文章编号: 1000-6788(2004)02-0095-05

平滑系数自适应的二次指数平滑模型及其应用

黎锁平, 刘坤会
(北方交通大学理学院, 北京 100044)

摘要: 通过对传统指数平滑模型的分析, 提出了动态平滑参数的概念; 并由此建立了平滑权重对时间序列能够自适应的新的二次指数平滑新模型; 进而得到 Brown 单参数和 Holt 双参数两类线性趋势模型及其不同于传统模型的良好性质. 新模型使困绕指数平滑应用的初值难以选取、平滑参数适应性差及系统预测偏差等问题得到了较完整的解决. 预测实例表明新模型提高了预测精度, 并有很好的自适应性.

关键词: 指数平滑; 时间序列; 平滑参数; 自适应; 模型; 线性趋势
中图分类号: O213　　**文献标识码**: A

Quadric Exponential Smoothing Model with Adapted Parameter and Its Applications

LI Suo-ping, LIU Kun-hui
(School of Science, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: After analyzing traditional quadratic exponential smoothing model, this paper puts forward the concept of dynamic smoothing parameter and sets sup the new model which is automaticaly adapted to the given time series. Furthermore, we deduce two kinds of linear trend models with Brown single parameter and Holt double parameter, and the good characters which is different with the traditional model. So some questions, i.e., the smoothing parameter is static and determined by one's experiences, and the smoothing initial value is difficulty to determine and leads to a deviation easily, are resolved completely. Forecasting example shows that the new model is improved much in precision and better in adaptation.

Key words: exponential smoothing; time series; smoothing parameter; adapted model; linear trend

1 引言

"预测方法和技术的应用研究"课题研究结果表明, 简单易行的指数平滑法是仅次于回归预测法应用最为广泛的预测方法之一, 而且已成为组合预测中的首选方法[1,2]. 其优良的性能、很强的适宜性奠定了它在经典预测、控制模型中的重要地位. 时间序列指数平滑法有两个显著特点: 一是利用了全部历史数据和相关信息; 二是遵循"厚近薄远"的原则加权平均、修匀数据. 如此得到的预测模型具有抵御或减弱异常数据影响的功能, 从而使时间序列所包含的历史规律性能较显著地体现出来[3]. 实际应用中, 平滑参数 α 的取值对平滑效果有很大影响. 当 α 较小时, 模型的平滑能力较强; 当 α 较大时, 模型对时间序列变化的反应速度较快. 传统的指数平滑中, 人们对 α 值的选择更多的还是依赖于经验. 通常认为当时间序列波动不大时, α 可取在 0.1- 0.3 之间, 以加重原来预测值的权重; 当时间序列波动较大时, α 可取在 0.6- 0.8 之间, 以加重新预测值的权重. 在难以判断时, 则采用几个不同的 α 值反复试算, 比较不同系数选择下的预测结果加以确定[3]. 这样的 α 值既缺乏准确性, 并且 α 自身也是静态的, 即平滑参数 α 本身对时间序列在不同时段所呈现出的变化规律不具备自适应能力. 这显然对预测精度有很大的影响. 文章[3- 6]虽主要针对 α 的选取, 以预测误差平方和 SSE 或均方误差 MSE 或平均绝对误差 MAE 为最小, 提出了一些改进 α 的

收稿日期: 2003-02-23

作者简介: 黎锁平(1965-), 男, 甘肃合水人, 博士研究生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 随机控制、随机优化及智能计算等; 刘坤会(1947-), 男, 河北南皮人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 随机控制等

方法. 但这些结果大都需要通过大量的运算才能得到α的取值, 且仍未改变参数α的静态特性. 因此有必要从自适应的角度对指数平滑法进行更深入的研究以解决上述问题.

本文通过对传统指数平滑模型的分析, 提出了动态平滑参数的概念; 并由此建立了平滑权重对时间序列能够自适应的二次指数平滑新模型; 进而得到了其两类线性趋势模型及其不同于传统模型的良好性质. 实例预测也表明新模型提高了预测精度, 并有很好的自适应性.

2 动态平滑参数 α(t) 的引入

设 $\{Y_t\}$ 为时间序列及其观测值, $S_t^{(1)}$ 为 $\{Y_t\}$ 的一次指数平滑值. 则传统的一次指数平滑模型为

$$S_t^{(1)} = \alpha Y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(1)} \tag{1}$$

式中 α 即平滑系数, 为 0 - 1 间的定常值, 属于静态参数.

在模型(1)中, α值一旦确定, 则计算过程中α值始终为一常量. 定常的α不随 t 而变, 这样当原始序列在不同时段起伏变化不同时, 那么既便为较前时期的数据序列找到了合适的α, 则此α对较后时期的平滑、预测也不一定是合适的. 而且对大多数的时间序列, 特别是复杂的经济系统, 随机性使许多问题的观测值序列根本不存在一个自始至终都能够适用的平滑系数. 因此, 传统的指数平滑模型用于预测, 存在着明显的预测偏差, 甚至于严重失真. 这样放弃一个固定不变的α值, 构造一个取值随时段不同而能够自动调整的 $\alpha(t)$ 即成为解决问题的关键. 这种具备自适应能力的一次指数平滑模型可以设定为:

$$S_t^{(1)} = \alpha(t) Y_t + (1-\alpha(t)) S_{t-1}^{(1)} \tag{2}$$

其中 $\alpha(t)$ 称为自适应的平滑参数. 类似的模型在文[7, 8]中涉及过, 但并未进行具体讨论. 以下确定 $\alpha(t)$ 的具体形式, 进而得到模型(2).

首先递推(1)式, 可得到其展开形式

$$S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{t} \alpha(1-\alpha)^{t-i} Y_i + (1-\alpha)^t S_0^{(1)}$$

当令平滑初值 $S_0^{(1)} = 0$ 时, 上式又化为

$$S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{t} \alpha(1-\alpha)^{t-i} Y_i \tag{3}$$

式(3)的各项权重系数之和为 $\sum_{i=1}^{t} \alpha(1-\alpha)^{t-i} = 1-(1-\alpha)^t \neq 1$. 对(3) 进行归一化处理, 若记 $S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{t} \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^t}(1-\alpha)^{t-i} Y_i$, 则此时权重系数之和 $\sum_{i=1}^{t} \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^t}(1-\alpha)^{t-i} = 1$. 由此我们即可定义模型(2) 中自适应的平滑参数 $\alpha(t) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^t}$.

显然 $\alpha(t)$ 是时间 t 的函数, 满足对其时变性的要求. 并且当 $0 < \alpha < 1$, $t > 1$ 时, $\alpha(1) = 1$, $0 < \alpha(t) < 1$, $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha$. 即 $\alpha(t)$ 满足平滑参数的条件, 是时间序列 $\{Y_t\}$ 具有自适应能力的动态平滑参数. 为了与传统指数平滑的符号相匹配, 以下记 $\varphi_t = \alpha(t)$, 并给出如下具有自适应特性的指数平滑的建模方法和性质.

3 平滑系数自适应的指数平滑模型的建模及性质

在指数平滑法中, 基于自适应特性的最基本的平滑模型仍然是一次和二次平滑模型. 具体形式为

定理 1 设 α (0 < α < 1) 为给定平滑参数的初始值, 则时间序列 $\{Y_t\}$ 基于自适应平滑参数 $\varphi_t = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^t}$ 的一次指数平滑新模型为

$$S_t^{(1)} = \varphi_t Y_t + (1-\varphi_t) S_{t-1}^{(1)} \tag{4}$$

证明 将式(3)右端除以 $[1-(1-\alpha)^t]$ 进行归一化处理, 并记 $S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{t} \frac{\alpha(1-\alpha)^{t-i}}{1-(1-\alpha)^t} Y_i$, 则

$$
\begin{aligned}
S_t^{(1)} &= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^t}Y_t + \sum_{i=1}^{t-1}\frac{\alpha(1-\alpha)^{t-i}}{1-(1-\alpha)^t}Y_i = \varphi_t Y_t + \sum_{i=1}^{t-1}\frac{\alpha(1-\alpha)^{t-i-1}(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)^t}Y_i \\
&= \varphi_t Y_t + \sum_{i=1}^{t-1}\frac{(1-\alpha)[1-(1-\alpha)^{t-1}]}{1-(1-\alpha)^t}\frac{\alpha(1-\alpha)^{t-i-1}}{1-(1-\alpha)^{t-1}}Y_i \\
&= \varphi_t Y_t + \frac{(1-\alpha)[1-(1-\alpha)^{t-1}]}{1-(1-\alpha)^t}\sum_{i=1}^{t-1}\frac{\alpha(1-\alpha)^{t-i-1}}{1-(1-\alpha)^{t-1}}Y_i \\
&= \varphi_t Y_t + \left[1-\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^t}\right]\sum_{i=1}^{t-1}\frac{\alpha(1-\alpha)^{t-i-1}}{1-(1-\alpha)^{t-1}}Y_i
\end{aligned}
$$

上式中 $\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^t}=\varphi_t$, $\sum_{i=1}^{t-1}\frac{\alpha(1-\alpha)^{t-i-1}}{1-(1-\alpha)^{t-1}}Y_i = S_{t-1}^{(1)}$ 代入后即得 $S_t^{(1)} = \varphi_t Y_t + (1-\varphi_t)S_{t-1}^{(1)}$.

设 $S_t^{(2)}$ 为时间序列 $\{Y_t\}$ 的二次指数平滑值, 则将传统的二次指数平滑模型 $S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(2)}$ 同上述过程一样作归一化处理, 并引入自适应平滑参数 $\alpha(t)$ 平滑递推后即可得如下的二次指数平滑新模型.

定理 2　设 $\alpha\ (0<\alpha<1)$ 为给定平滑参数的初始值, 则时间序列 $\{Y_t\}$ 基于自适应平滑参数 φ_t 的二次平滑新模型为

$$S_t^{(2)} = \varphi_t S_t^{(1)} + (1-\varphi_t)S_{t-1}^{(2)} \tag{5}$$

定理 1、定理 2 表明: 无论是一次, 还是二次指数平滑, 新模型中的平滑权重并非一成不变, 每次平滑时 $S_t^{(1)}$, $S_t^{(2)}$ 都自适应地采用了不同的加权值. 这是新模型对传统模型所做的一个根本性的改进.

将模型(4)、(5) 递推展开后, 易得新模型一个非常有用的性质, 即

定理 3

$$S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{t}\left[\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]Y_{t-i+1} \tag{6}$$

$$S_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{t}\left[\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]S_{t-i+1}^{(1)} \tag{7}$$

且 $\sum_{i=1}^{t}\left[\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]=1$, $t>1$. 其中 $\varphi_i = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^i}$. (另约定 $\prod_{j=t+1}^{t}(1-\varphi_j)=1$).

定理 3 表明: ①新模型中, 一、二次指数平滑值 $S_t^{(1)}$, $S_t^{(2)}$ 中各项系数(即权重) 满足: $1>\varphi_t>\varphi_{t-1}(1-\varphi_t)>\varphi_{t-2}(1-\varphi_t)(1-\varphi_{t-1})>\cdots>\varphi_1(1-\varphi_t)(1-\varphi_{t-1})\cdots(1-\varphi_2)>0$, 且权重之和为 1. 这正是对指数平滑"厚近薄远"基本思想的保留; ②应用中, 新的平滑模型不需要采用估计的平滑初值 Y_0 或 $S_0^{(1)}$ 而可以直接对时间序列 $\{Y_t\}$ 或 $\{S_t^{(1)}\}$ 进行平滑. 因此模型(4) 和(5) 不仅没有改变指数平滑法的基本特征, 而且避免了必须选取平滑初值的弊端, 解决了初值难以确定的问题, 更充分地利用了时间序列自身的信息.

4　两类指数平滑线性趋势预测新模型

在基本指数平滑公式(4)、(5) 的基础上, 我们即可对具有线性变化趋势的时间序列 $\{Y_t\}$ 建立具有自适应平滑参数 φ_t 的线性预测模型: Brown 单参数线性指数平滑模型和 Holt 双参数线性指数平滑模型.

定理 4　设 $\alpha\ (0<\alpha<1)$ 为给定平滑参数的初始值, 则时间序列 $\{Y_t\}$ 基于自适应平滑参数 φ_t 的 Brown 线性指数平滑预测模型为

$$\hat{Y}_{t+T} = a_t + b_t T\ (T=1,2,\cdots);$$

$$a_t = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)},\quad b_t = \frac{\varphi_t}{1-\varphi_t}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)})$$

证明　采用矩量分析法证明. 首先对(6) 式两边取期望得

$$
\begin{aligned}
E[S_t^{(1)}] &= \sum_{i=1}^{t}\left[\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]E[Y_{t-i+1}] \\
&= \sum_{i=1}^{t}\left[\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right][a_t - b_t(i-1)]
\end{aligned}
$$

$$= a_t - \sum_{i=1}^{t}\left[(i-1)\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]b_t$$

$$= a_t - \frac{1-\varphi_t}{\varphi_t}b_t$$

其中 $\sum_{i=1}^{t}\left[\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]=1$, $\sum_{i=1}^{t}\left[(i-1)\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]=\frac{1-\varphi_t}{\varphi_t}$.

而(7)式中 $S_{t-i+1}^{(1)}=\varphi_{t-i+1}Y_{t-i+1}+(1-\varphi_{t-i+1})S_{t-i}^{(1)}=\sum_{j=0}^{t-i}\left[\varphi_{t-i+1-j}\prod_{k=t-i+2-j}^{t-i+1}(1-\varphi_k)\right]Y_{t-i+1-j}$, 约定 $\prod_{k=t-i+2}^{t-i+1}(1-\varphi_k)=1$

所以

$$E[S_{t-i+1}^{(1)}]=\sum_{j=0}^{t-i}\left[\varphi_{t-i+1-j}\prod_{k=t-i+2-j}^{t-i+1}(1-\varphi_k)\right]E[Y_{t-i+1-j}]$$

$$=\sum_{j=0}^{t-i}\left[\varphi_{t-i+1-j}\prod_{k=t-i+2-j}^{t-i+1}(1-\varphi_k)\right][a_t-b_t(i-1+j)]$$

$$=a_t-\sum_{j=0}^{t-i}\left[(i-1+j)\varphi_{t-i+1-j}\prod_{k=t-i+2-j}^{t-i+1}(1-\varphi_k)\right]b_t$$

$$=a_t-(i-1)b_t-\frac{1-\varphi_t}{\varphi_t}b_t$$

对(7)式两边取期望, 并将上式的结果代入得

$$E[S_t^{(2)}]=\sum_{i=1}^{t}\left[\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]E[S_{t-i+1}^{(1)}]$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\left[\varphi_{t-i+1}\prod_{j=t-i+2}^{t}(1-\varphi_j)\right]\left[a_t-(i-1)b_t-\frac{1-\varphi_t}{\varphi_t}b_t\right]$$

$$=a_t-\frac{2(1-\varphi_t)}{\varphi_t}b_t$$

因为随机变量的数学期望是随机变量的最佳估计值, 所以可用 $S_t^{(1)}$, $S_t^{(2)}$ 代替 $E[S_t^{(1)}]$, $E[S_t^{(2)}]$, 从而有

$$S_t^{(1)}=a_t-\frac{1-\varphi_t}{\varphi_t}b_t,\quad S_t^{(2)}=a_t-\frac{2(1-\varphi_t)}{\varphi_t}b_t$$

由上述两式即可解得

$$a_t=2S_t^{(1)}-S_t^{(2)}$$

$$b_t=\frac{\varphi_t}{1-\varphi_t}(S_t^{(1)}-S_t^{(2)})$$

定理 5 设 α、ψ $(0<\alpha<1)$ 为两个给定平滑参数的初始值, 则时间序列 $\{Y_t\}$ 基于自适应平滑双参数 φ_t 和 ψ_t 的 Holt 线性指数平滑预测模型为

$$\hat{Y}_{t+T}=S_t+P_tT$$

$$S_t=\varphi_tY_t+(1-\varphi_t)(S_{t-1}+P_{t-1})$$

$$P_t=\psi_t(S_t-S_{t-1})+(1-\psi_t)P_{t-1}$$

其中 $\psi_t=\dfrac{\psi}{1-(1-\psi)^t}$, φ_t 同前.

Holt 法的主要模型实际上是指数平滑基本公式的具体应用, 它是对时间序列的水平和趋势值分别进行平滑, 然后用这两次平滑的结果进行线性外推预测. 由于 Holt 法比 Brown 法多用了一个参数, 因此它比 Brown 法更具有灵活性, 尤其是在自动地用于大量时间序列预测时更具优越性. 如当一个序列不包含长期趋势时, Holt 法可通过参数 ψ_t 的选择使 P_t 为一个接近于 0 的数, 从而使模型接近于自适应简单指数平滑模型. 而 Brown 单参数法则无法进行这种调节, 对所有序列都只能按线性趋势进行预测. 因此实际运

用中 Holt 法的预测精度一般高于 Brown 法. 另外 Holt 法还不需要用二次指数平滑. 鉴于结论的直观性和篇幅所限, 定理 5 的详细证明就不再列出.

5 预测实例

作为新建模型的应用, 我们以国家统计局公布的 1990 - 2000 年社会消费品零售总额统计资料为基础(原始数据见: 国家统计局《中国统计摘要 2001》P146, 中国统计出版社), 对该时间序列进行了建模预测. 首先通过散点图可判定时间序列近似成线性变化趋势, 因此可以建立线性指数平滑预测模型. 所建不同模型及预测结果见表 1. 可以看到: 基于自适应平滑参数的新模型, 无论是 Brown 法, 还是 Holt 法, 模型平均绝对误差 MAE 均小于传统指数平滑模型的误差, MAE 分别减少了 7.5% 和 12.2%. 这说明本文所建两类新模型在精度和可靠性方面都有较大提高. 所建模型②和③可用于社会消费品零售总额的线性预测.

6 结束语

本文通过严密的数学分析, 针对传统模型的缺陷, 建立平滑权重对时间序列能够自适应的一次和二次指数平滑新模型, 进而得到了时间序列两类线性趋势新模型及其不同于传统模型的良好性质. 实例预测也表明新模型提高了预测精度, 并有很好的自适应性. 新模型使困绕指数平滑应用的平滑初值难以选取、平滑参数适应性差及系统预测偏差等问题得到了较完整的解决. 借助 EXCEL、SAS 等软件, 通过适当的编程会使应用方便易行. 当然我们还可以特定的误差指标(如平方和误差 SSE)最小为目标, 通过构造优化算法, 进一步建立优化模型. 对此我们将再做进一步的研究.

表 1　不同模型预测结果比较　　单位: 亿元

对照项 / 模型类别	各类平滑参数	线性指数平滑预测方程 $\hat{Y}_{t+T} = a_t + b_t T$ (亿元)	模型平均绝对误差 MAE	2001 年预测值 $\hat{Y}_{12}$
① 传统指数平滑模型	$\alpha = 0.6$	$\hat{Y}_{11+T} = 34076.2 + 2548.8T$	1146.9	36625.0
② Brown 线性指数平滑预测模型	$\varphi_t = \dfrac{0.6}{1-(0.4)^t}$	$\hat{Y}_{11+T} = 34389.5 + 2536.2T$	1061.5	36926.3
③ Holt 双参数线性指数平滑模型	φ_t 同上, $\psi_t = \dfrac{0.3}{1-(0.7)^t}$	$\hat{Y}_{11+T} = 34298.3 + 2550.2T$	1007.2	36848.5

参考文献:

[1] "预测方法和技术的应用研究"课题组. 中国预测技术发展研究[J]. 预测, 1991, (5): 10-17.

[2] 高仁祥, 张世英, 刘豹. 非线性经济建模与预测新思路探讨[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(7): 7-11.

[3] 张忠平. 指数平滑法[M]. 北京: 中国统计出版社, 1996. 36-49.

[4] 徐大江. 预测模型参数的指数平滑估计法及其应用的进一步研究[J]. 系统工程理论与实践, 1992, 12(2): 25-37.

[5] 唐炎森. 指数平滑预测公式与平滑系数[J]. 统计与信息论坛, 1998, 1: 38-43.

[6] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. 77-79.

[7] Bonsdorff H. A comparison of the ordinary and a varying parameter exponential smoothing[J]. J Appl Prob, 1989, 27, 784-792.

[8] Vapnik V N. Statistical Learning Theory[M]. New York: J Wiley, 1998. 171-178.