbol{x}$是相容方程组$A\boldsymbol{x} = AA_l^-\boldsymbol{b}$的解，且$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解的通式为

$$\boldsymbol{x} = A_l^-\boldsymbol{b} + (I - A_l^-A)\boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$$

注2： 方程组$A\boldsymbol{x} = AA_l^-\boldsymbol{b}$、$A\boldsymbol{x} = A(A^HA)^-A^H\boldsymbol{b}$和$A^HA\boldsymbol{x} = A^H\boldsymbol{b}$均是相容同解方程组.

例5.5.1 求方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解通式, 其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

定理5.5.5 不相容方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$具有唯一的最小二乘解当且仅当$A$是列满秩矩阵.

例5.5.2 求方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解通式, 其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

第五章 广义逆矩阵

加 号 逆

定理5.6.1（加号逆存在性定理） 设矩阵$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$的奇异值分解为

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$$

则

$$G = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H$$

是A的一个加号逆.

定理5.6.2（加号逆唯一性定理） 任给矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，其加号逆$A^{+}$唯一.

定理5.6.3 设矩阵$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$, 则

$$A^{+}=V_1(\Sigma_r^2)^{-1}V_1^H A^H$$

其中，$\Sigma_r=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$，$\sigma_1,\cdots,\sigma_r$是矩阵$A$的$r$个正奇异值，$V_1\in\mathbb{C}^{n\times r}$是由$A^H A$的属于特征值$\sigma_1^2,\cdots,\sigma_r^2$的$r$个单位正交特征向量构成.

例5.6.1 已知矩阵$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$, 求$A^{+}$.

推论5.6.1（秩1公式） 设$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}_1^{m\times n}$，

$$A^+=\frac{1}{\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2}A^H$$

定理5.6.4 设矩阵$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$有满秩分解$A = BC$, 其中, $B \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$, $C \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$, 则

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H = C^H(B^HAC^H)^{-1}B^H$$

推论5.6.2 若$A \in \mathbb{C}_n^{m\times n}$，$A^+ = (A^HA)^{-1}A^H$；若$A \in \mathbb{C}_m^{m\times n}$, $A^+ = A^H(AA^H)^{-1}$.

例5.6.2 求$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\2&4&2&4\\1&0&0&2\end{bmatrix}$的伪逆.

命题5.6.1（加号逆的性质） 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

（1）$(A^+)^+ = A$;

（2）$(A^H)^+ = (A^+)^H$;

（3）$(A^T)^+ = (A^+)^T$;

（4）$\mathrm{rank}(A^+) = \mathrm{rank}(A)$;

（5）$(A^H A)^+ = A^+(A^H)^+$；$(AA^H)^+ = (A^H)^+ A^+$;

（6）$A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (AA^H)^+$.

注1： 对于一般的矩阵A和B, $(AB)^+ \neq B^+ A^+$;

$A^+ A \neq AA^+ \neq I$.

推论5.6.3 线性方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$相容的充分必要条件为$AA^{+}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$, 此时通解为

$$\boldsymbol{x}=A^{+}\boldsymbol{b}+(I-A^{+}A)\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^{n}$$

若方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$不相容，则式$\boldsymbol{x}=A^{+}\boldsymbol{b}+(I-A^{+}A)\boldsymbol{y}$为其最小二乘解通式.

一般而言，方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解并不唯一，我们通常把范数最小的一个解称为方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的**极小（范数）最小二乘解**（或**最佳逼近解**）.

定理5.6.5 向量$\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b}$既是相容方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的唯一极小范数解，也是不相容方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的唯一最佳逼近解.

例5.6.3 求线性方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的极小范数解或最佳逼近解，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 5 & 3\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\ -2\\ -2\end{bmatrix}$$

例5.6.4 求向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$在$R(A)$和$N(A)$上的正交投影，其中$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

第五章 广义逆矩阵

应用：区间线性规划

定义5.7.1（区间线性规划） 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{a}=[a_1,\cdots,a_m]^T$ 和 $\boldsymbol{b}=[b_1,\cdots,b_m]^T\in\mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 则线性规划问题

$$\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$\text{s.t. } a_i\le\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i, i=1,\ldots,m$$

称为**区间线性规划**（或**带双边约束的线性规划**）.

定理5.7.1 区间线性规划问题

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$\text{s.t. } a_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m$$

有界, 当且仅当$\boldsymbol{c} \in R(A^T)$, 或等价地, $\boldsymbol{c}^T A^- A = \boldsymbol{c}^T$.

定理5.7.2 假设定义5.7.1中区间线性规划问题是可行有解的, $\mathrm{rank}(A)=m$, 则该问题的最优解集为

$$\boldsymbol{x}=A^{-}\boldsymbol{u}+(I-A^{-}A)\boldsymbol{v}$$

式中, 向量$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$任意, $\boldsymbol{u}=[u_1,\cdots,u_m]^T\in\mathbb{R}^m$满足

$$u_i=\begin{cases} a_i, & 若(\boldsymbol{c}^T A^{-})_i<0 \\ b_i, & 若(\boldsymbol{c}^T A^{-})_i>0 \\ \theta_i a_i+(1-\theta_i)b_i, & 若(\boldsymbol{c}^T A^{-})_i=0 \end{cases}$$

$(\boldsymbol{c}^T A^{-})_i$表示行向量$\boldsymbol{c}^T A^{-}$的第$i$个分量, $0\le\theta_i\le 1$.

例5.7.1 为缓解交通压力，某市政府对A，B，C 3个区进行交通管控. 已知A区有1条高速路，2条普通公路；B区有2条高速路, 4条普通公路；C区有3条高速路, 5条普通公路. 假设3个区高速路上车辆数量相同，3个区普通公路上数量也相同. 现分别要求A, B, C的车辆承载量分别为[20,30]，[30,40]，[40,80]，求此市所能容纳的最大车辆数.

19年考题

五、应用题（10 分）

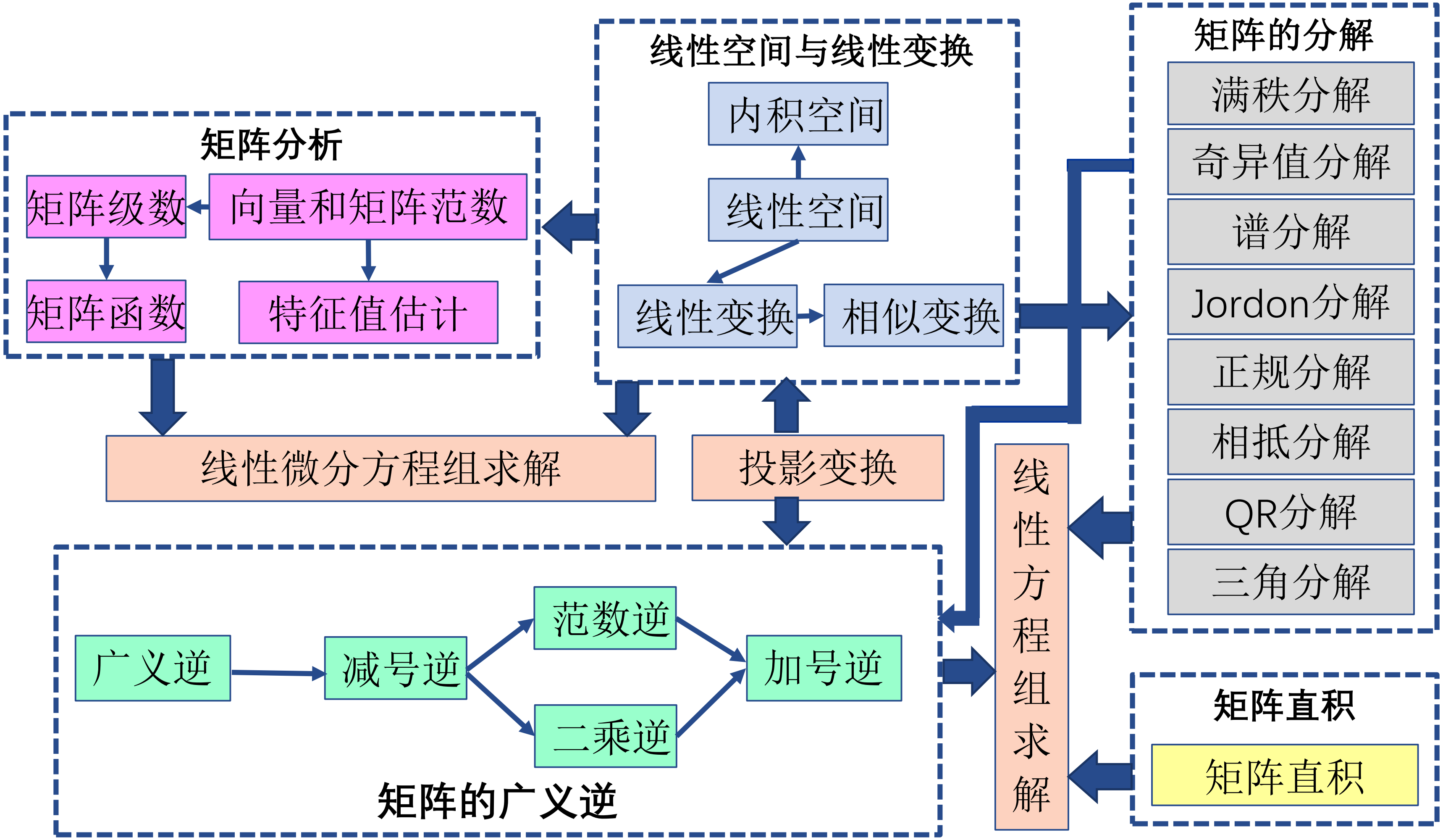
设x表示某公司每天的产量水平，y表示生产水平为每天x单位时的平均费用，则该公司典型的平均成本可用抛物线表示，即$y(x)=\beta_0+2\beta_1 x+\beta_2 x^2$. 已知$x$和$y$的观测数据分别记为$x_i$和$y_i$，详见下表，希望由观测数据拟合抛物曲线使其误差最小，其中，误差定义$E(\beta)=\sum_{i=1}^{3}(y_i-y(x_i))^2$，$\beta=(\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2)^T$.

观测值	第一组	第二组	第三组
x_i	1	1	2
y_i	3	3.3	6

(1) 试判断向量β的唯一性，并说明理由；

(2) 求 $||\beta||_2$最小的β.

课程体系



线性空间与线性变换
内积空间
线性空间
线性变换
相似变换
矩阵分析
矩阵级数
向量和矩阵范数
矩阵函数
特征值估计
矩阵的分解
满秩分解
奇异值分解
谱分解
Jordon分解
正规分解
相抵分解
QR分解
三角分解
线性微分方程组求解
投影变换
线性方程组求解
广义逆
减号逆
范数逆
二乘逆
加号逆
矩阵的广义逆
矩阵直积
矩阵直积

19年考题

3、在空间$\mathbb{R}^{2\times2}$中，给定$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$，线性变换$T(x)=xB$，$\forall x\in\mathbb{R}^{2\times2}$，则$T$在基$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$下的矩阵为_____，其中$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$T$在基__________下的矩阵为对角阵.