



## 第二章 变分法实例应用



## ❖ 实例一

在现代社会中，温度控制不仅应用于工业设计、工程建设等方面，也体现在日常生活中，如供暖、制冷等，用以改善人们的生活质量。本实例基于变分方法，解决室内温度控制系统耗能的最小化问题。





室内温度定义为 $\theta(t)$ ，外部温度视为常值 $\theta_a$ ，加热速率定义为 $u(t)$ 。现在通过温度控制系统将室内温度提高10度。温度控制系统可用如下动力学方程描述：

$$\dot{\theta}(t) = -a(\theta(t) - \theta_a) + bu(t)$$

其中，参数 $a$ ， $b$ 取决于室内与外界环境隔绝程度等因素。





将状态定义为

$$x(t) = \theta(t) - \theta_a$$

状态方程可以写作

$$\dot{x} = -ax + bu$$

给定

$$x(0) = 0^\circ \quad x(t_f) = 10^\circ$$

性能指标定义为

$$J = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$





本问题为终端时刻 $t_f$ ，使用尽可能少的能量，从初始温度达到给定的控制温度。以下采用变分法求解。





设定  $a = 0.03535$ ,  $b = 1$ , 环境温度为:

$$\theta_a = 15^\circ$$

增广泛函可以写为:

$$J_a = t_f + \int_0^T \left( \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda(t) [-ax + bu - \dot{x}] \right) dt$$





构造哈密顿函数为:

$$\begin{aligned} H(x, u, \lambda, t) &= F[x, u, t] + \lambda^T(t) f(x, u, t) \\ &= \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda(t) [-ax + bu] \end{aligned}$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -H_x = a\lambda$$

状态方程为

$$\dot{x} = H_\lambda = -ax + bu$$







控制方程为

$$H_u = u + b\lambda = 0$$

由此得到

$$u(t) = -b\lambda(t)$$

因为边界条件全部给定，故不用横截条件。

确定最优终端时刻的条件为

$$H(t_f) = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f} = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} = -\frac{\partial t_f}{\partial t_f} = -1$$

由此解得  $\lambda_1(t_f) = 1.104$ ,  $\lambda_2(t_f) = -1.811$ 。







将 $u(t) = -b\lambda(t)$ 代入协态方程以及状态方程，可推出

$$\dot{x} = -ax - b^2\lambda(t)$$

$$\dot{\lambda} = a\lambda$$

若已知终态 $\lambda(t_f)$ ，代入协态方程，可得

$$\dot{x} = -ax - b^2\lambda(t_f)e^{-a(t_f-t)}$$





使用拉普拉斯变换，可得

$$X(s) = \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2 \lambda(t_f) e^{-at_f}}{(s+a)(s-a)} = \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2}{a} \lambda(t_f) e^{-at_f} \left( \frac{-1/2}{s+a} + \frac{1/2}{s-a} \right)$$

解出

$$x(t) = x(0)e^{-at_f} - \frac{b^2}{a} \lambda(t_f) e^{-at_f} \left( \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \right)$$

$$x(t_f) = x(0)e^{-at_f} - \frac{b^2}{2a} \lambda(t_f) (1 - e^{-2at_f})$$





将给定初态 $x(0) = 0^\circ$ 及终端状态 $x(t_f) = 10^\circ$ 代入式中解得：

$$\lambda(t_f) = -\frac{20a}{b^2(1 - e^{-2at_f})}$$

由前面解出的 $\lambda(t_f)$ 的值及最优终端时刻为

$$t_f = -6.99943s(\text{舍})$$

$$t_f = 6.99943s$$





可得最优轨迹为

$$\lambda^*(t) = -\frac{10ae^{at}}{b^2\sinh at_f}$$

$$u^*(t) = \frac{10ae^{at}}{b\sinh at_f} \quad 0 \leq t \leq t_f$$





解出最优轨迹为

$$x^*(t) = 10 \frac{\sinh at}{\sinh at_f}$$

在 $t = t_f$ 时,  $x^*(t_f) = 10$ 与给定值相同。说明最优控制系统有效。





## (1) 用Matlab求 $x(t)$

将已经解算出的输入 $u$ 带入状态方程，借助Matlab直接解算状态方程，求取函数曲线。相应的Matlab程序如下：





\*\*\*\*\*MATLAB程序\*\*\*\*\*

```
function xfunc
```

```
[t,r]=ode45(@myfun,[0 6.99943],0)
```

```
plot(t,r);
```

```
xlabel('time t0=0,tt=6.99943');
```

```
ylabel('x values x(0)=0');
```

```
function drdt=myfun(t,r)
```

```
a=1.414/40;
```

```
b=1;
```

```
T=6.99943;
```

```
u=(10*a*exp(a*t))/(b*sinh(a*T));
```

```
drdt=-a*r+b*u;
```

\*\*\*\*\*







求得结果为:

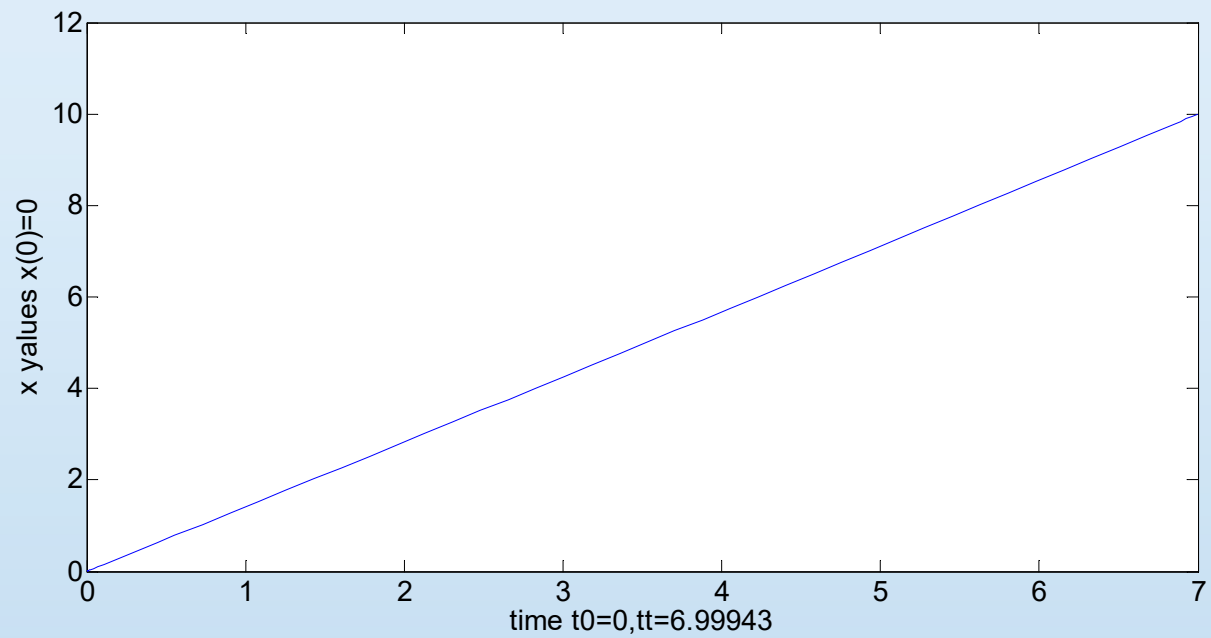


图  $x(t)$  曲线





## (2) 仿真分析:

使用simulink进行仿真，结构图如下:

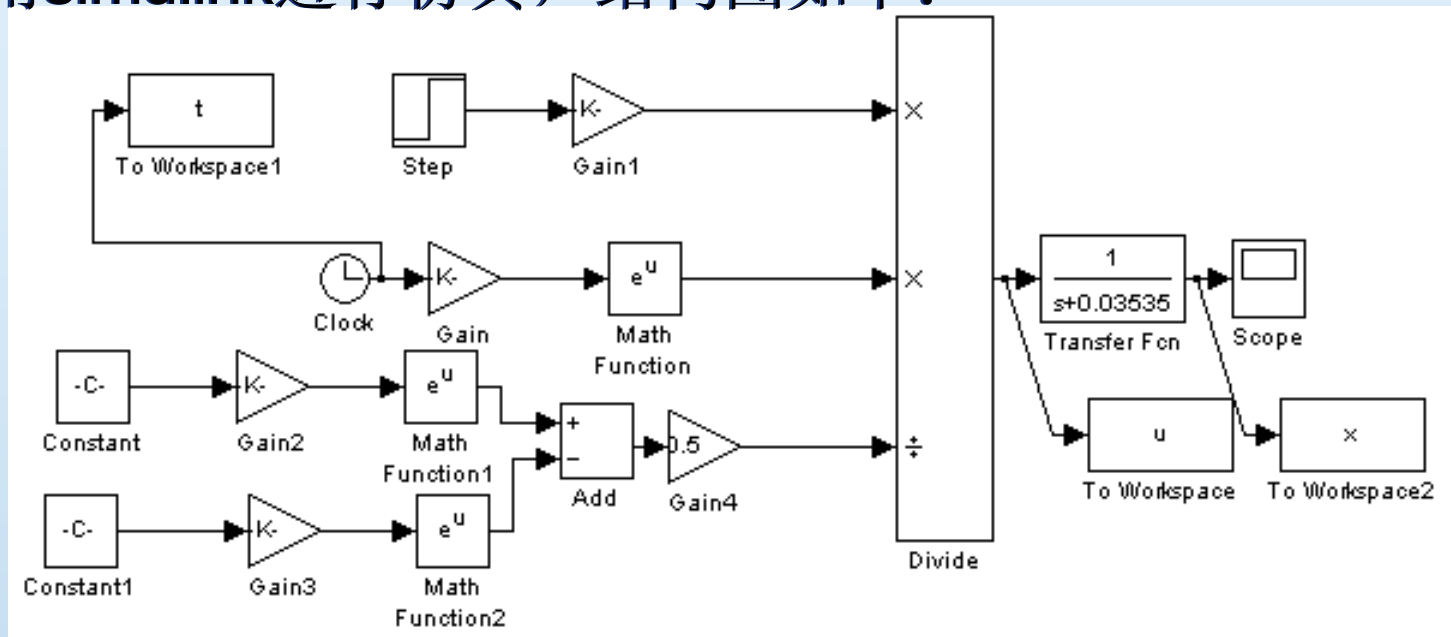


图 仿真结构图



通过合理选择性能指标，建立了一个温度控制环节的最优控制系统，可以满足达到给定温度且使用最少能量的要求。从下面的仿真结果可以看出，利用变分法求解得到的最优控制系统可很好的满足系统设定的要求，即终态达到初始设定值。





仿真结果如图

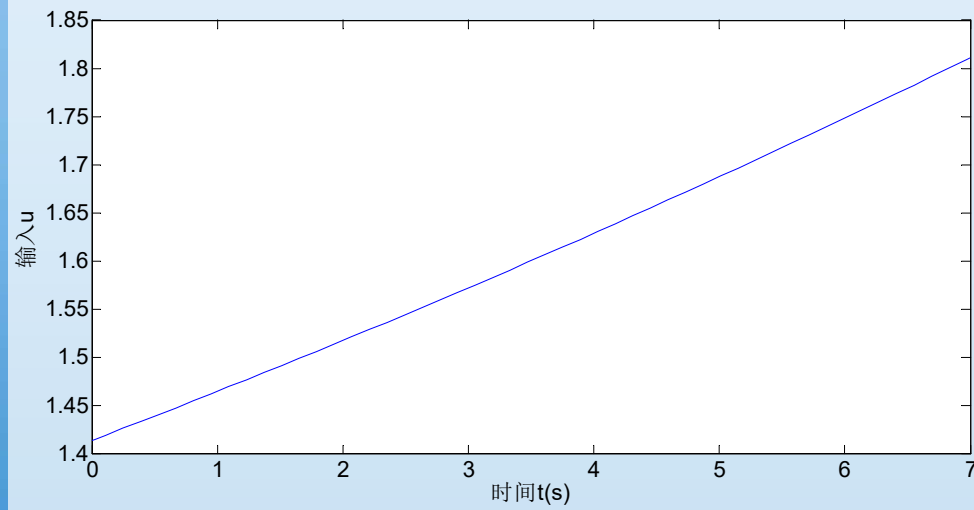


图 输入曲线

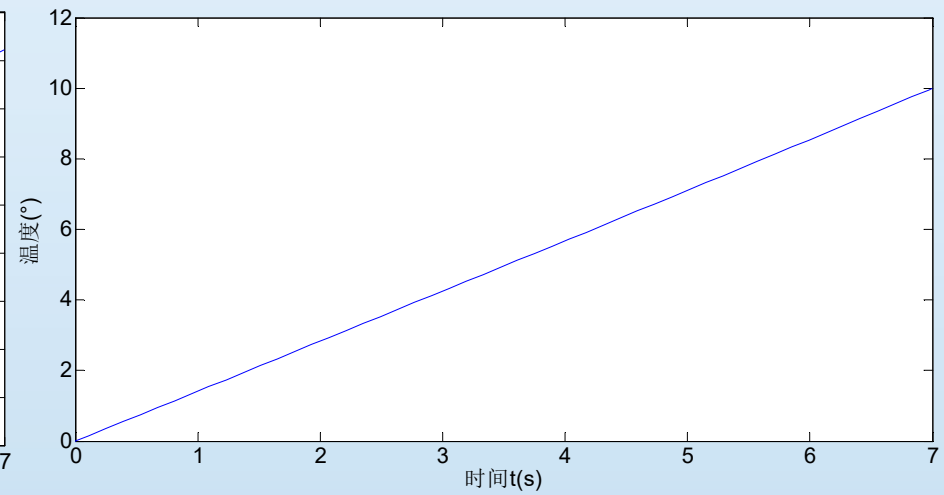


图  $x(t)$  曲线





## ❖ 实例二:

本节以火星探测器的最优小推力变轨问题作为例子，详细探讨变分法在最优控制求解中的应用。





按照轨道能量获取方式划分，火星探测轨道可分为：大推力变轨，小推力变轨，利用天体引力变轨的火星探测轨道等。其中，小推力变轨是指使用高比冲的推进系统，其产生的推力非常小，完成加速过程需要很长的时间。其优势在于能够有效的减少探测器的燃料消耗，这对于增大探测器的有效载荷、增加探测任务的科学回报具有重要意义。





本例着重探讨可供工程应用的火星探测最优小推力变轨问题。假设探测器从地球停泊轨道出发，使用小推力的电子推进发动机，推力加速度为 $10^{-2} \sim 10^{-4} m/s^2$ 量级。电子推进发动机的比冲较常规化学推进发动机的比冲要高出数倍。采用高比冲的电推进发动机，可以大大节省燃料。







在地球引力影响范围内，探测器以小推力发动机加速，假设在探测器获得到达火星的能量边界条件后发动机停止工作，让探测器以惯性飞行飞出地球引力影响范围。在探测器进入到太阳引力影响范围后，由于探测器已经具备了到达火星的能量，因此探测器将在太阳引力影响范围内惯性飞行。





当探测器到达火星引力影响范围内且被火星捕获后，探测器仍以惯性飞行，若此时不加以制动措施，探测器将飞出火星引力影响范围。为了使探测器进入火星环绕轨道，需要在一定的条件下再次开启小推力发动机。本应用实例探讨地球逃逸段的小推力变轨优化，火星捕获段变轨优化的分析与设计与地球逃逸段类似。





## 轨道优化的数学模型

探测器在地球逃逸段的三维转移轨道极坐标系动力学方程

为:

$$\begin{cases} \dot{r} = v_r \\ \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r \cos \phi} \\ \dot{\phi} = \frac{v_\phi}{r} \\ \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + a \cos \beta \sin \alpha \\ \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \tan \phi + a \cos \beta \cos \alpha \\ \dot{v}_\phi = -\frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta^2}{r^2} \tan \phi + a \sin \beta \end{cases}$$





其中,  $\mu$  是地球引力常数,  $r$  为探测器与地球间的距离,  $\theta$  和  $\phi$  是两个方位角,  $v_r$ 、 $v_\theta$  和  $v_\phi$  分别是径向、切向以及轨道面法线方向的速度分量,  $\alpha$  和  $\beta$  是两个推力方向角。  $a$  为推力加速度, 设  $T$  为发动机推力, 其幅值为常数,  $m_{LEO}$  为探测器在初始时刻 (地球停泊轨道) 时的质量,  $\dot{m}$  为燃料消耗率,  $t$  为时间, 则推力加速度  $a$  的表达式为:





$$a = \frac{T}{m_{LEO} - \dot{m}t}$$

由于地球和火星都在太阳的黄道平面内运动，所以三维轨道模型可以简化为平面轨道模型。假设探测器沿平面轨道运动，不考虑摄动的影响，简化后的探测器在地球引力影响范围内和火星引力影响范围内受控飞行的动力学方程组为：





$$\begin{cases} \dot{r} = v_r \\ \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} \\ \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + a \sin u \\ \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + a \cos u \end{cases}$$

其中， $u$ 为推力方向角（操纵角），即推力方向与当地水平线的夹角。





## 地球逃逸段小推力轨道优化与仿真

设系统状态方程形式为:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

写成向量形式为:

$$\dot{X} = f(t, X, U)$$

式中,  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $U(t) = (u_1, \dots, u_m)^T$







系统的初始状态已知，记为  $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^n$ ，而终值状态  $X(t_f) = X_{t_f} \in \mathbb{R}^n$  称为目标点，它可以给定（称为固定端点问题），也可以不给定（称为自由端点问题），或者受约束：

$N(t_f, X(t_f)) = 0$ ，这些均称为目标集M。





控制向量 $U(t)$ 可以满足一定的限制条件（如  $\alpha_i \leq u_i \leq \beta_i$   $i=1,2,\dots,m$ 等），也可以不受限制； $U(t)$ 的值域  $U \subset \mathbb{R}^m$   $U(t)$ 的每个分量作为 $t$ 的函数，可以是分段连续的。

本例的小推力轨道模型属于具有目标约束的最优控制问题，也就是说，末态 $X(t_f)$ 落在约束条件所规定的目标集上。





设  $x_1 = r$  ,  $x_2 = \theta$  ,  $x_3 = v_r$  ,  $x_4 = v_\theta$  , 则系统的状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = \frac{x_4}{x_1} \\ \dot{x}_3 = -\frac{\mu}{x_1^2} + \frac{x_4^2}{x_1} + a \sin u \\ \dot{x}_4 = -\frac{x_3 x_4}{x_1} + a \cos u \end{cases}$$





该状态方程为非线性微分方程，在本例中应用数值积分的方法进行计算。其中，
$$a(t) = \frac{T}{m_{LEO} - \dot{m}t}, 0 \leq t < t_{escape}$$

设初始时刻  $t_0 = 0$ ，由于初始时刻探测器在圆形的环绕轨道运动，所以初始条件为：





$$\begin{cases} x_1(t_0) = r_{LEO} \\ x_2(t_0) = 0 \\ x_3(t_0) = 0 \\ x_4(t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_{LEO}}} \end{cases}$$

其中， $r_{LEO}$  为初始低地球轨道地心半径（地球停泊轨道半径）。





设终端时间为 $t_f$ ，为了让探测器通过小推力发动机获得可以到达火星的能量，这里可以得到一个临界值，这个值就是可以让探测器能够在太阳影响球内的霍曼转移，设为  $\varepsilon_0 = 3.975 \text{ km}^2 / \text{s}^2$

。终端约束条件为：

$$G[x(t_f), t_f] = \frac{x_3^2(t_f) + x_4^2(t_f)}{2} - \frac{\mu}{x_1} - \varepsilon_0 = 0$$





对于推力幅值恒定的小推力探测器，燃料的消耗与发动机推力工作的时间成正比，所以对性能指标可以表达为推力作用时间最小，即

$$J = t_f$$

增广性能指标为：

$$J = \phi[x(t_f)] = v^* G[x(t_f), t_f] + t_f$$







哈密顿函数为：

$$H = \lambda_1 x_3 + \lambda_2 \frac{x_4}{x_1} + \lambda_3 \left( -\frac{\mu}{x_1^2} + \frac{x_4^2}{x_1} + a \sin u \right) + \lambda_4 \left( -\frac{x_3 x_4}{x_1} + a \cos u \right)$$

因为在这里控制量 $u$ 对所有的容许控制而言是无闭集约束，因此极值条件将和经典变分法的极值条件相同，即最优控制方程为

：

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_3 a \cos u - \lambda_4 a \sin u = 0$$





则最优推力控制角为:

$$u = \arctan\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right)$$

协态方程为:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{x_1^2} [\lambda_2 x_4 - \lambda_3 (\frac{2\mu}{x_1} - x_4^2) - \lambda_4 x_3 x_4] \\ \dot{\lambda}_2 = 0 \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_1 + \frac{\lambda_4 x_4}{x_1} \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{1}{x_1} (\lambda_2 + 2\lambda_3 x_4 - \lambda_4 x_3) \end{cases}$$





横截方程为:

$$\begin{cases} \lambda_1(t_f) = \frac{\mu}{x_1^2(t_f)} v \\ \lambda_2(t_f) = 0 \\ \lambda_3(t_f) = x_3(t_f) v \\ \lambda_4(t_f) = x_4(t_f) v \end{cases}$$

由于增广性能指标方程(11-32)没有积分项, 所以有:

$$H(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} = -1$$





进而得到：

$$v = \frac{-1}{x_3(t_f)a(t_f)\sin u(t_f) + x_4(t_f)a(t_f)\cos u(t_f)}$$

求解地球逃逸段优化模型的方法很多，只要通过初始控制变量  $u$ ，就很容易用迭代法来求解这个优化模型。本例采用迭代法来进行求解。



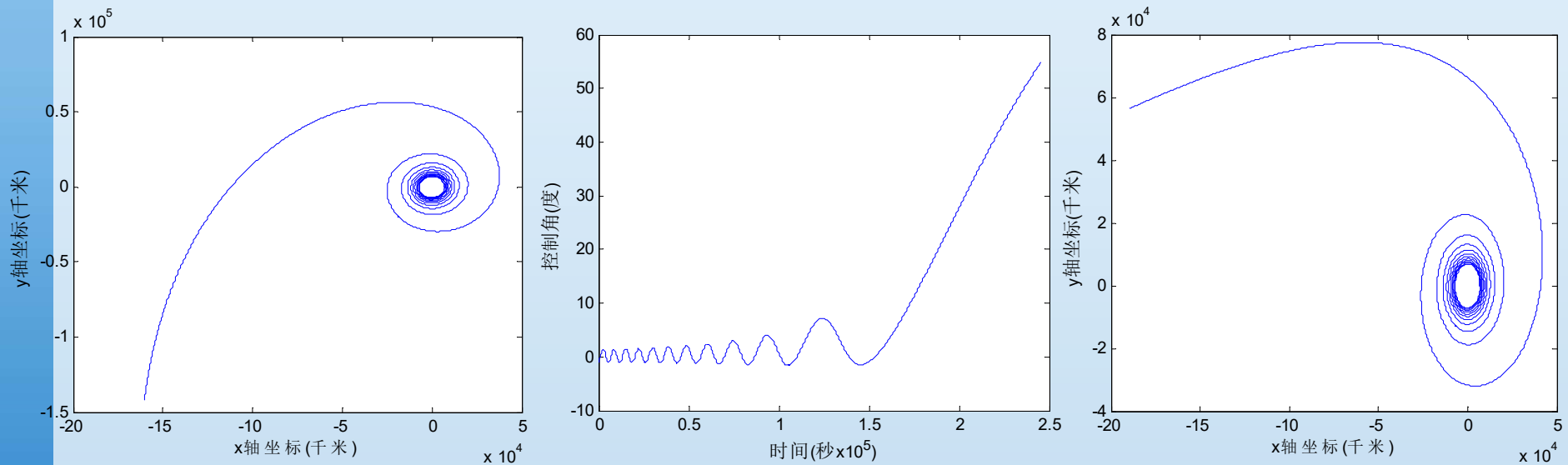


仿真的初始条件为：探测器从地球停泊轨道  $r_{LEO} = 6841km$   
上起飞；环绕轨道的初始质量  $m_{LEO} = 3\ 000kg$ ；发动机推  
力  $T = 0.09\ kN$ ；发动机燃料质量损失率  $0.000\ 005\ kg/s$ ；地  
球影响球半径  $r_{earth} = 929000km$





采用水平推力策略（控制角 $u=0$ ）时的地球逃逸段轨道图像如  
图所示。





为更清楚的看到优化后的逃逸轨道，我们在图中对未优化的逃逸轨道与经过优化后的逃逸轨道进行对比。在水平推力策略下，水平推力发动机工作时间为264 750s；发动机推力终点地心距为213 992 451m；终点速度3 416.9km/s；环绕圈数为11.615269圈；推力终点探测器质量为2 998.676kg，推力作用结束时探测器所获得的能量为3 974 966m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>。

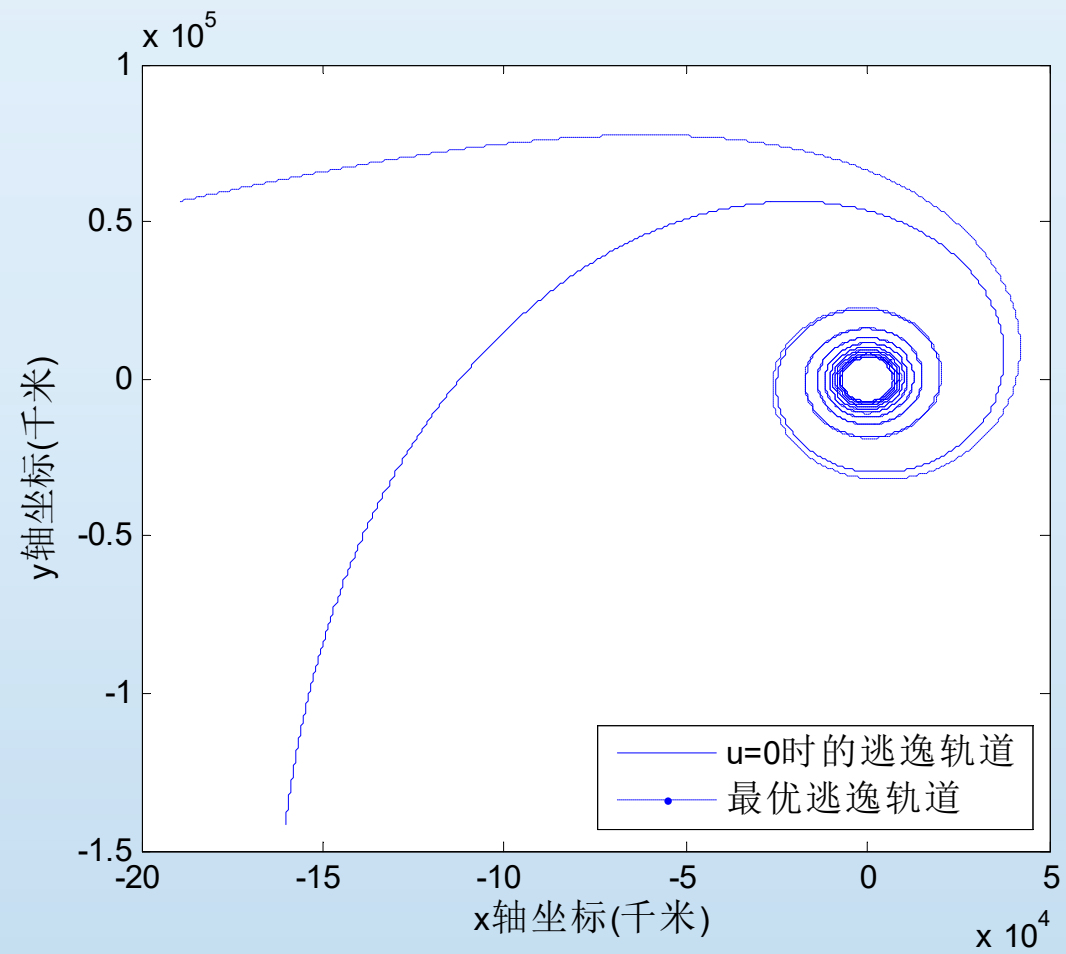






在优化后的推力方向作用下，发动机工作时间为244 281s；发动机推力终点的地心距为197 535 940m；终点速度为3462m/s；环绕圈数为11.45374圈；推力终点探测器质量为2 998.778kg，推力作用结束时探测器所获得的能量都是3 974 913m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>。







通过上述仿真图像和数据知在水平推力和优化推力作用结束时探测器所获得的能量都大约是 $3.975\text{km}^2/\text{s}^2$ ，这是因为它们的终点约束都是一样的能量约束所致。

通过在水平推力和最优控制推力分别作用下探测器仿真结果的比较可以看出，最优控制与水平推力控制相比，消耗能量和时间有很大的下降。





谢谢！