高等数学导论

（第二版）（下册）

中国科学技术大学高等数学教研室　编

中国科学技术大学出版社

2004·合肥

高等数学导论

（第二版）（下册）

中国科学技术大学高等数学教研室　编

*

中国科学技术大学出版社出版发行

（安徽省合肥市金寨路96号，邮编：230026）

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本：850×1168/32　印张：9.5　字数：243千

1989年8月第1版　1996年8月第2版

2004年6月第5次印刷　印数：25501—28500册

ISBN 7-312-00687-6/O·164　定价：9.00元

内 容 提 要

本“导论”是中国科学技术大学非数学专业通用的讲义，是在35年的使用过程中，经过不断的修订、充实而成的．与同类书相比，其广度有所拓宽，论证定理、公式逻辑严谨，编排内容循序渐进，阐述概念联系实际，深入浅出．为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题，以及习题和总复习题．

本“导论”分三册出版．上册讲述单变量函数微积分，中册讲述空间解析几何、多变量函数微积分，下册讲述级数与常微分方程．本书另配学习辅导一册．

本“导论”可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学．

目　　次

9 无穷级数

客观世界是千变万化的，仅用初等函数难以完全描述它的各种复杂的数量关系，这就要求人们去构造一些新的函数. 由于初等函数有限次运算仍是初等函数，为了产生新函数，则必考虑无限次运算，而最简单的运算是加法，把无穷多个初等函数

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

叠加起来，可能产生新的非初等函数

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

无穷级数是构造新函数的一个重要途径. 本章首先研究数项级数，它是级数理论的基础；然后讨论函数项级数，并引出它的特殊形式幂级数. 最后讨论如何把函数展开成幂级数.

9.1 数项级数

9.1.1 无穷级数的基本概念

设有数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，把它们依次相加，得形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

称为**无穷级数**，其中 a_n 称为级数的一般项或通项.

这里的相加仅仅是形式上的，因为无穷多个数无法逐一相加求和，那么无穷个数相加的含义是什么呢？我们给出下面的

定义 无穷级数(1)的前 n 项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为这级数的第 n 个部分和；如果这些部分和构成的数列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

有有限的极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

则称级数(1)收敛，其和为 S. 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限，就说级数(1)是发散的.

由此可见，无穷级数的收敛问题归结为其前 n 项的和构成的数列 $\{S_n\}$ 的极限存在问题. 反之，研究数列 $\{a_n\}$ 的极限存在问题也可以化为级数

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots$$

的收敛问题. 数列与级数之间存在的这种密切关系，使我们能够应用已经知道的有关数列的知识去建立无穷级数的相应理论.

例 1 最简单的无穷级数是等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

如果公比 $|q| \neq 1$，则级数的部分和为

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$，因此这时级数收敛，其和 $S = \dfrac{1}{1-q}$；当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，这时级数发散；当 $q = 1$ 时，级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \tag{2}$$

其部分和 $S_n = n$，当 $n \to \infty$ 时，极限为无穷，故级数(2)发散. 当 q

$=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{3}$$

其部分和

$$S_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ 1 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

当 $n \to \infty$ 时，没有极限，故级数(3)发散. 综上所述，等比数列 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 只有当 $|q| < 1$ 时才是收敛的.

例 2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} + \cdots$$

的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 发散.

研究无穷级数，最基本的问题是判断它的敛散性，即收敛或发散性. 只有在级数收敛的情况下，讨论它的求和问题才有意义，下面给出收敛的无穷级数的简单性质.

性质 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证 设收敛级数的部分和 S_n 的极限为 S，由于 $a_n = S_n - S_{n-1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

由此可见，如果级数的通项 a_n 不趋于零，则它一定发散. 可以用这个性质判断一些级数的发散性. 例如：

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散，这是因为

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ 发散，这是因为

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1 \neq 0$$

必须注意，通项趋于零仅是级数收敛的必要条件，并不充分；有的级数即使通项趋于零仍可能是发散的，如例 2，它的通项 $\ln\frac{n+1}{n}$ 趋于零而级数却是发散的.

无穷级数的和既然是有限和的极限，因此具有一些有限和的性质.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 也收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

其中 c 是任意常数.

证 我们证明第二个等式，命

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$$

显然有 $S_n = A_n + B_n$，由假定 A_n, B_n 都收敛，因此 S_n 也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

另一等式可同法证明.

性质 3 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项，不影响级数的敛散性.

证 设把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 去掉前 k 项后得另一级数

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$$

用 S_n 表示第一个级数的前 n 项的部分和，用 σ_{n-k} 表示第二个级数前 $n-k$ 项的部分和，显然有

$$S_n - \sigma_{n-k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

而 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 是一与 n 无关的常数，故当 $n \to \infty$ 时，数列 S_n 与 σ_{n-k} 具有相同的敛散性，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ 有相同的敛散性. 同样可以证明，加上有限项也不影响级数的敛散性.

性质 4 收敛级数的项加括号后所成的新级数仍收敛，且其和不变.

证 设原级数的部分和数列为

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \tag{4}$$

它有极限 S.

现将原级数的项加括号后得新级数

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \tag{5}$$

显然级数(5)的部分和数列为

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}, \cdots$$

它是数列(4)的一个子数列，因而与(4)有相同的极限 S.

由此得知，若加括号后所成的级数发散，则原级数必发散. 但必然注意，这个命题的逆命题是不成立的. 即若级数(5)收敛，不能

断言原级数一定收敛，如级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 是发散的，但把它的项两两结合，便得一收敛级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

9.1.2 正项级数

如何判断一个级数是否收敛呢？先讨论正项级数，它是最基本的级数，与一般级数的敛散问题有密切关系.

如果 $a_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$ 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数. 正项级数的部分和构成一单调增数列

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots$$

由此可得

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

证 必要性显然，下证充分性.

设 $\{S_n\}$ 有界，则因 $\{S_n\}$ 是单调增数列，故 $\{S_n\}$ 有极限，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

由于正项级数的部分和 $\{S_n\}$ 是单调增数列，它只有两种可能，若 S_n 有界，则有有限的极限；若 S_n 无界，则必发散于正无穷.

例 1 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

证 因为级数的部分和是有界的，

$$S_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\leqslant 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$$=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=3-\frac{1}{n}<3$$

所以所给级数是收敛的. 稍后就会知道,它的和就是自然对数的底 e.

应用定理 1 直接证明某些正项级数的部分和有界通常是不容易的,但可由定理 1 推导出较方便的比较判断法:只须用一个已知敛散的级数和要判别的级数作比较便能得出结论.

定理 2(比较判别法) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$,如果从某项开始有不等式

$$a_n \leqslant b_n \quad (n > N)$$

那么

(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

(ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

证 因为调换级数前面有限项不改变级数的敛散性,故不妨设不等式 $a_n \leqslant b_n$ 对一切 n 成立,命

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

显然有

$$A_n \leqslant B_n$$

(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则 B_n 有界,因而 A_n 也有界,故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则 A_n 无界. 由上不等式知 B_n 无界,故 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

发散.

例 2 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证 利用不等式

$$x>\ln(1+x)\quad(x>0)$$

故对任意自然数 n 有

$$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

由 9.1.1 例 2 知，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例 3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 称为 p-级数，讨论它的敛散性.

解 前例已证明，当 $p=1$ 时，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 当 $p<1$ 时，由于

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

据比较判别法，当 $p\leqslant 1$ 时原级数发散.

当 $p>1$ 时，取级数的第 2^k-1 个部分和，并由第二项起依次分段加括号，每段分别有 $2,2^2,2^3,\cdots,2^{k-1}$ 项，即

$$\begin{aligned}S_{2^k-1}=&1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots\\&+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^p}\right)\\<&1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots\\&+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k-1})^p}\right)\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}}$$

而后者的和显然不超过公比为 $\frac{1}{2^{p-1}}$ 的等比级数的和

$$M = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$$

因此 S_{2^k-1} 有上界 M，于是不难推知级数的任意部分和也以 M 为上界，所以当 $p > 1$ 时级数收敛.

例 4 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n!}$ 收敛.

证 因为对任意自然数 n 有

$$\frac{(n!)^2}{2n!} = \frac{n!}{2^n \cdot (2n-1)!!} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

而等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，所以原级数收敛.

例 5 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 是发散的.

证 因为当 $n \geqslant 2$ 时有不等式

$$\ln n < n$$

推得

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

但调和级数是发散的，故原级数发散.

作为比较判别法的推论，再来导出更为适用的比较判别法的极限形式.

定理 3 设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \neq 0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$，那么

(i) 若 $0<A<+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散；

(ii) 若 $A=0$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；

(iii) 若 $A=+\infty$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

证 (i)当 $0<A<+\infty$，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$，存在 N，当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|<\frac{A}{2}$$

即

$$\frac{A}{2}b_n<a_n<\frac{3A}{2}b_n$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则从上面的右半不等式得知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；如果 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则从左半不等式得知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散，因面二者同敛散.

(ii) 当 $A=0$，取 $\varepsilon=1$，存在 N，当 $n>N$ 时

$$0<\frac{a_n}{b_n}<1$$

即

$$a_n<b_n$$

故当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

同理证明(iii).

例 6 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}}=1$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 是收敛的，故原级数收敛.

例 7 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 是发散的，这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1$$

由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散推知原级数也发散.

从上几例可以看出，用比较判别法判别一个级数的敛散性时，常取 p-级数作比较，这说明 p-级数在研究级数的敛散性上有重要作用.

同时还看到，只要 $p>0$，都有 $\frac{1}{n^p}\to 0$，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 只有 $p>1$ 时才收敛；这说明 $a_n\to 0$ 只是级数收敛的必要条件，而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛取决于 $a_n\to 0$ 的速度.

如果把已给的级数与等比级数进行比较，立即得到在应用上极为方便的柯西判别法与达朗贝尔判别法.

定理 4(Cauchy 判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一正项级数，若从某项起有

(i) $\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(ii) $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 (i) 设当 $n > N$ 时有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$，即

$$a_n \leqslant q^n$$

由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(ii) 因为 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$，知 $a_n \geqslant 1$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

在实际判别级数的敛散时，常用的是这个判别法的极限形式.

定理 4′（Cauchy 判别法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 ·正项级数，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$，则

(i) 当 $q < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(ii) 当 $q > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 (i) 当 $q < 1$ 时，可取正数 ε 充分小，使得 $q + \varepsilon < 1$，于是当 n 充分大时，有

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$$

由定理 4 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(ii) 当 $q > 1$ 时，则可取定这样小的正数 ε，使得 $q - \varepsilon > 1$，于是当 n 充分大时有

$$\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$$

由定理 4 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 8 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$是收敛的.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$$

例 9 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$是发散的.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1$$

必须注意,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$,则对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性不能下任何断言. 例如,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的,但都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

定理 5(D'Alembert 判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一正项级数,若从某项开始有

(i) $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q<1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(ii) $\frac{a_{n-1}}{a_n}\geqslant 1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证 (i) 由假定,当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}\leqslant q,\ \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\leqslant q,\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant q$$

把这些不等式乘起来得

$$\frac{a_n}{a_N}\leqslant q^{n-N}$$

即

$$a_n \leqslant \frac{a_N}{q^N} q^n$$

由于 $\frac{a_N}{q^N}$ 是与 n 无关的常数，且 $q < 1$，由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(ii) 由假定，当 $n \geqslant N$ 时，$a_{n+1} \geqslant a_n$ 即 a_n 单调增. 故 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

同样这个判别法的极限形式更适用.

定理 5′（D′Alembert 判别法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，且有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$，则

(i) 当 $q < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(ii) 当 $q > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明方法与定理 4′完全类似，就不在此叙述了. 但同样应注意，如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$，则对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性也不能下任何断言. 仍以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为例，前者是发散的，后者是收敛的，但都有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

例 10 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$（x≥0）的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{x}{\mathrm{e}}$$

故级数当 $x>\mathrm{e}$ 时发散，而当 $0\leqslant x<\mathrm{e}$ 时收敛.

例 11 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ $(x>0)$ 的敛散性.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

因此原级数对任何 $x>0$ 都收敛.

Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法使用起来比较方便，但适用面都不算宽，因为它们只能判断一些比某个几何级数收敛得还快的级数. 在判断级数的敛散性时可考虑柯西积分判别法.

定理 6(Cauchy 积分判别法) 设 $f(x)$ 是定义在 $x\geqslant 1$ 上非负不增的连续函数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+\cdots$$

与积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

证 由于 $f(x)$ 是不增的，故当 $k\leqslant x\leqslant k+1$ 时有

$$f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k)\quad (k=1,2,\cdots)$$

从 k 到 $k+1$ 积分后得

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)$$

将这些不等式对 k 求和有

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \int_{1}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

如果$\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，则从上面左半不等式知，$\sum_{k=1}^{n} f(k+1)$有界，因而$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$收敛；如果$\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散，则从上面右半不等式得知$\sum_{k=1}^{n} f(k)$无界，因而级数$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$发散.

利用柯西积分判别法. 再来考虑p-级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$的敛散性，这时通项$f(n)=\frac{1}{n^p}$；显然$f(x)=\frac{1}{x^p}$在$x \geqslant 1$上非负不增，且积分

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p \leqslant 1 \end{cases}$$

所以p-级数当$p > 1$时收敛，当$p \leqslant 1$时发散.

例 12 证明级数$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$当$\alpha > 1$时收敛，$\alpha \leqslant 1$时发散.

证 据柯西积分判别法，这级数与积分$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{\alpha} x}\mathrm{d}x$同敛散. 而

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{\alpha} x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{当 } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{当 } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

所以原级数当$\alpha > 1$时收敛，$\alpha \leqslant 1$时发散.

9.1.3 交错级数

在研究一般的变号级数以前，先考察其特殊的一种——交错级数，即它的各项是正负相间的. 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

其中 $a_n > 0\ (n = 1,2,\cdots)$. 对于这类级数，除了收敛的必要条件通项 $a_n \to 0$ 外，还要补充什么条件才能保证它收敛呢？我们有下面的

定理（莱布尼兹 Leibnitz 判别法） 如果 a_n 单调减趋于 0，那么交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

证 考察级数的前 $2n$ 项的部分和

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

由于 a_n 单调减，$a_{2n-1} - a_{2n} \geqslant 0$，所以

$$S_{2n} \geqslant S_{2n-2}$$

即 S_{2n} 是一单调增数列；又因为

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1$$

即 S_{2n} 有上界 a_1，故 S_{2n} 是一收敛数列. 设其极限为 S，又

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

由假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1} = S$$

级数部分和 S_n 的偶数项子列 S_{2n} 和奇数项子列 S_{2n+1} 有相同的极限 S，故 S_n 也以 S 为极限，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

顺便指出，如果在这个级数中用部分和 S_n 去代替它的和数 S，这时所产生的误差是

$$|S - S_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots|$$

但

$$|a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots| = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots < a_{n+1}$$

所以

$$|S - S_n| < a_{n+1}$$

即误差不超过舍去的项中第一项的绝对值，这个结论在今后近似计算作误差估计时很有用.

例 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是交错级数，且 $a_n = \frac{1}{n}$ 单调减趋于零，所以它是收敛的. 以后将会看到它的和是 ln2 . 若取

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

作为 ln2 的近似值，则所产生的误差不超过 $\frac{1}{n+1}$.

9.1.4 级数收敛的一般判别法

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性等价于它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性. 利用数列的 Cauchy 收敛原理，即数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对任给的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对一切自然数 p 成立. 又注意到

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$$

从而立即推出判别一般级数收敛性的柯西准则.

定理 1(Cauchy 准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是：对任给的正数 ε，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，不等式

$$|a_{n+1} + a_{n-2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切自然数 p 成立.

这个定理告诉我们，在收敛级数充分靠后的地方任意截取一段(不论这一段包括多少项)它的绝对值可以小于任意事先指定的正数 ε.

柯西准则适用于一切级数，因而用它去判别某些具体级数的敛散性并不方便. 下面我们介绍两个一般变号级数的判别定理，先证引理.

Abel 引理 设有两组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，如果有

(i) $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为单调的；

(ii) $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$ 有界，即 $|S_k|\leqslant M\ (k=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant M(|b_1|+2|b_n|)$$

证 由 $a_k=S_k-S_{k-1}$ 得

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\&=S_1b_1+(S_2-S_1)b_2+\cdots+(S_n-S_{n-1})b_n\\&=S_1(b_1-b_2)+S_2(b_2-b_3)+\cdots+S_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+S_nb_n\end{aligned}$$

由于 b_i 为单调的，因而每个 $b_i-b_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 都是同符号的，又 $|S_i|\leqslant M\ (i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|&\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}|b_i-b_{i+1}||S_i|+|S_n||b_n|\\&\leqslant M\left|\sum_{i=1}^{n-1}(b_i-b_{i+1})\right|+M|b_n|\\&\leqslant M(|b_1|+2|b_n|)\end{aligned}$$

特别，在引理中如果 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant0$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant M(b_1-b_2)+\cdots+M(b_{n-1}-b_n)+Mb_n=Mb_1$$

定理 2(Dirichlet 判别法) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 满足下面两个条件：

(i) 数列 $\{b_n\}$ 单调减趋于零，

(ii) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 有界，即 $|S_n|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$，

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证 由条件(ii)得

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| \leqslant 2M$$

再据 Abel 引理

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| \leqslant 2Mb_{n+1}$$

由于 $\{b_n\}$ 趋于零,故对任给的正数 ε,存在自然数 N,当 $n > N$ 时,$|b_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2M}$;于是当 $n > N$ 时

$$|a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立. 根据柯西准则,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

如果在上面的级数中取 $a_n = (-1)^{n-1}$,则显然有

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right| \leqslant 1$$

故当 $\{b_n\}$ 单调下降趋于零时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛,这就是莱布尼兹判别法. 可见莱布尼兹判别法只是迪里赫勒判别法的一种特殊情形. 此外从定理 2 还可以得到很重要的阿贝尔判别法.

定理 3(Abel 判别法) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 满足下面两个条件:

(i) 数列 $\{b_n\}$ 单调有界,

(ii) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证 因为 $\{b_n\}$ 单调有界,故存在有限的极限 b. 不妨设 $\{b_n\}$ 单调减趋于 b,则 $\{b_n - b\}$ 是单调减趋于零的数列. 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收

敛，则其部分和有界．据 Dirichlet 判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ 收敛，于是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛．

例 1 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ 的收敛性．

解 取 $b_n = \dfrac{1}{n}, a_n = \cos nx$，则数列 $\{b_n\}$ 单调减趋于零，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

因此只要 x 不是 2π 的整数倍，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 有界，故由 Dirichlet 判别法知，所给级数在 $x \neq 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时收敛．

事实上，当 $x = 2k\pi$ 时，上面的级数就变成调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$，因而是发散的．

例 2 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 的收敛性．

解 由例 1 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n}{n}$ 收敛，而数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减有界，故由 Abel 判别法知此级数收敛．

易见，能用 Abel 判别法判别收敛的级数，也可以用 Dirichlet 判别法，但反之未必．

9.1.5 绝对收敛与条件收敛

变号级数的每项都取绝对值得正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$，称为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的绝对值级数.

对于变号级数还有一个更简单的判定收敛的定理.

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，据柯西准则，对任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立. 于是，当 $n > N$ 时，不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

由定理 1 易知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$$

都是收敛的.

但必须注意，定理 1 的逆定理不成立. 即当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，未必有 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 就是这样的例子.

由此可见，收敛的变号级数可以分成两类：一类是 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛；另一类是 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；我们把前一类级数叫做绝对收敛级数，后一类叫做条件收敛级数.

例如上面例题 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ 都是绝对收敛级数，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛级数.

例 1 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

证 由 9.1.4 例 1 知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi+n)}{n}$$

收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\cos n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}$ 是发散的. 事实上

$$\frac{|\cos n|}{n}\geqslant\frac{\cos^2 n}{n}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ 收敛，则因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 收敛，便推得调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛，这是不可能的，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ 发散，即得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}$ 发散.

绝对收敛级数与条件收敛级数具有一些完全不同的性质. 我们知道，有限个数相加满足结合律、交换律与分配律，它们给有限个数相加带来很大的方便. 而级数是无限个数相加，是否也满足结合律、交换律与分配律(指两个级数相乘)呢？由 9.1.1 性质 4 知，收敛级数满足结合律. 对于交换律与分配律，只有绝对收敛级数回答是肯定的.

定理 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则任意交换此级数各项顺序后所得的新级数也绝对收敛，且其和不变.

证 先证这个定理对于收敛的正项级数是成立的. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于和 S，又设任意交换级数各项的顺序后所得的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$，易知新级数的任何一个部分和 $\sum_{n=1}^{N} a'_n$ 都是从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中挑选出某有限项构成的和，因而

$$\sum_{n=1}^{N} a'_n \leqslant S \tag{1}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 收敛，且有

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \leqslant S \tag{2}$$

另一方面，我们也可把 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 看成是由 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 经交换各项的顺序后所得的级数，因而也有

$$S \leqslant S' \tag{3}$$

比较(2)(3)即得

$$S' = S$$

这就证明了命题对正项级数是成立的.

再证定理对于一般的绝对收敛级数也成立. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是具有正负项的绝对收敛级数，先视 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 为正项级数，由(1)式容易推得任意交换 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 各项顺序后所得的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 也绝对收敛.

下面我们用

$$b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

将级数的正负项分开，则有

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{n}b_k + \sum_{k=1}^{n}c_k \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{k=1}^{n}b_k - \sum_{k=1}^{n}c_k \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{5}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，由(4)式知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛. 再由(5)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}b_n - \sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 任意交换各项的顺序而成新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a'_n$ 时，两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 的各项也分别相应改变顺序成 $\sum_{n=1}^{\infty}b'_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}c'_n$，由上面已证结论有

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}b'_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}c_n = \sum_{n=1}^{\infty}c'_n$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}a'_n$$

这就完全证明了定理.

但是，对于条件收敛级数，情形就完全不同. 一般说来当任意交换这类级数的各项顺序时，它们的和数是要改变的，甚至还有可能得到发散的级数. 以下例为证.

例 2 条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的和为 ln2 . 现交换它的各项，使得在一个正项后面跟着两个负项，如此得到

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

用 S_n 表示这个新级数的部分和，则有

$$S_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

因此当 m 趋于无穷时，S_{3m} 有极限为 $\frac{1}{2}\ln 2$，又因

$$S_{3m-1}=S_{3m}+\frac{1}{4m},\quad S_{3m-2}=S_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}$$

也趋于同一极限，所以交换顺序的级数收敛，且和为 $\frac{1}{2}\ln 2$.

为什么绝对收敛级数与条件收敛级数有如此完全不同的性质呢？下面我们指出产生这种差别的原因.

推论 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛.

事实上，定理 2 的证明中已给出(4)式

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|=\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}c_k\quad(n=1,2,\cdots)$$

由(4)式即得推论 1.

推论 2 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则必有 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 都发散.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛. 由推论 1 知，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 不能都收敛. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散，于是由(5)式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} c_k \quad (n = 1,2,\cdots)$$

立即推知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，这与假设不符. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 只能都发散.

由此可见，绝对收敛级数收敛是由于各项的绝对值减小的速度造成的，因而与各项的次序无关；而条件收敛级数收敛是由于正负项相互抵消造成的，因此与各项的先后次序有关.

定理 3（级数的乘法） 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛，且其和分别为 S,T，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right)$ 也绝对收敛，且其和等于 ST.

证 根据假设，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 都收敛，设其和分别为 S'，T'，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 的部分和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |c_k| &\leqslant |a_1b_1| + (|a_1b_2| + |a_2b_1|) + \cdots \\ &\quad + (|a_1b_n| + \cdots + |a_nb_1|) \\ &\leqslant (|a_1| + \cdots + |a_n|)(|b_1| + \cdots + |b_n|) \leqslant S'T'\end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛. 再证明 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = ST$.

由于级数

$$|a_1b_1| + (|a_1b_2| + |a_2b_1|) + (|a_1b_3| + |a_2b_2| + |a_3b_1|) + \cdots$$

是收敛的. 故去掉括号后的级数

$$|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_1| + |a_1b_3| + |a_2b_2| + |a_3b_1| + \cdots$$

也收敛，即级数

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \cdots \tag{6}$$
绝对收敛，因而(6)不但具有可结合性，而且具有可交换性. 设级数(6)的和为 C，则显然有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = C$. 我们把级数(6)重新结合成级数

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + \cdots$$
$$+ (a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_1) + \cdots \tag{7}$$
则级数(7)的前 n 项和 U_n 恰是乘积

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S_n \cdot T_n$$
命 $n \to +\infty$，即得

$$C = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} S_n \cdot \lim_{n\to\infty} T_n = ST$$
如果两个级数仅仅是条件收敛，则定理的结论就可能不对. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是收敛的，它自乘后得新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$，其中

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{i}\cdot\sqrt{n-i+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right)$$
显然

$$|c_n| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} = 1$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

复习思考题

1. 数项级数与数列之间有什么关系？

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是什么？如果有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，能否

推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛？

3. 对变号级数能否使用比较判别法？对负项级数呢？如果 $|b_n| \leqslant |a_n|$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，问 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是否一定收敛？

4. 柯西根值判别法和达朗倍尔判别法是根据什么判别法推导出来的？它对一般级数能否适用？

5. 不绝对收敛的级数是否一定发散？

6. 总结一下，正项级数与变号级数都有哪些收敛判别法. 正项级数的收敛判别法对负项级数适用吗？

习题 9.1

1. 证明下列等式：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln 2$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 也收敛；试举例说明逆命题不成立；但若 $a_n > 0$，则逆命题成立.

3. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geqslant 0)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛；反之不成立，试举例说明.

4. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$，

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

5. (1)证明：若 $\lim_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

(2)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，是否有 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

6. 设数列 na_n 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

7. 研究下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-1}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4n}$　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+\frac{1}{n})^n}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$　　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$　　(14) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^k}$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$　　(16) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n\quad(a>0)$

8. 研究下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

9. 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

9.2 函数项级数

9.2.1 函数项级数的收敛概念

设 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一列函数，称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

是 $[a,b]$ 上的一个函数项级数，且简称为级数. 在 $[a,b]$ 上任取一点 x_0，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \tag{2}$$

便是一个数项级数. 如果级数(2)收敛，就称点 x_0 是函数项级数(1)的收敛点；如果(2)发散，就称点 x_0 是函数项级数(1)的发散点. 区间 $[a,b]$ 上的收敛点的全体称为函数项级数的收敛域，而

$[a,b]$ 上的发散点的全体称函数项级数的发散域.

例 函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

在整个数轴上都有定义. 当 $|x| < 1$ 时它收敛；而当 $|x| \geq 1$ 时发散. 因此级数的收敛域是区间 $(-1,1)$；发散域是 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$. 如果点 x 在收敛域内，则有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

尽管 $\frac{1}{1-x}$ 除 $x=1$ 外处处有定义，但它仅在 $(-1,1)$ 内才能作为级数的和函数.

在收敛域上，函数项级数在每个收敛点 x 都有一个确定的和数，记为 $S(x)$，即

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

若用 $S_n(x)$ 表示函数项级数前 n 项的和，则在收敛域上有

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

令

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

并称为函数项级数的余项. 因此对收敛域上每一点 x，有

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

9.2.2 函数项级数的一致收敛性及判别法

函数项级数的收敛概念是一个"点态"性的概念，即函数项级数在 $[a,b]$ 上收敛是指它在这区间上的每一点都收敛. 现在我们引进另一种所谓整体性的收敛概念，即一致收敛概念. 这种收敛概念在级数理论及其应用中都有十分重要的意义.

设函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

在区间 $[a,b]$ 上收敛于和 $S(x)$．于是对任意的 $\varepsilon > 0$，对于 $[a,b]$ 上的每一个值 x，都可以找到这样的自然数 N，当 $n > N$ 时，就有不等式

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

一般说来，这个自然数 N 不仅依赖于正数 ε，而且还依赖于值 x，就是对于 x 的不同值，N 可以不同，所以有时把它记成 $N(x)$．对于收敛得快的点 x 来说，$N(x)$ 不必很大，(2)就能成立；而对那些收敛得较慢的点 x，$N(x)$ 必须很大，才能使(2)成立．于是问：是否能找到这样的 N，它只依赖于 ε，而与 x 的取值无关，即当 $n > N$ 时，不等式(2)对 $[a,b]$ 上所有的 x 都成立．这时我们便认为所有的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(x \in [a,b])$ 收敛的速度是"一致"的．对于这样的收敛级数，它具有一些一般收敛级数所没有的重要性质，因此有必要在原来的收敛概念的基础上建立一个更强的收敛概念．

定义　设在区间 I 上(开或闭，有限或无限)收敛的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 其和函数是 $S(x)$．若对任意给定的正数 ε，都存在与 x 无关的自然数 N，使当 $n > N$ 时，不等式

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

对区间 I 上一切 x 都成立，就称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $S(x)$，或称余项 $r_n(x)$ 在区间 I 上一致地趋于零．由于

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

或写成

$$S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon$$

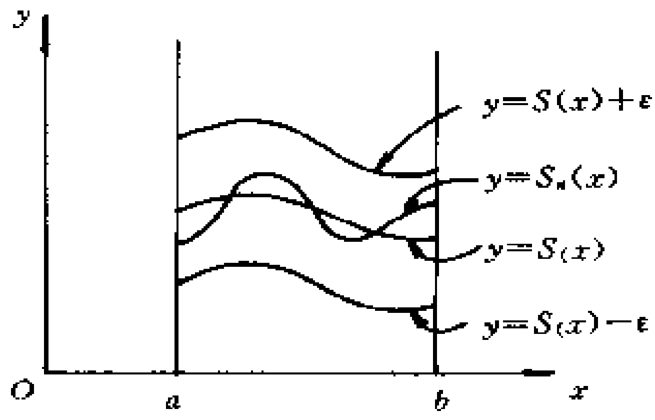


图 9.1

上述定义就有直观的几何意义. 在曲线 $y=S(x)$ 的上下两侧各作曲线 $y=S(x)+\varepsilon$ 与 $y=S(x)-\varepsilon$,则从 N 以后的所有曲线 $y=S_n(x)$ 都应落在这两条曲线所围成的带域中(图 9.1).

根据级数一致收敛的定义,非一致收敛又可叙述为:存在某个正数 ε_0,对任意的自然数 N,存在某个 $n_0>N$ 及 $x_0\in I$,有

$$|r_{n_0}(x_0)|=|S(x_0)-S_{n_0}(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$$

就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上非一致收敛或余项 $r_n(x)$ 在 I 上非一致趋于零.

例 1 考察函数项级数

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\cdots-\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}-\cdots$$

其中 x 在区间 $[0,1]$ 上变化,不难看出这个级数的前 n 项和为

$$S_n(x)=\frac{1}{x+n}$$

所以

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+n}=0$$

由于

$$|r_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|=\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n},\quad x\in[0,1]$$

因此对任给的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$$

对 $[0,1]$ 上的一切 x 都成立，故所给函数项级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

例 2 设有定义在区间 $[0,1]$ 上的级数

$$x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) + \cdots$$

它的前 n 项和

$$S_n(x) = x + x(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) = x^n$$

所以当 $0 \leqslant x < 1$ 时有

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$$

而且

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = -x^n$$

当 $x = 1$ 时直接由级数得

$$S_n(1) = 1, \quad S(1) = \lim_{n\to\infty} S_n(1) = 1$$

这时对任意的 n

$$r_n(1) = S(1) - S_n(1) = 0$$

于是推知级数在整个区间 $[0,1]$ 上收敛，但在 $[0,1]$ 上不一致收敛. 事实上，存在 $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$，对任意的自然数 N，存在 $n_0 > N$ 且 $x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n_0}} \in (0,1)$，有

$$|r_{n_0}(x_0)| = |-x_0^{n_0}| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

所以余项 $r_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致趋于零，即级数在 $[0,1]$ 上是不一致收敛的.

这个级数的非一致收敛从几何上看亦是很明显的. 如果在直

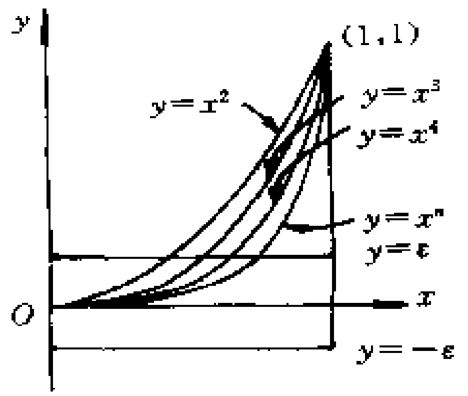


图 9.2

线 $y=S(x)=0$ 的附近作 ε 带形区域，则不论 n 多大，曲线 $y=S_n(x)=x^n$ 永远不会落入这个带形区域内（图 9.2）.

一般来说，按照一致收敛的定义判别函数项级数的一致收敛性是比较麻烦的，下面介绍一些简便的判别法，首先介绍类似数项级数的柯西准则.

定理 1 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在与 x 无关的自然数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对任意自然数 p 以及 I 上所有的点 x 都成立.

证 必要性：如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$，那么对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，不等式

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |S_{n+p}(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对任意自然数 p 及 I 中一切点 x 都成立. 于是

$$\begin{aligned}|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|&=|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\\&\leqslant|S_{n+p}(x)-S(x)|+|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon\end{aligned}$$

再证充分性. 如果对任给 $\varepsilon>0$，总能找到自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|=|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

对任意自然数 p 及 I 上一切 x 都成立. 根据数项级数的柯西准则，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 中收敛，设其和为 $S(x)$，现在对固定的 $n(>N)$，

令不等式

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

中的 p 无限增大，取极限就得到

$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

对 I 中一切 x 成立. 所以级数在 I 上一致收敛.

在定理中，取 $p = 1$，就得到函数项级数一致收敛的一个必要条件.

推论 一致收敛级数的通项必一致趋于零.

这个必要条件常用来判定级数的非一致收敛性.

例 3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛.

证 只须证明它的通项 ne^{-nx} 在 $(0, +\infty)$ 上非一致趋于零. 存在正数 $\varepsilon_0 < \frac{1}{e}$，对任给的自然数 N，总存在 $n_0 > N$，且存在 $x_0 = \frac{1}{n_0} \in (0, +\infty)$，有

$$n_0 e^{-n_0 x_0} = n_0 e^{-1} > \frac{1}{e} > \varepsilon_0$$

故通项 ne^{-nx} 在 $(0, +\infty)$ 上非一致趋于零. 由定理 1 的推论知，$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛.

如同数项级数一样，柯西准则在实际应用时通常是很困难的，但由它可以引出某些更为适用的判别法则.

定理 2(维尔斯特拉斯 Weierstrass 判别法) 如果存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，使得在区间 I 上从某项起成立

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

证 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由数项级数的柯西准则，即对任给的正数 ε，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，不等式

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立. 于是对足够大的 n 有

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \\
\leqslant &|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| \\
\leqslant &a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon
\end{aligned}$$

对任意自然数 p 及区间 I 上的所有 x 都成立，根据柯西收敛准则，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

例 4 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证 因为对任意实数 x 都有

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 是收敛的，所以原级数在整个数轴上一致收敛.

Weierstrass 判别法用起来很方便，但条件太强，它要求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对收敛，而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 都一致收敛才行. 实际上存在这样的级数，它一致收敛但不绝对收敛；还可能是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对且一致收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 却不一致收敛. 对于这类级数，Weierstrass 判别法就无效了，故需研究更精细一些的判别法，我们也有类似于数项级数的 Dirichlet 和 Abel 判别法.

定理 3（迪里赫勒判别法） 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 满足下面两个条件

(i) 函数列 $\{b_n(x)\}$ 对于每个 x 单调，且在区间 I 上一致趋于零；

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和 $S_n(x)$ 在 I 上一致有界，即存在与 n 及 x 无关的常数 M，使 $|S_n(x)| \leqslant M$ 对 I 上一切 x 都成立.

那么该级数在区间 I 上一致收敛.

这个定理的证明方法和数项级数中相应定理的证明类似.

定理 4(阿贝尔判别法) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 满足下面两个条件：

(i) 函数列 $\{b_n(x)\}$ 对每一 x 值单调，且在区间 I 上一致有界，即存在与 n 及 x 无关的常数 M，使 $|b_n(x)| \leqslant M$ 对 I 上一切 x 都成立；

(ii) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

那么该级数在区间 I 上一致收敛.

证 由假设，存在常数 M，$|b_n(x)| \leqslant M$ 对 I 上一切 x 及自然数 n 都成立，又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛，故对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

对 I 上一切 x 及任何自然数 p 都成立. 由本章 9.1.4 的 Abel 引理，于是当 $n > N$ 时

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + a_{n+2}(x)b_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+p}(x)|) \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \cdot 3M = \varepsilon$$

对 I 上一切 x 及任自然数 p 都成立，据柯西准则，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I

上一致收敛.

例 5 设 $\{a_n\}$ 是单调趋于零的数列，则在任何一个不含 $2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的闭区间上，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

都一致收敛.

这是因为，比如

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

在所给区间上 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$，故存在与 n 及 x 无关的界. 由 Dirichlet 判别法，可知所考察的级数一致收敛.

例 6 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ 在 $x\geqslant 0$ 中一致收敛.

这是由于 $\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$ 对每一 x 值在 $x\geqslant 0$ 上单调一致有界，即 $\frac{1}{n^x}\leqslant 1$ 对 $[0,+\infty)$ 中的一切 x 都成立. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，根据 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ 在 $x\geqslant 0$ 中一致收敛.

9.2.3 一致收敛级数的性质

我们知道，有限个连续函数的和仍是连续函数，且和的积分等于各项积分的和；有限个可微函数的和仍是可微函数，且和的微分等于各项微分的和. 但有限和的这些性质对无穷级数的和则未必成立.

例 1 如 9.2.2 中的例 2，级数

$$x+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)+\cdots$$

在区间 $[0,1]$ 上处处收敛，而其和

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

在点 $x=1$ 处是不连续的，当然更谈不上可导.

这例子说明，每项都连续的级数，其和函数未必连续，每项都可导的级数，其和函数未必可导.

例 2 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[2n^2xe^{-n^2x^2}-2(n-1)^2xe^{-(n-1)^2x^2}\right]$$

它的部分和是 $S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$，因此级数在区间 $[0,1]$ 上的和为 $S(x)=0$，所以

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=0$$

但若把这个级数逐项积分得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left[2n^2xe^{-n^2x^2}-2(n-1)^2xe^{-(n-1)^2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-(n-1)^2}-e^{-n^2}\right]=1$$

这个例子说明，一一般情况下“逐项积分”也是不允许的.

但有限和的这些性质对一致收敛级数是成立的.

定理 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$，且每项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续，那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

证 只须证明对区间 I 上任意点 x_0 有极限等式

$$\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$$

由于级数在 I 上一致收敛于 $S(x)$. 即对任给正数 ε，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，对 I 上任意一点 x，有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |S_n(x_0)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

在选定这样的 n 后，再由 $S_n(x)$ 的连续性，即有正数 δ，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|S_n(x)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是当 $|x-x_0|<\delta$ 时，便有

$$\begin{aligned}|S_n(x)-S(x_0)| &\leqslant |S_n(x)-S(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)| \\ &\quad +|S_n(x_0)-S(x_0)| \\ &<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 $S(x)$ 在 x_0 处连续.

例 3 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$，计算 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 在区间 $[-2,2]$ 上，由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

因而原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛，所以和函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，于是

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}$$

定理 1 的条件是充分条件，不是必要条件，即和函数 $S(x)$ 连续不一定要求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛.

例 4 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上是连续的.

证 9.2.2 的例 3 已证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收

敛. 利用连续的“点态”性概念，在$(0,+\infty)$中任取一点x_0，由实数的性质，总能取适当的δ，使得$0<\delta<x_0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$[\delta,+\infty)$中一致收敛，因而$f(x)$在$x_0$处连续；由于$x_0$是$(0,+\infty)$中任一点，故知$f(x)$在$(0,+\infty)$中连续.

由定理1，又得

推论 如果收敛的函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数$S(x)$在区间$I$上不连续，而每项$u_n(x)$都在$I$上连续，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上非一致收敛.

例5 再看9.2.2的例2，级数

$$x+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)+\cdots$$

的和函数

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

在收敛区间$[0,1]$上不连续，所以级数在$[0,1]$上是不一致收敛的.

定理2 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，且每项$u_n(x)$都在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$$

证 由定理1知$S(x)$是$[a,b]$上的连续函数，因而是可积的. 又因为

$$\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

所以只须证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

由假设,级数是一致收敛的,故对任意 $\varepsilon > 0$,存在 N,当 $n > N$ 时,不等式

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

对 $[a,b]$ 中的一切 x 都成立. 于是当 $n > N$ 时有

$$\left|\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b S(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |S_n(x)\mathrm{d}x - S(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

即

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x$$

现在讨论函数项级数在什么条件下可以逐项微分?

定理 3 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$,它的每项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的微商,并且由这些微商所组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则和 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的微商,且可逐项求导

$$S'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 的和为 $\sigma(x)$,即

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

我们只须证明 $S'(x) = \sigma(x)$. 由定理 2 知,当 $x \in [a,b]$ 时有

$$\int_a^x \sigma(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u'_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_n(a)]$$
$$= S(x) - S(a)$$

由 $\sigma(x)$ 的连续性，在上式两端求导即得

$$S'(x)=\sigma(x)$$

例 6 证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的微商.

证 显然级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，且它的每项在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的微商，而微商所组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，因而由定理 3 得，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的微商.

复习思考题

1. 函数项级数与函数序列之间有什么关系？函数项级数与数项级数二者又有什么关系？

2. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛的必要条件是什么？若有通项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致趋于零，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a.b]$ 上一致收敛？

3. 连续函数项级数的和是否一定连续？举例说明.

4. 函数项级数在闭区间上收敛是否一定一致收敛？举例说明.

5. 如果函数列 $\{b_n(x)\}$ 对每个 x 而言是单调数列，且在区间 I 上一致有界，则有

$$\lim_{n\to\infty}b_n(x)=b(x)$$

那么 $\{b_n(x)-b(x)\}$ 是否在 I 上一致趋于零？

习题 9.2

1. 确定下列级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^{n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{n}$　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{n}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\mathrm{e}^{nx}}$　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^n}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n-3^n}$　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$

2. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$，　$-\infty < x < +\infty$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n[1+(nx)^2]}$，　$-\infty < x < +\infty$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n$，　a) $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$，　b) $-1 < x < 1$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx}$，　$0 \leqslant x < +\infty$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$，　$0 \leqslant x < +\infty$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$，　$1 < x < +\infty$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$，　$0 < \delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(n\mathrm{e}^n)^x}$，　$0 \leqslant x < +\infty$

3. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$ 中一致收敛.

4. 证明：$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 当 $x > 1$ 时是 x 的连续导函数，并且在此域内有各阶连续导函数.

5. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$，求 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

6. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$，求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$.

7. 证明：$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 当 $|x| < +\infty$ 时，具有连续的二阶微商.

9.3 幂级数与泰勒展开式

9.3.1 幂级数的收敛半径

在函数项级数中，理论上最简单，应用上极广泛的一类级数是幂级数，它的形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 都是实常数. 这类级数的重要性就在于它的部分和是多项式，因而只要级数收敛，则它的和尽管一般说来是很复杂的函数，总可以用易于计算的多项式来近似表达，并且可以逼近到任意精确的程度. 此外，由于幂级数的收敛区域结构十分简单，它总是一个区间，这就为研究这类级数时带来许多方便. 现在就来揭示这一事实.

定理 1(Abel 定理) 如果幂级数(1)在点 $x=x_0$ 处收敛,则它在所有满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的点 x 处都绝对收敛;反之,若幂级数在点 $x=x_0$ 处发散,则它在所有满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的点 x 处都发散.

证 先设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 收敛,这时它的通项趋于零,即

$$\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$$

故数列 $\{a_nx_0^n\}$ 必有界,于是存在常数 M,使得

$$|a_nx_0^n|\leqslant M\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

由于

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

故当 $|x|<|x_0|$ 时,所考察的幂级数各项的绝对值不大于收敛的等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ 的对应项,从而级数(1)绝对收敛.

反之,如果级数在 $x=x_0$ 发散,而在适合 $|x'_0|>|x_0|$ 的一点 x'_0 处收敛,则由定理的前一结论知,级数在点 x_0 收敛,这与假设矛盾.

如此就能确定幂级数的收敛区域为一区间.显然任何幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,在 $x=0$ 总是收敛的.幂级数的收敛情况不外乎下列三种类型.

(i) 仅在 $x=0$ 处收敛,在任何非零点都发散,这时它的收敛区域就只有一点 $x=0$;

(ii) 在任一点 x 处都收敛,即在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛;

(iii) 具有不为零的收敛点与发散点,由此考虑所有收敛点 x_0 组成的数集 $\{|x_0|\}$.显然这个数集 $\{|x_0|\}$ 是有上界的,则它必有

上确界 R，使当 $|x|>R$ 时级数发散；而当 $|x|<R$ 时，依上确界的定义，一定存在这样的收敛点 x_0，使 $|x|<|x_0|\leqslant R$，于是由 Abel 定理推知级数收敛(图 9.3)．这个结果可总结成

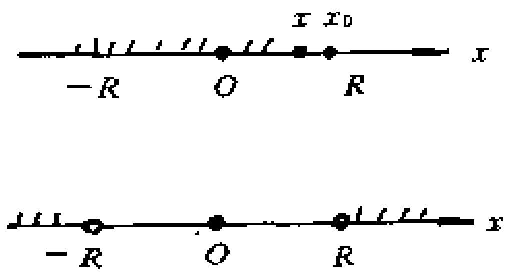


图 9.3

定理 2 对于任意的具有非零的收敛点与发散点之幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，必存在一个确定的正数 R，使得当 $|x|<R$ 时，级数绝对收敛；而当 $|x|>R$ 时级数发散．

这个数 R 称为幂级数的收敛半径，区间 $(-R,R)$ 称为它的收敛区间．如果幂级数除 $x=0$ 外的一切非零 x 值都发散，就说它的收敛半径为零；如果幂级数在整个数轴上处处收敛，就说它的收敛半径是无穷大．

从上面的研究可知，对于一个幂级数，重要的问题是知道它的收敛半径，这在大多数的场合下，可由下述定理得以解决．

定理 3 没有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (a_n\neq 0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$，则此幂级数的收敛半径 $R=\dfrac{1}{L}$．

证 先考察绝对值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$．根据达朗倍尔判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=L|x|$$

若 $L|x|<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{L}$，则幂级数绝对收敛；若 $L|x|>1$，即 $|x|>\dfrac{1}{L}$，则幂级数发散．因此

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

类似地，应用柯西判别法可得计算收敛半径的另一公式

$$R=\frac{1}{L}=\frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

注意：定理 3 的两个求收敛半径的公式都要求 x 的幂不能有间隔，否则将失效.

例 1 用定理 3 容易算出下列三个幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

的收敛半径分别为 1，$+\infty$，0 .

例 2 求幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k!)^2}x^{2k}$ 的收敛半径.

解 本题幂级数只含有 x 的偶次幂，因而不能应用定理 3 的公式，可直接利用达朗倍尔判别法求收敛半径

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2}x^{2(k+1)}\cdot\frac{(k!)^2}{(2k)!}\cdot\frac{1}{x^{2k}}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}|x^2|=4|x|^2$$

当 $4|x|^2<1$，即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时级数绝对收敛；当 $4|x|^2>1$，即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时级数发散. 所以收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.

必须指出，在幂级数的收敛区间 $(-R,R)$ 的两个端点 $x=\pm R$ 处，级数的收敛性没有肯定的结论. 下面三个级数

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad \text{(iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

的收敛半径都是 $R=1$，但其中(i)在左端点 $x=-1$ 处条件收敛，在右端点 $x=1$ 发散，因此收敛域为 $[-1,1)$. (ii)在左右两个端

点都绝对收敛，因此收敛域为 $[-1,1]$. (iii)在两个端点都发散，因此收敛域为 $(-1,1)$.

9.3.2 幂级数的性质

在说明了幂级数收敛区域的一般形式之后，现在进而讨论关于它的一致收敛性问题并由此导出其和函数的各种性质.

定理 1 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则在收敛区间 $(-R,R)$ 内的任何闭区间 $[-r,r]$ 上，这级数一致收敛.

证 因为 $0<r<R$，所以幂级数在点 $x=r$ 绝对收敛，但当 $|x|\leqslant r$ 时有

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n$$

由维尔斯特拉斯判别法知，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x|\leqslant r$ 上一致收敛.

幂级数的这一性质保证了它的和函数不仅在收敛区间内是连续的，而且具有任意阶导数.

定理 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内是一个连续函数.

证 在 $(-R,R)$ 中任取一点 x_0，因为 $|x_0|<R$，故存在正数 r，使得 $|x_0|<r<R$. 由定理 1 知幂级数在闭区间 $[-r,r]$ 上一致收敛，而它的每一项又是连续函数，故其和 $S(x)$ 在 $[-r,r]$ 上连续，即在 x_0 处连续. 由于 x_0 是在 $(-R,R)$ 中任意取的，故 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 中连续.

定理 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内是可微的，且有

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

即幂级数可以逐项微分,且微分后所得的幂级数有相同的收敛半径.

证 先证明逐项微分后所得的幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \tag{1}$$

的收敛半径仍为 R. 为此在区间 $(-R,R)$ 内任取一点 x_1,由于 $|x_1|<R$,故存在正数 r_1,使 $|x_1|<r_1<R$. 因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r_1^n$ 收敛,它的通项 $a_n r_1^n$ 趋于零,所以存在自然数 N,当 $n>N$ 时

$$|a_n r_1^{n-1}|<1$$

如此,只要 n 足够大时就成立

$$|na_n x_1^{n-1}| = \left|na_n r_1^{n-1}\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^{n-1}\right| < n\left|\frac{x_1}{r_1}\right|^{n-1}$$

容易证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x_1}{r_1}\right|^{n-1}$ 收敛,所以级数(1)在点 x_1 绝对收敛,这就证明了级数(1)在 $(-R,R)$ 内收敛. 另一方面,在区间 $(-R,R)$ 外任取 x_2,因为 $|x_2|>R$,故存在正数 r_2,使 $|x_2|>r_2>R$,由于

$$|na_n r_2^{n-1}| \geqslant \frac{1}{r_2}|a_n r_2^n|$$

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x_2^{n-1}$ 收敛,据 Abel 定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |na_n r_2^{n-1}|$ 收敛,便推得原来的级数在 r_2 处绝对收敛. 这和已知矛盾,所以级数(1)在 x_2 处发散,即级数(1)在 $|x|>R$ 时发散. 综上所述,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R.

这样的任意 $r\in(0,R)$,级数(1)在 $[-r,r]$ 中一致收敛. 于

是，9.2.3 中的定理 3 的三个条件都满足，又由 r 的任意性，从而推得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

在 $(-R,R)$ 中成立.

反复应用定理 3，可得

推论 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内有任意阶微商，且有

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \quad (k = 1,2,\cdots)$$

即幂级数可以逐项微分任意多次，且微分后所得的幂级数都有同一收敛半径 R.

这条推论所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处. 又因为各项为连续函数的一致收敛级数总是可以逐项积分的，所以由定理 1 又可以推出

定理 4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在某收敛区间 $(-R,R)$ 上的和为 $S(x)$，则对于此区间的任意一个内点 x，恒有

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

且逐项积分后的级数的收敛半径仍为 R.

证 对任意 $x \in (-R,R)$，根据 9.2.3 中定理 2 有

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (a_n x^n)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

且逐项积分后的级数的收敛半径仍为 R. 否则由定理 3,将级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 逐项微分后所得的级数,即原级数的收敛半径就不是 R 了.

利用上面这些定理可以求一些幂级数的和.

例 1 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在整个数轴上收敛,试求它的和.

解 设所考察的级数和为 $S(x)$,则有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=S(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

解此微分方程得

$$S(x)=Ae^x$$

由于 $S(0)=1$,故 $S(x)=e^x$,即

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例 2 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$ 的和.

解 容易知道这个幂级数的收敛半径为 1,但在 $x=\pm1$ 都发散,故收敛区间为$(-1,1)$.

令 $S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,再令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,在区间 $[0,x]$ 上逐项积分,得

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

再将等式两端对 x 求微商就得到

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

所以原级数的和函数 $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

由此又可求出一些数项级数的和．例如令 $x=\frac{1}{2}$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$；令 $x=\frac{1}{3}$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$．

下面顺便指出幂级数在收敛区间的两端点处的一个性质．

定理 5 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，如果在 $x=R$ 处，级数收敛，则其和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续；如果级数在 $x=-R$ 处收敛，则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右连续．

证 将幂级数表成形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛，而数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 对区间 $[0,R]$ 上的每一 x 值是单调减少的，并且一致有界 $\left(\frac{x}{R}\right)^n\leqslant 1$，根据级数一致收敛的阿贝尔判别法，知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在区间 $[0,R]$ 上一致收敛，所以和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续．定理的另一半可同法证之．

最后还要指出，幂级数的一般形式可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

这时只要作变换 $y=x-x_0$，它就化为上面讨论过的幂级数，因此有关幂级数的一切结论现在仍然成立，所不同的是收敛区间的中心已从原点移到点 x_0．

9.3.3 函数的泰勒展开式

到此为止，我们确定了幂级数的收敛区域，并研究了它的和函数的各种性质．但在实际应用中，所遇到的经常是相反的问题，即

函数 $f(x)$ 在给定的区间上是否可以展开成一个幂级数？

首先，如果 $f(x)$ 可以展成幂级数，即它可以表示成

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

由 9.3.2 中定理 3 的推论知，$f(x)$ 必有任意阶微商，并且

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$

……

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

……

在上面各等式中令 $x=x_0$ 得

$$f(x_0)=a_0,\quad f'(x_0)=a_1,\quad f''(x_0)=2a_2,\quad \cdots$$

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n,\quad \cdots$$

即

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f'(x_0),\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\quad \cdots$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad \cdots$$

这就是说，如果 $f(x)$ 能展为 $x-x_0$ 的幂级数，那么这个幂级数一定是下面这种形式：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

反之，对在点 x_0 有任意阶微商的一般函数 $f(x)$，总能构造幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

并称它为 $f(x)$ 在点 x_0 的**泰勒级数**，记作

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

特别当 $x_0=0$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 $f(x)$ 的**马克劳林级数**.

一般说来，$f(x)$ 的泰勒级数除去点 x_0 外都有可能发散，而且即使在点 $x\neq x_0$ 处收敛，它的和还不一定就是 $f(x)$；因此上面提及的问题就化成具有任意阶微商的函数 $f(x)$，其泰勒级数在什么条件下收敛于自身?

由 2.5.1 中的泰勒定理知，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有直至 $(n+1)$ 阶的微商，其余项为拉格朗日形式的泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

而 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的一点. 由此可见，要 $f(x)$ 的泰勒级数收敛于自身，必须而且只须

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

于是有

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上有任意阶微商，则 $f(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上可以展成泰勒级数的充分必要条件是对这区间内的任意点 x，都有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$$

其中 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的一点.

根据这个定理，可以得到一个便于应用的充分条件.

定理 2 如果函数 $f(x)$ 的各阶微商在区间 (x_0-R,x_0+R) 上一致有界，则 $f(x)$ 在这区间上可以展成泰勒级数，即

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,\quad x\in(x_0-R,x_0+R)$$

证 因为 $f(x)$ 的各阶微商在 (x_0-R,x_0+R) 上一致有界，即存在这样一个常数 M，使得在 (x_0-R,x_0+R) 上成立

$$|f^{(n)}(x)|<M\quad(n=1,2,\cdots)$$

这时

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|<M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

由定理 1 知，$f(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上可以展成泰勒级数.

9.3.4 初等函数的泰勒展开式

利用 9.3.3 的定理 2 可求一些初等函数的泰勒展开式.

1. 求函数 e^x 的马克劳林展开式.

解 由于当 $|x|<M$ 时有

$$|(e^x)^{(n)}|=|e^x|\leqslant e^{|x|}\leqslant e^M\quad(n=1,2,\cdots)$$

故推知 e^x 在区间 $(-M,M)$ 上能展成幂级数. 又从 M 的任意性得

e^x 可在整个数轴上展成幂级数. 又因为

$$(e^x)^{(n)}|_{x=0} = 1$$

所以有展式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

这个结果与 9.3.2 中的例 1 是完全一致的. 特别取 $x = 1$ 就得到数 e 的级数表示

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

2. 求函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的马克劳林展开式.

解 由于对任意的实数 x 都有

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\sin x\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

故正弦函数 $\sin x$ 可在整个数轴上展成幂级数. 又因为

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}\sin x\right|_{x=0} = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m+1 \end{cases}$$

所以 $\sin x$ 的展式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

将这个展式两端微分即得余弦函数 $\cos x$ 的展式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!} + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

3. 求二项式函数 $f(x) = (1 + x)^\alpha$ 的马克劳林展开式，其中 α 为任意实数.

解 本题可用类似上述方法得到二项式 $(1 + x)^\alpha$ 的泰勒展开式. 为避免估计余项的困难，这个展开式还可以用下述方法得到.

因为

$$f^{(n)}(0)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1+x)^\alpha\bigg|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

所以二项式 $(1+x)^\alpha$ 的马克劳林级数为

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

其中后项系数与前项系数之比的绝对值

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|$$

当 n 无限增加时趋于 1，故得这个级数的收敛半径为 1. 现在进而说明它在收敛区间 $(-1,1)$ 上的和函数就是二项式 $(1+x)^\alpha$. 为此设

$$F(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

逐项微分得

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

以 $1+x$ 乘此等式的两端，并合并右端 x 的同次幂系数就得到关系式

$$(1+x)F'(x)=\alpha F(x)$$

解此微分方程并注意到 $F(0)=1$，即算得

$$F(x)=(1+x)^\alpha$$

在二项式 $(1+x)^\alpha$ 的展开式中，当 α 是自然数时就化成了牛顿二项式定理，这是我们早已熟知的公式.

如果令 $\alpha=-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$，就得到几个常见的二项式级数

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1<x\leqslant 1)$$

有时从某些函数的泰勒展式通过逐项积分也能得到另一些函数的泰勒展式. 例如,若将展开式

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

的两端从 0 到 x 积分就得到对数函数 $\ln(1+x)$ 的泰勒展式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1<x<1)$$

由于展式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛,所以展式的成立区间为 $-1<x\leqslant 1$,且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$$

同样从展开式

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (-1<x<1)$$

逐项积分可得反正切函数的泰勒展式

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

当 $x=1$,就得到数 $\frac{\pi}{4}$ 的级数表示

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

9.3.5 幂级数的运算

定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2，命 $R \geqslant \min(R_1, R_2)$，则在区间 $(-R, R)$ 上有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

其中 $c_n = \sum_{L=0}^{n} a_L b_{n-L}$.

定理的证明留给读者作练习.

例 1 将函数 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 展开为幂级数.

解 由于

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

而

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1, 1)$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2 < x < 2)$$

因而当 $-1 < x < 1$ 时有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$$

例 2 将函数 $\ln^2(1-x)$ 展开为幂级数.

解 已知在区间 $[-1, 1)$ 中有

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

根据幂级数的乘法定理,且注意到

$$a_0 = 0, a_n = -\frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

所以有

$$c_n = \sum_{L=0}^{n} a_L a_{n-L} = \sum_{L=1}^{n-1} \frac{1}{L(n-L)} = \frac{2}{n} \sum_{L=1}^{n-1} \frac{1}{L} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

从而得到

$$\ln^2(1-x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) x^n \quad (-1 < x < 1)$$

复习思考题

1. 幂级数的收敛区域与一般函数项级数的收敛区域有何不同?

2. 幂级数在收敛区域内部不一定一致收敛,为什么其和函数在收敛区域内部一定连续,而且还可以逐项求微商?

3. 如果 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 中有任意阶导数,$f(x)$ 是否能在这区间上展开成幂级数?

4. 如果 $f(x)$ 的泰勒级数在 $(-\infty, +\infty)$ 中处处收敛,是否一定收敛到 $f(x)$ 本身?

5. 泰勒公式、泰勒级数与泰勒展开是不是等同语?

习题 9.3

1. 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)}$　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$　$(a>0, b>0)$

2. 求下列级数的和函数：

(1) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$

(2) $1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$

(3) $1 \cdot 2+2 \cdot 3x+3 \cdot 4x^2+\cdots+n(n+1)x^{n-1}+\cdots$

(4) $\frac{x}{1 \cdot 2}+\frac{x^2}{2 \cdot 3}+\frac{x^3}{3 \cdot 4}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots$

(5) $x+\frac{x^3}{1 \cdot 3}+\frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\cdots$

3. 将下列函数在指定点附近展成幂级数，并求收敛区域：

(1) x^3-2x^2+5x-7　$(x=1)$

(2) $e^{\frac{x}{a}}$　$(x=a)$　　(3) $\ln x$　$(x=1)$

(4) $\cos x$　$(x=\frac{\pi}{4})$　　(5) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(x=0)$

(6) $\ln(1+x-2x^2)$　$(x=0)$

(7) $\frac{1}{x^2+3x+2}$　$(x=-4)$

4. 将下列函数展成幂级数：

(1) $\sin^2 x$　　(2) $\arcsin x$

(3) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$　　(4) $(1+x)\ln(1+x)$

5. 将下列积分表成级数形式：

(1) $\int \frac{e^x}{x} dx$　　(2) $\int_0^x \cos x^2 dx$

6. 方程 $y+\lambda \sin y=x$ $(\lambda \neq -1)$ 在 $x=0$ 附近确定了一个隐函数 $y(x)$，试求它的幂级数展开式中的前四项.

9.4 级数的应用

9.4.1 幂级数应用于近似计算

若已知函数在点 $x=0$ 处的幂级数展开式，则在有效区间上其它点处的函数值就可利用这个级数近似地计算出来. 下面将通过对数值的计算来说明这种方法.

例 1 计算 ln2 的近似值，使准确到 10^{-4}.

解 利用展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$(-1<x\leqslant 1)$$

取 $x=1$，则得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

但这个级数收敛太慢，因为若取前 n 项和作为近似值，根据交错级数的性质，它的误差是

$$|r_n|<|a_{n+1}|=\frac{1}{n+1}$$

要使 $\frac{1}{n+1}<10^{-4}$，则必须 $n\geqslant 10^4$，即至少要计算前一万项，这当然并非上策. 因而有必要用收敛很快的级数去代替这个级数. 为此，在展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

中以 $-x$ 代 x 就得到

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots$$

两式相减有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right)$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$，得 $x=\frac{1}{3}$，则

$$\ln2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}+\frac{1}{7\cdot3^7}+\cdots\right)$$

若用前四项计算，则由此产生的误差是

$$2\left(\frac{1}{9\cdot3^9}+\frac{1}{11\cdot3^{11}}+\frac{1}{13\cdot3^{13}}+\cdots\right)<\frac{2}{9\cdot3^9}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{4\cdot3^9}<0.2\times10^{-4}$$

再加上前四项的计算误差. 总误差应小于

$$0.5\times10^{-4}+0.2\times10^{-4}<10^{-4}$$

于是得

$$\ln2\approx2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}+\frac{1}{7\cdot3^7}\right)=\frac{53056}{76545}\approx0.6931$$

在第三章中，当定积分的被积函数的原函数不能表达为初等函数时，我们已经介绍过几种关于计算积分的近似方法. 但若被积函数在积分区间上能展成为收敛的幂级数，则将这个级数逐项积分后，可由所得级数来计算定积分的近似值，它通常比过去的方法简便许多.

例 2 计算积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值，使精确到 10^{-4}.

解 被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 可以在整个数轴上展成幂级数，且为

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

逐项积分得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$$

这是收敛很快的交错级数. 依次算得各项的值并取五位小数有

$$\frac{1}{3\cdot 3!} \approx 0.05556, \quad \frac{1}{5\cdot 5!} \approx 0.00167,$$

$$\frac{1}{7\cdot 7!} = \frac{1}{35280} < 0.3 \times 10^{-4}$$

所以只须算到前三项，这时总误差小于

$$3 \times 0.5 \times 10^{-5} + 0.3 \times 10^{-4} < 10^{-4}$$

于是得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1 - 0.05556 + 0.00167 \approx 0.9461$$

9.4.2 司特林公式

当 n 很大时，要计算阶乘 $n!$ 的近似值，即使利用对数，也很不方便. 下面将借助于幂级数的知识来导出它的近似表达式. 这无论在数学理论的研究上或实际问题的计算中，都有着重要的应用. 为此先来证明**瓦里斯**(Wallis)**公式**.

引理 若 $(2n)!!$ 与 $(2n-1)!!$ 分别表示前 n 个偶数与前 n 个奇数的连乘积，则有

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

证 因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时有

$$\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x$$

将此不等式从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x dx$$

所以

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

即

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}$$

若令

$$a_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1},\quad b_n-\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}$$

则容易得出 $\{a_n\}$ 是递增有上界 $\frac{\pi}{2}$ 的数列，$\{b_n\}$ 是递减有下界 $\frac{\pi}{2}$ 的数列，并且

$$b_n-a_n=\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}$$

当 n 无限增大时，这个差值趋于零. 由此即得瓦里斯公式.

现在就能根据这个引理导出阶乘 $n!$ 的**司特林**(Stirling)**公式**.

定理 设 n 是自然数，则有

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

其中 $0<\theta_n<1$.

证 在展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\cdots+\frac{1}{2m+1}x^{2m}+\cdots\right)$$

中令 $x=\frac{1}{2n+1}$，就得到

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]$$

即

$$(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})=1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots$$

又因为

$$1<1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots$$

$$<1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

所以有不等式

$$1<(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})<1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

即

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}$$

再考察数列 $\left\{a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right\}$，作出它的相邻两项的比

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

故得

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$$

从左边不等式推知 $a_{n+1}<a_n$，即 $\{a_n\}$ 是递减数列，又 $a_n>0$，所以它必存在有限的极限 a；从右边不等式推知

$$a_ne^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}$$

即 $\{a_ne^{-\frac{1}{12n}}\}$ 是递增数列，且仍以 a 为其极限．如此上面两个单调数列的共同极限 a 必介于这两个数列的通项 $a_ne^{-\frac{1}{12n}}$ 与 a_n 之间，即有

$$a_ne^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n.$$

进而有

$$1<\frac{a_n}{a}<e^{\frac{1}{12n}}$$

若取 $\theta_n = 12n\ln\frac{a_n}{a}$，则 $0 < \theta_n < 1$，并且

$$a_n = a\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

代入 a_n 的表达式就得到

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

于是余下的问题就是要确定常数 a. 因为

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n a_n,\quad (2n)! = \sqrt{2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} a_{2n}$$

所以

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{a_n^2}{a_{2n}}$$

代入瓦里斯公式得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2(2n+1)}\,\frac{a_n^4}{a_{2n}^2} = \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

从而 $a = \sqrt{2\pi}$. 这就完全证明了司特林公式.

司特林公式给出不等式

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

及当 n 无限增大时 $n!$ 的阶

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad (n\to+\infty)$$

它们在处理 n 很大与 $n!$ 有关问题时是很有用的.

例 1 利用 $n!$ 的阶很容易算得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[2n]{2n\pi}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

例 2 证明当 $n\to\infty$ 时，$C_{2n}^{n}\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}2^{2n}$

证 $C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}2^{2n}\quad(n\to+\infty)$

9.4.3 连续函数的多项式逼近

前面已经讲过，把函数 $f(x)$ 展成幂级数的重要应用之一就是用多项式来逼近函数，且这个多项式的系数可由 $f(x)$ 及它的各阶导数在 $x=0$ 的值表达. 但是能展开成幂级数的函数毕竟是很狭窄的一类函数，因为它要求函数有任意阶导数，且如 9.3.3 中所看到的，即使这样强的条件还是不充分的. 因此产生这样一个问题：能用多项式逼近的一类函数是否可要求低一些？为此给出

定义 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数，如果对任意 $\varepsilon>0$，总能找到多项式 $p(x)$，使得对 $[a,b]$ 中所有 x 均有

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon$$

成立，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能用多项式一致逼近.

显然，一个可以展成幂级数的函数，在这个级数的收敛区间内部的任一闭区间上，都可以用多项式来一致逼近. 然而幂级数只是以多项式 $P_n(x)$（但其次数不一定为 n）作为项的多项式级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)$$

的一种特殊情形. 更一般，只要 $f(x)$ 能展成一致收敛的多项式级数：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)$$

那么 $f(x)$ 就能用多项式一致逼近. 反之，能用多项式一致逼近的函数也一定能展开成一致收敛的多项式级数. 事实上，假定 $f(x)$

在$[a,b]$上能用多项式一致逼近，那么对任意自然数n，都可以找到一个多项式Q_n，使得对$[a,b]$中所有x均有

$$|f(x)-Q_n(x)|<\frac{1}{n} \tag{1}$$

令

$$P_1(x)=Q_1(x),P_n(x)=Q_n(x)-Q_{n-1}(x)\quad(n>1)$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n(x)$ 的部分和就是 $Q_n(x)$，不等式(1)说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

由此可见，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以用多项式一致逼近，等价于 $f(x)$ 在这个区间上可以展成一致收敛的多项式级数. 又因为所有的多项式是连续的，因而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能用多项式一致逼近的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. Weierstrass 在 1885 年证明了：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续也是 $f(x)$ 能用多项式一致逼近的充分条件. 在这个定理的各种证明中，伯恩斯坦的证明最普通，因为它的证明是构造性的. 为了证明这个定理，先作些准备工作.

设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的任意函数，记

$$B_{n,k}(x)=C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

则

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)$$

称为函数 $f(x)$ 的 n 次伯恩斯坦(Beixtein) 多项式. 由(2) 定义的 $n+1$ 个多项式，叫做“伯恩斯坦基底”；因为任何 n 次多项式可用它们线性表出. 考察以下三个特例

1. $f(x)=1$

$$B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1$$

2. $f(x)=x$

$$B_n(x;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

令 $i=k-1$，于是

$$B_n(x;x)=x\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}x^i(1-x)^{n-1-i}$$

$$=x\sum_{i=0}^{n-1}B_{n-1,i}(x)=x$$

3. $f(x)=x^2$

用类似上述方法可证

$$B_n(x^2;x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x$$

有了这三个公式之后，我们便可以证明伯恩斯坦逼近定理

定理 1（伯恩斯坦） 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，则对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，凡是 $n>N$ 便有

$$|B_n(f;x)-f(x)|<\varepsilon$$

对 $[0,1]$ 上一切 x 成立.

证 由于 $\sum\limits_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)\equiv 1$，故

$$|B_n(f;x)-f(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]B_{n,k}(x)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 一致连续，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $s,t\in[0,1]$ 且 $|s-t|<\delta$ 时有

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

对于上述的 δ，分拆和式

$$\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

其中

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x)$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x)$$

由于(3)式，可见

$$\sum\nolimits_1 < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \frac{\varepsilon}{2}$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，因此 $f(x)$ 有界. 设 $|f(x)| \leqslant M$，同时注意到 $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta$，因此 $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \geqslant \delta^2$，从而有

$$\sum\nolimits_2 \leqslant 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta} B_{n,k}(x)$$

$$\leqslant 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta} \frac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{\delta^2} B_{n,k}(x)$$

$$\geqslant \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2x\left(\frac{k}{n}\right) + x^2\right] B_{n,k}(x)$$

$$= \frac{2M}{\delta^2} [B_n(x^2; x) - 2xB_n(x; x) + x^2]$$

$$= \frac{2M}{\delta^2} \left[(1 - \frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x - 2x^2 + x^2\right]$$

$$= \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{n} x(1-x)$$

$$\leqslant \frac{2M}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}$$

因此，对任给 $\varepsilon > 0$，取 $N > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$，当 $n > N$ 时

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

对 $[0,1]$ 中一切 x 都成立.

伯恩斯坦逼近定理提供了魏尔斯特拉斯的关于闭区间上的连续函数可以用多项式一致逼近的定理的一个构造性的证明，这就使得伯恩斯坦多项式自从本世纪初开始，直到今天仍是函数逼近论中的重要研究对象. 把 $[0,1]$ 区间推广到一般闭区间 $[a,b]$，便得

定理 2（魏尔斯特拉斯） 有限闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 可以在这个区间上用多项式一致逼近.

证 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，命 $x = a + (b-a)t$，$f(x) = f[a+(b-a)t] = g(t)$，则 $g(t)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，由定理 1，对任意 $\varepsilon > 0$，存在多项式

$$P(t) = B_n(g;t)$$

使得

$$|g(t) - P(t)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

即

$$\left| f(x) - P\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

显然 $P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 仍是 x 的多项式，这就证明了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可用多项式一致逼近.

必须注意，如果把有限闭区间 $[a,b]$ 改成开区间或者无穷区间，定理就不一定成立. 例如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上连续. 但它在 $x=0$ 附近是无界的，因此不可能用多项式来一致逼近. 同样，$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续且有界，但任一多项式在 $[1,+\infty)$ 上无界，故也不能用来一致逼近 $f(x)$.

例 证明函数 $f(x)=|x|$ 在区间 $[-1,1]$ 上能用多项式一致逼近.

证 令 $t=1-x^2$，在 $|t|<1$ 上有

$$|x|=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{1-t}$$
$$=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2\cdot 4}t^2-\cdots-\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n-\cdots$$

由于

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}=\sqrt{\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{(2n)^2}}$$
$$<\frac{1}{2n\sqrt{2n-1}}$$

因此 $|x|$ 的展开式在 $t=\pm 1$ 处也收敛，从而可知上述级数在 $|t|\leqslant 1$ 上一致收敛；故级数

$$|x|=1-\frac{1}{2}(1-x^2)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n$$

在 $|x|\leqslant 1$ 上一致收敛，于是 $|x|$ 在 $[-1,1]$ 上可用多项式

$$1-\frac{1}{2}(1-x^2)-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}(1-x^2)^k$$

一致逼近.

9.4.4 隐函数存在定理

在 6.4.1 中，曾叙述了隐函数的存在定理，现在要用逐次逼近

法来证明这个定理. 为简单起见，这里只论及二元方程 $F(x,y)=0$ 的情形. 但是对于多元方程或方程组的情形，亦不难作类似的证明.

定理 设二元函数 $F(x,y)$ 在以点 (x_0,y_0) 为中心的正方形区域 $D: |x-x_0|\leqslant b, |y-y_0|\leqslant b$ 上连续，且有连续的偏导数 $F'_x(x,y)$ 和 $F'_y(x,y)$，并设：$F(x_0,y_0)=0, F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 则方程

$$F(x,y)=0$$

在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内确定唯一的连续隐函数 $y=y(x)$，满足

$$F(x,y(x))\equiv 0 \quad 且 \quad y(x_0)=y_0$$

证 作辅助函数

$$\varphi(x,y)=y-y_0-\frac{F(x,y)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

则有 $\varphi(x_0,y_0)=0, \varphi'_y(x_0,y_0)=0$. 由于这个函数及其对 y 的微商的连续性，不失一般性，可设区域足够小，使在 D 上恒有

$$|\varphi'_y(x,y)|<q$$

其中 q 是小于 1 的正数. 然后缩小 x 的变化范围成为更小的区间 $[x_0-a,x_0+a]$ $(a<b)$，使得在此区间内，函数 $\varphi(x,y_0)$ 适合不等式

$$|\varphi(x,y_0)|<(1-q)b$$

这时利用引进的辅助函数所给的方程可以改写成

$$y=y_0+\varphi(x,y) \tag{A}$$

而在含于 D 中的区域 D'

$$|x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant b$$

上考虑方程 (A) 的隐函数之存在.

将 y_0 算作是隐函数 y 的零次逼近，并代入到方程 (A) 的右端，如此得到函数

$$y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0)$$

它是 y 的一次逼近；再在方程 (A) 的右端用 $y_1(x)$ 替代 y 就得到二次逼近函数

$$y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1(x))$$

依次类推. 如果已知 $n-1$ 次逼近函数 $y_{n-1}(x)$，则 n 次逼近函数 $y_n(x)$ 由公式

$$y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}(x))$$

确定.

容易看出，当依照这些公式计算各次逼近时，所得函数列 $\{y_n(x)\}$ 不会越出区间 $[y_0 - b, y_0 + b]$ 之外. 以下用归纳法证明这一断言.

由一次逼近函数的定义得

$$y_1(x) - y_0 = \varphi(x, y_0)$$

于是推知

$$|y_1(x) - y_0| = |\varphi(x, y_0)| < (1-q)b < b$$

并且函数 $y_1(x)$ 显然是连续的. 设 $n-1$ 次逼近函数满足

$$|y_{n-1}(x) - y_0| < b$$

则由此可计算第 n 次逼近函数得

$$y_n(x) - y_0 = \varphi(x, y_{n-1}(x))$$

而当函数 $y_{n-1}(x)$ 连续时，函数 $y_n(x)$ 也是连续的. 因为

$$|\varphi(x, y_{n-1}(x))| \leqslant |\varphi(x, y_{n-1}(x)) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0)|$$

利用微分学的中值定理可知在 y_0 与 $y_{n-1}(x)$ 之间存在点 $\xi(x)$，使得

$$|\varphi(x, y_{n-1}(x)) - \varphi(x, y_0)| = |\varphi'_y(x, \xi(x))| \, |y_{n-1}(x) - y_0| < qb$$

又因

$$|\varphi(x,y_0)| < (1-q)b$$

所以

$$|y_n(x) - y_0| = |\varphi(x,y_{n-1}(x))| < qb + (1-q)b = b$$

现在转向逐次逼近函数列 $\{y_n(x)\}$ 的收敛问题. 为此考虑级数

$$y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \cdots$$
$$+ (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \cdots$$

并求差式 $y_n(x) - y_{n-1}(x)$ 的估计值. 当 $n = 1$ 时显然有

$$|y_1(x) - y_0| < (1-q)b$$

当 $n = 2$ 时由微分中值定理与微商 $\varphi'_y(x,y)$ 的有界性可得

$$|y_2(x) - y_1(x)| = |\varphi(x,y_1(x)) - \varphi(x,y_0)|$$
$$< q|y_1(x) - y_0| < q(1-q)b$$

当 $n = 3$ 时依照同样的推理可得

$$|y_3(x) - y_2(x)| = |\varphi(x,y_2(x)) - \varphi(x,y_1(x))|$$
$$< q|y_2(x) - y_1(x)| < q^2(1-q)b$$

依此类推，一般地就有

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < q^{n-1}(1-q)b$$

于是上述函数项级数除第一项外其余各项的绝对值就不超过收敛的等比级数

$$(1-q)b(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots)$$

的对应各项，因而这个函数项级数在区间 $[x_0 - a, x_0 + a]$ 上一致收敛. 设其极限函数为 $y(x)$，就有

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

且在 $[x_0 - a, x_0 + a]$ 上连续. 在公式

$$y_n(x) = y_0 + \varphi(x,y_{n-1}(x))$$

中令 n 无限增大取极限就得到

$$y(x) = y_0 + \varphi(x,y(x))$$

亦即函数 $y(x)$ 满足方程

$$F(x,y(x)) \equiv 0$$

又从各次逼近函数 $y_n(x)$ 的定义容易看出 $y_n(x_0)=y_0$，所以也有

$$y(x_0)=y_0$$

最后余下的问题是要证明隐函数存在的唯一性，假设除函数 $y(x)$ 外还有另一函数 $z(x)$，它在区间 $[x_0-a,x_0+a]$ 上连续，并且也满足方程

$$z(x)=z_0+\varphi(x,z(x))$$

于是推知

$$|y(x)-z(x)|=|\varphi(x,y(x))-\varphi(x,z(x))|<q|y(x)-z(x)|$$

因 q 是小于 1 的正数，故 $y(x)\neq z(x)$ 是不合理的，即隐函数是唯一的.

从上面的证明中可以看出，这个逐次逼近法不仅能确定隐函数的存在，而且也给出它的实际计算.

习题 9.4

1. 取被积函数所展开的幂级数的前三项计算积分 $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$，并估计误差.

2. 计算下列定积分的近似值：

(1) $\int_0^{0.5}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$ （精确到 0.001）

(2) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$ （精确到 0.001）

3. 利用 Stirling 公式求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

4. 研究下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$

5. 证明：当 $n \to \infty$ 时，$\ln(n!) \sim \ln n^n$.

6. 设 $g(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续，证明对任给 $\varepsilon > 0$，存在偶三角多项式 $T(x)$，使得有

$$|g(x) - T(x)| < \varepsilon$$

7. 设 $x_1, x_2 \in [a,b]$，$x_1 \neq x_2$，则存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = x_1 \\ 0, & x = x_2 \end{cases}$$

且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能被多项式一致逼近.

复 习 题

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且数列 $\{a_n\}$ 单调递减，证明 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

2. 设 $a_n > 0$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛.

3. 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^k \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n}$ (4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{n^2+1}\,\pi$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{na^{2n}}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{\ln n}}$ $(a > 0)$

4. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{e^{nx}\cdot\sqrt{n+x}}$, $0\leqslant x<+\infty$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$, $0\leqslant x<1$

5. 证明:级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{(1+x)^n}$ 在 $(0,+\infty)$ 内绝对并一致收敛，但 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n x}{(1+x)^n}\right|$ 在 $(0,+\infty)$ 内并不一致收敛.

6. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，又设 $F_0(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，$F_1(x)=\int_a^x F_0(x)\mathrm{d}x,\cdots,F_n(x)=\int_a^x F_{n-1}(x)\mathrm{d}x,\cdots\quad(a\leqslant x\leqslant b)$

(1)证明级数 $F_0(x)+F_1(x)+\cdots+F_n(x)+\cdots$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；

(2)若级数 $F_0(x)+F_1(x)+\cdots+F_n(x)+\cdots$ 在 $[a,b]$ 上的和函数为 $S(x)$，求证 $S(x)$ 满足方程

$$S'(x)-S(x)=f(x)$$

7. 证明：$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\cos nx$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛，但是连续的.

8. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$；若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则

$$\int_a^b g(x)S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b g(x)f_n(x)\mathrm{d}x$$

9. 求下列无穷级数的和

(1) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

(2) $1^2+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$

10. 求下列广义幂级数的收敛域，并在收敛域内求和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^n}$　　　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

11. 求下列函数的幂级数展开式，并求成立区间：

(1) $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$

(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　　(3) $\operatorname{arctg}\frac{4+x^2}{4-x^2}$

12. 将下列积分表成级数形式：

(1) $\int\frac{\sin x}{x}dx$　　　　(2) $\int_0^x e^{-x^2}dx$

(3) $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$　　　　(4) $\int_0^1\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2dx$

13. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是递减的正项发散级数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=1$$

14. 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 的前 N 项之和 S_N 分为两个项 S_N^+ 与 S_N^- 相加，其中 S_N^+、S_N^- 分别为正项之和与负项之和，证明：$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N^-}{S_N^+}$ 存在，并求其值.

10 含参变量的积分

构造新函数的另一途径是引入含参变量的积分.这些积分在本质上与函数项级数并无区别,因此对于函数项级数的许多定理都可以毫无困难地类推到含参变量的积分中,从而建立起相应的理论.

10.1 广义积分的收敛性判别

10.1.1 无穷区间积分的收敛判别法

在第三章第六节曾介绍过积分区间为无限和被积函数在积分区间上有瑕点这两类广义积分,并给出其敛散的定义.但对如何判断这两种积分的敛散,没有作进一步的讨论.学过无穷级数后再来学习广义积分的收敛判别法,就会发现二者有许多类似之处.

首先讨论无穷区间上的积分,所谓无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,是指

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

有有限的极限.如果记

$$F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$F(b)$ 相当于无穷级数中的部分和.那么无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛就是指函数 $F(b)$ 当 $b\to+\infty$ 时有有限的极限,由此导出类似于级

数中的柯西收敛准则.

定理 1(Cauchy 准则) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续,则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是对于任意给定的正数 ε,总有这样的正数 B 存在,只要 $b_1, b_2 > B$,不等式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

成立.就是函数 $f(x)$ 在距原点充分远的任意区间上的积分之绝对值小于 ε.

证 依定义,积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛相当于函数

$$F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

当 $b \to +\infty$ 时有有限的极限.根据函数极限存在的柯西准则,即对任意 $\varepsilon < 0$,总有这样的正数 B 存在,使得只要 $b_1, b_2 > B$,就有

$$|F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$$

成立.而

$$F(b_2) - F(b_1) = \int_a^{b_2} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{b_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x$$

所以当 $b_1, b_2 > B$ 时,有不等式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

也和级数一样,对任意函数的广义积分引进绝对收敛概念,并且有类似的定理.

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续,且积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.这时称后一积分为绝对收敛.

证 因为积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,根据定理 1,对任意 $\varepsilon > 0$,

总存在正数 B，使得当 $b_1, b_2 > B$ 时有不等式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)| \mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

但

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x) \mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)| \mathrm{d}x\right|$$

所以也有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x) \mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

再利用定理 1，即得积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

必须注意，并不是任何一个收敛的积分都是绝对收敛的. 有的收敛积分，把被积函数换成它的绝对值后就得到了发散的积分，这类积分又称为是条件收敛的.

象无穷级数中的正项级数一样，非负函数的积分也有一些便于应用的判别法.

定理 3 设函数 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上的非负连续函数，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 有界 $(a \leqslant b < +\infty)$.

证 因为 $f(x) \geqslant 0$，则积分

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

是上限 b 的单调增函数，所以

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

存在的充分必要条件是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 有界.

根据这个定理，就能得到类似级数中的比较判别法.

定理 4 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且对充分大的 x 满足不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$$

那么

(i) 若 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(ii) 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明和级数中的比较判别法一样，留给读者作练习.

由于当 $p>1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ $(a>0)$ 收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散；所以在定理 4 中，经常拿 $f(x)$ 与函数 $\frac{1}{x^p}$ 作比较，即得

推论 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续 $(a>0)$.

(i) 如果对充分大的 x，有不等式

$$|f(x)|\leqslant\frac{c}{x^p}\quad(p>1,c\text{ 为正常数})$$

那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(ii) 如果对充分大的 x，有不等式

$$f(x)\geqslant\frac{c}{x^p}\quad(p\leqslant 1,c\text{ 为正常数})$$

那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 1 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

这是因为当 $1\leqslant x<+\infty$ 时有

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2},\ \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}$$

由推论知原积分绝对收敛.

例 2 证明对任意实数 α，积分 $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ 收敛.

证 因为对任意确定的实数 α，有

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

故对充分大的 x 有 $x^\alpha e^{-\frac{x}{2}} < 1$，于是推知

$$x^\alpha e^{-x} < e^{-\frac{x}{2}}$$

而积分 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$ 收敛，由定理 4 得积分 $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ 收敛.

在实际应用中，更方便的是比较判别法的极限形式.

定理 5 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[a, +\infty)$ 上的非负连续函数，且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

那么

(i) 若 $0 < k < +\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散；

(ii) 若 $k = 0$，则当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；

(iii) 若 $k = +\infty$，则当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

证明和级数中相应的定理一样，留给读者作练习.

例 3 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}$ 是收敛的.

因为当 $x \to +\infty$ 时

$$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)} \sim \frac{1}{x^{5/2}}$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}dx$ 收敛，根据定理 5 的(i)知原积分收敛.

例 4 研究积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 由于当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^{3/2}}\sim\frac{\pi}{2x^3}$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ 收敛,所以原积分收敛.

10.1.2 收敛性的精细判别法

下面要指出另一些更为精细的判别法,它能在不绝对收敛的情形下来判定广义积分收敛.为此,先来建立关于两个函数乘积的积分的某些引理.

引理 1 如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 可积,而非负函数 $g(x)$ 是单调减的,则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

证 因为 $f(x)$ 可积,$g(x)$ 是非负单调减的,也是可积的,所以 $f(x)g(x)$ 可积.用任意的分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间,于是有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)[g(x)-g(x_{i-1})]\mathrm{d}x \tag{1}$$

若以 k 表示 $|f(x)|$ 的上界,w_i 表示 $g(x)$ 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅,则有

$$\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)[g(x)-g(x_{i-1})]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)||g(x)-g(x_{i-1})|\mathrm{d}x \leqslant k\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 因为 $g(x)$ 可积，所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i = 0 \quad (\lambda = \max_i \Delta x_i)$$

这样一来(1)可以写成

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

命

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

那么(2)式右边的和数可写成

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= g(x_0)[F(x_1) - F(x_0)] + g(x_1)[F(x_2) - F(x_1)] + \cdots$$

$$+ g(x_{n-1})[F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

$$= F(x_1)[g(x_0) - g(x_1)] + F(x_2)[g(x_1) - g(x_2)] + \cdots$$

$$+ F(x_{n-1})[g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})] + F(b)g(x_{n-1})$$

因为连续函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最小值 m 与最大值 M ，而所有因式 $g(x_{i-1}) - g(x_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 都是非负的，所以当分别用 m 与 M 代替 $F(x)$ 的值时就得到不等式

$$mg(a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a)$$

命 $\lambda \to 0$ ，即得

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a)$$

由此推得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu g(a)$$

其中 $m \leqslant \mu \leqslant M$. 但据函数 $F(x)$ 的连续性,可知在闭区间 $[a,b]$ 上必有一点 ξ 存在,使 $\mu = F(\xi)$.

从而

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)F(\xi)$$

这就是所要的公式.

如果非负函数 $g(x)$ 是单调增的,则可用同样的方法证明:在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中有正有负,这时有

引理 2 如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 可积,而函数 $g(x)$ 是单调的,则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

证 假设 $g(x)$ 是单调减的,则差式 $g(x) - g(b)$ 就是非负的. 应用引理 1 就得到

$$\int_a^b f(x)[g(x) - g(b)]\mathrm{d}x = [g(a) - g(b)]\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

由此化简后即得所需证明之公式.

同法证明 $g(x)$ 是单调增的情形.

所证明的这些引理统称为第二中值定理,其中的公式又称波内(Bonnet)公式. 从它可以引出与无穷级数类似的迪里赫勒判别法和阿贝尔判别法.

定理 1(Dirichlet 判别法) 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续,且满足

(i) $F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a < b < +\infty)$ 有界;

(ii) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中单调,且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

证 由引理 2,对任意的 $b_2 > b_1 > a$ 都有

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x$$

其中 ξ 是区间 $[b_1,b_2]$ 上的一点. 又据条件(i),存在常数 M,使得

$$|F(b)| = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M \quad (a < b < +\infty)$$

因而

$$\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| = |F(\xi) - F(b_1)| \leqslant 2M$$

$$\left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x\right| = |F(b_2) - F(\xi)| \leqslant 2M$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,故对任意 $\varepsilon > 0$,存在正数 B,使得只要 $x > B$,就有

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

于是当 $b_2 > b_1 > B$ 时,就得到

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| = |g(b_1)|\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(b_2)|\left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon$$

根据 10.1.1 的定理 1,可见积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

推论 如果当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)$ 单调减趋于 0,那么积分

$$\int_a^{+\infty} g(x)\sin x\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty} g(x)\cos x\mathrm{d}x$$

收敛.

证 由于对任意 $b > a$，都有

$$\left|\int_a^b \sin x \mathrm{d}x\right| = |\cos a - \cos b| \leqslant 2$$

$$\left|\int_a^b \cos x \mathrm{d}x\right| = |\sin b - \sin a| \leqslant 2$$

根据 Dirichlet 判别法，上面两个积分收敛.

例 1 证明积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\ (a > 0)$ 是条件收敛.

证 由上面的推论即得积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，但被积函数取绝对值后构成的积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

是发散的. 因为 $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$，而

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$$

其中积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛，积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散，所以积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散，由此推得积分 $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散. 从而证明了所给积分是条件收敛的.

同样可得一般的积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$$

当 $0 < p \leqslant 1$ 时都是条件收敛的.

例 2 判断积分 $\int_a^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} x\sin x^3 \mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 令 $x^2 = t$，有

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

故知原积分条件收敛. 用同样方法可以证明积分 $\int_a^{+\infty} x\sin x^3 \mathrm{d}x$ 也是条件收敛的.

定理 2（Abel 判别法） 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，且满足

(i) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(ii) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

证 由于 x 无限增大时，$g(x)$ 单调有界，故存在有限的极限，命

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$$

那么差式 $g(x) - b$ 就是趋于零的单调函数. 又因积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故对任意的 $b > a$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是有界的，从而由定理 1 推知积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - b]\mathrm{d}x$$

收敛，于是积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - b]\mathrm{d}x + b\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

也收敛.

以上只是考察了积分区间 $[a, +\infty)$ 上的无穷积分，但是对它所得到的结论以及收敛性的各种判别法都可以类推到积分区间为 $(-\infty, b]$ 或整个数轴上的广义积分.

无穷积分的内容与无穷级数的相应部分是平行的，很多定理

几乎是逐字逐句搬过来的. 原因很简单,因为无穷积分与无穷级数同样是一个极限过程,只不过无穷积分是函数的极限,无穷级数是数列的极限罢了. 但是必须注意,二者还是有差别的:数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}a_n = 0$$

而无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,被积函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时可以不趋于 0,甚至可以是无界的. 例 2 的两个收敛积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty}x\sin x^3\mathrm{d}x$$

就说明这个问题.

10.1.3 无界函数积分的收敛判别法

现在转向被积函数有瑕点的另一种类型的广义积分. 这类广义积分与无穷区间上的广义积分有着十分紧密的联系.

假设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续,且以 a 为瑕点,就是当 x 趋于 a 时, $f(x)$ 无界. 由定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

在这个极限等式右边的积分中作变量代换 $x = a+\frac{1}{y}$,就得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\\ &= \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\end{aligned}$$

这样一来,无穷积分所建立的整个理论,就可以且通过这种联系,完全平移到无界函数的广义积分中来,从而相应地得到它的基本理论. 这里不再重复这些定理的证明,只把结果写下来. 为一致起

见，下面的定理中总是假设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且以 a 为瑕点.

定理 1（柯西收敛准则） 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $0<\delta'<\delta, 0<\delta''<\delta$，就有

$$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

定理 2 如果积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

定理 3 如果对于充分接近 a 的 $x\ (>a)$ 有不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant \varphi(x)$$

那么

(i) 若 $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(ii) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论 如果对充分接近 a 的 $x\ (>a)$，

(i) 有不等式

$$|f(x)|\leqslant \frac{c}{(x-a)^p}\quad (p<1, c\text{ 为正常数})$$

那么积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(ii) 有不等式

$$f(x)\geqslant \frac{x}{(x-a)^p}\quad (p\geqslant 1, c\text{ 为正常数})$$

那么积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 4 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是 $(a,b]$ 上的非负连续函数，且

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k$$

那么

(i) 若 $0 < k < +\infty$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ 同敛散；

(ii) 若 $k = 0$，则当 $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(iii) 若 $k = +\infty$，则当 $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 1 研究椭圆积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ 的敛散性，其中 $k^2 < 1$.

这里被积函数以积分上限 $x = 1$ 为瑕点，由于

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

又 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$ 收敛，根据定理 4 知椭圆积分收敛.

例 2 研究积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 看上去似乎 $x = 0$，$x = 1$ 都是瑕点，但实际上，由于

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}$$

被积函数在 $x = 1$ 附近是有界的，因此 $x = 1$ 并非瑕点.

考虑 $x = 0$ 附近的情况. 对充分小的 x，恒有 $1 - x^2 \geqslant \frac{1}{2}$，所以

$$\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right| \leqslant 2|\ln x|$$

而积分 $\int_0^1 |\ln x|\mathrm{d}x = -\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ 是收敛的，因此原积分收敛.

例 3 研究积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{2+x^\beta}\mathrm{d}x$ $(\beta \geqslant 0)$ 的收敛性.

解 当 $\alpha < 0$ 时，$x = 0$ 是瑕点，但它又是无穷积分，所以把积分拆成两部分来考虑：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}\mathrm{arctg}x}{2+x^{\beta}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{\alpha}\mathrm{arctg}x}{2+x^{\beta}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha}\mathrm{arctg}x}{2+x^{\beta}}\mathrm{d}x$$

当 $x\to 0$ 时，

$$\frac{x^{\alpha}\mathrm{arctg}x}{2+x^{\beta}}\sim\frac{1}{2}x^{\alpha+1}$$

故当 $-\alpha-1<1$，即 $\alpha>-2$ 时，第一个积分收敛；当 $x\to+\infty$ 时，

$$\frac{x^{\alpha}\mathrm{arctg}x}{2+x^{\beta}}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$$

故当 $\beta-\alpha>1$ 时，第二个积分收敛；所以原积分当 $\alpha>-2$ 且 $\beta-\alpha>1$ 时收敛.

复习思考题

1. 写出无穷区间上的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性的比较判别法及一般收敛性准则.

2. 两类广义积分有何联系？当为瑕点时，试由此建立广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的相应理论.

3. 如果 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，是否断言 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$？

4. 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中是非负的连续函数，从 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛能否断言 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$？

5. 从 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛能否断言 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛？从 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛能否断言 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛？举例说明.

习题 10.1

1. 判断下列广义积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1-x^2)^2}dx$ (4) $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}dx$

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$ (6) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}dx$

(7) $\int_a^b\frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$ (8) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(9) $\int_0^1\frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$ (10) $\int_0^1\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}dx$

(11) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}dx$ (12) $\int_0^1\frac{dx}{e^x-\cos x}$

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$ (14) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x(x^2-1)}dx$

(15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos x}}$ (16) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$

(17) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ (18) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^n}dx$

2. 证明对于无穷限积分，分部积分公式成立(当公式中各部分都有意义时)：

$$\int_a^{+\infty}f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}g(x)f'(x)dx$$

并证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

3. 研究下列积分的条件收敛性与绝对收敛性：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\ \sqrt[3]{x^2+1}}dx$　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln x}dx$　　(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})}dx$

10.2 含参变量的常义积分

10.2.1 含参变量的常义积分的性质

设二元函数 $f(x,u)$ 在矩形区域 D $(a\leqslant x\leqslant b, \alpha\leqslant u\leqslant \beta)$ 上连续，对于区间 $[\alpha,\beta]$ 上的任意固定变量 u，函数 $f(x,u)$ 对变量 x 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，这时称积分

$$\int_a^b f(x,u)dx$$

是**含参变量 u 的常义积分**. 如果对于固定的 u，被积函 $f(x,u)$ 对变量 x 在 $[a,b]$ 上无界，或者积分区间是无限的，则称相应的参变量积分是**含参变量 u 的广义积分**.

这一节讨论含参变量的常义积分的性质.

定理 1 如果函数 $f(x,u)$ 在矩形区域 D $(a\leqslant x\leqslant b, \alpha\leqslant u\leqslant \beta)$ 上连续，则

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

证 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上任取一点 u_0，于是

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)| = \left|\int_a^b f(x,u)dx - \int_a^b f(x,u_0)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x,u)-f(x,u_0)|dx$$

由于 $f(x,u)$ 在闭区域 D 上连续，则必一致连续. 故对任意 $\varepsilon>0$，存

在这样的正数 δ，只要 D 中两点 (x_1,u_1) 与 (x_2,u_2) 的距离小于 δ，就有

$$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\varepsilon$$

特别当 $|u-u_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x,u)-f(x,u_0)|<\varepsilon$$

从而得到

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<(b-a)\varepsilon$$

这就证明了 $\varphi(u)$ 在点 u_0 处连续.

由于

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0)$$

或写成

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x$$

这就是说极限运算与积分运算的次序可以变换.

在确定了 $\varphi(u)$ 是参变量 u 的连续函数之后，就有可能来考察它在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的积分

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$

当函数 $f(x,u)$ 在矩形区域 D 上连续，上式右端积分等于 $f(x,u)$ 在 D 上的二重积分，故也可写成

$$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

这便是下面的

定理 2 如果函数 $f(x,u)$ 在矩形区域 D $(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 上连续，则有

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

现在进一步研究函数 $\varphi(u)$ 的可微性.

定理 3 设函数 $f(x,u)$ 在矩形区域 $D(a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 上连续，且对 u 有连续的偏微商则函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是可微的，并且

$$\varphi'(u)=\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$$

证 令

$$\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x=g(u)$$

则 $g(u)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，根据定理 2，当 $\alpha\leqslant v\leqslant\beta$ 时有

$$\int_\alpha^v g(u)\mathrm{d}u=\int_a^b\left[\int_\alpha^v\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b[f(x,v)-f(x,\alpha)]\mathrm{d}x=\varphi(v)-\varphi(\alpha)$$

由定理 1 知，$g(u)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，上式对 v 求导数即得

$$\varphi'(v)=g(v)$$

这就是所要证明的公式.

这个定理告诉我们，在 $f(x,u)$ 与 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 连续的条件下，微分和积分的次序可以变换.

例 试求积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

解 考虑含参变量的积分

$$I(u)=\int_0^1\frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

这个积分的被积函数 $\dfrac{\ln(1+ux)}{1+x^2}$ 及其关于 u 的偏微商 $\dfrac{x}{(1+x^2)(1+ux)}$ 都在矩形区域 $D(0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant u\leqslant 1)$ 上连续，

由定理 3 就有

$$
\begin{aligned}
I'(u) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+u^2}\int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{u}{1+x^2} - \frac{u}{1+ux}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+u^2}\left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}u - \ln(1+u)\right]
\end{aligned}
$$

将此式的两端关于 u 从 0 到 1 积分得

$$
\begin{aligned}
I(1) - I(0) &= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}u - \ln(1+u)\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg} u \Big|_0^1 + \frac{\pi}{8}\ln(1+u^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{1+u^2}\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I(1)
\end{aligned}
$$

又 $I(0) = 0$，故所求积分的值为 $I(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2$．

另外，也可根据定理 2 求得积分值 $I(1)$．因为

$$
\ln(1+ux) = \int_0^u \frac{x}{1+xy}\mathrm{d}y
$$

所以

$$
I(u) = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\left(\int_0^u \frac{\mathrm{d}y}{1+xy}\right)\mathrm{d}x
$$

由于 $\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant u$ 内连续，故有

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \int_0^u \left[\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^u \frac{1}{1+y^2}\left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}y - \ln(1+y)\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg} u + \frac{\pi}{8}\ln(1+u^2) - \int_0^u \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

令 $u = 1$，有

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

10.2.2 积分限依赖于参变量的积分的性质

在实际应用中，经常要遇到这样的情形，不仅被积函数含有参变数，积分限也含有参变数，这时积分可写成

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$$

它显然也确定一个参变量 u 的函数.

如同积分限是常数的情形一样，也有关于函数 $\psi(u)$ 的连续性、可微性定理.

定理 1 设函数 $f(x,u)$ 在矩形区域 $D(a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$ 上连续，而函数 $a(u)$ 及 $b(u)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，并且

$$a \leqslant a(u) \leqslant b, a \leqslant b(u) \leqslant b$$

则

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$$

是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

证 在 $[\alpha,\beta]$ 上任取一点 u_0，并将参变量积分 $\psi(u)$ 写成

$$\psi(u) = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u)\mathrm{d}x + \int_{a(u_0)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x + \int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)\mathrm{d}x$$

右端第一个积分由于上下限都是常数，所以它关于 u 是连续的. 于是有

$$\lim_{u \to u_0} \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u_0)\mathrm{d}x$$

而第二个与第三个积分有估计值

$$\left|\int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\left|b(u)-b(u_0)\right|$$

$$\left|\int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\left|a(u)-a(u_0)\right|$$

其中 M 是连续函数 $|f(x,u)|$ 在区域 D 上的最大值. 因为 $a(u)$, $b(u)$ 在点 u_0 连续,所以当 $u\to u_0$ 时,这两个积分趋于零. 于是

$$\lim_{u\to u_0}\psi(u)=\int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u_0)\mathrm{d}x=\psi(u_0)$$

即 $\psi(u)$ 在点 u_0 处连续. 由 u_0 的任意性知, $\psi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

定理 2 设函数 $f(x,u)$ 在矩形区域 $D(a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 上连续且对 u 有连续的偏微商,而函数 $a(u)$ 及 $b(u)$ 都在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可微,并且

$$a\leqslant a(u)\leqslant b,\quad a\leqslant b(u)\leqslant b$$

则函数 $\psi(u)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可微,且有

$$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u)$$

证 令

$$F(u,y,z)=\int_y^z f(x,u)\mathrm{d}x$$

其中 $y=a(u),z=b(u)$,于是 $\psi(u)$ 是由于 $F(u,y,z)$ 与 $y=a(u)$, $z=b(u)$ 复合而成的复合函数,由复合函数的可微性及链式法则,有

$$\begin{aligned}\psi'(u)&=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\\&=\int_y^z\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(z,u)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}-f(y,u)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\end{aligned}$$

将 $y=a(u),z=b(u)$ 代入上式有

$$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f[b(u),u]b'(u)-f[a(u),u]a'(u)$$

例 设 $I(u)=\int_u^{u^2}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$，求 $I'(u)$.

解 由于 $x=0$ 是 $\frac{\sin ux}{x}$ 的可去间断点，故 $\frac{\sin ux}{x}$ 对任意 x,u 都是连续的，且对 u 有连续的偏微商，故由定理 2 有

$$
\begin{aligned}
I'(u)&=\int_u^{u^2}\cos ux\mathrm{d}x+2u\frac{\sin u^3}{u^2}-\frac{\sin u^2}{u}\\
&=\frac{\sin ux}{u}\Big|_u^{u^2}+\frac{2\sin u^3}{u}-\frac{\sin u^2}{u}\\
&=\frac{3\sin u^3-2\sin u^2}{u}
\end{aligned}
$$

习题 10.2

1. 试用两种方法计算以下极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$

(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$

2. 求 $F'(\alpha)$：

(1) $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(2) $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$

(3) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$

(4) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t,\quad c,x\in[a,b]$$

满足常微分方程

$$y'' + k^2 y = f(x)$$

其中 c 与 k 为常数.

4. 应用对参数进行微分或积分的方法,计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} \quad (|a| < 1)$

10.3 含参变量的广义积分

10.3.1 积分的一致收敛概念

这一节我们进一步考虑含参变量的广义积分. 为确定起见,只讨论具有无穷上限的积分,而对它建立起来的一切理论可以类推到具有无穷下限及无界函数的积分.

假设函数 $f(x,u)$ 在区域 $D(a \leqslant x < +\infty, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$ 上连续,若对参变量 u 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的每一个值,广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

都收敛,则它就确定了区间 $[\alpha,\beta]$ 上的一个函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

我们知道,在函数项级数的理论中,一致收敛的概念起着重要

的作用．在讨论广义积分所确定的函数 $\varphi(u)$ 的性质时，类似的概念也具有决定性的意义．

所谓积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 收敛，是指对于每个固定的 u，有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

即对任意的 $\varepsilon > 0$，存在数 $B(> a)$，当 $b > B$ 时有

$$\left|\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_b^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

一般说来，数 B 不仅依赖于 ε，而且还依赖于参变量 u．

定义 如果对任意给定的正数 ε，总能找到仅与 ε 有关的数 $B(> a)$，当 $b > B$ 时，不等式

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u 值成立，就称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛．这里的 $[\alpha,\beta]$ 可换成开区间或无穷区间．

那末，何谓非一致收敛呢？可叙述为：

总存在某个正数 ε_0，对任意的 B，总存在某个 $b_0 > B$ 及某个 $u_0 \in [\alpha,\beta]$，使

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0$$

成立，就称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上非一致收敛．

和广义积分的收敛判别法一样，这里也有一系列和函数项级数类似的一致收敛判别法．

定理 1(Cauchy 准则) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是：对任意给定的正数 ε，总存在一个仅与 ε 有关的数 B，使得当 $b_1,b_2 > B$，就有不等式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

对区间 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u 值成立.

证明和函数项级数的柯西准则相仿. 留给读者作练习. 同样也有类似于函数项级数的魏尔斯特拉斯判别法.

定理 2（Weierstrass 判别法） 设 $f(x,u)$ 在区域 $D(a \leqslant x < +\infty, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$ 上连续. 如果存在一个连续函数 $p(x)$，使得对于一切充分大的 x 以及区间 $[\alpha,\beta]$ 上的任意 u 都有

$$|f(x,u)| \leqslant p(x)$$

且积分 $\int_a^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

事实上，由 $\int_a^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x$ 收敛可知，存在这样的数 B，当 $b_1,b_2 > B$ 时有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} p(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

于是推得

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x,u)|\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{b_1}^{b_2} p(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

由柯西准则可见所考察的积分一致收敛.

和函数项级数一样，也有更精细的迪里赫勒判别法和阿贝尔判别法.

定理 3（Dirichlet 判别法） 如果函数 $f(x,u)$ 与 $g(x,u)$ 在区域 $D(a \leqslant x < +\infty, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$ 上连续，且满足：

(i) 对任意 $b > a$，积分 $\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致有界，即存在与 b,u 无关的正常数 k，使得 $\left|\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right| < k$；

(ii) $g(x,u)$ 是 x 的单调函数，且当 x 无限增大时关于 u 一致

趋于零.

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证 由条件(i),对任意 $b_1,b_2>a$ 及一切 $u\in[\alpha,\beta]$ 都有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{b_1} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{b_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < 2K$$

又因 $g(x,u)$ 当 x 无限增大时一致趋于零,所以对任给正数 ε,总能找到数 $B>a$,只要 $x>B$,不等式

$$|g(x,u)| < \frac{\varepsilon}{4K}$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上一切 u 都成立. 于是当 $b_1,b_2>B$ 时,根据第二中值定理,便有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant |g(b_1,u)|\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + |g(b_2,u)|\left|\int_{\xi}^{b_2} f(x,u)\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K = \varepsilon\end{aligned}$$

由定理 1 便知积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

类似地可以证明阿贝尔判别法.

定理 4(Abel 判别法) 如果函数 $f(x,u)$ 与 $g(x,u)$ 在区域 $D(a\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 上连续,且满足:

(i) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛;

(ii) $g(x,u)$ 对 x 单调,且关于 u 一致有界.

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例 1 研究积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin ux}{x^2}\mathrm{d}x$ 在 $-\infty<u<+\infty$ 上的一致收敛性.

解 因为对任意的 u 有

$$\left|\frac{\sin ux}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

而积分 $\int_1^{-\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知原积分关于 u 在整个数轴上一致收敛.

例 2 证明当 $\alpha,\beta > 0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2}\mathrm{d}x$ 在 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 上一致收敛.

证 由于对任意的正数 b，均有

$$\left|\int_0^b \sin\beta x\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1 - \cos\beta b}{\beta}\right| \leqslant \frac{2}{\beta_0}$$

即积分 $\int_0^b \sin\beta x\mathrm{d}x$ 在 $\beta \geqslant \beta_0$ 上一致有界. 而函数 $\frac{x}{\alpha^2 + x^2}$ 与参变量 β 无关，且当 x 趋于无穷时单调减少趋于零，故由 Dirichlet 判别法知，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2}\mathrm{d}x$ 在 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 上一致收敛.

例 3 证明积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 对 $u \geqslant 0$ 是一致收敛的.

证 因为积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，而函数 e^{-ux} 关于 x 是单调减少的，且在区域 $D(0 \leqslant x < +\infty, 0 \leqslant u < +\infty)$ 上有界 $\mathrm{e}^{-ux} \leqslant 1$，故由 Abel 判别法知原积分当 $u \geqslant 0$ 是一致收敛的.

例 4 证明积分 $\int_a^{+\infty} u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 在 $0 \leqslant u < +\infty$ 上不一致收敛.

证 显然积分在 $u \geqslant 0$ 收敛. 今证它不一致收敛. 存在正数 $\varepsilon_0 < \mathrm{e}^{-1}$，对任意的 B，存在 $b_0 > B$ 及 $u_0 = \frac{1}{b_0} \in [0, +\infty)$，有

$$\left|\int_{b_0}^{+\infty} u_0\mathrm{e}^{-u_0x}\mathrm{d}x\right| = \mathrm{e}^{-1} > \varepsilon_0$$

成立，从而得到积分 $\int_a^{+\infty} u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 在 $[0, +\infty)$ 上是不一致收敛的.

10.3.2 一致收敛积分的性质

设含参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛，我们要研究由它所确定的函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

的性质. 它也有与函数项级数的和函数完全类似的关于连续，导数与积分等一些分析性质.

定理 1 若函数 $f(x,u)$ 在区域 $D(a\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 上连续，且积分

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上关于 u 一致收敛，则函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证 由于积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，故对任意的 $\varepsilon>0$，总存在这样的数 B，只要 $b>B$，就有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u 值成立. 今在 $[\alpha,\beta]$ 上任取一点 u_0，因为含参变量的常义积分 $\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，所以存在正数 δ，当 $|u-u_0|<\delta$ 时有

$$\left|\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是只要 $|u-u_0|<\delta$，即可推得

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|=\left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\left|\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|$$

$$+\left|\int_{b}^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

这就证明了 $\varphi(u)$ 在点 u_0 连续. 由于 u_0 的任意性，故 $\varphi(u)$ 在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

这个定理也可写成

$$\lim_{u\to u_0}\int_{a}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\left(\lim_{u\to u_0}f(x,u)\right)\mathrm{d}x$$

即在定理 1 的条件下，极限号与积分号可以交换顺序.

定理 2 若函数 $f(x,u)$ 在区域 $D(a\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 上连续，且积分

$$\varphi(u)=\int_{a}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上关于 u 一致收敛，则有

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(u)\mathrm{d}u=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=\int_{a}^{+\infty}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

证 由假设可知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在这样的数 B，只要 $b>B$，不等式

$$\left|\int_{b}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u 成立. 因为

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(u)\mathrm{d}u=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{a}^{b} f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u+\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{b}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$

而对含参变量的常义积分应有

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{a}^{b} f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=\int_{a}^{b}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

所以当 $b>B$ 时就得到

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(u)\mathrm{d}u-\int_{a}^{b}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}\left|\int_{b}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}u$$

$$< (\beta - \alpha)\varepsilon$$

这正说明了积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

收敛，并且等于 $\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u$.

例 1 计算积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$，其中 $0<a<b$.

解 被积函数可以表成积分

$$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b \mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}u$$

于是所要计算的积分就变为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}u$$

由于对任意 $u\in[a,b]$，有

$$\mathrm{e}^{-ux}\leqslant \mathrm{e}^{-ax}$$

而无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛 $(a>0)$，由 Weierstrass 判别法知，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，又 e^{-ux} 在区域 D $(0\leqslant x<+\infty,\ a\leqslant u\leqslant b)$ 上连续，根据定理 2 便得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln\frac{b}{a}$$

在定理 2 的条件下，对 x 和 u 进行积分的次序可以交换，这里关于 u 的积分区间 $[\alpha,\beta]$ 是有限的. 但在很多的情况下，往往需要知道两个无穷区间的积分次序是否可以交换，即在什么条件下，有等式

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$

定理 3 如果 $f(x,u)$ 满足下列条件：

(i) $f(x,u)$ 在 $a\leqslant x<+\infty, \alpha\leqslant u<+\infty$ 上连续；

(ii) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$$

分别关于 u 在任何 $[\alpha,\beta]$ 上，关于 x 在任何 $[a,b]$ 上一致收敛；

(iii) 积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$

中至少有一个存在.

那么积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$

都存在，而且相等，即

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x=\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$

证 为确定起见，不妨假定

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

存在，要证明的便是

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^{\beta}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 中一致收敛，因而

$$\int_\alpha^{\beta}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

这样一来，要证明的变成

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

也即

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$

由于积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

收敛，故存在 $b > a$，使得

$$\int_b^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\left|\int_b^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_b^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_b^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

把(1)式左端的积分拆成两部分：

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x = \int_a^b\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[a,b]$ 中一致收敛，故必存在 β_0，当 $\beta > \beta_0$ 时，不等式

$$\left|\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

对 $[a,b]$ 中所有 x 成立. 由此得

$$\left|\int_a^b\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b\left|\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

所以，当 $\beta > \beta_0$ 时

$$\left|\int_a^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \left|\int_a^b\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_b^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

这就证明了(1)成立.

最后再来研究函数 $\varphi(u)$ 的求导问题.

定理 4 如果函数 $f(x,u)$ 满足下列条件:

(i) $f(x,u)$ 和 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 在 $a\leqslant x<+\infty, \alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上连续;

(ii) $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛;

(iii) $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

那么 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微,而且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x \quad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$$

证 对任意自然数 n,令

$$\varphi_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x$$

则 $\varphi_n(u)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的可微函数,且有

$$\varphi'_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$$

由于含参变量的广义积分可以表成

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(u)$$

并且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_n(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$$

因右端的积分在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛而一致收敛,所以函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(u)$ 可逐项微分的条件全部满足,从而和函数 $\varphi(u)$ 是可微的,且成立

$$\varphi'(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_n(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x.$$

例 2 计算积分

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta x\mathrm{d}x,\quad \beta\in(-\infty,+\infty)$$

解 因为对任意的实数 β 有

$$|e^{-x^2}\cos 2\beta x|\leqslant e^{-x^2}$$

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta x\mathrm{d}x$ 收敛. 现计算它的值，可将 β 视为参数，由于当 $x>0$ 时有不等式

$$\left|\frac{\partial}{\partial\beta}(e^{-x^2}\cos 2\beta x)\right|=|2xe^{-x^2}\sin 2\beta x|\leqslant 2xe^{-x^2}$$

但积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，所以积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\sin 2\beta x\mathrm{d}x$ 在整个数轴上关于 β 一致收敛，故依定理 4 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I(\beta)}{\mathrm{d}\beta}&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}(e^{-x^2}\cos 2\beta x)\mathrm{d}x\\&=-2\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\sin 2\beta x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

又 $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\sin 2\beta x\mathrm{d}x=\beta I(\beta)$ 从而函数 $I(\beta)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}I(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=-2\beta I(\beta)$$

解微分方程，并注意到 $I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，即得

$$I(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$$

以上我们所讨论的含参变量的广义积分都限于积分区间为无穷的情形，但是对于它所建立起来的全部理论，只要作不多的改变就能适用于另一类无界函数的积分，这里就不再叙述了.

10.3.3 几个重要的积分

为了今后物理上的需要，下面计算几个重要的广义积分.

1° 迪里赫勒积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

由 10.1.2 的例 1 可知这个积分收敛，但不绝对收敛. 引进收敛因子 e^{-ux}，并考虑含参变量的积分

$$I(u)=\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

由于当 $u\geqslant 0$ 时，此积分是一致收敛的. 而被积函数在区域 $0\leqslant x<+\infty, 0\leqslant u<+\infty$ 上连续，因而 $I(u)$ 就在区间 $0\leqslant u<+\infty$ 上连续. 特别在点 $u=0$ 连续，可推得

$$\lim_{u\to 0^+}I(u)=I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

另一方面，将 $I(u)$ 微商又得

$$I'(u)=-\int_0^{+\infty}e^{-ux}\sin x\mathrm{d}x$$

其中在积分号下对 u 微商的合理性是因为当 $u\geqslant u_0>0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ux}\sin x\mathrm{d}x$ 是一致收敛的. 容易算出这个积分的值，从而得到

$$I'(u)=-\frac{1}{1+u^2}$$

所以求得

$$I(u)=-\operatorname{arctg}u+c$$

但当 u 无限增大时，根据不等式

$$|I(u)|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{-\infty}e^{-ux}\mathrm{d}x=\frac{1}{u}$$

可知 $I(u)$ 趋于零，由此定出常数 $c=\frac{\pi}{2}$. 将其代入后给出

$$I(u)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}u\quad(u>0)$$

令 u 趋于零即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

进一步有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta > 0 \\ 0, & \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \beta < 0 \end{cases}$$

2° 拉普拉斯积分

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta \geqslant 0)$$

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

解 因为对任意的 $\beta \in [0, +\infty)$, $\alpha > 0$，有

$$|I(\beta)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\cos \beta x|}{\alpha^2 + x^2} dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

故 $I(\beta)$ 在 $\beta \in [0, +\infty)$ 上一致收敛.

另外，由 10.3.1 的例 2 知，$J(\beta)$ 对任意的 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 一致收敛. 当然，$I(\beta)$ 与 $J(\beta)$ 都在 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 上一致收敛. 由可微性定理 4 知，$I(\beta)$ 对 β 的微商可在积分号下进行，则有

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2}\right) dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = -J(\beta)$$

当 $\beta > 0$ 时，有

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

于是有

$$I'(\beta) + \frac{\pi}{2} = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

$$= \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} \mathrm{d}x$$

这时，上式又可对 β 在积分号下求微商，有

$$I''(\beta) = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} \mathrm{d}x = \alpha^2 I(\beta)$$

这是不显含自变量 β 的二阶线性方程，求得通解为

$$I(\beta) = c_1 \mathrm{e}^{\alpha\beta} + c_2 \mathrm{e}^{-\alpha\beta}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 由于对一切 $\beta > 0$ 的值，积分 $I(\beta)$ 是有界的，即

$$|I(\beta)| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$$

而 $\alpha > 0$，所以 c_1 必须为零，故有

$$I(\beta) = c_2 \mathrm{e}^{-\alpha\beta}$$

注意到此为止，运算都是在 $\beta > 0$ 的假设下进行.

其次，由于积分 $I(\beta)$ 在 $\beta \in [0, +\infty)$ 上一致收敛，故 $I(\beta)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，特别在 $\beta = 0$ 处右连续，于是有

$$c_2 = \lim_{\beta \to 0^+} I(\beta) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

从而算得

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta \geqslant 0)$$

最后，对 $\alpha > 0, \beta > 0$，有

$$J(\beta) = -I'(\beta) = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-\alpha\beta}$$

即得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

3° 菲涅耳(Fresnel)积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2 \mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty}\cos x^2 \mathrm{d}x$$

令 $x^2=t$ 得

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2 \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2 \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

显然这两个积分条件收敛.为求第一个积分的值,可利用等式

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tu^2}\mathrm{d}u$$

代入含有收敛因子 $\mathrm{e}^{-vt}\ (v>0)$ 的参变量积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-vt}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-vt}\sin t\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tu^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

因为积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(u^2+v)}\sin t\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛,积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(u^2+v)}\sin t\mathrm{d}u$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛,而且积分

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(u^2+v)}|\sin t|\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

存在,根据 10.3.2 的定理 3,交换积分的顺序得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-vt}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(u^2+v)t}\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u^2+v)^2}$$

又因为积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-vt}\mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u^2+v)^2}$$

都在 $v\geqslant 0$ 一致收敛,故都为 v 的连续函数,因而令 $v\to 0^+$ 时能在积分号下取极值,如此求极限后算得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

同样可得

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

习题 10.3

1. 确定下列广义参变量积分的收敛域：

(1) $\int_0^{+\infty} x^u \mathrm{d}x$　　(2) $\int_1^{+\infty} x^u \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x$

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^u \ln x}$　　(4) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^u x}$

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a(1+x)}\mathrm{d}x$　　(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^a}\mathrm{d}x$

2. 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad (-\infty < u < +\infty)$

(2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$, a) $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$ b) $0 < \alpha < +\infty$

(3) $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \quad (1 < \alpha < +\infty)$

(5) $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$（其中 $p > 0$ 的常数）

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p}\mathrm{d}x \quad (0 \leqslant p < +\infty)$

3. 设 $f(x,u)$ 在 $a \leqslant x < +\infty, \alpha \leqslant u \leqslant \beta$ 上连续，又对于 $[\alpha,\beta)$

上每一 u，积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 收敛，而当 $u=\beta$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散，试证积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上必不一致收敛.

4. 证明 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 是连续且可微的函数.

5. 计算下列积分：

(1) $\int_0^1\frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\mathrm{d}x\quad(\alpha>-1,\beta>-1)$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\quad(\alpha>-1)$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{x^2}\mathrm{d}x\quad(\alpha>0)$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x\quad(\alpha>0,\beta>0)$

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

(6) $\int_0^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2}-\mathrm{e}^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\right]\mathrm{d}x\quad(0<a<b)$

6. 利用 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 及 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 计算：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x\quad(\sigma>0)$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x\quad(\sigma<0)$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0)$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\quad(n$ 是正整数)

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$

10.4 欧拉积分

作为含参变量的广义积分理论的应用，下面专门来讨论两个特别有用的含参变量积分.

欧拉(Euler)在解一个微分方程时，引出具有如下形式的含参变量积分

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

因为它是参变量 x 的函数，所以勒让德建议称为 Γ（伽玛）函数.

另外一个含参变量的积分形式为

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

易见它是参变量 x,y 的函数，因此勒让德建议称为 B（贝塔）函数. 由于这些函数在理论上与应用上的重要性，后来人们作了深入的研究，并编制了详尽的伽玛函数与贝塔函数表.

10.4.1 Γ 函数的性质

从 Γ 函数的积分表示容易看出，它定义在区间 $(0, +\infty)$ 上. 实际上，将 $\Gamma(x)$ 写成

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

当 $x < 1$ 时，$t = 0$ 是第一个积分的瑕点，但因为

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{t^{x-1}} = 1$$

所以第一个积分当 $x > 0$ 时收敛；又因为

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \cdot t^{x-1}e^{-t} = 0$$

所以第二个积分不论 x 为何值时都收敛. 这就说明了 $\Gamma(x)$ 的定义域为 $x > 0$.

定理 1 $\Gamma(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 中的连续函数.

证 把 $\Gamma(x)$ 分成两部分

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

对任意的 $\beta > \alpha > 0$，当 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta, 0 < t \leqslant 1$ 时有

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t}$$

但积分 $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ 收敛，故积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛；又当 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta, 1 \leqslant t < +\infty$ 时有

$$t^{x-1}t^{-t} \leqslant t^{\beta-1}e^{-t}$$

但积分 $\int_0^1 t^{\beta-1}e^{-t}dt$ 收敛，于是积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 也在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，故由 10.3.2 的定理 1 知，$\Gamma(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，但 $\beta > \alpha$ 是任意的两个正数，所以 $\Gamma(x)$ 在 $x > 0$ 时连续.

再来推导 Γ 函数的递推公式

定理 2 当 $x > 0$ 时，有 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

证 由分部积分法得

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

设 $n-1 < x \leqslant n$（n 为自然数），重复应用上面的递推公式便得

$$\Gamma(x+1) = x(x-1)\cdots(x-n+1)\Gamma(x-n+1)$$

且 $0 < x-n+1 \leqslant 1$. 从面可见对任意 $x > 1$ 的 Γ 函数值的计算总可以归结为计算 $x < 1$ 的 Γ 函数值.

特别当 $x = n$（n 为自然数）时就有

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 1\Gamma(1)=n!\Gamma(1)$$

但 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=1$，从而得到

$$\Gamma(n+1)=n!$$

此外，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值亦可定出. 这只须在积分

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t$$

中作变量代换 $t=x^2$ 即得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

由此又可定出当 x 为半整数 $n+\frac{1}{2}$ 的 Γ 函数的值

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

最后，指出 Γ 函数另一重要性质——**余元公式**.

若 $0<x<1$，则有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi}\quad（证明将在第十一章中给出）$$

不难看出，这个公式又将 Γ 函数值的计算缩减成区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内的 Γ 函数值的计算. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时它给出 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，当 $x=\frac{1}{4}$ 时就成为

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{2}\pi$$

10.4.2 B 函数的性质

在 B 函数的积分定义

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

中，如果 $x<1$，$t=0$ 是瑕点；$y<1$，$t=1$ 是瑕点；故把积分拆成两部分

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t=\int_0^a t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t+\int_a^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

其中 $0<a<1$. 当 $t\to 0$ 时，

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sim t^{x-1}$$

所以第一个积分当 $x>0$ 时收敛. 当 $t\to 1$ 时，

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sim(1-t)^{y-1}$$

所以第二个积分当 $y>0$ 时收敛. 就是说，$B(x,y)$ 的定义域为 $x>0,y>0$.

定理 1 $B(x,y)$ 是区域 $D:x>0,y>0$ 上的连续函数.

证 在区域 D 上任取一点 (x_0,y_0)，当 $x\geqslant x_0,y\geqslant y_0$ 时，无论 t 是区间 $(0,1)$ 上怎样的数值，都有

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}$$

但积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}\mathrm{d}t$ 收敛，故积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ 在区域 $x\geqslant x_0,y\geqslant y_0$ 上一致收敛，从而 $B(x,y)$ 在这个区域连续. 再由 x_0，y_0 的任意性，所以 $B(x,y)$ 就是定义域上的连续函数.

B 函数还可以表示为另外一种经常使用的形式.

定理 2 对任意的 $x>0,y>0$，有

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}\mathrm{d}z$$

证 由定义知

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

令 $t=\frac{1}{1+z}$，故 $1-t=\frac{z}{1+z}$，$\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}z}{(1+z)^2}$，代入后则有

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}dz \quad (x>0,y>0)$$

定理 3 对任意的 $x>0,y>0$，有

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

证 因为

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}du\cdot\int_0^{+\infty}v^{y-1}e^{-v}dv$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(u+v)}u^{x-1}v^{y-1}dudv$$

令

$$\begin{cases}s=u+v\\ t=\dfrac{v}{u}\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}u=\dfrac{s}{1+t}\\ v=\dfrac{st}{1+t}\end{cases}$$

且算得这个变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{s}{(1+t)^2}$$

于是有

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-s}\cdot\frac{s^{x-1}}{(1+t)^{x-1}}\cdot\frac{s^{y-1}t^{y-1}}{(1+t)^{y-1}}\cdot\frac{s}{(1+t)^2}dsdt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-s}s^{x+y-1}ds\cdot\int_0^{+\infty}\frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

$$=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

从而得到

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x>0,y>0)$$

应用定理 3 与 Γ 函数的递推公式，立即得到 B 函数的递推公式：

$$B(x+1,y+1)=\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}B(x,y)$$

实际上，

$$\begin{aligned}B(x+1,y+1)&=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}\\&=\frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}\\&=\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}B(x,y)\end{aligned}$$

根据定理 3 及 Γ 函数的性质又很容易推得 B 函数的另一些性质：

(i) $B(x,y)=B(y,x)$，即 B 函数关于变量 x,y 是对称的.

(ii) $B(m,n)=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$，这里 m,n 为自然数.

此外，由上述关系式还可以推出 Γ 函数的另一重要性质——**加倍公式**

当 $x>0$ 时，有

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

这个公式又称**勒让德**(Legendre)**公式**.

事实上，在积分

$$\begin{aligned}B(x,x)&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

中作变量代换 $\frac{1}{2}-t=\frac{1}{2}\sqrt{\tau}$，则可算得

$$B(x,x)=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1\tau^{-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{x-1}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2^{2x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right)$$

将这个等式两边的 B 函数用 Γ 函数表示就成为

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)}=\frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$$

把 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 代入即得加倍公式

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

例 1 欧拉积分的理论使我们容易算出积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x$$

的值，其中 n 及 m 都是非负整数.

作变量代换 $t=\sin^2 x$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}$$

在这个表达式中，Γ 函数的自变量所取的值或是整数，或是半整数，因此所给积分是可以算出值的. 特别当 $m=0$ 时就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

例 2 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x$，其中 $0<m<n$.

解 令 $x = t^{\frac{1}{n}}$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(1-\frac{m}{n},\frac{m}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)$$

利用 Γ 函数的余元公式即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,\frac{\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi}$$

不过，由于余元公式还未给予证明，因此这个积分实际上并没有算出. 自然，若能用别的方法算出积分

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \mathrm{B}(1-\alpha,\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t \quad (0 < \alpha < 1)$$

的值，这便是证明了余元公式.

习题 10.4

1. 何谓 Γ 函数，B 函数？写出 Γ 函数，B 函数的递推公式和它们之间的关系式.

2. 利用欧拉积分计算：

(1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$　　　(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x \quad (n,m,q>0)$

(5) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{d}t \quad (a>0)$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{\alpha} x\,\mathrm{d}x \quad (|\alpha|<1)$

(7) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p \mathrm{d}x \quad (0 < p < 1)$

3. 试求曲线 $x^n + y^n = a^n$ 当 $x > 0, y > 0, n > 0$ 时所围成平面图形的面积.

复　习　题

1. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中非负、连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \neq 0$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中是正的单调非增函数,那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散,由此证明积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x, \quad \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

发散.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上连续,证明

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h) - f(t)]\mathrm{d}x = f(x) - f(a) \quad (a < x < A)$$

4. 设 φ, ψ 分别是可以微分两次和一次的函数,证明

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\mathrm{d}s$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

5. 试用化成级数的方法,证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

6. 证明：$f(u)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^u(1+x)}dx$ 在 (0,2) 上连续.

7. 计算下列积分：

(1) $\int_0^a \dfrac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx \quad (a\geqslant 0)$

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \quad$ (α 为任实数)

(3) $\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{1-e^{-ax}}{x}\right)^2 dx \quad (a>0)$

(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx \quad (\alpha>0,\beta>0)$

(5) $\int_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad$ （提示：$\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int_0^1\dfrac{du}{1+x^2u^2}$）

8. 利用欧拉积分计算：

(1) $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1\dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(2) $\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}dx \quad$ (n 为正整数)

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(a^2+x^2)^n} \quad$ (n 为正整数，$a>0$)

(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^a\ln x}{1+x^2}dx \quad (-1<a<1)$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{1+x^n}{1+x^{2n}}dx$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}2xe^{-x^n}dx$

11 富里叶分析

自然界中，普遍存在着周期现象，即经历一定的时间 T 后，又恢复到原状的现象. 一切周期现象都可以用周期函数来描述，而最简单的周期函数是三角函数. 本章主要的内容是研究如何把一个周期函数用三角函数所组成的三角级数来表示，此外，还将引出平方可积函数按任意正交函数系展开的广义富里叶级数，以及定义在整个数轴上的非周期函数表示成富里叶积分的方法.

11.1 周期函数的富里叶级数

11.1.1 周期函数、三角函数的正交性

如果函数 $f(x)$ 具有性质：存在非零常数 T，使对 $f(x)$ 定义域中的任何 x 有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

显然，如果 T 是周期函数 $f(x)$ 的周期，而 n 是任意的整数，则有

$$f(x+nT)=f(x)$$

即 nT 也是函数 $f(x)$ 的周期.

如果周期函数 $f(x)$ 在任何一有限区间 $[a,b]$ 上可积，那么容易证明 $f(x)$ 在长为周期 T 的区间上的积分值是相等的，即

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

特别,周期函数 $f(x)$ 在一个周期内的平均值

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

与起点 a 无关.

为了把周期函数展开成三角级数,要用到三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

的正交性的性质,即系中任意两相异函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分都等于零. 该函数系的每个函数的自乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分不为零. 容易验证此结论成立. 事实上,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}[\sin n\pi - \sin(-n\pi)] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}[\cos(-n\pi) - \cos n\pi] = 0$$

$$(n = 1,2,\cdots)$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\mathrm{d}x\\ =&0\end{aligned}$$

同样可得 $m \neq n$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

但是

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\mathrm{d}x = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2mx)\mathrm{d}x$$

$$= \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\mathrm{d}x \quad (m = 1,2,\cdots)$$

11.1.2 富里叶级数

设有三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

假定它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于和 $f(x)$，即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{1}$$

自然要问右端的系数 $a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots$ 与和函数 $f(x)$ 有何关系？为此，将等式(1)的两端在 $[-\pi,\pi]$ 上逐项积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}n\right)$$

根据三角函数系的正交性，这个积分等式的右端除第一项外，其余各项均为零，于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \pi a_0$$

从而求得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

再来确定 a_n，以 $\cos mx$ 乘等式(1)的两端，并在 $[-\pi,\pi]$ 上逐项积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x\right)$$

根据三角函数系的正交性，这个积分等式右端除 $n=m$ 一项外，其余各项均为零，于是得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\mathrm{d}x = \pi a_m$$

即有

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\mathrm{d}x \quad (m=1,2,\cdots)$$

同理，以 $\sin mx$ 乘等式(1)的两端，并在$[-\pi,\pi]$上逐项积分可确定系数 b_m 为

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\mathrm{d}x \quad (m=1,2,\cdots)$$

注意到当 $m=0$ 时，a_m 的表达式正好就是 a_0，于是得富里叶(Fourier)系数公式：

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\mathrm{d}x \quad (m=0,1,2,\cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\mathrm{d}x \quad (m=1,2,\cdots)$$

下面转而考察与此相反的问题，假设 $f(x)$ 是一个周期 2π 的可积与绝对可积的函数(如果 $f(x)$ 是有界函数，就假定它是可积的；如果 $f(x)$ 是无界函数，就假定它是绝对可积的)，由系数公式计算出它的富里叶系数 a_0,a_n 和 b_n $(n=1,2,\cdots)$，依次作出的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

称为函数 $f(x)$ 的富里叶级数.

自然要问：这个级数是否收敛？如果收敛的话，它的和是否就等于 $f(x)$？

从下面的定理将看到，对于相当广泛的一类函数，它的富里叶

级数是收敛于它自己的，这正是富里叶级数所以重要的原因.

迪里赫勒定理 (1) 设周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在任何有限区间上是逐段光滑的，则它的富里叶级数在整个数轴上都收敛，在每个连续点处收敛于 $f(x)$，而在每个间断点处收敛于函数 $f(x)$ 左右极限的平均值，即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

(2) 如果函数 $f(x)$ 在整个数轴上处处连续，且在任何有限区间上是逐段光滑的，则其富里叶级数就在整个数轴上绝对一致收敛于 $f(x)$.

这里所谓函数 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上逐段光滑是指可以把 $[a,b]$ 分成有限个子区间，使得在每个子区间内 $f(x)$ 连续且有连续的微商 $f'(x)$，而这些区间的端点只能是 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 的第一类间断点.

在本节的最后再给出定理的证明. 先利用它的结论求出一些函数的富里叶级数.

例 展开图 11.1 所示的周期 2π 的周期函数 $f(x)$ 为富里叶级数.

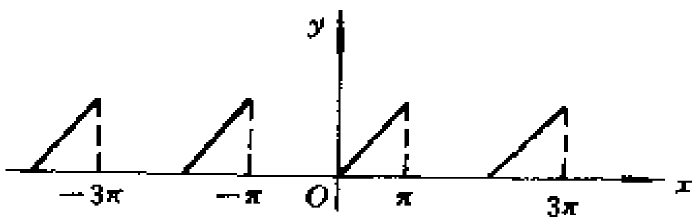


图 11.1

解 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

它显然满足迪里赫勒定理的条件，因此其富里叶级数收敛.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

$$(x\neq(2k-1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

而在 $x=(2k-1)\pi$ 处，由于 $f(x)$ 不连续，其富里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{\pi}{2}$.

应用这个展开式容易得到几个特殊级数的和. 在展开式中令 $x=0$. 由于 $f(0)=0$ 就得到

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

即

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

进而又可求得其它几个有趣的和式. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

从而得到

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

同样,由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 绝对收敛,故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

又得

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

11.1.3 偶函数与奇函数的富里叶级数

如果周期函数 $f(x)$ 是偶函数,即 $f(-x)=f(x)$,这时 $f(x)\sin nx$ 是奇函数,$f(x)\cos nx$ 是偶函数,便有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

因此 $f(x)$ 的富里叶级数只含余弦项,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

这样的级数称为余弦级数.

如果周期函数 $f(x)$ 是奇函数,即 $f(-x)=-f(x)$,这时 $f(x)\cos nx$ 亦是奇函数,所以 $a_n=0$. 因此 $f(x)$ 的富里叶级数只含正弦项,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

这样的级数称为正弦级数,并且

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

例 1 展开如图 11.2 所示的周期函数 $f(x)$ 为富里叶级数.

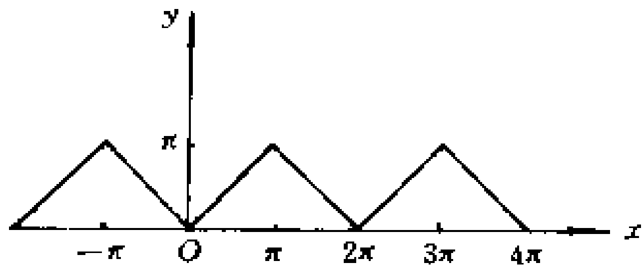


图 11.2

解 这个函数的周期为 2π,它在区间$[-\pi,\pi]$上的表达式为 $f(x)=|x|$. 因为 $f(x)$ 是逐段光滑的,且在整个数轴上是连续的偶函数,所以它可展为绝对一致收敛的余弦级数,其富里叶系数为

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } n = 2k \\ -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & \text{当 } n = 2k-1 \end{cases}$$

于是,所给函数的富里叶级数为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

将所得到的级数两端从 0 到 $x(0 < x \leqslant \pi)$ 积分,得到

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

这个级数仍然在 $[0,\pi]$ 上一致收敛.再积分一次,就有

$$\frac{x^3}{6}=\frac{\pi}{4}x^2+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^4}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$$

令 $x=\pi$,代入得

$$\frac{\pi^3}{6}=\frac{\pi^3}{4}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$$

立即得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

例 2 展开如图 11.3 所示的周期函数 $f(x)$ 为富里叶级数.

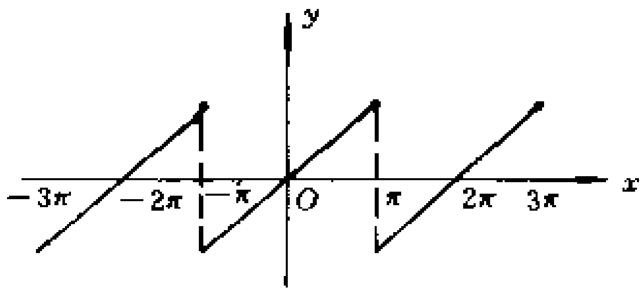


图 11.3

解 这是周期 2π 的奇函数,它满足迪里赫勒定理的条件,故可展成正弦级数.由于在区间 $(-\pi,\pi)$ 内,$f(x)=x$ 所以

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}$$

于是所给函数的富里叶级数为

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\quad(x\neq(2k-1)\pi)$$

当 x 为间断点 $(2k-1)\pi$ 时,级数收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$

0.

11.1.4 任意周期的情形

前面的讨论只限于具有周期 2π 的周期函数. 现在讨论 $f(x)$ 的周期为 $2l$ 的情形，作变换 $x = \frac{l}{\pi}t$，并记

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t) \quad (\text{从而 } g(\frac{\pi}{l}x) = f(x))$$

则 $g(t)$ 为周期 2π 的函数，如果 $g(t)$ 满足迪里赫勒定理的条件，便有

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\mathrm{d}t \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\mathrm{d}t \quad (n = 1,2,\cdots)$$

回到原来的变量 x 即有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$

这就是周期为 $2l$ 的函数的富里叶展开式.

同样，如果 $f(x)$ 是偶函数，则它的富里叶级数就化成余弦级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

如果 $f(x)$ 是奇函数,则它的富里叶级数就化成正弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$$

例 交流电压 $E(t)=E\sin\omega t$ 经半波整流后负压消失(图 11.4),试求半波整流函数的富里叶级数.

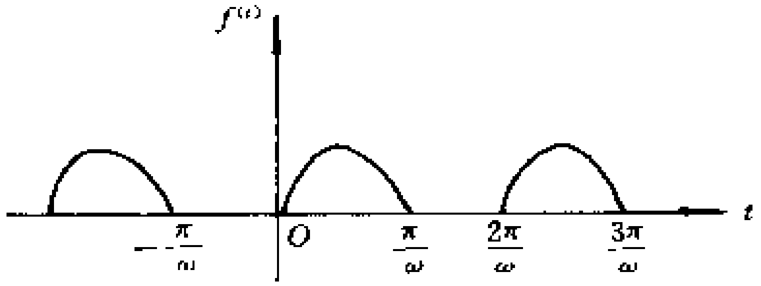


图 11.4

解 这个半波整流函数的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$,在区间 $\left[-\frac{\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega}\right]$ 上,它的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\frac{\pi}{\omega}\leqslant t<0\\ E\sin\omega t, & 0\leqslant t<\frac{\pi}{\omega}\end{cases}$$

由此可得

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\mathrm{d}t = \frac{2E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\cos n\omega t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t]\mathrm{d}t$$

当 $n = 1$ 时，

$$a_1 = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin 2\omega t\mathrm{d}t = 0$$

当 $n \neq 1$ 时，

$$a_n = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E[\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\omega t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\omega t}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$= \frac{[(-1)^{n-1} - 1]E}{(n^2-1)\pi} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

于是有 $a_{2k-1} = 0, a_{2k} = \dfrac{2E}{(1-4k^2)\pi}$.

再计算 b_n，因为

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\sin n\omega t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t]\mathrm{d}t$$

当 $n = 1$ 时，

$$b_1 = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1 - \cos 2\pi\omega t)\mathrm{d}t = \frac{E}{2}$$

当 $n \neq 1$ 时，

$$b_n=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{n-1}-\frac{\sin(n+1)\omega t}{n+1}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=0\quad(n=2,3,\cdots)$$

由于半波整流函数在整个数轴上连续，且在任何有限区间上是逐段光滑的，根据迪里赫勒定理．它所对应的富里叶级数在整个数轴上绝对一致收敛于自身．特别在区间 $[-\frac{\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega}]$ 上就有

$$f(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos2k\omega t$$

在无线电电路的理论中，周期函数常表示系统所发生的周期波，展开这个周期波为富里叶级数就相当于把它分解成一系列不同频率的正弦波的叠加．级数中的常数项 $\frac{a_0}{2}$ 称为周期波的直流成份；一次项正弦波 $a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}$ 称为基波，它的频率是 $\omega_1=\frac{\pi}{l}$；高次项正弦波 $a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ 称为 n 次谐波，它的频率是 $\omega_n=\frac{n\pi}{l}$，即等于基波频率的 n 倍．从半波整流后的电压所对应的富里叶级数可以看出，这个电压由直流和交流两种成份构成，在交流成份中含有基波和偶次谐波．第 $2n$ 次谐波的振幅是

$$A_n=\frac{2E}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

显然当 n 越大即谐波次数越高时，振幅就越小．因此在实际应用中，由于高次谐波的振幅的迅速减小，只要取展开式中前面几个低次谐波就足够了．

11.1.5 有限区间上的函数的富里叶级数

以上讨论了定义在整个数轴上的周期函数的富里叶级数. 可是,在实际问题中,所研究的对象一般说来是定义在有限区间上的,因此自然也希望把定义在有限区间上的相应函数展开成富里叶级数,这只要利用所谓"周期开拓"的方法就总是可以做到的.

先设 $f(x)$ 是定义在区间$[-l,l]$上的函数,这时可以把 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期开拓出去(图 11.5),即作一个定义在整个数轴上的周期 $2l$ 的函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & -l\leqslant x\leqslant l\\ f(x_1), & x=x_1+2nl,\ -l\leqslant x_1\leqslant l;n\text{ 为整数}\end{cases}$$

则有

$$F(x+2l)=F(x)$$

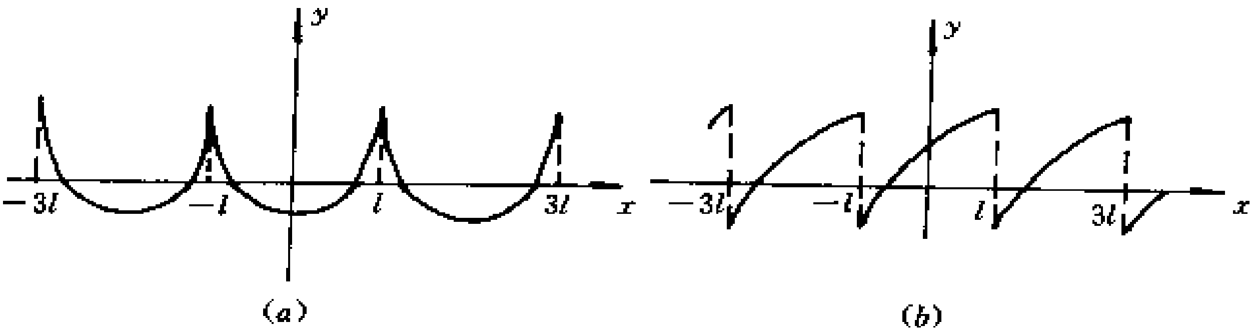


图 11.5

然后求出它的富里叶级数

$$F(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

如果这个级数的收敛条件得到满足，那末局限于区间$[-l,l]$上来考虑，它就能表示原来给定的函数$f(x)$，但这时，必须注意函数$f(x)$在区间端点$x=\pm l$的情况，即使原来的函数$f(x)$在$[-l,l]$上连续，并且是逐段光滑的，只要$f(l)\neq f(-l)$（图11.5b）开拓后函数在点$x=\pm l,\pm 3l,\cdots$处就不连续，而级数在$x=\pm l$处只能收敛于

$$\frac{f(l)+f(-l)}{2}$$

如果$f(l)=f(-l)$（图11.5a），这时$F(x)$就在整个数轴上连续，因而所得级数在$[-l,l]$上收敛于$f(x)$.

例1 展开函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h}, & |x|<h\\ 0, & h\leqslant |x|\leqslant l\end{cases}$$

为富里叶级数.

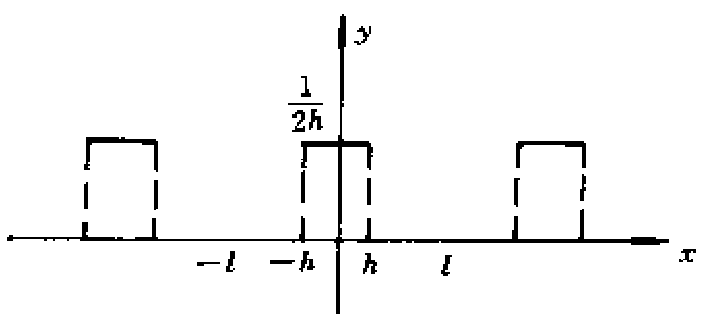


图 11.6

解 函数 $f(x)$ 及周期开拓后的函数 $F(x)$ 都是偶函数(图 11.6),因此有 $b_n = 0$,而

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^h \frac{1}{2h}\mathrm{d}x = \frac{1}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^h \frac{1}{2h}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n\pi h}\sin\frac{n\pi h}{l}$$

又因在区间的端点 $x = \pm l$ 处有 $f(l) = f(-l) = 0$,所以

$$f(x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi h}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$(|x| < h, h < |x| \leqslant l)$$

当 $x = \pm h$ 时,这个级数收敛于 $\frac{1}{4h}$.

现在再来考察 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,l]$ 上的函数,为了把它展开为富里叶级数,可将函数 $f(x)$ 任意地延拓到 $[-l,0]$ 上,然后将定义在 $[-l,l]$ 上的函数以 $2l$ 为周期开拓到整个数轴上去,化为前面讨论过的情形. 如此看到,由于各种不同的延拓,得到的富里叶级数自然也就不同,但在 $(0,l)$ 中,它们都收敛于同一个函数.

有两种延拓方法是最常用的.

一种是偶性延拓,即令

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l \\ f(-x), & -l \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

$f_1(x)$ 是 $[-l,l]$ 中的偶函数,它的富里叶级数即余弦级数

$$f_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{1}$$

另一种是奇性延拓，即令

$$f_2(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x\leqslant l\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & -l\leqslant x<0\end{cases}$$

$f_2(x)$ 是$[-l,l]$中的奇函数，它的富里级数即正弦级数

$$f_2(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)\tag{2}$$

例 2　展开函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}\\ l-x, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

为正弦级数和余弦级数.

解　先求正弦级数. 延拓 $f(x)$ 到$[-l,0)$上，使其成为奇函数(图 11.7)，依(2)有

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l\quad x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\\&=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{(-1)^{k-1}4l}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\end{aligned}$$

即得

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant l)$$

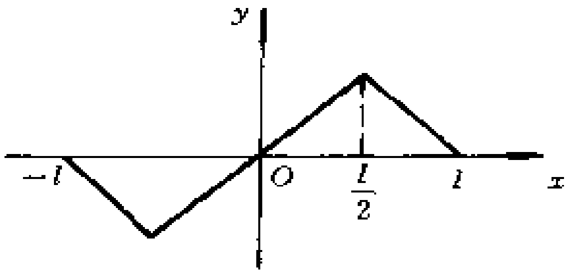


图 11.7

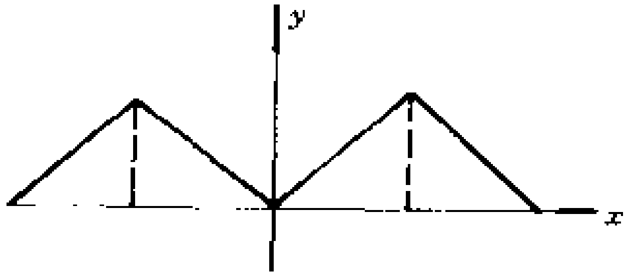


图 11.8

次求余弦级数. 延拓函数 $f(x)$ 到 $[-l,0)$ 上,使其成为偶函数(图 11.8),这时依(1),有

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\mathrm{d}x=\frac{l}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1+(-1)^{n+1}\right]$$

除 $a_{4k+2}=-\dfrac{2l}{(2k+1)^2\pi^2}$ 外,其余 a_n 都为零. 于是

$$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(4k+2)\pi x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant l)$$

更一般,如果 $f(x)$ 定义在有限区间 $[a,b]$ 上,可以 $2l=b-a$ 为周期开拓到整个数轴上去,这时它的富里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$

例 3 把$[0,1]$上的函数$f(x) = x^2$展开为富里叶级数.

解 以$2l = 1$为周期将函数$f(x)$开拓到整个数轴上,于是有

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 x^2\cos 2n\pi x\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2\pi^2} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 x^2\sin 2n\pi x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

因为$f(x) = x^2$在$[0,1]$上连续,但$f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$,所以,当$0 < x < 1$时,有

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x - \frac{\pi}{n}\sin 2n\pi x\right)$$

而当$x = 0$或1时,上述三角级数收敛于$\frac{1}{2}$.

11.1.6 富里叶级数的复数形式

设$f(x)$是定义在区间$[-l,l]$上的函数,且在这区间上可以展成富里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

其中 $\omega=\frac{\pi}{l}$ 及

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\omega x\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\omega x\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$$

应用欧拉公式

$$\cos n\omega x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2}$$

$$\sin n\omega x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2\mathrm{i}}$$

就得到

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2}+\mathrm{i}b_n\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}}{2}\right)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\end{aligned}$$

或者写成

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

其中

$$F_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}F_{\pm n}&=\frac{1}{2}(a_n\mp\mathrm{i}b_n)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)(\cos n\omega x\mp\mathrm{i}\sin n\omega x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

这就是 $f(x)$ 的富里叶级数的复数形式. 它的系数 F_n 与 F_{-n} 是互为共轭的复数，即 $F_{-n}=\overline{F}_n$.

如果考虑到复指数的函数列

$$\cdots,e^{-\mathrm{i}n\omega x},\cdots,e^{-\mathrm{i}\omega x},1,e^{\mathrm{i}\omega x},\cdots,e^{\mathrm{i}n\omega x},\cdots$$

在区间 $[-l,l]$ 的正交性，即有

$$\int_{-l}^{l}e^{\mathrm{i}(m+n)\omega x}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m+n\neq 0\\ 2l, & m+n=0\end{cases}$$

则复数形式的富里叶级数也可以用另一方式直接导出. 事实上，设

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{i}n\omega x}$$

以 $e^{\mathrm{i}m\omega x}$ 乘这个等式的两端，再从 $-l$ 到 l 逐项积分，就得到

$$\int_{-l}^{l}f(x)e^{\mathrm{i}m\omega x}\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\int_{-l}^{l}e^{\mathrm{i}(n-m)\omega x}\mathrm{d}x$$

根据复指数函数系的正交性，等式右端除 $n+m=0$ 一项外其余各项均为零，从而可得 F_n 的表达式. 它与上述结果是完全一致的.

11.1.7 贝塞尔不等式

设函数 $f(x)$ 在区间$[-\pi,\pi]$上是可积（因而也是平方可积）的或在广义意义下可积和平方可积的. 而

$$g_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

是任意一个"n 次"三角多项式，式中 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_n,\beta_n$ 是常数. 现在要来确定这些常数，使得 $f(x)$ 与 $g_n(x)$ 的平方平均偏差

$$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g_n(x)]^2\mathrm{d}x$$

为最小. 为此目的，我们先计算这个偏差 Δ_n 的表达式. 因为

$$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}g_n^2(x)\mathrm{d}x$$

容易算得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x + \beta_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)$$

$$= \pi\left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)\right]$$

其中 a_0, a_k, b_k $(k = 1,2,\cdots,n)$ 是 $f(x)$ 的富里叶系数. 而积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)\right]^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2\cos^2 kx + \beta_k^2\sin^2 kx)\right]\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x$$

其中右端第二个积分中的被积函数 $\sigma_n(x)$ 是下面这些形式的函数的线性组合：

$$\cos lx, \sin mx, \cos lx\sin mx \quad (l, m = 1,2,\cdots,n)$$

$$\cos lx\cos mx, \sin lx\sin mx \quad (l \neq m)$$

由于三角函数的正交性，它们在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分都为零，故得

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x)\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]$$

于是就有

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) + \pi\Big[-\alpha_0 a_0 - 2\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)$$

$$+ \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\Big]$$

若在这个等式的右端同时加减如下的和

$$\pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

则它又可以写成

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

$$+ \pi\left\{\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right]\right\}$$

由此可见，当

$$\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

时，Δ_n 为最小，从而证明了

定理 设 $f(x)$ 是区间$[-\pi, \pi]$上的可积且平方可积的函数，则在所有的 n 次三角多项式中，当系数是 $f(x)$ 的富里叶系数时，它与 $f(x)$ 的平方平均偏差 Δ_n 为最小，而且这个最小偏差可以表达成

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k)^2\right]$$

应当注意：若 $f(x)$ 连续或至多有有限个第一类间断点，则它本身及其平方就是可积的. 但是在广义积分的意义下，$f(x)$ 可积其平方未必可积. 为了保持一般的形式，所以我们这样陈述定理.

由于 $\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - g_n(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 0$，所以有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

当 n 增大时，这个不等式左端的和也增大，但总小于右端的定数，从而级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

收敛. 即得如下推论

系 1 设 $f(x)$ 在区间$[-\pi, \pi]$上可积且平方可积，则由它的富里叶系数 a_k 及 b_k 所构成的级数

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

收敛，并且满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

这个不等式称为**贝塞尔(Bessel)不等式**. 如果再作进一步的讨论，还可以证明在系 1 的条件下，贝塞尔不等式实际上是等式，即

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

它称为**巴塞瓦尔(Parseval)等式**. 证明方法颇多，习题 10 就是其中之一.

因为收敛级数的通项当 n 无限增大时趋于零，所以又有

系 2 设 $f(x)$ 在区间$[-\pi,\pi]$上可积且平方可积，则其富里叶系数 a_n 及 b_n 当 n 无限增大时趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$$

此外，由巴塞瓦尔等式还可以得到一些不易直接求出的级数之和. 以 11.1.3 的例 1 为例，如果把周期函数 $f(x)$ 的展开式限制在区间$[-\pi,\pi]$上就得到

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

于是由巴塞瓦尔等式有

$$\frac{\pi^2}{2}+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$$

由此给出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

这与前面所得结果一致. 从而又有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}$$

$$=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

以上只对定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数进行讨论,但它的一些结论对定义在$[-l,l]$上的可积且平方可积的函数 $f(x)$ 仍然成立. 此时巴塞瓦尔等式为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\mathrm{d}x$$

11.1.8 富里叶级数的收敛性

现在回来证明 11.1.2 所提出的迪里赫勒定理. 先证定理的第一部分,即在有限区间上逐段光滑的周期 2π 的函数 $f(x)$ 的富里叶级数在整个实数轴上都收敛,且和为

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

证 考察函数 $f(x)$ 的富里叶级数的部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\mathrm{d}t\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\mathrm{d}t\quad(k=1,2,\cdots)$$

将这些系数表达式代入部分和中就得到

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos kx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\mathrm{d}t+\sin kx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)f(t)\mathrm{d}t$$

利用公式

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}$$

可将部分和简化成

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\mathrm{d}t$$

作变换 $t=x+u$，得

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}f(x+u)\mathrm{d}u$$

由于 $f(x)$ 以 2π 为周期，$\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}$ 也以 2π 为周期，所以被积函数是周期 2π 的函数，它在一个周期上的积分与起点无关，因此

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}f(x+u)\mathrm{d}u$$

将积分分成 $[-\pi,0]$ 及 $[0,\pi]$ 两部分之和，并在 $[-\pi,0]$ 中用 $-u$

代替 u，则部分和又可最后表成

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}[f(x+u)+f(x-u)]\mathrm{d}u$$

这个重要的积分称为**迪里赫勒积分**，函数

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$$

称为**迪里赫勒核**.

如果 $f(x)\equiv 1$，则当然有 $S_n(x)=1$，即

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(1+1)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\mathrm{d}u$$

因为 $f(x)$ 逐段光滑，$f(x+0)$，$f(x-0)$ 存在有限，将

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

乘上式两端，即得

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\mathrm{d}u$$

由此导出

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{[f(x+u)-f(x+0)]+[f(x-u)-f(x-0)]}{2\sin\frac{1}{2}u}$$

$$\cdot \sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u$$

令

$$g(x,u) = \frac{[f(x+u)-f(x+0)]+[f(x-u)-f(x-0)]}{2\sin\frac{1}{2}u}$$

由于 $f(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑，因此当 $u \in (0,\pi)$ 时，$g(x,u)$ 除至多有限个第一类间断点外连续，并且

$$\lim_{u\to 0^+} g(x,u)$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\left[\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}+\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\right]\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

$$= f'(x+0) - f'(x-0)$$

这就证明了 $g(x,u)$ 在$[0,\pi]$上可积且平方可积. 而对于$[0,\pi]$上的可积且平方可积的函数 $\varphi(x)$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \varphi(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x = 0$$

事实上，令

$$\psi(x) = \begin{cases}\varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0, & -\pi \leqslant x < 0\end{cases}$$

$\psi(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可积和平方可积，由 11.1.7 中系 2 即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \varphi(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [\psi(x)\sin\frac{x}{2}]\cos nx\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [\psi(x)\cos\frac{x}{2}]\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= 0$$

这就意味着

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi} g(x,u)\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u = 0$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right] = 0$$

这就证明了迪里赫勒定理的(1).

再考察这个定理的后一论断，即假定 $f(x)$ 是连续的周期函数，并且它的微商在$[-\pi,\pi]$上最多有有限个第一类间断点，须要证明 $f(x)$ 的富里叶级数在整个数轴上绝对一致收敛于 $f(x)$. 为此目的，先利用分部积分法计算 $f(x)$ 的富里叶系数 a_n 与 b_n，并注意到 $f(-\pi)=f(\pi)$，可得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{f(x)\sin nx}{n\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$- \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{b'_n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{f(x)\cos nx}{n\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$+ \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{a'_n}{n}$$

其中 a'_n 与 b'_n 表示 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的富里叶系数，又

$$|a_n| = \left|\frac{b'_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(b'^2_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$|b_n| = \left|\frac{a'_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(a'^2_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

从而对任意的 x 有

$$|a_n\cos nx + b_n\sin nx| \leqslant |a_n| + |b_n| \leqslant \frac{1}{2}(a'^2_n + b'^2_n) + \frac{1}{n^2}$$

因为 $f'(x)$ 是区间$[-\pi,\pi]$上可积且平方可积的函数，由 11.1.7 的系 1 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a'^2_n + b'^2_n)$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 也收敛，所以 $f(x)$ 的富里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

在整个数轴上绝对一致收敛，并且由定理的前一论断知这个级数的和就是函数 $f(x)$. 这样就完全证明了迪里赫勒收敛性定理.

作为富里叶级数的一个应用，我们来证明 Γ 函数的余元公式

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1)$$

首先，根据 $\mathrm{B}(a,1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a)$ 有

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \mathrm{B}(a,1-a) &= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{z^{a-1}}{1+z}\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1\frac{z^{a-1}}{1+z}\mathrm{d}z + \int_1^{+\infty}\frac{z^{a-1}}{1+z}\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1\frac{z^{a-1}}{1+z}\mathrm{d}z + \int_0^1\frac{z^{-a}}{1+z}\mathrm{d}z \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

在区间 $(0,1)$ 上，$\frac{z^{a-1}}{1+z}$ 可展成级数

$$\frac{z^{a-1}}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{a+n-1}$$

且右端级数在 $[\varepsilon,u]$ 中一致收敛，其中 $0<\varepsilon<u<1$ 是任意取定的. 将上式两端在 $[\varepsilon,u]$ 上积分得

$$\int_{\varepsilon}^{u}\frac{z^{a-1}}{1+z}\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\int_{\varepsilon}^{u}z^{a+n-1}\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{u^{a+n}-\varepsilon^{a+n}}{a+n}$$

$$=u^{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{u^{n}}{a+n}-\varepsilon^{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\varepsilon^{n}}{a+n}$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{n}}{a+n}$ 的收敛半径为 1，且 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{a+n}$ 收敛，故

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{a+n}=\lim_{z\to1^{-}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{n}}{a+n}$$

$$\lim_{z\to0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z}{a+n}=\frac{1}{a}$$

令 $\varepsilon\to0,u\to1$ 就得到

$$I_{1}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\u\to1}}\int_{\varepsilon}^{u}\frac{z^{a-1}}{1+z}\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{a+n}$$

同理，由于 $0<(1-a)<1$，

$$I_{2}=\int_{0}^{1}\frac{z^{-a}}{1+z}\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\frac{z^{(1-a)-1}}{1+z}\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{1-a+n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(1-a)+n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{a-(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{a-n}$$

综上所述有

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\qquad(*)$$

其次，再考虑函数 $f(x)=\cos ax\ (0<a<1)$ 在$[-\pi,\pi]$上的富里叶展开. 由于 $f(x)$ 是偶函数，故有

$$\cos ax=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

其中

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\mathrm{d}x=\frac{2\sin a\pi}{\pi a}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sin a\pi}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right) \quad (n=1,2,\cdots)$$

即当 $|x|\leqslant\pi$ 有

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\cos nx\right]$$

令 $x=0$，就得

$$1=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\right]$$

与(*)式比较立即得出

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0<a<1)$$

复习思考题

1. 是不是每个三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

都是某一个周期函数 $f(x)$ 的富里叶级数？它成为富里叶级数的必要条件是什么？

2. 周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的富里叶级数是否一定收敛?如果收敛,是否一定收敛于 $f(x)$ 自己?

3. 若 $f(x)$ 只在区间 $[0,l]$ 上定义,为什么能把它展成正弦级数,余弦级数,或一般的富里叶级数?写出相应的展开式.

4. 在所有 n 次三角多项式中,哪一个多项式与 $f(x)$ 的平方平均偏差最小?

5. 何谓平方平均收敛,它与通常的逐点收敛有何不同?

习题 11.1

1. 作出下列周期 2π 的函数的图形,并把它们展开成富里叶级数(要求说明收敛情况).

(1) $f(x) = |\sin x|$

(2) 在 $[-\pi,\pi)$ 中, $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

(3) 在 $[-\pi,\pi)$ 中, $f(x) = x^2$

(4) 在 $[-\pi,\pi)$ 中, $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$

(5) 在 $[-\pi,\pi)$ 中, $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$

2. 将下列函数在指定的区间内展开成富里叶级数,并说明收敛情况.

(1) $f(x) = 1 - \sin\dfrac{x}{2} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{3} \quad (0 \leqslant x \leqslant T)$

(3) $f(x) = e^{ax} \quad (-l \leqslant x \leqslant l)$

(4) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ -1, & 1 \leqslant |x| \leqslant 2 \end{cases}$

$$(5)f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

3. 把下列函数展开成正弦级数和余弦级数：

$(1)f(x)=x\sin x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$

$(2)f(x)=2x^2\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$

$$(3)f(x)=\begin{cases}A, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}\\ 0, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

$$(4)f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2h}, & 0\leqslant x\leqslant 2h\\ 0, & 2h<x\leqslant\pi\end{cases}$$

4. 设 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的函数，

(1)如果 $f(x\pm\pi)=-f(x)$，试证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的富里叶展开只含有奇次谐波，即

$$a_{2n}=0\quad(n=0,1,2,\cdots),b_{2n}=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

(2)如果 $f(x\pm\pi)=f(x)$，试证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的富里叶展开只含有偶次谐波，即

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

5. 已知周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的富里叶系数是 a_n 和 b_n，试证明"平移"了的函数 $f(x+h)(h=$ 常数) 的富里叶系数为

$$\overline{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\overline{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh\quad(n=1,2,\cdots)$$

6. 将 $y=1-x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成富里叶级数，并利用其结果求下列级数的和：

$(1)\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$；$\qquad(2)\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$

7. 将函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x\ (-\pi<x<\pi)$ 展为富里叶级数，并利

用其结果求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$的和.

8. 设 $f(x)$ 在$\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$这个周期上可表为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\frac{T}{2}\leqslant x<-\frac{\tau}{2}\\ H, & -\frac{\tau}{2}\leqslant x<\frac{\tau}{2}\\ 0, & \frac{\tau}{2}\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}\end{cases}$$

试把它展开成富里叶级数的复数形式.

9. 将 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ 0, & a\leqslant|x|<\pi\end{cases}$ 展开成富里叶级数,然后利用巴塞瓦尔等式求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}$

10. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,$a_0,a_n,b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 为其富里叶系数,求卷积函数 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$ 的富里叶系数 $A_0,A_n,B_n\ (n=1,2,\cdots)$. 利用所得结果,证明巴塞瓦尔等式.

11.2 广义富里叶级数

11.2.1 么正函数系

在讨论将函数 $f(x)$ 展开为复数形式的富里叶级数时,我们用到了复值函数系

$$\cdots,e^{-inx},\cdots,e^{-ix},1,e^{ix},\cdots,e^{inx},\cdots$$

其中 $\omega=\frac{\pi}{l}$,并且利用了该函数在$[-l,l]$上的正交性.除此以外,该函数还满足

$$\int_{-l}^{l} e^{in\omega x}\cdot e^{-in\omega x}dx = 2l$$

因此,如果将上述函数系中每个函数乘以 $\frac{1}{\sqrt{2l}}$,我们就得到一么正函数系

$$\cdots,\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{-in\omega x},\cdots,\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{-i\omega x},\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{i\omega x},\cdots,\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{in\omega x},\cdots$$

即函数系 $\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{in\omega x}\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 满足

$$\int_{-l}^{l}\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(x)}dx=\delta_{nm}=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases}$$

其中 $\overline{\varphi_m(x)}$ 是 $\varphi_m(x)$ 的复共轭函数.一般地,有下面的定义

定义 设 $\{\varphi_n(x)\}\ (n=0,1,2,\cdots)$ 是一列定义在区间$[a,b]$上的可积且平方可积的复值函数,如果它们满足条件

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(x)}dx=\delta_{nm}$$

则称这个函数列是$[a,b]$上的么正函数系或简称么正系.

例 证明函数系

$$P_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\quad(n=1,2,\cdots)$$

是区间$[-1,1]$上的一个么正系.

证 当 $n\neq m$ 时,不妨设 $n>m$,考虑积分

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx$$

$$=C_{nm}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx$$

其中

$$C_{nm}=\frac{\sqrt{(2n+1)(2m+1)}}{2^{n+m+1}n!m!}$$

连续应用分部积分法 n 次，由于当 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 时，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n\right|_{x=\pm1}=0$$

所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}(x^2-1)^m\mathrm{d}x$$

但 $n>m$，故 $\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}(x^2-1)^m=0$，从而得到

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=0$$

另一方面当 $n=m$ 时，对积分

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}P_n(x)\,\overline{P_n(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2n+1}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

反复使用分部积分 n 次，就有

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\cdot2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$=1$$

这就证明了所给函数系为么正系.

如果函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的正交系，且

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\mathrm{d}x = 2l > 0$$

则将每个函数 $\varphi_n(x)$ 乘以 $\dfrac{1}{\sqrt{2l}}$，就得到$[a,b]$上的么正系 $\{\dfrac{1}{\sqrt{2l}}\varphi_n(x)\}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2l}}$ 称为$\{\varphi_n(x)\}$的归一化因子.

11.2.2 广义富里叶级数及平方平均收敛

设 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 是$[a,b]$区间上的么正函数系. 下面要把对三角函数系所建立起来的理论推广到这个一般的么正系. 如同三角级数一样，这里的问题是：对于在区间$[a,b]$上可积且平方可积的函数 $f(x)$，是否可以按么正系$\{\varphi_n(x)\}$展开成无穷级数，即等式

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + \cdots$$

是否在区间$[a,b]$上成立？

如果这个展开式在区间$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$，由此可确定出系数 a_n $(n = 1,2,\cdots)$. 以$\overline{\varphi_m(x)}$乘展开式的两端，再自 a 到 b 逐项积分得

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_m(x)}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(x)}\mathrm{d}x$$

根据$\{\varphi_n(x)\}$的么正性可知，等式右端只有 $n = m$ 那一项不为零，其余各项均为零. 于是得

$$a_m = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_m(x)}\mathrm{d}x$$

由此得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ 称为函数 $f(x)$ 按么正系$\{\varphi_n(x)\}$展开的广义富里叶级数，而 a_n 称为广义富里系数.

同样，这里我们也面临着广义富里叶级数的收敛性问题. 由于么正系$\{\varphi_n(x)\}$的一般性，显然再去讨论级数的逐点收敛或一致

收敛，就不是十分方便了. 在此，我们叙述一种完全是崭新的收敛概念，即平方平均收敛概念.

定义 1 设在区间 $[a,b]$ 上有可积且平方可积的函数列

$$g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x),\cdots$$

如果存在 $[a,b]$ 上的可积且平方可积的函数 $g(x)$，使得当 n 无限增大时，积分

$$\int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x$$

趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x=0$$

则称函数列 $\{g_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上**平方平均收敛**于函数 $g(x)$.

应当指出，在这种平方平均收敛的意义下，$g_n(x)$ 与 $g(x)$ 在个别点上的函数值可能相差很大，但从整体来考虑，它们是非常接近的.

在引进了上述收敛概念之后，我们的问题就成为在怎样的条件下，函数 $f(x)$ 的广义富里叶级数平方平均收敛于自身. 若用 $S_n(x)$ 表示广义富里叶级数的部份和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)$$

其中 $a_k=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x$，此即为在怎样的条件下，部份和 $S_n(x)$ 平方平均收敛于函数 $f(x)$. 如同 11.1.7 中对三角多项式所进行的讨论一样，先简化积分

$$\int_a^b |S_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x$$

因为

$$\begin{aligned}|S_n(x)-f(x)|^2&=(S_n(x)-f(x))(\overline{S_n(x)}-\overline{f(x)})\\&=S_n(x)\overline{S_n(x)}-f(x)\overline{S_n(x)}-S_n(x)\overline{f(x)}+|f(x)|^2\end{aligned}$$

根据函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的幺正性得

$$\int_a^b S_n(x)\,\overline{S_n(x)}\mathrm{d}x = \sum_{k,j=1}^{n} a_k\bar{a}_j\int_a^b \varphi_k(x)\,\overline{\varphi_j(x)}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

而

$$\int_a^b f(x)\,\overline{S_n(x)}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\bar{a}_k\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2$$

$$\int_a^b S_n\,\overline{f(x)}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}a_k\int_a^b \varphi_k(x)\,\overline{f(x)}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2$$

故得

$$\int_a^b |S_n(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2$$

由于左端的积分是非负的，这个等式给出

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x$$

当 n 增大时，不等式左端的和随 n 增大而恒小于右端的定数，因此级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2$ 收敛，并且有广义的贝塞尔不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x$$

定义 2 若对于在区间 $[a,b]$ 上可积且平方可积的任意函数 $f(x)$，贝塞尔不等式成为等式，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x$$

就称函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 是完备的幺正系. 而这个等式称为广义的巴塞瓦尔等式.

这样一来，只有当 $\{\varphi_n(x)\}$ 是完备幺正系时，才能得出 $S_n(x)$ 平方平均收敛于 $f(x)$，因为这时有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |S_n(x)-f(x)|^2 dx = 0$$

即在平方平均收敛的意义下，函数 $f(x)$ 可以表示成函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的线性组合

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

其中

$$a_n = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx$$

如果把在区间 $[a,b]$ 上可积且平方可积的复值函数的全体称为一个函数空间 L^2，并定义这个空间的内积和模分别为

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是空间 L^2 中的任意两个复值函数. 则如同 n 维欧几里德(Euclid) 空间一样，函数空间 L^2 的完备么正系 $\{\varphi_n(x)\}$ 就是这个空间的么正基. 而函数 $f(x)$ 按么正基 $\{\varphi_n(x)\}$ 展开时的系数是 $f(x)$ 相对于这个基的坐标. 广义的巴塞瓦尔等式就是函数空间的勾股定理. 并且可以用几何的语言叙述成：对于空间 L^2 中的任意函数 $f(x)$，它的模的平方等于其在么正基下各坐标的模的平方之和. 这样，我们就可以认为函数空间 L^2 是一个无限维的空间. 它显然是 n 维欧几里德空间的某种推广.

复习思考题

1. 何为完备的么正系？ 何为 $f(x)$ 的广义富里叶级数？
2. 何为平方平均收敛？

习题 11.2

1. 证明下列函数系是正交系，并求其对应的么正系.

(1) $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$，在$[0,\pi]$上.

(2) $\sin\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cdots, \sin\frac{n\pi}{l}x, \cdots$，在$[0,l]$上.

(3) $\sin x, \sin 3x, \cdots, \sin(2n+1)x, \cdots$，在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上.

(4) $\cos\frac{\pi}{2l}x, \cos\frac{3\pi}{2l}x, \cdots, \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x, \cdots$，在$[0,l]$上.

2. 将 $f(x)=a\left(1-\frac{x}{l}\right)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ 按 1 题(2)的函数系展开成广义富里叶级数.

3. 将 $f(x)=x$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ 按 1 题(4)的函数系展开成广义富里叶级数.

11.3 富里叶变换

11.3.1 富里叶积分

前面已经讨论了怎样把有限区间上的函数展开成富里叶级数的问题. 下面将进一步讨论定义在整个数轴上的非周期函数的表示方法.

设函数 $f(x)$ 在任何有限区间$[-l,l]$上可以展开成富里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x) \tag{1}$$

其中

$$\omega = \frac{\pi}{l}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos n\omega t \mathrm{d}t \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin n\omega t \mathrm{d}t \quad (n = 1,2,\cdots)$$

展开式当然与 l 的选取有关，为了能使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中得到一个统一的表达式，就需考察(1)式当 $l \to +\infty$ 时的情形. 为此，令

$$\lambda_n = n\omega = \frac{n\pi}{l},$$

$$\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l} = \omega \quad (n = 1,2,\cdots)$$

再将 a_n, b_n 表达式代入(1)中得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(x-t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

如果 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中绝对可积，则当 $l \to +\infty$ 时，

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t \to 0$$

$\Delta\lambda_n = \dfrac{\pi}{l} \to 0$，$\lim\limits_{l\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(x-t)\mathrm{d}t$ 可以当作函数 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$ 在 $(0, +\infty)$ 上对 λ 的积分，即

$$\begin{aligned} &\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

它称为**富里叶积分公式**，称等式右边的积分为**富里叶积分**.

因为

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\cos\lambda x\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\sin\lambda x\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以，富里叶积分公式又可写成

$$f(x)=\int_0^{\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda$$

其中

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t,$$

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$$

将这些公式与用富里叶级数来表达函数 $f(x)$ 的公式作一比较，容易发现它们的相似之处. 在富里叶级数中，$\cos n\omega x$，$\sin n\omega x$ 的 n 只取自然数，即 n 是离散的变量，因而 $f(x)$ 表现为对指标求和的无穷级数；而在富里叶积分中，$\cos\lambda x$，$\sin\lambda x$ 的 λ 取区间 $[0,\infty]$ 上的任意实数，即 λ 是连续的变量，因而表现为对参变量的积分. 此外，系数 $a(\lambda)$ 及 $b(\lambda)$ 的构成也与富里叶系数 a_n 及 b_n 十分类似.

上面，我们只是对富里叶积分公式作了一些形式的说明，还需指出积分公式实际成立的条件. 下面的定理就解决了这一问题.

定理 如果定义在整个数轴上的函数 $f(x)$ 在任何有限区间上是逐段光滑的，并且在区间 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积，即积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

是收敛的，则对任何数轴上的点 x，$f(x)$ 的富里叶积分必收敛于它

在该点的左右极限的平均值，即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

特别在 $f(x)$ 的连续点上，富里叶积分就收敛于 $f(x)$，即富里叶积分公式成立.

这个定理的严格证明，在此就不给出了.

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 知

$$\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

在上式第二个积分中，用 λ 代替 $-\lambda$，就得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

这是富里叶积分的复数形式. 后文主要用这种形式.

11.3.2 富里叶变换

在应用富里叶积分公式解决实际问题时，常把它改写成积分变换的形式. 为此，用 $-\lambda$ 代替 λ，把这个积分改写为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-x)}\mathrm{d}t$$

令

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \tag{1}$$

则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{2}$$

通常把 $F(\lambda)$ 称为 $f(x)$ 的富里叶变换或象函数；而 $f(x)$ 称为 $F(\lambda)$ 的逆变换或象原函数．由象函数回到象原函数的公式称为富里叶变换的反演公式．

如同富里叶级数一样，奇函数与偶函数的富里叶变换具有比较简单的形式．

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)\sin\lambda x$ 是奇函数，于是有

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\lambda t + i\sin\lambda t) dt \\ &= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt \end{aligned}$$

它称为 $f(x)$ 的余弦变换．由于 $F(\lambda)$ 也是 λ 的偶函数，因此，它的逆变换是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)(\cos\lambda x - i\sin\lambda x) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(\lambda)\cos\lambda x d\lambda \end{aligned}$$

若 $f(x)$ 是奇函数，则其富里叶变换为

$$F(\lambda) = 2i \int_{0}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt$$

为避免复数因子 i，今定义

$$G(\lambda) = 2\int_0^{\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$$

为 $f(x)$ 的正弦变换，与此相对应的逆变换公式为

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} G(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

余弦变换和正弦变换实际上只利用了 $f(x)$ 在区间$[0,\infty)$ 上的函数值，因此，对于定义在半无限区间$[0,\infty)$ 上的函数 $f(x)$，也可以按照问题的需要作出它的正弦变换或余弦变换.

例 1 求指数衰减函数(图 11.9)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (\beta > 0)$$

的富里叶变换.

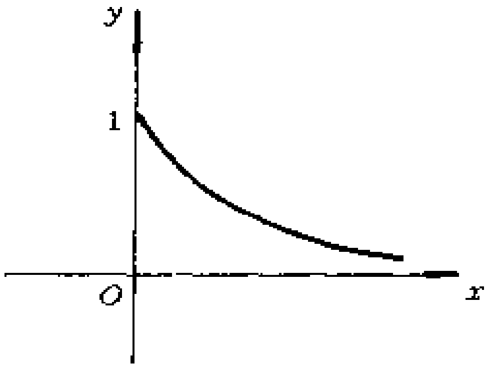


图 11.9

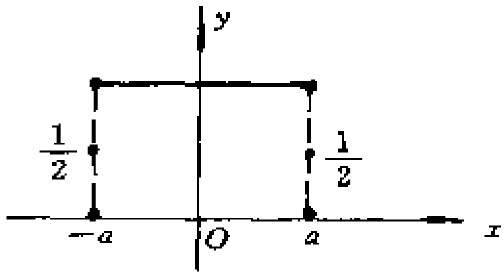


图 11.10

解 由定义

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} e^{(i\lambda-\beta)x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta - i\lambda} = \frac{\beta + i\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不连续，故依收敛定理，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta+\mathrm{i}\lambda}{\beta^2+\lambda^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}f(x), & x\neq 0\\ 1/2, & x=0\end{cases}$$

例 2 求分段函数(图 11.10)

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ \dfrac{1}{2}, & x=\pm a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

的富里叶变换.

解 因 $f(x)$ 是偶函数，所以它的富里叶变换就是余弦变换，且为

$$F(\lambda)=2\int_0^{\infty}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t=2\int_0^{a}\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}$$

又因 $f(x)$ 在不连续点 $x=\pm a$ 已定义为其左右极限的平均值，故反演公式在整个数轴上成立，于是

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例 3 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}\ (a>0)$ 的富里叶变换.

解 $f(x)$ 是偶函数，它的富里叶变换是

$$F(\lambda)=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{2a}{a^2+\lambda^2}.$$

例 4 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ 的正弦变换.

解 把 $f(x)$ 开拓到负半轴，使之成为奇函数，即当 $x<0$ 时补充定义

$$f(x)=-\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

对开拓后的函数求正弦变换得

$$F(\lambda) = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\lambda t \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

由 10.3.3，已知

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

所以

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}$$

此即为所给函数的正弦变换．同样可得这个函数的余弦变换也是

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}$$

细心的读者可能已经注意到，例 4 中的函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 不满足收敛定理的条件，但仍可求出它的富里叶变换．这是因为定理的条件是充分条件，不是必要的．实际上，收敛定理的条件可放宽为

1° 函数 $f(x)$ 在每个有限区间上绝对可积；

2° 存在数 $M > 0$，当 $|x| \geqslant M$ 时，$f(x)$ 单调，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

在这个意义下，$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 是满足收敛的条件的．

11.3.3 富里叶变换的性质

富里叶变换有一些简单的性质，这些性质对求函数的富里叶变换有直接的意义．为方便起见，用记号 $F[f]$ 表示函数 $f(x)$ 的富里叶变换，即

$$F[f] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$$

1°(线性关系) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在富里叶变换，则对任意常数 α 与 β，函数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 也存在富里叶变换，且有

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g]$$

2°(频移特性) 若函数 $f(x)$ 存在富里叶变换，则对任意的实数 λ_0，函数 $f(x)e^{i\lambda_0 x}$ 也存在富里叶变换，且有

$$F[f(x)e^{i\lambda_0 x}] = F(\lambda + \lambda_0)$$

这两条性质是显然的.

3°(微分关系) 若函数 $f(x)$ 当 $|x| \to \infty$ 时的极限为零，而微商 $f'(x)$ 的富里叶变换存在，则有

$$F[f'(x)] = -i\lambda F[f(x)]$$

即微商的富里叶变换等于原函数的富里叶变换乘以因子 $-i\lambda$.

事实上，由分部积分法即得

$$F[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\lambda x} dx = f(x) e^{i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$$
$$= -i\lambda F[f(x)]$$

一般地，若函数 $f(x)$ 及其前 $(k-1)$ 阶微商当 $|x|$ 趋于无穷大时的极限等于零，而 k 阶微商 $f^{(k)}(x)$ 的富里叶变换存在，则

$$F[f^{(k)}(x)] = (-i\lambda)^k F[f(x)]$$

即 k 阶微商的富里叶变换等于原函数的富里叶变换乘以因子 $(-i\lambda)^k$.

4°(微分特性) 若函数 $f(x)$ 与 $xf(x)$ 的富里叶变换存在，则 $f(x)$ 的富里叶变换是可微的，且有

$$F'(\lambda) = F[ixf(x)]$$

为了说明富里叶变换的另一重要性质，我们引进卷积的概念.

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积，则称含参

变量的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积，记为 $f \star g$，即

$$f \star g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

这个卷积如同普通乘法一样，满足交换律，结合律和分配律. 即若函数 $f(x), g(x)$ 与 $h(x)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积，则有

$$f \star g = g \star f$$

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$$

$$(f+g) \star h = f \star h + g \star h$$

以结合律为例. 由卷积的定义有

$$\begin{aligned}(f \star g) \star h &= \int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(x-t)h(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} h(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

作代换 $\xi = t + \tau$，并交换积分顺序即得

$$\begin{aligned}(f \star g) \star h &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi-t)h(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\xi \\ &= f \star (g \star h)\end{aligned}$$

5° 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积，则卷积 $f \star g$ 也在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积，且有

$$F[f \star g] = F[f]F[g]$$

即卷积的富里叶变换等于各“因子”的富里叶变换的乘积.

证明 这里只证后一论断，由定义

$$F[f \star g] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t\right] e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$$

注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对可积性，可知积分次序是可交换的，于是得到

$$F[f\star g]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$$

作变量代换 $x=t+\xi$，就有

$$\begin{aligned}F[f\star g]&=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t+\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi=F[f]F[g]\end{aligned}$$

6°(巴塞瓦尔等式)　设 $f(x)$ 可积且平方可积，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda$$

其中，$F(\lambda)$ 是 $f(x)$ 的富里叶变换.

证明　令

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

它的富里叶变换为

$$\begin{aligned}F[g]&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}\mathrm{d}u\\&=\overline{F(\lambda)}F(\lambda)=|F(\lambda)|^2\end{aligned}$$

由逆变换公式知

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

当 $x=0$ 时有

$$g(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot f(0+t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2 e^{-i\lambda\cdot 0}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda$$

这个等式不仅建立了 $f(x)$ 与 $F[f]$ 的联系，而且有明显的物理意义，即给出了总能量的谱表示式. 例如，把 $f(x)$ 看成电路中的电压或电流强度，当电阻为 1 时，这个电路所消耗的功率就是 $f^2(x)$，积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 就是总能量，而 $|F(\lambda)|^2$ 为 $f(x)$ 的能谱密度，即频率为 λ 的谐波能量.

例 试由富里变换的性质求正弦衰减函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\beta x}\sin\omega_0 x, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(\beta>0)$$

的富里叶变换.

解 由 11.3.2 的例 1 知衰减函数

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\beta x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

的富里叶变换为

$$F[g(x)]=G(\lambda)=\frac{1}{\beta-i\lambda}$$

而

$$f(x)=g(x)\sin\omega_0 x=-\frac{i}{2}(e^{i\omega_0 x}-e^{-i\omega_0 x})g(x)$$

根据线性关系和频移特性即得此函数的富里叶变换

$$F[f]=-\frac{i}{2}\{F[e^{i\omega_0 x}g(x)]-F[e^{-i\omega_0 x}g(x)]\}$$

$$=-\frac{i}{2}[G(\lambda+\omega_0)-G(\lambda-\omega_0)]$$

$$= -\frac{i}{2}\left\{\frac{1}{\beta - i(\lambda + \omega_0)} - \frac{1}{\beta - i(\lambda - \omega_0)}\right\}$$

$$= \frac{\omega_0}{(\beta - i\lambda)^2 + \omega_0^2}$$

这与直接从定义算得的结果完全一致.

复习思考题

1. 写出函数 $f(x)$ 的富里叶变换及其反演公式.

2. 对比富里叶积分与富里叶级数,找出它们的关系.

习题 11.3

1. 用富里叶积分表示下列函数:

(1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ kx, & 0 < x < T \\ 0, & x \geqslant T \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$

2. 求下列函数的富里叶变换

(1) $f(x) = xe^{-a|x|} \quad (a > 0)$

(2) $f(x) = e^{-a|x|}\cos bx \quad (a > 0)$

(3) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

3. 按指定的要求将函数 $f(x) = e^{-x} (0 \leqslant x < +\infty)$ 表示成富里叶积分.

(1)用偶性开拓; (2)用奇性开拓.

4. 求函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$$

的富里叶变换. 由此证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}\mathrm{d}\alpha=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |x|<1\\ \dfrac{\pi}{4}, & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

5. 求函数 $F(\lambda)=\lambda e^{-\beta|\lambda|}$ $(\beta>0)$ 的富里叶逆变换.

复 习 题

1. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\pi-1)x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2}(\pi-x), & 1<x\leqslant\pi\end{cases}$$

则 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}\sin nx$, $|x|\leqslant\pi$. 求证:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2=\dfrac{\pi-1}{2}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^4}=\dfrac{(\pi-1)^2}{6}$

2. 将函数 $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ bx, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展成富里叶级数,并证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$(其中 $a\neq b$, $a,b\neq 0$).

3. 设 $\varphi(x)$ 是$[0,a]$上的单调增函数,证明

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^a \varphi(t) \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \varphi(0+0)$$

(提示：利用

$$\int_0^a \varphi(t) \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{d}t = \varphi(0+0) \int_0^a \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{d}t + \int_0^a (\varphi(t) - \varphi(0+0)) \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{d}t \quad)$$

4. 利用等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos kt \mathrm{d}t = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t$$

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 之和 $(x \in [-\pi, \pi])$.

(提示：利用 3 题)

5. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ 的富里叶变换.

6. δ 一函数定义为

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

且对任何可积函数 $f(x)$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) \mathrm{d}x = f(0)$$

证明：$\delta(x)$ 的富里叶变换 $F[\delta] = 1$，从而

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}\lambda$$

12 线性微分方程

本章是第四章的继续，完成微分方程解的存在唯一性定理及解对初始条件的连续性定理的证明，还要讲述高阶线性微分方程解的结构理论及微分方程组的求解方法.

12.1 微分方程解的存在性与唯一性定理

从已经接触到的微分方程中，我们知道，能用初等积分法求出通解的微分方程是极为有限的，但是，科学实验和其他学科不断提出许多微分方程，这些微分方程都带有一定的初始条件. 因此，实际上也无必要在求出方程的通解之后再由初始条件定出特解来，而只需求出满足初始条件的某个特解. 问题是，所给出的微分方程是否存在满足初始条件的解，这种解是否唯一以及解对所给初始条件是否连续. 本节将逐个回答这些问题.

12.1.1 皮卡(Picard)逐次逼近法，微分方程解的存在性与唯一性定理

设有一阶微分方程

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

及初始条件

$$y(x_0) = y_0$$

假定函数 $f(x,y)$ 在以初始点(x_0,y_0)为中心的矩形区域 D

$$|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b$$

上连续，且对 y 有连续的偏微商$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. 因而它们有界，即存在正常数 M 和 K，使在矩形 D 上有

$$|f(x,y)| \leqslant M, \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leqslant K.$$

为证明微分方程(1)解的存在性，我们先指出该初值问题(1)等价于积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

事实上，若 $y = y(x)$ 是(1)的解，则 $y(x_0) = y_0$，且

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv f(x,y(x))$$

将这个恒等式从 x_0 到 x 积分就有

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t$$

也就是说 $y(x)$ 是方程(2)的解. 反之，若 $y(x)$ 满足方程(2)，就有 $y(x_0) = y_0$ 及

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv f(x,y(x))$$

即 $y(x)$ 也满足方程(1).

利用方程(1)、(2)的等价性，只须考察方程(2)解的存在性. 为此，对(2)用皮卡逐次逼近法.

令 $y_0(x) \equiv y_0$ 为方程(2)的零次近似，将其代入方程(2)的左端，得一次近似

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y_0(t))\mathrm{d}t$$

再将 $y_1(x)$ 代入方程(2)的左端得二次近似

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))\mathrm{d}t$$

依次类推，当 $y_{n-1}(x)$ 定义好后，可以定义 n 次近似

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t$$

在如此定义函数列 $\{y_n(x)\}$ 时，必须注意点 $(x, y_n(x))$ 不超出矩形区域 D 的范围. 为此，只须限制 x 的变化范围，使 $|x - x_0| \leqslant h$，其中

$$h = \min(a, \frac{b}{M})$$

事实上，作了这样的限制后，

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b \end{aligned}$$

且 $y_1(x)$ 显然是连续的. 由归纳法可证得在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上，$y_n(x)$ 是连续的，且

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

有了这样的逐次近似函数列. 我们可证明微分方程(1)在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上是有解的.

定理 1(初值问题解的存在性) 设在矩形区域 $D(|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b)$ 上，函数 $f(x,y)$ 及其偏微商 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 都是连续的，且

$$|f(x,y)| \leqslant M$$

则在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在可微函数 $y = y(x)$，满足方程

$$y' = f(x,y)$$

及初始条件 $y(x_0) = y_0$，其中 $h = \min(a, \frac{b}{M})$.

证明 先证明上述构造的函数列 $\{y_n(t)\}$ 是收敛的，再证明其极限函数就是方程(1)满足初始条件的解.

考虑函数项级数

$$y_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x)-y_{n-1}(x))$$

其中 $y_n(x)$ 是方程(2) 的解的 n 次近似，$n=0,1,2,\cdots$.

首先，当 $n=1$ 时，我们有

$$|y_1(x)-y_0(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}f(t,y_0(t))\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-x_0|$$

由于 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在 D 上连续，因而有界，设 $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant K$. 当 $n=2$ 时，

$$\begin{aligned}|y_2(x)-y_1(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_1(t))-f(t,y_0(t))]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y_0+\theta_1(y_1-y_0))\right|\cdot|y_1(t)-y_0(t)|\mathrm{d}t\right|\\&\qquad(0<\theta_1<1)\\&\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|y_1(t)-y_0(t)|\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant KM\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|\mathrm{d}t\right|\\&=MK\frac{|x-x_0|^2}{2!}\end{aligned}$$

假设当 $n=m$ 时，不等式 $|y_m-y_{m-1}|\leqslant\dfrac{MK^{m-1}}{m!}(x-x_0)^m$ 成立，则当 $n=m+1$ 时，

$$\begin{aligned}|y_{m+1}(x)-y_m(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_m(t))-f(t,y_{m-1}(t))]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y_{m-1}+\theta_m(y_m-y_{m-1}))\right||y_m(t)-y_{m-1}(t)|\mathrm{d}t\right|\\&\qquad(0<\theta_n<1)\\&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}k\cdot\frac{MK^{m-1}}{m!}|t-x_0|^m\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

$$= \frac{MK^m}{(m+1)!}|x - x_0|^{m+1}$$

因此,由归纳知

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{MK^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n \leqslant \frac{MK^{n-1}}{n!}h^n$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{MK^{n-1}}{n!}h^n$ 收敛,所以函数项级数

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x) - y_{n-1}(x))$$

在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛.设其和函数为 $y(x)$.由于 $y_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}[y_k(x) - y_{k-1}(x)] = y_n(x)$,因此,$y_n(x)$ 在区间$[x_0 - h, x_0 + h]$上一致收敛于 $y(x)$,即

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$

再由 $y_n(x)$ 在区间$[x_0 - h, x_0 + h]$上的连续性及 $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$ 知,$y(x)$ 也在该区间上连续且 $|y(x) - y_0| \leqslant b$.

现在来推证 $y(x)$ 是所考虑的初值问题的解.由于

$$|f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))| \leqslant K|y_{n-1}(t) - y(t)|$$

当 n 充分大时,$|y_{n-1}(t) - y(t)|$ 可以任意地小(对任意的 $t \in [x_0 - h, x_0 + h]$),所以

$$\lim_{n\to\infty} f(t, y_{n-1}(t)) = f(t, y(t))$$

对满足不等式 $|t - x_0| \leqslant h$ 的 t 一致成立.于是又得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

在递推公式

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t$$

中,令 $n \to \infty$,就得到

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

即 $y(x)$ 为方程(2) 的解，因而是方程(1) 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解，定理得证.

定理 2(初值问题解的唯一性)　在定理 1 的假设条件下，满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的方程(1)的解是唯一的.

证明　假设方程(1)有满足初始条件的两个解 $y(x)$ 及 $z(x)$，则它们都满足方程(2)，即

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\mathrm{d}t$$

两式相减得

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, z(t))]\mathrm{d}t$$

从而

$$|y(x) - z(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| \mathrm{d}t \right|$$

但是

$$|f(t, y(t)) - f(t, z(t))| \leqslant K |y(t) - z(t)|$$

所以

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)| \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} (|y(t) - y_0| + |z(t) - y_0|)\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} 2b\mathrm{d}t \right| = 2bK |x - x_0| \end{aligned}$$

再将该估计式代入上述不等式的积分中又得进一步的估计式

$$
\begin{aligned}
|y(x)-z(x)| &\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|y(t)-z(t)|\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant K\cdot 2bK\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|\mathrm{d}t\right| \\
&= 2bK^2\frac{|x-x_0|^2}{2!}
\end{aligned}
$$

如此继续下去,有

$$|y(x)-z(x)|\leqslant 2bK^n\frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

令 $n\to\infty$,则 $2bK^n\dfrac{|x-x_0|^n}{n!}\leqslant\dfrac{2bK^na^n}{n!}\to 0$. 所以

$$|y(x)-z(x)|\to 0\quad(n\to\infty)$$

即 $y(x)\equiv z(x)$,从而方程(1)在初始条件 $y(x_0)=y_0$ 下的解是唯一的.

注意,若方程(1)右端的函数 $f(x,y)$ 是 y 的线性函数,即 $f(x,y)=P(x)y+Q(x)$,那么容易知道,在 $P(x),Q(x)$ 共同连续的区间 $[\alpha,\beta]$ 上,对任何初值 (x_0,y_0) $(\alpha\leqslant x_0\leqslant\beta)$,解的存在唯一性的结论成立. 事实上,由于一般的方程满足初始条件的解只能定义在 $|x-x_0|<h$ 上,这是因为逐次近似函数列 $\{y_n(x)\}$ 不能越出原来的矩形区域 D,而现在,由于右端函数对 y 没有任何限制,上述函数列 $\{y_n(x)\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都有定义并且一致收敛.

例 应用皮卡逐次逼近法求微分方程

$$\begin{cases}y'=x^2-y\\ y(0)=0\end{cases}$$

的解.

解 方程 $y'=x^2-y$ 的右端是 y 的线性函数,而 x^2 及 -1 在 $x\in(-\infty,\infty)$ 中连续,因此,方程的解将可定义在整个数轴上,并且解是唯一的.

令 $y_0=0$，这是 0 次近似，y 的各次近似如下（$n=1,2,\cdots$），

$$y_1(x)=\int_0^x(t^2-0)\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x)=\int_0^x\left(t^2-\frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}$$

$$y_3(x)=\int_0^x\left(t^2-\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{3\cdot 4}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_n(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}-\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{3\cdot 4\cdots(n+2)}$$

$$=2\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\right)$$

$$=-2\sum_{k=0}^{n+2}\frac{(-1)^k x^k}{k!}+2-\frac{2x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}$$

于是得

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}+2-2x+x^2$$

$$=2-2x+x^2-2\mathrm{e}^{-x}$$

这与直接计算所得的解是一致的.

12.1.2 欧拉(Euler)折线法

本节要介绍微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的另一种近似求解法——欧拉折线法.

设 $y=y(x)$ 是微分方程

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

的任意一个解，它在平面 Oxy 上所表示的曲线称为方程(1)的一条积分曲线. 曲线在点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率与函数 $f(x,y)$ 在该点处的值相等. 如果在 $f(x,y)$ 的定义域 D 内的任一点 $M(x,y)$ 处，作一单位长的有向线段，使得它的斜率为值 $f(x,y)$，于是就给出了区域 D 内的一个向量场，称为由方程(1)确定的向量场.

如果在区域 D 内有一条光滑曲线 C，曲线上每一点的切向量都与向量场在该点的方向一致，那么，这条曲线就是微分方程(1)的一条积分曲线，而曲线的方程 $y=y(x)$ 就是方程(1)的一个解.

根据这种几何解释，欧拉提出了用折线近似地求方程(1)在初始条件 $y(x_0)=y_0$ 下解的方法，即欧拉折线法. 它具有直观简便等优越性.

假定方程(1)在区域 D 上的每一点处的解存在唯一，为了在区间 $[x_0,b]$ 上作出方程过点 $M_0(x_0,y_0)$ 的近似积分曲线，可用分点

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间 $[x_0,b]$ 等分成 n 个区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\cdots,n)$，每个区间的长 $h=\frac{1}{n}(b-x_0)$，称为步度.

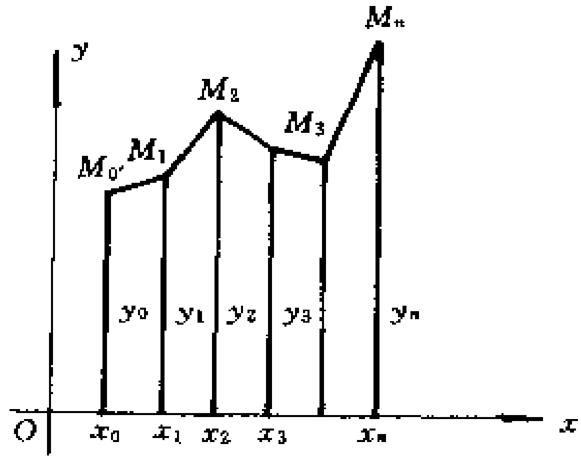


图 12.1

以 $M_0(x_0,y_0)$ 为起点作一斜率为 $f(x_0,y_0)$ 的线段，它与直线 $x=x_1$ 交于点 $M_1(x_1,y_1)$ (图 12.1). 显然

$$y_1-y_0=f(x_0,y_0)h$$

再以 $M_1(x_1,y_1)$ 为起点作一斜率为 $f(x_1,y_1)$ 的线段，它与直线 $x=x_2$ 交于点 $M_2(x_2,y_2)$，同样

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h$$

如此继续下去可得 $M_3(x_3,y_3), M_4(x_4,y_4), \cdots, M_n(x_n,y_n)$，且有

$$y_k - y_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1})h \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

这样，得到一条折线 $M_0M_1\cdots M_n$，它是方程(1) 过点 $M_0(x_0,y_0)$ 的近似积分曲线. 当步度 h 愈小时，欧拉折线的近似程度就愈好，可以想到，当 $h \to 0$ 时，欧拉折线的极限即为方程(1) 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的积分曲线. 其证明，这里不再叙述了.

对于 $b < x_0$ 的情形，一样可以有上述分割和关系式

$$y_k - y_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1})h$$

不过 h 是负数罢了.

12.1.3 解的延拓

从 12.1.1 中解的存在唯一性定理中可以看到，方程

$$y' = f(x,y)$$

满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解是局部性的，特解只在区间$[x_0 - h, x_0 + h]$上有定义，其中 $h = \min(a, \frac{b}{M})$ 而实际上人们总要求解的存在区间尽可能地扩大，这自然引出解的延拓的思想.

假设方程(1)左端的函数 $f(x,y)$ 在一有界域 G 内连续且有连续的偏微商$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，$y = y(x)$ 是方程(1) 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解，$x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. 取 $x_1 = x_0 + h, y_1 = y(x_0 + h) = y(x_1)$. $(x_1, y_1) \in G$，存在以(x_1,y_1)为中心的矩形 D_1：$|x - x_1| \leqslant a_1$，$|y - y_1| \leqslant b_1$，$D_1 \subset G$ 中. 由解的存在唯一性定理，存在唯一的函数 $y = y_1(x)$，满足$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$，且 $y_1(x_1) = y_1$，$x \in [x_1 - h_1, x_1 + h_1]$. $h_1 = \min(a_1, \frac{b_1}{M_1})$，其中 M_1 大于 $|f(x,y)|$ 在 D_1 中的最大值. 再由唯一性定理在$[x_0, x_0 + h]$与$[x_1 - h_1, x_1]$的公共部分，$y_1(x) \equiv y(x)$. 这样，

就将方程(1)的解延拓到$[x_0-h,x_1+h_1]$上了. 再令$x_2=x_1+h_1$, $y_2=y_1(x_1+h_1)$,又可以取以(x_2,y_2)为中心的矩形区域$D_2\subset G$,再将方程(1)的解延拓到$x_0-h\leqslant x_2+h_2=x_0+h+h_1+h_2$上,其中$h_2>0$为常数. 同样可以在$x_0-h$左方进行延拓.

解的延拓,用几何直观的语言来讲,就是在原来的积分曲线$y=y(x)$的左右两端各接上一个积分曲线段(图12.2).

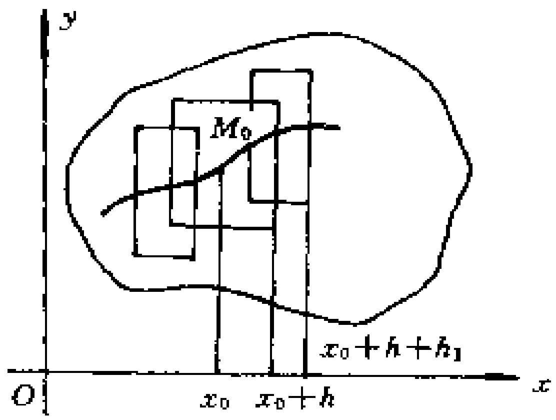


图 12.2

问题是$y=y(x)$向两边延拓的最终情况如何,答案由解的延拓定理作出.

解的延拓定理 如果方程(1)中的函数$f(x,y)$在有界区域G中连续且有连续的偏导数$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$,那么,满足初始条件$y(x_0)=y_0$的方程的解$y=y(x)$可以延拓,直到点$(x,y(x))$任意接近区域$G$的边界.

限于篇幅,这个定理本书不加证明.

12.1.4 解对初值的连续性与可微性

在证明微分方程$y'=f(x,y)$的满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解的存在唯一性定理的时候,我们把初值(x_0,y_0)看作固定的. 但是在实际问题中,这些值都是经过测量得到的. 在测定数据时,不可避免地会出现误差,这促使我们在考虑初值问题解时,要把初值的变化对解的影响估计在内,实际上,初值问题的解不仅依赖于自变量x,还依赖于初值(x_0,y_0). 因此,微分方程$y'=f(x,y)$的解可以看作是三个变量的函数$y=y(x,x_0,y_0)$. 例如方程

$$y' = y$$

的满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解为 $y = y_0 e^{x-x_0}$，显然是自变量 x 及初值 x_0, y_0 的函数，并且关于 x, x_0, y_0 都是连续和可微的. 下面，仅讨论对同一个 x_0 所测出的初始值 $y_0(x_0), \bar{y}_0(x_0)$ 不同时，解对 y_0 的连续性，即若 $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$，则所得的解 $y(x)$ 及 $\bar{y}(x)$ 也有较小的误差

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \delta e^{Kh}$$

定理 1 设在区域 $D: |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$ 上，函数 $f(x, y)$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 连续，且 $|f(x,y)| \leqslant M$，$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant K$，$(x_0, \bar{y}_0) \in D$，$|\bar{y}_0 - y_0| < \delta$，则满足初始条件

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

的两个解 $y(x)$ 及 $\bar{y}(x)$ 的误差不超过 δe^{Kh}，即

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leqslant \delta e^{Kh}$$

其中 $h = \min(a, \dfrac{b}{M})$，$\delta$ 是任给正数.

证明 由定理条件知 $y(x)$ 及 $\bar{y}(x)$ 分别适合方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \mathrm{d}t$$

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \bar{y}(t)) \mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}
&|y(x) - \bar{y}(x)| \\
&\leqslant |y_0 - \bar{y}_0| + \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| \mathrm{d}t \right| \\
&= |y_0 - \bar{y}_0| + \int_{x_0}^{x} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y + \theta(y - \bar{y})) \right| |y(t) - \bar{y}(t)| \mathrm{d}t \\
&\leqslant |y_0 - \bar{y}_0| + K \int_{x_0}^{x} |y(t) - \bar{y}(t)| \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

而

$$\max|y(x)-\bar{y}(x)|<\delta+K\left|\int_{x_0}^{x}\max|y(t)-\bar{y}(t)|\mathrm{d}t\right| \quad (\star)$$

令 $\eta(x)=\int_{x_0}^{x}\max|y(t)-\bar{y}(t)|\mathrm{d}t$，于是

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}=\max|y(x)-\bar{y}(x)|$$

代入($\star$)式得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}-K\eta(x)<\delta$$

当 $x>x_0$ 时，上不等式两边同乘因子 $\mathrm{e}^{-K(x-x_0)}$，就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\eta(x)\mathrm{e}^{-K(x-x_0)})<\delta\mathrm{e}^{-K(x-x_0)}$$

再同时从 x_0 到 x 积分得

$$\eta(x)\mathrm{e}^{-K(x-x_0)}<\frac{\delta}{K}[1-\mathrm{e}^{-K(x-x_0)}]$$

故 $\eta(x)<\frac{\delta}{K}[\mathrm{e}^{K(x-x_0)}-1]$. 于是有

$$|y(x)-\bar{y}(x)|<\delta+\delta[\mathrm{e}^{K(x-x_0)}-1]=\delta\mathrm{e}^{K(x-x_0)}$$

对 $x\leqslant x_0$ 情形，同样可得上式.

于是对一切 $|x-x_0|<h$，

$$|y(x)-\bar{y}(x)|<\delta\mathrm{e}^{K(x-x_0)}$$

成立.

更进一步，有解对初值的连续性、可微性定理，现把它不加证明地叙述如下.

定理 2 若函数 $f(x,y)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在区域 G 内连续，则方程

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

的解 $y=y(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在其存在区域内是连续的，且它对 x,x_0,y_0 的偏导数也是连续的.

习题 12.1

1. 应用逐次逼近法求下列方程满足所给初始条件的解.

(1) $y' = y + x, \quad y(0) = 0$

(2) $y' + y = e^x, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$

2. 求方程 $y' = x + y^2$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解的逐次逼近 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$.

3. 用欧拉折线法近似地积分方程

$$y' = 2x - 0.1y^2$$

取步度 $h = 0.1$，且 $y(0) = 0$，并求 $y(0.5)$.

4. 假设函数 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 在区间$[\alpha,\beta]$上连续，试证方程

$$y' = P(x)y + Q(x)$$

满足任一初始条件 $y(x_0) = y_0$ $(\alpha \leqslant x_0 \leqslant \beta, a \leqslant y \leqslant b)$ 的解 $y = y(x, x_0, y_0)$ 作为 x, x_0, y_0 的函数，于区域

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \alpha \leqslant x_0 \leqslant \beta, a \leqslant y_2 \leqslant b$$

内存在连续偏导数 $\dfrac{\partial y}{\partial x}, \dfrac{\partial y}{\partial x_0}, \dfrac{\partial y}{\partial y_0}$，并写出表达式.

12.2 二阶线性微分方程的一般理论

关于未知函数及其导数是线性的 n 阶微分方程称为 n 阶线性微分方程. 它的形式是

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

如果 $f(x) \equiv 0$，则方程称为线性齐次的. 若 $a_0(x)$ 在某区间上恒不等于零，则在该区间上 n 阶线性齐次方程变为

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

其中 $P_i(x)=\dfrac{a_i(x)}{a_0(x)}, i=1,\cdots,n.$

在实际问题中最常见的线性方程是二阶的，它的一般形式是

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

相应的齐次方程是

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

二阶线性方程无论在实际应用中，还是在理论上都有很重要的意义，在这一节中，将对它进行一般的讨论. 如果函数 $p(x)$，$q(x)$ 在区间 I 上连续，则对任何初始值 $y(x_0)=\alpha, y'(x_0)=\beta, x_0\in I$ 的邻域内，初值问题

$$\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\\ y(x_0)=\alpha, y'(x_0)=\beta\end{cases}$$

经过简单的变换就可以化为等价的一阶方程组的初值问题. 利用皮卡逼近法，同样可以证明，它的解存在且唯一. 所以，在下面的讨论中，总假定系数函数 $p(x)$，$q(x)$ 在某一区间 (a,b) 或在整个数轴上是连续的.

我们知道，一个微分方程总有很多的解，二阶线性方程也一样有很多解. 这一节中，将要解决这些解之间的关系，为此，首先要寻找满足某些条件的特解. 最常见的一类附加条件就是所谓初值条件：给方程的解 $y(x)$ 及其微商 $y'(x)$ 在某个点 x_0 上，例如在 $x_0=0$ 处取给定的值，即

$$y(0)=\alpha, y'(0)=\beta$$

这个初值问题的物理意义是很明显的. 如果把二阶线性方程看成是质点的振动方程，那么，上述条件就相当于给定在初始时刻质点的位置和速度，而根据这些条件求方程的解就是要确定质点的运动规律.

12.2.1 线性齐次方程解的结构

对任意的两个常数 α 与 β，后面在微分方程组一节中将说明，线性齐次方程

$$y'' + p(x)y + q(x)y = 0 \tag{1}$$

存在唯一的解 $y = y(x)$ 满足初始条件

$$y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$$

如果令 α、β 取各种不同的值，就可以得到各种不同的解. 对这些解的全体进行深入的考察，找出它们的内在联系，从而得到求解的规律. 下面就逐步地进行叙述.

定理 1 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是线性齐次方程(1) 的解，c_1，c_2 是任意常数，则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的线性组合

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是方程(1)的解.

证明 将 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 代入方程(1)的左端进行验算，并用假设条件得

$$\begin{aligned}
&[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]'' \\
&\quad + p(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]' \\
&\quad + q(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] \\
&= c_1[y''_1(x) + p(x)y'_1(x) + q(x)y_1(x)] \\
&\quad + c_2[y''_2(x) + p(x)y'_2(x) + q(x)y_2(x)] \\
&= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以 $y(x)$ 是方程(1)的解.

为了从方程(1)的无穷多个解中理出一个头绪来，需要引进函数的线性相关和线性无关的概念.

定义 1 设在区间 (a,b) 上给定 m 个函数

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)$$

如果存在 m 个不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使对于区间 (a,b) 内的一切 x，都有

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)\equiv 0$$

则称这 m 个函数在区间 (a,b) 上是线性相关的，否则就称它们在区间 (a,b) 上是线性无关的.

例 1　函数组 $1,\cos^2x,\sin^2x$ 在整个数轴上是线性相关的. 因为

$$1+(-1)\cos^2x+(-1)\sin^2x\equiv 0$$

即取 $c_1=1,c_2=c_3=-1$，就有上式对任何 x 都成立. 而函数组 $1,\cos x,\sin x$ 在整个数轴上是线性无关的. 因为若有

$$c_1\cdot 1+c_2\cos x+c_3\sin x\equiv 0$$

对任意的 x 成立，则分别令 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 就得到

$$c_1+c_2=0,c_1+c_3=0,c_1-c_2=0$$

解得 $c_1=c_2=c_3=0$. 因此，$1,\cos x,\sin x$ 不可能线性相关.

例 2　证明函数组 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 在整个数轴上线性无关.

证明（反证）　如果函数组 $1,x,\cdots,x^n$ 线性相关，那么一定存在不全为零的数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 使对任意实数 x 有

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n\equiv 0$$

求等式两边的各阶微商得

$$c_1+2c_2x+\cdots+nc_nx^{n-1}\equiv 0$$

$$2c_2+\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}\equiv 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$n!c_n\equiv 0$$

由此推出 $c_n=0,c_{n-1}=0,\cdots,c_1=0,c_0=0$. 与假设矛盾. 所以函数组 $1,x,\cdots,x^n$ 在全数轴上线性无关.

现在考虑区间 (a,b) 上的两个线性相关函数 $y_1(x),y_2(x)$. 存在

不全为零的数 c_1, c_2 使得

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$$

在区间 (a,b) 上恒成立，将此等式对 x 微商又得

$$c_1y'_1(x) + c_2y'_2(x) = 0$$

这两个等式组成关于 c_1 和 c_2 的线性齐次代数方程组，并且它有非零解，所以应有

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

这个行列式 $w(x)$ 称为函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的朗斯基(Wronski)行列式.

这样，就得到如下结论.

定理 2 如果函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 (a,b) 上线性相关，则它们的朗斯基行列式 $w(x)$ 在 (a,b) 上恒为零.

必须指出，定理 2 的逆命题不成立. 举反例如下. 设

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ (x-1)^2, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

这两个函数在 $[0,2]$ 上是线性无关的. 因为如果存在两个实数 c_1, c_2，使得在 $x \in [0,2]$ 上，

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \equiv 0$$

则分别取 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = \frac{3}{2}$ 就得

$$\frac{1}{4}c_1 = 0 \quad 和 \quad \frac{1}{4}c_2 = 0$$

因此 $c_1 = c_2 = 0$，观察 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的朗斯基行列式

$$w(x)=\begin{cases}\begin{vmatrix}(x-1)^2 & 0\\ 2(x-1) & 0\end{vmatrix}=0, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}\\ \begin{vmatrix}0 & (x-1)^2\\ 0 & 2(x-1)\end{vmatrix}=0, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 2 \text{ 时}\end{cases}$$

即在 $[0,2]$ 上 $w(x)\equiv 0$.

但是如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是线性齐次方程的解，情形就完全不同了. 这时有

定理 3 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是线性齐次方程(1) 的解，且它们的朗斯基行列式在区间 (a,b) 上恒等于零. 则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在 (a,b) 上线性相关.

证明 在 (a,b) 内任取一点 x_0，因为

$$w(x_0)=\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0)\end{vmatrix}=0$$

所以必存在不全为零的数 c_1 与 c_2，使

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=0$$

$$c_1y'_1(x_0)+c_2y'_2(x_0)=0$$

考虑函数

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

由定理 1 知，$y(x)$ 也是线性齐次方程(1)的解，且满足条件

$$y(x_0)=0,y'(x_0)=0$$

另一方面，$\tilde{y}(x)\equiv 0$ 也是方程(1) 满足上述条件的解. 由解的唯一性知 $y(x)\equiv\tilde{y}(x)\equiv 0, x\in(a,b)$. 即

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$$

在 (a,b) 上恒成立，因此，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 在 (a,b) 上线性相关.

读者可能注意到，在定理 3 的证明中，实际只用了 $w(x)$ 在一点 x_0 的值为零，但由此却得到了 $w(x)$ 在整个区间 (a,b) 上恒等于零的结果. 实际上有

定理 4 设函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性齐次方程(1)的解，则它们的朗斯基行列式可以表示成

$$w(x)=w(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$

其中 x_0 是区间 (a,b) 内的一点.

证明 因为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的解，所以

$$y''_1(x)=-p(x)y'_1(x)-q(x)y_1(x)$$

$$y''_2(x)=-p(x)y'_2(x)-q(x)y_2(x)$$

由此算得

$$\begin{aligned}&y_1(x)y''_2(x)-y''_1(x)y_2(x)\\=&-p(x)[y_1(x)y'_2(x)-y'_1(x)y_2(x)]\\=&-p(x)w(x)\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\frac{dw(x)}{dx}&=[y_1(x)y'_2(x)-y'_1(x)y_2(x)]'\\&=y_1(x)y''_2(x)-y''_1(x)y_2(x)\end{aligned}$$

比较两式，得到

$$\frac{dw(x)}{dx}=-p(x)w(x)$$

以函数 $e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$ 乘上式两端得

$$e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\frac{dw(x)}{dx}+w(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\cdot\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}p(t)dt=0$$

即

$$\frac{d}{dx}[e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}w(x)]=0$$

可见

$$e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}w(x)=c$$

令 $x=x_0$ 得 $w(x_0)=c$，于是

$$w(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

这就是所要的公式，称为刘维尔(Liouville)公式.

从刘维尔公式不难看出：朗斯基行列式 $w(x)$ 在区间内的某一点处不为零当且仅当 $w(x)$ 在整个区间上恒不为零.

由此又可推得

定理 5 若函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性齐次方程(1)的一对线性无关解，则它们的朗斯基行列式必处处不为零.

证明(反证) 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的朗斯基行列式在某点 x_0 处为零，即 $w(x_0) = 0$，则对区间内的任意 x 有

$$w(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = 0$$

所以，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性相关，矛盾. 从而证明了所要的结论.

设 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是线性齐次方程(1) 的一对线性无关解，则对任意的两个常数 c_1 和 c_2，$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 也是方程的解，由 c_1，c_2 的任意性，$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 就是方程(1)的通解. 但是一个微分方程的通解不一定是该方程的全部解，这在第四章中已有例子. 然而，如果考虑的是线性齐次方程，情况就不一样了，它的所有解都包含在通解内.

定理 6 设函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是线性齐次方程(1)的一对线性无关解，则方程(1)的任何一个解必可表示为

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

的形式，其中 c_1，c_2 为常数.

证明 在 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 的定义区间内任取一点 x_0，由函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的线性无关性及定理 5 知

$$w(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

于是方程组

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0)$$
$$c_1y'_1(x_0) + c_2y'_2(x_0) = y'(x_0)$$
有唯一解(即存在唯一的一对常数) c_1,c_2,其中 $y(x)$ 是线性齐次方程(1) 的一个解. 而 $\tilde{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 也是方程(1) 的解,且满足相同的初始条件:$\tilde{y}(x_0) = y(x_0)$,$\tilde{y}'(x_0) = y'(x_0)$,因此,依解的唯一性定理
$$y(x) = \tilde{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$
这就证明了定理.

现在我们已知道,如果给出了方程(1)的一对线性无关解,则方程(1)的一切解都能求出. 因此,常把方程(1)的一对线性无关解称为它的一个基本解组.

求方程(1)的解关键在于求出它的一个基本解组,但是,上面所证明的线性齐次方程(1)的解的结构定理并未指出基本解组的存在性. 所以还必须证明之.

定理 7 线性齐次方程(1)的基本解组是存在的.

证明 任取两组数 α_1,β_1 和 α_2,β_2 使其满足
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$
那么由下列两个初值问题
$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \beta_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha_2, y'(x_0) = \beta_2 \end{cases}$$
所得的解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 就是线性无关的. 因为在点 x_0 处有
$$w(x_0) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$
于是 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 组成了方程(1)的一个基本解组.

从定理 7 的证明中看出，线性齐次方程(1)的基本解不仅存在，而且有无穷多组. 然而要求出其一对线性无关解，却没有一般的公式可循. 虽然如此，我们仍可以对一些方程进行讨论. 因为如果能用某种方法求出其一个不为零的解时，就可以用积分的形式求出与该解线性无关的另一个解. 方法如下.

设 $y_1(x)$ 是方程(1) 的一个非零解. 根据要求，必须找到一个函数 $y_2(x)$ 与 $y_1(x)$ 线性无关，而且也是方程(1)的解. 于是由刘维尔公式应有

$$w(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

$w(x_0)$ 是一非零常数，设

$$w(x) = w_0 e^{\int p(t)dt}$$

其中 w_0 为任意非零常数，不妨设为 1. 用 $y_1^2(x)$ 除以上式得

$$\frac{y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x)}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(t)dt}$$

左端正好是 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ 的微商，两边积分得

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(t)dt} dx$$

于是就有

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(t)dt} dx \tag{2}$$

这就用 $y_1(x)$ 表达了与之线性无关的另一解 $y_2(x)$. 此时，方程(1)的通解为

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(t)dt} dx$$

例 求方程 $xy'' - y' = 0$ 的通解.

解 容易看出，$y_1 = 1$ 是方程的一个特解. 下面来求它的另一个特解 y_2.

当 $x\neq 0$ 时，方程可写成 $y''-\frac{1}{x}y'=0$. $p(x)=-\frac{1}{x}$, $q(x)\equiv 0$. 利用公式(2)，可解出

$$y_2(x)=c\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx=\begin{cases}\frac{c}{2}x^2, & x>0\\ -\frac{c}{2}x^2, & x<0\end{cases}$$

c 为任意常数，在这众多的函数中，取 $y_2=x^2$ 为原方程的一个特解，且与 $y_1=1$ 是线性无关的，又在 $(-\infty,\infty)$ 中有连续的二阶微商.

综上所述，方程的通解为

$$y=c_1+c_2x^2$$

12.2.2 线性非齐次方程解的结构

设有线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{1}$$

相应的齐次方程为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{2}$$

它们之间的解存在着十分密切的关系.

定理 如果 $y^*(x)$ 是线性非齐次方程(1)的一个特解，$u(x)$ 是相应的线性齐次方程(2)的任一解，则函数 $u(x)+y^*(x)$ 也是方程(1)的解；反之，方程(1)的任一解 $z(x)$ 一定可以表示成

$$z(x)=u(x)+y^*(x)$$

这种形式.

证明 由定理所设条件，$y^*(x)$ 满足方程(1)，$u(x)$ 满足方程(2)，即

$$y^{*\prime\prime}+p(x)y^{*\prime}+q(x)y^*=f(x)$$

及

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$$

于是

$$\begin{aligned}
&[u(x) + y^*(x)]'' + p(x)[u(x) + y^*(x)]' + q(x)[u(x) + y^*(x)] \\
&\quad = (u'' + p(x)u' + q(x)u) + (y^{*\prime\prime} + p(x)y^{*\prime} + q(x)y^*) \\
&\quad = 0 + f(x) \\
&\quad = f(x)
\end{aligned}$$

所以 $u(x) + y^*(x)$ 是方程(1)的解.

反之,如果 $z(x)$ 是方程(1)的一个解,则令 $u(x) = z(x) - y^*(x)$,有

$$\begin{aligned}
&u'' + p(x)u' + q(x)u \\
&= (z(x) - y^*(x))'' + p(x)(z(x) - y^*(x))' \\
&\quad + q(x)(z(x) - y^*(x)) \\
&= z'' + p(x)z' + q(x)z \\
&\quad - (y^{*\prime\prime} + p(x)y^{*\prime} + q(x)y^*) \\
&= f(x) - f(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

这就证明了 $z(x) = u(x) + y^*(x)$,而 $u(x)$ 是齐次方程(2)的解.

由定理可知,如果 $y^*(x)$ 是方程(1)的一个特解,$y_1(x)$,$y_2(x)$ 是相应的齐次方程(2)的一对线性无关解,则通解

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y^*(x)$$

就表示了线性非齐次方程(2)的一切解.可见求方程(1)的解归结到求它的一个特解.这可用常数变易法来解决.

在齐次方程(2)的通解 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 中,将常数 c_1,c_2 换成 x 的待定函数 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$,即假设非齐次方程(1)有形如

$$y^*(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

的特解,再根据所设条件求出函数 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$.求 y^* 的一阶微商得

$$y^{*\prime}(x) = c_1(x)y'_1(x) + c_2y'_2 + c'_2(x)y_1 + c'_2(x)y_2$$

为了在继续求微商时不出现待定函数 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 的高阶微商，我们令

$$c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \tag{3}$$

算作是对 $c_1(x)$ 与 $c_2(x)$ 的一个限制条件. 如此得到

$$y^{*\prime}(x) = c_1(x)y'_1 + c_2(x)y'_2$$

再求一次微商得

$$y^{*\prime\prime}(x) = c_1(x)y''_1 + c_2(x)y''_2 + c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2$$

将 $y^*(x)$、$y^{*\prime}(x)$ 及 $y^{*\prime\prime}(x)$ 代入方程(1)的左端得

$$\begin{aligned}c_1(x)(y''_1 &+ p(x)y'_1 + q(x)y_1)\\ &+ c_2(x)(y''_2 + p(x)y'_2 + q(x)y_2)\\ &+ c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2 = f(x)\end{aligned}$$

因为 y_1,y_2 是方程(2)的解，于是有

$$c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2 = f(x) \tag{4}$$

将(3)、(4)联列，利用 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $w(x)\neq 0$ 这一条件，就可解得

$$c'_1(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{w(x)},\quad c'_2(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{w(x)}$$

积分后得

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)f(t)}{w(t)}\mathrm{d}t,\quad c_2(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)f(t)}{w(t)}\mathrm{d}t$$

从而得到非齐次方程(1)的一个特解

$$y^*(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{w(x)}f(t)\mathrm{d}t$$

综上所述可见，欲求非齐次方程(1)的解，应先设法求出相应的齐次方程(2)的一个特解 $y_1(x)$，再配上一个与它线性无关的特解 $y_2(x)$，从而得到齐次方程的通解 $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. 然后应用常数

变易法求出非齐次方程(1)的一个特解 $y^*(x)$. 最后得方程(1)的通解为

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y^*(x)$$

例 求方程 $xy'' - y' = x^2$ 满足初始条件 $y(1) = 1, y'(1) = 1$ 的特解.

解 上一节中,我们已得到相应的齐次方程的通解 $y = c_1 + c_2x^2$. 用 $c_1(x), c_2(x)$ 代替常数 c_1、c_2, 设方程有特解

$$y^* = c_1(x) + c_2(x)x^2$$

按常数变易法的程序可得待定函数 $c_1(x)$ 与 $c_2(x)$ 满足的方程组

$$\begin{cases} c'_1(x) + c'_2(x)x^2 = 0 \\ c'_2(x) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

由此解得

$$c_1(x) = -\frac{x^3}{6}, \quad c_2(x) = \frac{x}{2}$$

故所给方程的特解为 $y^* = \dfrac{x^3}{3}$, 从而其通解为

$$y = c_1 + c_2x^2 + \frac{x^3}{3}$$

再由初始条件得 c_1 与 c_2 所满足的方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{1}{3} = 1 \\ 2c_2 + 1 = 1 \end{cases}$$

求得 $c_1 = \dfrac{2}{3}, c_2 = 0$. 从而方程满足初始条件的特解为

$$y = \frac{2 + x^3}{3}$$

12.2.3 应用幂级数求解方程

从以上的讨论中知道，二阶线性微分方程的求解，归根到底是先找出相应的齐次方程的一个特解. 这没有共同的方法可循. 一般地，先分析微分方程，假想它具有某种形式的解，将其代入微分方程，或者正好是方程的解，或者能将微分方程化为代数方程. 这种想法也适用于建立幂级数的解法.

设给定的二阶线性齐次方程为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

其中系数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 是多项式或在 $x = x_0$ 的邻域内都可展为幂级数. 这时可假设方程在此邻域内有级数形式的解. 即令

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_0(x - x_0)^n$$

为使它满足初始条件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$，应取 $a_0 = y_0, a_1 = y'_0$. 将此级数的一阶、二阶微商求出，代入方程的左端，得一恒等于零的等式. 再令 $(x - x_0)$ 的各次幂的系数为零. 由此可求出系数 $a_i(i = 2,\cdots,n,\cdots)$，从而得到方程在 x_0 的某邻域内的解.

例 1 求方程 $y'' - xy = 0$ 的幂级数解.

解 这个方程称为亚里(Airy)方程. 设它的解可以表示成

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

逐项微商后可得

$$\begin{aligned} y'' = {} & 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots \\ & + (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n + \cdots \end{aligned}$$

代入方程得

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n + \cdots \\ & - a_0x - a_1x^2 - \cdots - a_{n-1}x^n - \cdots = 0 \end{aligned}$$

合并同类项给出

$$2a_2 + (3\cdot 2a_3 - a_0)x + (4\cdot 3a_4 - a_1)x^2 + \cdots$$
$$+ [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n + \cdots = 0$$

令各幂次系数为零就有关系式

$$2a_2 = 0$$
$$3\cdot 2a_3 - a_0 = 0$$
$$4\cdot 3a_4 - a_1 = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0$$

若设 $a_0 = 1, a_1 = 0$，则有

$$a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{2\cdot 3},$$
$$a_4 = a_5 = 0, a_6 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} = \frac{1\cdot 4}{6!},$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0, a_{3k} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}$$

于是级数

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}$$

为方程的一个特解.

若设 $a_0 = 0, a_1 = 1$，则又得方程的另一级数解

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}$$

又因为

$$w(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

y_1 与 y_2 在整个数轴上线性无关且级数对任意 x 收敛. 所以亚里方程的通解为

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

例 2 求解方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$，其中 a 是实常数.

解 $x \neq \pm 1$ 时，方程化为标准式

$$y'' - \frac{x}{1 - x^2}y' + \frac{a^2}{1 - x^2}y = 0$$

$p(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$，$q(x) = \dfrac{a^2}{1 - x^2}$ 在 $(-1,1)$ 可表为幂级数. 故方程有幂级数形式的解. 设解为

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

则

$$\begin{aligned}
a^2y &= a^2a_0 + a^2a_1x + a^2a_2x^2 + \cdots + a^2a_nx^n + \cdots \\
-xy' &= -a_1x - 2a_2x^2 - 3a_3x^3 - \cdots - na_nx^n - \cdots \\
y'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots \\
&\quad + (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n + \cdots \\
-x^2y'' &= -2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - \cdots \\
&\quad - n(n - 1)a_nx^n - \cdots
\end{aligned}$$

取这些等式两边的和并令其等于零得

$$\begin{aligned}
&2a_2 + a^2a_0 + [3 \cdot 2a_3 + (a^2 - 1)a_1]x \\
&+ [4 \cdot 3a_4 + (a^2 - 4)a_2]x^2 + \cdots \\
&+ [(n + 2)(n + 1)a_{n+2} + (a^2 - n^2)a_n]x^n + \cdots = 0
\end{aligned}$$

从而得关系式 $(n + 2)(n + 1)a_{n+2} + (a^2 - n^2)a_n = 0$，或

$$a_{n+2} = -\frac{a^2 - n^2}{(n + 2)(n + 1)}a_n \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

若设 $a_0 = 1, a_1 = 0$，就有

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a^2(a^2 - 4)\cdots[a^2 - 4(k - 1)^2]}{(2k)!}$$

$$a_{2k+1}=0 \qquad (k=1,2,\cdots)$$

因此得到方程的一个特解

$$y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{a^2(a^2-4)\cdots[a^2-4(k-1)^2]}{(2k)!}x^{2k}$$

若设 $a_0=0,a_1=1$，同样得方程的另一个特解

$$y_2=x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(a^2-1)(a^2-9)\cdots[a^2-(4k-1)^2]}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

它与 y_1 是线性无关的，且这两个级数在区间 $(-1,1)$ 上收敛. 所以方程在 $(-1,1)$ 上的通解为

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

一般地，如果方程的系数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内不能展开成 x 的幂级数，但 $xp(x)$ 与 $x^2q(x)$ 在这个邻域内都可展开成 x 的幂级数，这时可设方程有广义形式的幂级数解

$$y=x^{\lambda}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

将其代入方程中，利用恒等式，定出指数 λ 及级数的各项系数 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$.

例 3 求解方程 $x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0$，其中 v 是实常数.

解 这是有名的 v 阶贝塞尔(Bessel)方程. 因为 $xp(x)=1$，$x^2q(x)=x^2-v^2$ 都是多项式，所以方程可以有广义幂级数解. 令

$$y=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, a_0\neq 0$$

为了确定指数 λ 及各项系数 a_n，使该级数成为所给方程的解，进行计算得

$$-v^2y=\sum_{n=0}^{\infty}-v^2a_nx^{n+\lambda}$$

$$x^2y = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+\lambda}$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)a_n x^{n+\lambda}$$

$$x^2y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda}$$

把它们代入到贝塞尔方程中，合并同类项得

$$(\lambda^2 - v^2)a_0x^{\lambda} + [(\lambda+1)^2 - v^2]a_1x^{\lambda+1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\{[(\lambda+n)^2 - v^2] + a_{n-2}\}x^{\lambda+n} = 0$$

x 的各次幂的系数都应为零，即有

$$\begin{aligned}
&(\lambda^2 - v^2)a_0 = 0\\
&[(\lambda+1)^2 - v^2]a_1 = 0\\
&[(\lambda+2)^2 - v^2]a_2 + a_0 = 0\\
&[(\lambda+3)^2 - v^2]a_3 + a_1 = 0\\
&\cdots\cdots\\
&[(\lambda+n)^2 - v^2]a_n + a_{n-2} = 0\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$a_0 \neq 0$，从第一式得 $\lambda^2 - v^2 = 0$，它称为指数方程．由此定出 $\lambda = \pm v$．先设 $\lambda = v$，再从第二式得

$$a_1 = 0$$

从第四式得

$$a_3 = 0$$

由递推公式 $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(\lambda+n)^2 - v^2}$ $(n > 2)$ 归纳可得

$$a_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

再从其他各式推出

$$a_2 = \frac{-1}{2^2(v+1)}a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{2^4(v+1)(v+2)2!}a_0 \cdots\cdots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(v+1)(v+2)\cdots(v+k)k!}a_0$$

$\cdots\cdots$

应用 Γ 函数的性质

$$\Gamma(v+k+1) = (v+k)(v+k-1)\cdots(v+1)\Gamma(v+1)$$

$$\Gamma(k+1) = k!$$

上述的 a_{2k} 可表示为

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\Gamma(v+1)}{2^{2k}\Gamma(v+k+1)\Gamma(k+1)}a_0$$

若取 $a_0 = \dfrac{1}{2^v\Gamma(v+1)}$，则有

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(v+k+1)\Gamma(k+1)}\frac{1}{2^{2k+v}}$$

于是对应于 $\lambda = v$，就得贝塞尔方程的一个广义幂级数解

$$y_1 = J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(v+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}$$

容易知道，该级数对任意实数 x 都收敛. 因而它的和函数 $J_v(x)$ 就确定在整个数轴上，并称为第一类贝塞尔函数.

再设 $\lambda = -v$，同样可得贝塞尔方程的另一个广义幂级数解为

$$y_2 = J_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-v+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-v}$$

当 v 不是整数时，y_1 与 y_2 是线性无关的. 于是它们的线性组合就成为贝塞尔方程的通解

$$y = c_1J_v(x) + c_2J_{-v}(x)$$

当 v 为整数时,比如为正整数时,则 $\Gamma(-v+k+1)$ 当 $k>v$ 时就无意义. 因此,只能求得贝塞尔方程的一个特解 $J_v(x)(v>0)$,如果要求方程的通解,就须引进第二类贝塞尔函数,它将在后续的课程中进行详尽的论述.

习题 12.2

1. 研究下列函数组的线性相关、无关性:

(1) x, e^x;　　(2) $\cos x, \sin x$

(3) $\cos x, \cos^3 x, \cos 3x$;　　(4) x, x^3, e^x

2. 函数 $\cos^2 x, \sin^2 x$ 在开区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内满足一个二阶线性齐次方程.

(1) 证明它们是一组基本解;

(2) 作出这个方程;

(3) 证明 1 和 $\cos 2x$ 是这个方程的另一基本解组.

3. 在下列方程中,已知其一个特解 y_1,试求它们的通解.

(1) $y''+\frac{2}{x}y'+y=0,\quad y_1=\frac{\sin x}{x}$

(2) $y''\sin^2 x=2y,\quad y_1=\operatorname{ctg} x$

(3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0,\quad y_1=x$

(4) $(1-x^2)y''-xy'+9y=0,\quad y_1$ 为三次多项式.

4. 先用观察法求下列齐次方程的一个非零特解,然后求方程的通解.

(1) $x^2y''-2xy'+2y=0, x\neq 0$

(2) $xy''-(1+x)y'+y=0, x\neq 0$

(3) $(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$

(4) $y''-y'\operatorname{tg} x+2y=0$

5. 求线性齐次方程

$$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0 \quad (x \neq 0,2)$$

满足初始条件 $y(1) = 0, y'(1) = 1$ 的特解.

6. 求下列非齐次方程的通解：

(1) $x^2y'' - xy' = 3x^3 \quad (x \neq 0)$

(2) $(x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2 \quad (x \neq 1)$

(3) $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = e^{-x^2}$

(4) $y'' + k^2y = f(x)$

7. 已知方程

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$$

的两个特解 $y_1 = x, y_2 = x^2$，试求方程的通解.

8. 已知方程 $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 6x^2 - 2 = 0$ 的一个特解 $y = x^2$，试求方程满足初始条件 $y(-1) = 0, y'(-1) = 0$ 的特解.

9. 利用幂级数求下列方程的通解：

(1) $y'' + xy' + y = 0$

(2) $y'' - e^xy = 0$

(3) $xy'' - (1 + x)y' + y = 0 \quad (x \neq 0)$

12.3 二阶常系数线性微分方程

一般说来，二阶线性微分方程的解是由一些非初等函数所构成，而且没有普遍的求解方法. 但是，对于系数为常数的线性方程，其求解问题可以很容易地解决.

12.3.1 常系数线性齐次方程

设 p, q 为两个实常数，称方程

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

为二阶常系数线性齐次方程. 下面来求这个方程的通解. 先假设方

程(1)有指数形式 e^{kx} 的特解,将它代入方程(1)后得

$$(k^2+pk+q)e^{kx}\equiv 0$$

$e^{kx}\neq 0$,所以应有

$$k^2+pk+q=0 \tag{2}$$

这是方程(1)的解中 k 应满足的二次代数方程,它称为线性齐次方程(1)的特征方程.因而,若 k 是特征方程(2)的一个根,则 e^{kx} 就是方程(1)的一个解.这样一来,微分方程(1)的求解问题,就变成代数方程(2)的求解问题.下面就方程(2)的根的各种情况来求方程(1)的通解.

1. 如果特征方程(2)有相异的两实根 k_1 与 k_2,则可得方程(1)的两个特解

$$y_1=e^{k_1x},\quad y_2=e^{k_2x}$$

它们的朗斯基行列式 $w(x)=(k_2-k_1)e^{(k_1+k_2)x}\neq 0$.所以,它们是方程(1)的一组基础解系.从而方程(1)的通解为

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

2. 如果方程(2)具有相同的实根 $k_1=k_2=-\dfrac{p}{2}$,这时,$y_1=e^{-\frac{p}{2}x}$ 就是方程(1)的一个特解.再由此利用刘维尔公式求出另一个与之线性无关的特解

$$y_2=e^{-\frac{p}{2}x}\int\frac{1}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2}e^{-\int p\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=xe^{-\frac{p}{2}x}$$

所以,在这种情况下,方程(1)的通解为

$$y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$$

3. 如果特征方程(2)有一对共轭的复根 $k_1=\alpha+i\beta$ 及 $k_2=\alpha-i\beta$,这时方程(1)有一对线性无关的复值解

$$y_1=e^{k_1x}=e^{(\alpha+i\beta)x},\quad y_2=e^{k_2x}=e^{(\alpha-i\beta)x}$$

由欧拉公式,可以写成

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

再由 12.2.1 中的定理 1 知

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

及

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

也是方程(1)的解，且它们的朗斯基行列式 $w(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$. 所以它们是线性无关的，也是方程(1)的基础解系. 这时方程(1)的通解为

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$$

例 1 求方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解.

解 特征方程为

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

它有两个不等的实根 $k_1 = 1, k_2 = 2$. 故该方程的通解为

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

例 2 求方程 $y'' + 6y' + 9y = 0$ 的通解.

解 特征方程为

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

它有相同的根 $k_1 = k_2 = -3$. 所给方程的通解为

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$$

例 3 求方程 $y'' + y' + y = 0$ 的通解.

解 特征方程为

$$k^2 + k + 1 = 0$$

它有一对共轭的复根

$$k_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad k_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

所以,方程的通解为

$$y = e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x)$$

12.3.2 常系数线性非齐次方程

在 12.2.2 中已经指出,线性非齐次方程的一个特解可以通过相应的齐次方程的通解用常数变易法求得.当然,这些计算通常是很繁琐的,而且必须经过积分计算,但是,若常系数线性非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

中的函数 $f(x)$ 具有某些特殊形式时,可用代数的方法求出方程(1)的一个特解.这些形式是

1° $f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x}$

2° $f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

其中 $\varphi(x)$ 是一 m 次多项式,α,β 是实常数.它们又都可以统一地写成

$$f(x) = \varphi(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

这样的形式.事实上,形式 1°即为 $\beta = 0$ 的特殊情形,形式 2°恰是它的实部或虚部.因此,可一般地讨论

$$f(x) = \varphi(x)e^{\lambda x}$$

的情形.其中 λ 为复数.

假设方程(1)有形如

$$y = e^{\lambda x}z(x)$$

的特解,然后再确定 $z(x)$.由于

$$y' = e^{\lambda x}(z' + \lambda z)$$

$$y'' = e^{\lambda x}(z'' + 2\lambda z' + \lambda^2 z)$$

代入方程(1)得

$$e^{\lambda x}[z'' + (2\lambda + p)z' + (\lambda^2 + p\lambda + q)z] = \varphi(x)e^{\lambda x}$$

消去 $e^{\lambda x}$，并记 $\lambda^2 + p\lambda + q = l(\lambda)$，于是 $2\lambda + p = l'(\lambda)$，上式可写成

$$z'' + l'(\lambda)z' + l(\lambda)z = \varphi(x) \tag{2}$$

1. 如果 λ 不是特征方程的根，则可令 $z(x)$ 是与 $\varphi(x)$ 同次的多项式，即若

$$\varphi(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_n$$

则可取

$$z(x) = Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

将它代入方程(2)，(2)的两端都是 x 的 m 次多项式. 比较两边同次项的系数，就可以定出系数 $b_0, b_1, \cdots, b_m$. 从而求出 $z(x)$（称为待定系数法），乘以 $e^{\lambda x}$，就得到方程(1)的一个特解了.

2. 如果 λ 是特征方程的一个单根，则 $l(\lambda) = 0$，但 $l'(\lambda) \neq 0$. 于是有

$$z'' + l'(\lambda)z' = \varphi(x)$$

为使等式两边 x 的幂次相等，当设 $z(x)$ 是比 $\varphi(x)$ 高一次的多项式. 为简单起见，可取 $z(x) = xQ(x)$，代入方程(2)，就可以确定出 $z(x)$ 各次的系数.

3. 如果特征方程有重根，且 λ 正好等于这重根. 此时即有 $l(\lambda) = 0, l'(\lambda) = 0$ $(\lambda = -\frac{p}{2})$. 方程(2) 变成 $z'' = \varphi(x)$. 这时 $z(x)$ 应是比 $\varphi(x)$ 高二次的多项式. 于是可设 $z = x^2Q(x)$，然后代入方程(2)，得出 $Q(x)$ 的各项系数，从而求出 $z(x)$.

由此求得的解若是复值函数，则可分离它的实部与虚部，将 $f(x) = \varphi(x)e^{\lambda x}$ 也分离为实部与虚部，就可以得到 $f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 的方程(1) 的特解. 这是因为如果 $y = u(x) + iv(x)$ 是方程

$$y'' + py' + qy = A(x) + \mathrm{i}B(x)$$

的复值解，其中 p,q 为实常数，$A(x),B(x)$ 是实值函数，则 $u(x)$ 和 $v(x)$ 就分别是方程

$$y'' + py' + qy = A(x) \tag{3}$$

及方程

$$y'' + py' + qy = B(x) \tag{4}$$

的解.

事实上，将 $y = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ 代入 $y'' + py' + qy$ 中就有

$$(u'' + pu' + qu) + \mathrm{i}(v'' + pv' + qv) \equiv A(x) + \mathrm{i}B(x)$$

于是

$$u'' + pu' + qu \equiv A(x),v'' + pv' + qv \equiv B(x)$$

即 $u(x),v(x)$ 分别是方程(3)和方程(4)的解.

例 1 求方程 $y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解 由 12.3.1 的例 1 知，对应的齐次方程的通解是 $c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x}$，$f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ 中指数的系数 $\lambda = 2$ 是特征方程的单根. 故令

$$z(x) = x(b_0x + b_1)$$

将 $z(x)$ 代入方程(2)得

$$2b_0 + (2b_0x + b_1) = x$$

由此解得 $b_0 = \dfrac{1}{2}$，$b_1 = -1$. 于是 $y^* = \dfrac{x}{2}(x-2)\mathrm{e}^{2x}$ 是方程的一个特解. 而其通解为

$$y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{x}{2}(x-2)\mathrm{e}^{2x}$$

例 2 求方程 $y'' - y = 4x\sin x$ 的通解.

解 特征方程为

$$k^2 - 1 = 0$$

其根为 $k = \pm 1$，故相应的齐次方程的通解为 $c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}$. 为求非齐次方程的特解. 考虑方程

$$y'' - y = 4xe^{ix}$$
由于 i 不是特征方程的根. 故可令
$$z(x) = b_0x + b_1$$
代入方程(2)得
$$2ib_0 - 2(b_0x + b_1) = 4x$$
于是得出 $b_0 = -2, b_1 = -2i$. 所以方程
$$y'' - y = 4xe^{ix}$$
的一个特解为
$$\begin{aligned} y^* &= -2(x + i)e^{ix} \\ &= -2x\cos x - \sin x + i(-2\cos x - 2x\sin x) \end{aligned}$$
其虚部 $-2\cos x - 2x\sin x$ 就是原方程的特解，因此原方程的通解为
$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} - 2(\cos x + x\sin x)$$
在求非齐次方程的特解时，注意到下述事实是有益的.

若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是线性非齐次方程
$$y'' + py' + q = f_1(x)$$
与
$$y'' + py' + q = f_1(x)$$
的一个特解，则函数 $y_1(x) + y_2(x)$ 就是线性非齐次方程
$$y'' + py' + q = f_1(x) + f_2(x)$$
的一个特解.

例 3 求方程
$$y'' + y' - 2y = (x - 2)e^{5x} + (x^3 - 2x + 3)e^{-x}$$
的通解.

解 因为特征方程 $k^2 + k - 2 = 0$ 的根为 $k_1 = -2$ 及 $k_2 = 1$，所以相应的齐次方程的通解为 $c_1e^{-2x} + c_2e^x$. 方程右边的函数 f 写成二个函数 f_1 及 f_2 之和，其中 $f_1(x) = (x - 2)e^{5x}$，$f_2(x) = (x^3 - 2x$

$+3)e^{-x}$. 所以将要求解的方程分成两个方程来考虑

$$y'' + y' - 2y = (x-2)e^{5x}$$

$$y'' + y' - 2y = (x^3 - 2x + 3)e^{-x}$$

先求第一个方程的特解. $\lambda = 5$ 不是特征方程的根. 可设 $z_1(x) = b_0 x + b_1$, 代入方程(2)得

$$11b_0 + 28(b_0 x + b_1) = x - 2$$

由此给出 $b_0 = \frac{1}{28}, b_1 = -\frac{67}{784}$, 于是有特解

$$y_1^* = \left(\frac{1}{28}x - \frac{67}{784}\right)e^{5x}$$

再求第二个方程的特解. $\lambda = -1$ 也不是特征方程的根, 可设 $z_2(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$, 代入方程(2)得

$$6c_0x + 2c_1 - (3c_0x^2 + 2c_1x + c_2)$$
$$- 2(c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3) = x^3 - 2x + 3$$

定出系数 $c_0 = -\frac{1}{2}, c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = -\frac{5}{4}, c_3 = -\frac{1}{8}$, 于是得到一个特解

$$y_2^* = \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8}\right)e^{-x}$$

$y_1^* + y_2^*$ 就构成原方程的一个特解, 从而所给方程的通解是

$$y = c_1e^{-2x} + c_1e^x + \left(\frac{1}{28}x - \frac{67}{784}\right)e^{5x}$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8}\right)e^{-x}$$

12.3.3 欧拉(Euler)方程

形如

$$x^2y'' + pxy' + qy = f(x)$$

的变系数线性方程称为欧拉方程, 其中 p, q 是常数. 通过一个自变

量的变量代换，可以将欧拉方程化为常系数方程. 事实上，当 $x > 0$ 时，令

$$x = e^t \quad \text{或} \quad t = \ln x$$

引入新的自变量 t. 因为

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

代入欧拉方程后，变成

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{d^2y}{dt^2} + qy = f(e^t)$$

这是一个以 t 为自变量的常系数线性方程. 求出它的解后，再以 $\ln x$ 替代 t，就是欧拉方程的解了. 当 $x < 0$ 时，作变换 $x = -e^t$ 或 $t = \ln(-x)$，以引进新的自变量 t，方程变成

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(-e^t)$$

同样是一个常系数线性方程. 求出它的解后，再以 $\ln(-x)$ 取代 t，就得原方程在 $x < 0$ 时的解.

例 1 求方程 $x^2y'' - xy' + y = 0$ 的解.

解 这是一个欧拉方程. $x > 0$ 时，令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$. 这使原方程变成

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0 \tag{1}$$

特征方程 $k^2 - 2k + 1 = 0$ 有重根 $k = 1$，所以方程(1)的通解为

$$y = (c_1 + c_1 t)e^t$$

再代之以 $t = \ln x$ 得所给欧拉方程在 $x > 0$ 上的通解为

$$y = (c_1 + c_2\ln x)x$$

当 $x < 0$ 时，作变换 $x = -e^t$，从而 $t = \ln(-x)$ 同样可得欧拉方程在 $x < 0$ 上的通解为

$$y = (-x)[c_1 + c_2\ln(-x)]$$

把两式合起来.得欧拉方程的通解 ($x \neq 0$) 是

$$y = |x|(c_1 + c_2\ln|x|)$$

例 2 解方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 2x\ln x + x - 2$ ($x > 0$).

解 这是一个欧拉方程.因为 $x > 0$，所以作变换 $x = e^t$，就将方程变成

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2te^t + e^t - 2$$

为常系数线性方程.它的特征方程 $k^2 + k - 2 = 0$ 有两个不同的根 $k_1 = 1, k_2 = -2$.所以相应的齐次方程有通解 $c_1e^t + c_2e^{-2t}$. 为求方程的一个特解，可以把它分成两个方程考虑

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = (2t + 1)e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = -2$$

前一个方程右边的指数系数 1 是特征方程的单根，于是可设方程有形如

$$y_1^* = t(b_0t + b_1)e^t$$

的特解，代入方程后，可确定 $b_0 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{1}{9}$. 所以

$$y_1^* = \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}t\right)e^t$$

后一方程显然有 $y_2^* = 1$ 的特解.于是，上述非齐次方程有特解

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}t\right)e^t + 1$$

通解为

$$y = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{3} + \frac{t}{9}\right)e^t + 1$$

再以 $t = \ln x$ 代入，就得原方程的通解

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} + \left(\frac{1}{3}\ln^2 x + \frac{1}{9}\ln x\right)x + 1 \quad (x > 0)$$

习题 12.3

1. 求下列常系数齐次方程的通解：

(1) $y'' - 2y' - y = 0$　　(2) $4y'' - 8y' + 5y = 0$

(3) $y'' + y' + y = 0$　　(4) $y'' - 2y' + y = 0$

(5) $y'' + y' - 6y = 0$　　(6) $y'' + \lambda y' + y = 0$（λ 为实数）

2. 解下列初值问题：

(1) $\begin{cases} s''(t) + 2s'(t) + 5s(t) = 0 \\ s(0) = 1, s'(0) = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} s''(t) - 4s'(t) + 3s(t) = 0 \\ s(0) = 6, s'(0) = 10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y'' + 4y' + 29y = 0 \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 15 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 0 \end{cases}$

3. 求下列常系数非齐次方程的一个特解：

(1) $y'' + y = 2\sin\frac{x}{2}$

(2) $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{2x}$

(3) $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$

(4) $y'' - 3y' + 2y = 2e^x\cos\frac{x}{2}$

(5) $y'' + y = \cos x$　　(6) $y'' - 2y' + y = 2e^{-x} + 3e^x$

(7) $y'' + 4y = x\sin x$　　(8) $y'' + y' - 12y = x^2e^x$

(9)$y''+2y'+y=x^2\cos x$ (10)$2y''+5y'=\cos^2 x$

(11)$y''+y=xe^x\cos x$ (12)$y''+y=\cos x\cos 2x$

4. 解下列齐次欧拉方程(设 $x\neq 0$)：

(1)$x^2y''+3xy'+5y=0$

(2)$x^2y''-xy'+y=0$

(3)$x^2y''-9xy'+21y=0$

(4)$\dfrac{d^2R}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dR}{dr}-\dfrac{n(n+1)}{r^2}R=0\quad(r>0)$

5. 解下列非齐次欧拉方程(设 $x\neq 0$)：

(1)$x^2y''-xy'=3x^3$

(2)$x^2y''-xy'+2y=x\ln x$

(3)$x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x$

(4)$(1+x)^2y''+(1+x)y'+y=4\cos\ln(1+x)$

12.4 质点的振动

12.4.1 自由简谐振动

作为二阶常系数线性方程的重要应用，我们先来考察质点的自由简谐振动.

如图 12.3，一弹簧的左端固定，右端系有质量为 m 的质点 M，其平衡时的位置取为坐标原点. 现设质点沿着 x 轴运动，在时刻 t 的位移为 $x=x(t)$，它所受的弹性力 f_1 与位移 x 成正比，且指向平衡位置，故有

$$f_1=-bx$$

其中 b 大于零称为弹性系数. 由牛顿第二运动定律可得质点 M 的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-bx$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

其中 $\omega^2=\frac{b}{m}$. 这是一个常系数线性齐次方程. 因为特征方程 $k^2+\omega^2=0$ 的根是一对共轭的虚数 $k=\pm\mathrm{i}\omega$, 所以它的通解是

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$$

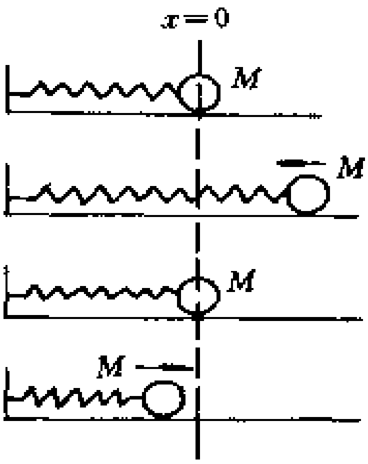


图 12.3

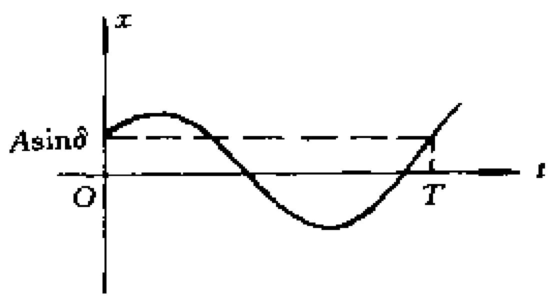


图 12.4

若令

$$\sqrt{c_1^2+c_2^2}=A$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\sin\delta,\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\cos\delta$$

则通解又可写成

$$x=A\sin(\omega t+\delta)$$

其中 A 称为质点振动的振幅, δ 称为初相, 它们可由初始位移 $x(0)=x_0$, 初始速度 $x'(0)=v_0$ 确定; 而 ω 称固有频率.

由此可见, 质点运动时, 它与原点的距离是随时间 t 按正弦规

律而周期变化，即质点作简谐振动. 振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{b}}$$

图 12.4 是振动的波形.

12.4.2 自由阻尼振动

除弹性力外，如果质点还受有阻力，且阻力 f_2 与质点运动的速度$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$成正比，其方向与速度相反，即

$$f_2 = -a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

其中 a 称为阻尼系数. 这时质点的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - bx$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha^2x = 0$$

其中 $\beta = \frac{a}{2m}, \alpha^2 = \frac{b}{m}$. 它即是质点的阻尼运动方程. 这个方程仍是常系数线性齐次方程，其特征方程 $k^2 + 2\beta k + \alpha^2 = 0$ 的两个根是

$$k_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, k_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

如果 $0 < \beta < \alpha$，则 k_1 与 k_2 是一对共轭复数

$$k_1 = -\beta + \mathrm{i}\omega, k_2 = -\beta - \mathrm{i}\omega$$

其中 $\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. 从而阻尼运动方程的通解就是

$$x = \mathrm{e}^{-\beta t}(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t)$$

或令

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = A$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\sin\delta,\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\cos\delta$$

这通解又可写成

$$x=Ae^{-\beta t}\sin(\omega t+\delta)$$

式中 $Ae^{-\beta t}$ 称为质点振动的振幅，δ 称为振动的初相，ω 称为振动的固有频率.

因为当 t 趋向无穷时，振幅 $Ae^{-\beta t}$ 趋向于零. 由此推知，在阻力较小($\beta<\alpha$)时，质点是在作周期的衰减振动. 即随着时间的无限推后，质点来回振动多次，就回到原来的平衡位置. 其波形如图 12.5.

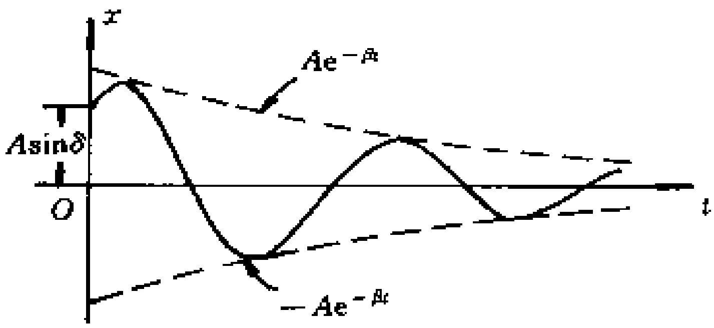


图 12.5

如果 $\beta>\alpha$，则 k_1 与 k_2 是相异的负实数，从而上述阻尼运动方程的解是

$$x=c_1e^{k_1t}+c_2e^{k_2t}$$

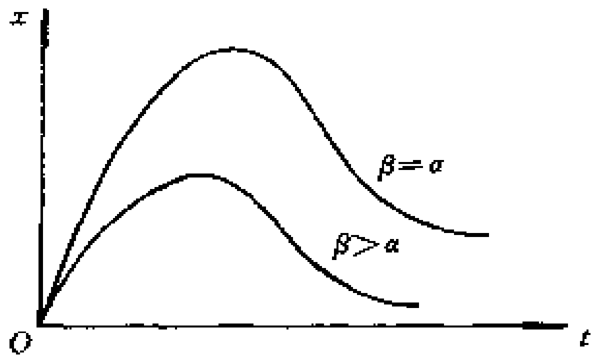
因为当 t 趋向无穷时，x 单调趋于零，所以在阻力较大($\beta>\alpha$)的情形下，随着时间 t 的无限推后，质点应渐趋于平衡位置而不发生振动. 它称为大阻尼运动.

如果 $\beta=\alpha$，则 k_1 与 k_2 是相等的两个负实数，即 $k_1=k_2=-\beta<0$，方程的通解是

$$x=e^{-\beta t}(c_1+c_2t)$$

它与大阻尼运动类似，随着时间 t 的无限推后，质点也渐趋于平衡位置而不振动，称为临界阻尼运动.

图 12.6 画出了在相同初始条件下，大阻尼运动与临界阻尼运动的波形.



12.6

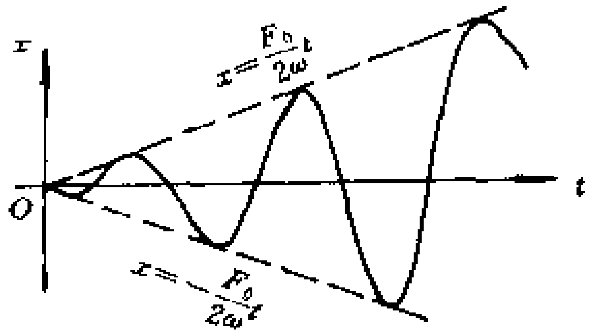


图 12.7

从上面的分析可以得出结论：当阻尼存在时，线性齐次方程所描写的自由振动，将随着时间的无限推后而逐渐消失.

12.4.3 无阻尼的强迫振动

现在进而考虑在无阻尼的条件下，作用在质点 M 上的力除弹性力 f_1 外，还有一周期外力

$$f_3 = F\sin pt$$

称为强迫力，其中 F 为常数. 这时质点的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -bx + F\sin pt$$

或令 $\omega^2 = \frac{b}{m}, F_0 = \frac{F}{m}$，这个方程又可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = F_0\sin pt$$

它是常系数线性非齐次方程. 其对应的齐次方程的通是 $A\sin(\omega t +$

δ). 为求其特解，作辅助方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 e^{ipt}$$

如果 $p \neq \omega$，可取特解具有形式 $x = Be^{ipt}$，代入方程后求得

$$B = \frac{F_0}{\omega^2 - p^2}$$

于是辅助方程的特解是

$$\frac{F_0}{\omega^2 - p^2} e^{ipt} = \frac{F_0}{\omega^2 - p^2}(\cos pt + i \sin pt)$$

从中取出虚部 $\frac{F_0}{\omega^2 - p^2}\sin pt$，即是原方程的特解而其它所有的解就可表为

$$x = A\sin(\omega t + \delta) + \frac{F_0}{\omega^2 - p^2}\sin pt$$

由此可见，质点的运动是由角频率为 ω 的自由振动与角频率为 p 的强迫振动相合而成的. 后者是由外加的周期力而引起的，当外力的频率 p 与系统的固有频率 ω 相差很小时，它的振幅 $\left|\frac{F_0}{\omega^2 - p^2}\right|$ 可以变得很大.

如果 $p = \omega$，这时辅助方程的特解应具有形式 $x = B_1 te^{i\omega t}$，代入方程求得

$$B_1 = \frac{F_0}{2i\omega}$$

于是辅助方程的特解是

$$\frac{F_0}{2i\omega} te^{i\omega t} = \frac{F_0}{2\omega} t(\sin\omega t - i \cos\omega t)$$

从中取出虚部 $-\frac{F_0}{2\omega} t\cos\omega t$ 即是原方程的一个特解，而其它所有的解就可表为

$$x = A\sin(\omega t + \delta) - \frac{F_0}{2\omega} t\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

可见强迫振动的振幅随时间 t 的推后而无限增大，并可超过任意予先给定的限度(图 12.7)，这就发生了共振现象. 共振现象在现实世界中是常能遇到的. 从事建筑工程的人都知道要避免它，这就要使外加周期力的角频率 p 不要接近振动系统的固有频率 ω；而从事电子技术的人，则常利用它，这就要使 $p=\omega$ 或 p 十分接近 ω.

12.4.4 有阻尼的强迫振动

最后再来考虑质点振动的一般情形，即质点在振动时受有弹性力 $f_1=-bx$，阻力 $f_2=-a\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与强迫力 $f_3=F\sin pt$ 作用的情形. 这时质点的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-bx+F\sin pt$$

或令 $\beta=\dfrac{a}{2m},\alpha^2=\dfrac{b}{m},F_0=\dfrac{F}{m}$，这个方程又可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\alpha^2x=F_0\sin pt$$

它是一个常系数线性非齐次方程. 当 $0<\beta<\alpha$ 时，对应的齐次方程的通解为 $Ae^{-\beta t}\sin(\omega t+\delta)$，其中频率 $\omega=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. 为求非齐次方程的特解可作辅助方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\alpha^2x=F_0e^{ipt}$$

由于右端指数的系数 ip 不是特征方程的根，故可设方程有形如 $x=Be^{ipt}$ 的特解. 代入方程求得

$$B=\frac{F_0}{\alpha^2-p^2+2p\beta i}$$

于是辅助方程的一个特解是

$$\frac{F_0}{\alpha^2-p^2+2p\beta i}e^{ipt}$$

从中取出虚部可得原方程的一个特解为

$$-\frac{2\beta pF_0}{(\alpha^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}\cos pt+\frac{(\alpha^2-p^2)F_0}{(\alpha^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}\sin pt$$

$$=E\sin(pt+\gamma)$$

其中

$$E=\frac{F_0}{\sqrt{(\alpha^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}},\quad \gamma=\operatorname{arctg}\frac{2\beta p}{p^2-\alpha^2}$$

而原方程的通解就可表示为

$$x=Ae^{-\beta t}\sin(\omega t+\delta)+E\sin(pt+\gamma)$$

由于当 t 趋向无穷时，$Ae^{-\beta t}$ 趋向于零，所以随着时间的推后，固有振动对 $x(t)$ 的影响就越来越弱，于是整个振动就化成了强迫的简谐振动

$$x\approx E\sin(pt+\gamma)$$

它的频率与外加力的频率相同，其振幅 E 是

$$E=\frac{F_0}{\sqrt{(\alpha^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}}$$

由此可见，当阻力很小，且强迫力的频率 p 接近于振动系统的固有频率 $\omega\approx\alpha$ 时，强迫振动的振幅 E 也有可能很大而发生共振. 通常根据 E 与强迫力的频率 p 之函数关系所绘制的图形称为共振曲线. 图 12.8 画出对应于不同阻尼的这种曲线. 从中可见，当阻尼系数越小时，共振曲线在 $p=\alpha$ 的邻近越陡峭地达到最大值.

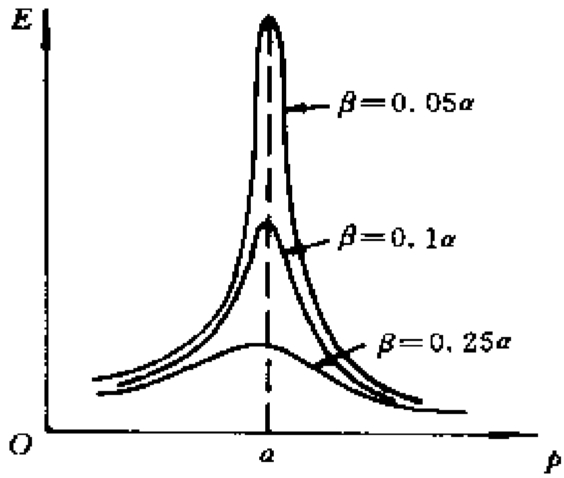


图 12.8

当 $\beta \geqslant \alpha$ 时，具有阻尼的强迫振动方程的解分别为

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + E\sin(pt + \gamma) \quad (\beta > \alpha)$$

或

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{kt} + E\sin(pt + \gamma) \quad (\beta = \alpha)$$

其中

$$k_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \quad k_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$k = -\beta, \quad E = \frac{F_0}{\sqrt{(\alpha^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

而 c_1, c_2 是任意常数. 由此可见，在长时间后，质点的运动也只决定于最后一项强迫振动. 但与小阻尼的情形不同，即使 p 与 α 相差很小，它的最大振幅不会超过$\frac{F_0}{2\beta p}$，故不发生共振.

习题 12.4

1. 在光滑的水平面上有一单位质量的质点与一水平弹簧（弹性系数 $k = 9$）的一端相联，弹簧的另一端固定. 设质点在周期性外力 $f(t) = 3\sin 3t$ 的作用下由静止开始沿水平轴运动，运动开始时弹簧没有伸缩. 如果所有阻力忽略不计，

(i)写出质点运动的微分方程；(ii)求质点的运动规律；

(iii)讨论质点的运动状态.

2. 一长为 l 米，质量为 m 的单摆作简谐振动，假定其摆动偏角很小（即 $\sin\theta \approx \theta$），试求其运动方程.

3. 一质点开始在距地球中心为 a 的地方，并以初速 v_0 向地心运动，问此质点在重力作用下而移动距离 s 时其速度如何？（假定在真空中进行）.

12.5 n 阶线性微分方程

我们已经详细地考察了二阶线性微分方程，建立了解的结构理论，指出了一些方程求通解的方法，所有这一切都可以不作实质上的改变而推广到 n 阶线性方程上去. 对此，这里不再作细致的推导，只把主要结果叙述如下.

12.5.1 n 阶线性方程解的结构

定理 1 如果函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是线性齐次方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=0 \tag{1}$$

的 n 个线性无关解，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个任意常数，则函数

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

也是这个方程的解. 反之，方程(1)的任意一个解 $y(x)$ 必可表示为

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

这种形式.

由此可见，齐次方程(1)的通解 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$ 表达了它的一切解.

定理 2 设 $y^*(x)$ 是线性非齐次方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=f(x) \tag{2}$$

的一个特解，而 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是相应的齐次方程的 n 个线性无关解，则对任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，通解

$$y(x)=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)+y^*(x)+y^*(x)$$

就表达了该线性非齐次方程的一切解.

因此，欲求 n 阶线性方程(2)的通解，应先求出相应的齐次方程(1)的 n 个线性无关解，然后再找出方程(2)的一个特解，问题就解决了. 与二阶线性方程一样，非齐次方程的一个特解可以对相应

的齐次方程的通解用常数变易法求出．所以，求解的关键是求出 n 个线性无关解．这个问题没有一定的规律可循．但当方程的系数是常数时，与二阶线性方程一样，求解问题可化为代数方程的求解．

12.5.2　n 阶常系数线性方程的求解

设

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0 \tag{1}$$

是 n 阶常系数线性齐次方程，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是实常数．若令 $y = e^{kx}$，代入方程，可得到代数方程

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_n = 0 \tag{2}$$

因此，当 k 是方程(2) 的一个根时，e^{kx} 就是微分方程(1)的一个特解．

方程(2)称为常系数线性齐次方程(1)的特征方程．

如果特征方程(2)有 n 个相异的实根 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，则

$$e^{k_1x}, e^{k_2x}, \cdots, e^{k_nx}$$

为方程(1)的 n 个线性无关解．

如果特征方程有实重根，则相应于每个 r 重根 k，方程(1) 有 r 个线性无关解

$$e^{kx}, xe^{kx}, \cdots, x^{r-1}e^{kx}$$

如果特征方程有共轭复单根，则相应于每对共轭复根 $k = \alpha + i\beta$ 及 $\bar{k} = \alpha - i\beta$，方程(1)有二个线性无关解

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{x}\sin\beta x$$

如果特征方程有共轭复重根，则相应于每对 r 重共轭复根 $k = \alpha + i\beta$ 及 $\bar{k} = \alpha - i\beta$，方程(1) 有 $2r$ 个线性无关解

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

特征方程的不相等的根，所对应的上述形式的微分方程的解

是线性无关的.

例 1 求解方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

解 特征方程 $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ 有二重共轭复根 i 及 $-$ i，因此所求方程有线性无关解

$$\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$$

方程的通解为

$$y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x$$

例 2 求方程 $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$ 的解.

解 特征方程 $k^3 + 4k^2 + 5k + 2 = 0$ 有单根 -2，二重根 -1，因此微分方程有线性无关解

$$e^{-2x}, e^{-x}, xe^{-x}$$

通解为

$$y = c_1e^{-2x} + (c_2 + c_3x)e^{-x}$$

微商后得

$$y' = -2c_1e^{-2x} + (c_3 - c_2 - c_3x)e^{-x}$$

$$y'' = 4c_1e^{-2x} + (c_2 - 2c_3 + c_3x)e^{-x}$$

令其满足初始条件得

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$-2c_1 - c_2 + c_3 = 1$$

$$4c_1 + c_2 - 2c_3 = 0$$

解之得 $c_1 = 2, c_2 = \quad 2, c_3 = 3$，故所求方程满足初始条件的解为

$$y = 2e^{-2x} - (2 - 3x)e^{-x}$$

对于一般的常系数线性非齐次方程，在求出其相应的齐次方程的通解后. 可以用常数变易法求其一个特解. 但如果非齐次方程右端的函数 $f(x)$ 具有特殊形式时，那么方程的特解也只要用待定系数法就可以求出. 其方法与二阶微分方程时完全一样.

设有 n 阶常系数线性非齐次方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny=\varphi(x)e^{\rho x} \tag{3}$$

其中，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为实常数，ρ 为复常数，而 $\varphi(x)$ 是 m 次多项式.

如果 ρ 不是其相应的齐次方程之特征方程的根，则可令方程(3)有形如

$$y^*(x)=Q(x)e^{\rho x}$$

的特解，$Q(x)$ 也是 m 次多项式 $Q(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$，将其微商 n 次，代入方程(3)，可以定出系数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$.

如果 ρ 是相应的齐次方程的特征方程之 r 重根，则令方程(3)有形如

$$y^*=x^rQ(x)e^{\rho x}$$

的特解，$Q(x)$ 是与 $\varphi(x)$ 同次的多项式，设为

$$x^rQ(x)=x^r(x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)$$

代入方程后，可以定出各项系数 $a_1,\cdots,a_m$.

例 3 求解方程 $y^{(4)}+2y''+y=9\sin 2x$.

解 相应的齐次方程就是例 1，它的通解为 $(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$.

为求方程的一个特解，考虑辅助方程

$$y^{(4)}+2y''+y=9e^{i2x}$$

由于 $2i$ 不是特征方程的根，设它的特解为 ae^{i2x}. 代入方程得 $a=1$，即 $\cos 2x+i\sin 2x$ 为辅助方程的特解，其虚部 $\sin 2x$ 即为原方程的一个特解.

所以，方程的解为

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x+\sin 2x$$

习题 12.5

1. 求下列常系数齐次方程的通解：

(1)$y''' + 9y' = 0$;　　(2)$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(3)$y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$;　　(4)$y^{(4)} = 16y$

(5)$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$;　　(6)$y^{(4)} + y = 0$

2. 求下列常系数非齐次方程的一个特解：

(1)$y''' + y'' + y' + 3y = 2\cos x$

(2)$y''' + y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$

(3)$y''' - 2y' + 4y = e^{x}\cos x$

(4)$y^{(4)} - 2y''' + y'' = x$

(5)$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 16(e^{-2x} + e^{2x})$

3. 解下列欧拉方程：

(1)$x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

(2)$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$

12.6 微分方程组

12.6.1 一般概念

在实际问题中，不仅遇到含有一个未知函数的微分方程，而且也会遇到含有几个未知函数的微分方程组.

例 1 （两体问题）一行星 P 在万有引力的作用下绕太阳运行. 若行星的质量为 m，太阳的质量为 M，试确定行星的运行规律.

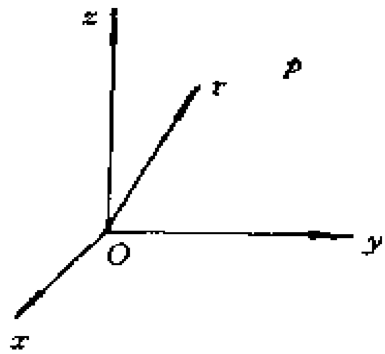


图 12.9

解 选取以日心为坐标原点的参考系 $Oxyz$(图 12.9)，并设在时刻 t 行星 P 的位置向量为 $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{r}$，则依牛顿第二定律推得行星的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

其中 $k>0$ 是引力常数. 将这个向量方程投影到三个坐标轴上就有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{mMx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{mMy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{mMz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

这是一个含有三个未知函数 $x(t),y(t),z(t)$ 的微分方程组. 为确定行星的运行规律就必须解这组方程.

例 2 设微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-v=0\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v-u=0\end{cases}$$

其中 u,v 是未知函数,x 是自变量.

例 3 设微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+z\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z+x\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x+y\end{cases}$$

其中 x,y,z 是未知函数,t 是自变量.

从以上三例子可以看出,在每个微分方程组中,方程的个数与未知函数的个数总是相同的,而各个未知函数之微商的最高阶数

可以不相同. 为对微分方程组的研究规范化，通常引进新的未知函数，使得在新的微分方程组中，各个未知函数之最高阶微商都是一阶的. 例如，在例 1 中若令

$$\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = w$$

以引进新的未知函数 u, v, w，则描述行星运动的微分方程组就可以化成具有六个未知函数 x, y, z, u, v, w 的等价微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = w \\ m\dot{u} = -k\dfrac{mMx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m\dot{v} = -k\dfrac{mMy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m\dot{w} = -k\dfrac{mMz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

其中字母上方的圆点表示对时间 t 的微商. 又如，在例 2 中，若令

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = w$$

作为新的未知函数，则它就可以化成具有三个未知函数 u, v, w 之新的等价微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = w \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = u - v \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w + v \end{cases}$$

这样一来，我们就只须考虑如下形式的一阶微分方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\\
&\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 n 个未知函数，x 是自变量．如果存在一可微函数组

$$y_1=\varphi_1(x),y_2=\varphi_2(x),\cdots,y_n=\varphi_n(x)$$

把它代入到这组方程后，就使各方程都变成恒等式，即

$$\varphi'_i(x)=f_i(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x))\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则函数组 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 称为方程组(1)的解．

一般说来，微分方程组(1)也总是存在许多解，但通常考虑的只是满足某些附加条件的解．例如要求方程组(1)的解 $y_1(x)$，$y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 在某个点上取特定的值 $y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0}$，即要求

$$y_1(x_0)=y_{10},y_2(x_0)=y_{20},\cdots,y_n(x_0)=y_{n0}\tag{2}$$

这样一个求满足特定条件的解的问题称为方程组(1)的初值问题．而条件(2)称为初始条件．利用皮卡逐次逼近法同样可以证明方程组的初值问题的解存在并且是唯一的．

定理 1 设在区域 D

$$|x-x_0|\leqslant a,|y_1-y_{10}|\leqslant b,|y_2-y_{20}|\leqslant b,\\
\cdots,|y_n-y_{n0}|\leqslant b$$

上，函数 $f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 及其偏微商 $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都是连续的，且

$$|f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)|\leqslant M$$

则在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在唯一的可微函数组

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \cdots, y_n = y_n(x)$$

满足方程组(1)及初始条件(2),其中 $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

如果在方程组(1)中,右端 f_i 关于未知函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 都是线性的,就称它为一阶线性微分方程组. 于是这个线性方程组的一般形式应为

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x) \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x) \end{cases}$$

如果函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 都恒等于零,则线性方程组就称为是齐次的,否则称为是非齐次的. 如果未知函数的系数都是常数,线性方程组就称为是常系数的.

对于线性微分方程组,可以证明,解的存在区间与系数 $a_{ij}(x)$ 及 $\varphi_i(x)$ 连续的区间一致.

定理 2 设在含点 x_0 的某一区间 (α, β) 上,函数 $a_{ij}(x), \varphi_i(x)$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 连续,则在该区间上,线性微分方程组(1)有唯一的一组解

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \cdots, y_n = y_n(x)$$

满足初始条件(2).

下面主要论述微分方程组的求解方法,并对线性微分方程组解的结构理论作一些简单的介绍.

12.6.2 消元升阶法

现在先来一般地考虑一阶微分方程组与高阶微分方程之间的

关系.

设给定 n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

令 $y_1=y,y_2=y',y_3=y'',\cdots,y_n=y^{(n-1)}$ 引进新的未知函数. 不难看出,这个方程就等价于一阶方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_2\\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_3\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx}=y_n\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{cases}$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是自变量 x 的 n 个未知函数. 反之,一阶方程组通过消元也可化成只含一个未知函数的高阶方程. 事实上,假设方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{cases}$$

的右端 $f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 对各变数都有直到 $n-1$ 阶的偏微商. 微分其中例如第一方程,根据复合函数的微分法得

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n$$

因右端仍是变量 $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的函数，故可以把它记成 $F_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = F_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

再对这个等式微分得

$$\frac{\mathrm{d}^3 y_1}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} f_n$$

以 $F_3(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 表示其右端又有

$$\frac{\mathrm{d}^3 y_1}{\mathrm{d}x^3} = F_3(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

如此继续微分 $n-2$ 次可得

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1} y_1}{\mathrm{d}x^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

再微分这个等式一次给出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n y_n}{\mathrm{d}x^n} &= \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} f_1 + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} f_n \\ &= F_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\end{aligned}$$

如果从方程组的第一方程及对它相继微分所得的前 $(n-2)$ 个等式中解出 $y_2, y_3, \cdots, y_n$，则 $y_2, y_3, \cdots, y_n$ 可用变量 $x, y_1, \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y_1}{\mathrm{d}x^{n-1}}$ 表示出来. 把这些表达式代入最后一次微分给出的等式就得到未知函数 y_1 所满足的 n 阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y_1}{\mathrm{d}x^n} = g\left(x, y_1, \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y_1}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$$

如果所给方程组是线性的，则由上述过程化得的这个 n 阶方程也是线性的. 同样，常系数线性方程组化得的高阶线性方程也是常系数的.

在把一阶方程组化为高阶方程后，就可按照前面叙述的方法求出这个方程的通解，从而又可得到方程组的通解. 解方程的这种方法称为**消元升阶法**.

例 1 试求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z \end{cases}$$

的通解.

解 微分第一方程得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3\frac{dy}{dx} - 2\frac{dz}{dx} = 3\frac{dy}{dx} - 2(2y - z)$$

再从第一方程解出 $z = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3}{2}y$，以之代入后得 y 所满足的二阶方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

由此解得

$$y = (c_1 + c_2x)e^x$$

从而

$$z = -\frac{1}{2}\frac{dy}{dx} + \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}(2c_1 - c_2 + 2c_2x)e^x$$

方程的通解中只有两个独立的常数，一般说来，一阶方程组经消元升阶后，得一 n 阶方程. 若能按前面的方法求出它的通解（含 n 个任意常数）$y(x)$，依次算出 $y'_1(x), y''_1(x), \cdots, y_1^{(n-1)}(x)$，再作代数运算，就能得到其余 $(n-1)$ 个未知函数 $y_2(x), \cdots, y_n(x)$. 由于这种计算不是积分运算，不会增加任意常数，因此，一阶方程组的通解中也只含有 n 个任意常数.

例 2 求解方程组

$$
\begin{cases}
x' = y + z - x \\
y' = z + x - y \\
z' = x + y + z
\end{cases}
$$

解 微分第一方程得

$$
\begin{aligned}
x'' &= y' + z' - x' \\
&= (z + x - y) + (x + y + z) - (y + z - x) \\
&= 3x - y + z \\
x''' &= 3x' - y' + z' \\
&= 3(y + z - x) - (z + x - y) + (x + y + z) \\
&= -3x + 5y + 3z
\end{aligned}
$$

再由第一方程 $x' = y + z - x$ 和方程 $x'' = 3x - y + z$ 解出

$$y = \frac{1}{2}(-x'' + x' + 4x),\ z = \frac{1}{2}(x'' + x' - 2x)$$

将其代入 x''' 的表达式中得到一个三阶常系数线性方程

$$x''' + x'' - 4x' - 4x = 0$$

算得它的通解为

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$$

进而又得

$$y = \frac{1}{2}(-x'' + x' + 4x) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-2t}$$

$$z = \frac{1}{2}(x'' + x' - 2x) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$$

例 3 求方程组

$$
\begin{cases}
y' = y + z + x \\
z' = -4y - 3z + 2x
\end{cases}
$$

满足初始条件 $y(0) = 1, z(0) = 0$ 的特解.

解 微分第一方程得

$$y'' = y' + z' + 1$$

$$= (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1$$
$$= -3y - 2z + 3x + 1$$

从方程 $y' = y + z + x$ 可解出 $z = y' - y - x$，并代入上式给出

$$y'' + 2y' + y = 5x + 1$$

这是一个常系数非齐次线性方程，它的通解是

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + 5x - 9$$

从而求得

$$z = y' - y - x = (c_2 - 2c_1 - 2c_2 x)e^{-x} - 6x + 14$$

为使其满足初始条件，应取 c_1 及 c_2 为方程组

$$\begin{cases} c_1 - 9 = 1 \\ c_2 - 2c_1 + 14 = 0 \end{cases}$$

的解. 算得 $c_1 = 10, c_2 = 6$. 从而所要求的特解就是

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9$$
$$z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14$$

对于高阶微分方程组，有时也可直接用消元升阶法求解.

例 4 求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dx^2} = v \\ \dfrac{d^2 v}{dx^2} = u \end{cases}$$

解 微分第一方程两次并代入第二方程得

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = u$$

这是一个四阶线性方程，它的通解为

$$u = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x$$

从而求得

$$v = \frac{d^2 u}{dx^2} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \sin x - c_4 \cos x$$

利用高阶方程与一阶方程组之间的关系立即可以推出一般 n 阶微分方程的初值问题解的存在定理.

定理 若在初始值 $(x_0,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})$ 的邻域内,函数 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 连续且对 $y,y'\cdots,y^{(n-1)}$ 有连续的偏微商,则 n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

在点 x_0 的附近存在唯一的解 $y(x)$ 满足初始条件

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

特别推得 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f(x)$$

在系数 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x),f(x)$ 连续的区间上存在唯一的解 $y(x)$ 满足条件

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

12.6.3 第一积分法

设有一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

如果消元升阶法难于应用时,可试着利用这个方程组的一些方程,凑出全微分形式的方程

$$\mathrm{d}\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$$

从而得出

$$\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=c$$

它是未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 之间的一个确定的关系式,称为所给方程组的第一积分. 容易看出,如果已知方程组(1) 的一个第一积分,则此方程组就能减少一个待求的未知函数,而化成含有 $n-1$ 个未知函数的方程组. 如果能设法求出方程组(1) 的 n 个第一积

分

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

且

$$\frac{\partial(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \neq 0$$

就称它们是方程组(1)的 n 个独立的第一积分. 则这些积分就以隐函数的形式给出了方程组(1)的通解.

如果已知方程组(1)的 k 个独立的第一积分

$$\Phi_i(x, y_1, \cdots, y_n) = c_i \quad (i = 1,2,\cdots,k)$$

其中 $k \leqslant n$. 这时可解得

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n) \quad (i = 1,2,\cdots,k)$$

余下的 $(n-k)$ 个未知函数 $y_{k+1}, \cdots, y_n$ 再由 $n-k$ 个一阶方程组

$$y'_l = f_l(x, \varphi_1, \cdots, \varphi_k, y_{k+1}, \cdots, y) \quad (l = k+1, \cdots, n)$$

确定.

例 1 求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -z + y(y^2 + z^2 - 1) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y + z(y^2 + z^2 - 1) \end{cases}$$

解 以 y 乘第一方程, z 乘第二方程, 然后相加得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 + z^2) = (y^2 + z^2)(y^2 + z^2 - 1)$$

分离变量后给出

$$\frac{\mathrm{d}(y^2 + z^2)}{(y^2 + z^2)(y^2 + z^2 - 1)} = 2\mathrm{d}x$$

等式左端分解成简单分式得

$$\frac{\mathrm{d}(y^2 + z^2)}{y^2 + z^2 - 1} - \frac{\mathrm{d}(y^2 + z^2)}{y^2 + z^2} = 2\mathrm{d}x$$

由此得到一个第一积分为

$$\ln|y^2+z^2-1|-\ln(y^2+z^2)=2x+c_0$$

或

$$\frac{y^2+z^2-1}{y^2+z^2}\mathrm{e}^{-2x}=c_1\quad(c_1=\pm\mathrm{e}^{c_0})$$

再以 z 乘第一方程，y 乘第二方程，然后相减得

$$z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-(y^2+z^2)$$

两端同除以 y^2 后分离变量有

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{z}{y}\right)}{1+\left(\frac{z}{y}\right)^2}=\mathrm{d}x$$

积分之又得另一个第一积分

$$\operatorname{arctg}\frac{z}{y}=x+c_2$$

这些第一积分就给出了所给方程组之隐形式的通解.

例 2 试解方程组

$$\begin{cases}(z-y)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\\[2ex](z-y)^2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y\end{cases}$$

解 先把方程组改写成对称的形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2}=\frac{\mathrm{d}y}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{y}$$

从它就容易得出变量 x,y,z 的全微分. 事实上，由后一等式得

$$y\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\mathrm{d}(y^2-z^2)=0$$

由此给出一个第一积分为

$$y^2 - z^2 = c_1$$

再由对称形式的后一等式按分子分母分别相减，即有

$$\frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2} = \frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}z}{z-y}$$

或化简后得

$$\mathrm{d}x + (z-y)\mathrm{d}(z-y) = 0$$

积分之又得另一个第一积分

$$x + \frac{1}{2}(z-y)^2 = c_2$$

若将 z 视为自变量. 从这些第一积分即可解得原方程组的通解为

$$x = -\frac{1}{2}(z \mp \sqrt{z^2 + c_1})^2 + c_2$$

$$y = \pm z^2 + c_1$$

例 3 求解微分方程组

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (\beta - \gamma)vw \\ \beta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (\gamma - \alpha)wu \\ \gamma \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = (\alpha - \beta)uv \end{cases}$$

其中 $\alpha > \beta > \gamma > 0$ 是已给的常数.

解 分别用 u,v,w 乘方程组的各方程并相加，可得

$$\alpha u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \beta v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 0$$

由此求得一个第一积分为

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = c_1$$

再分别用 $\alpha u, \beta v, \gamma w$ 乘方程组的各方程并相加，则得

$$\alpha^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \beta^2 v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma^2 w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 0$$

积分后又得另一个第一积分

$$\alpha^2u^2+\beta^2v^2+\gamma^2w^2=c_2$$

利用这些第一积分可以解出 u 与 v 为

$$u=\sqrt{a_1w^2+b_1},\quad v=\sqrt{-a_2w^2+b_2}$$

其中

$$a_1=\frac{\gamma(\beta-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)},\quad a_2=\frac{\gamma(\alpha-\gamma)}{\beta(\alpha-\beta)}$$

是正数；而 b_1 与 b_2 是同 c_1 与 c_2 有关的常数．代入方程组的第二方程给出

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\sqrt{(a_1w^2+b_1)(-a_2w^2+b^2)}$$

分离变量后并积分即得

$$\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(a_1w^2+b_1)(-a_2w^2+b_2)}}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}t+c$$

在物理学中，微分方程组的第一积分常有明确的物理意义．它表现为能量、动量矩在运动过程中守恒．现以本节一开始所提及的行星绕太阳运行的两体问题为例来加以说明．因为行星的运动方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}=-kM\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\[2ex]\ddot{y}=-kM\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\[2ex]\ddot{z}=-kM\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{cases}$$

用 y 乘第三方程减去用 z 乘第二方程得

$$y\ddot{z}-z\ddot{y}=0$$

积分之得第一积分

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1$$

同样可得其余第一积分

$$z\dot{x} - x\dot{z} = c_2$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c_3$$

从而由这些第一积分不难得出

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

可见在万有引力的作用下，行星在过日心的某一平面上运行.

若令 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$，则上面三个第一积分可统一表示成向量形式

$$\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$$

它表明行星对日心的动量矩守恒.

再以 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 依次乘运动方程组的各方程，然后相加得

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = -kM\frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

此即为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -kM\frac{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

积分后并乘以质量 m 又得另一个第一积分

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - k\frac{mM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = H$$

其中 H 是任意常数. 通常把这个积分简写成

$$\frac{1}{2}mv^2 - k\frac{mM}{r} = H$$

它表明行星运行时能量总是守恒的.

为确定行星运行的规律，不妨选取参考系的 Oxy 平面与轨道平面相合，这时有 $z = 0$. 引进极坐标变换 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$，于

是由能量积分得

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2kM}{r} = H_0$$

其中 $H_0 = \frac{2H}{m}$. 由动量矩积分得

$$r^2\dot{\varphi} = c_3$$

由此推知

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{r^2}{c_3}\sqrt{H_0 + \frac{2kM}{r} - \left(\frac{c_3}{r}\right)^2}$$

分离变量后给出

$$-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c_3}{r}\right)}{\sqrt{H_0 + \left(\frac{kM}{c_3}\right)^2 - \left(\frac{c_3}{r} - \frac{kM}{c_3}\right)^2}} = \mathrm{d}\varphi$$

积分得

$$\arccos\frac{\frac{c_3}{r} - \frac{kM}{c_3}}{\sqrt{H_0 + \left(\frac{kM}{c_3}\right)^2}} = \varphi - \varphi_0$$

于是可解出

$$r = \frac{\frac{c_3^2}{kM}}{1 + \sqrt{1 + H_0\left(\frac{c_3}{kM}\right)^2}\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

这就是行星运行的轨道方程. 它表示一条离心率为

$$e = \sqrt{1 + H_0\left(\frac{c_3}{kM}\right)^2}$$

的二次曲线，即行星的轨道是椭圆、抛物线或双曲线.

12.6.4 线性方程组解的结构

设有一阶线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=a_{i1}(x)y_1+a_{i2}(x)y_2+\cdots+a_{in}(x)y_n+f(x) \tag{1}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

相应的齐次方程组是

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=a_{i1}(x)y_1+a_{i2}(x)y_2+\cdots+a_{in}(x)y_n \tag{2}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

它们的通解如同线性微分方程一样有简单的结构. 为说明这个结论，须引进 n 维向量函数

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\\\cdots\\y_n(x)\end{pmatrix}$$

的线性相关与线性无关的概念.

定义 设在区间 (a,b) 上给定 m 个 n 维向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x),\boldsymbol{\varphi}_2(x),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_m(x)$$

若存在 m 个不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使对于区间 (a,b) 内的一切 x，都有

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_m\boldsymbol{\varphi}_m(x)=\mathbf{0}$$

则称这组向量函数在区间 (α,β) 上是线性相关的；否则就称它们在区间 (α,β) 上是线性无关的.

作为此定义的特别情形，考虑在区间 (a,b) 上线性相关的 n 个 n 维向量函数，$\boldsymbol{\varphi}_1(x),\boldsymbol{\varphi}_2(x),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(x)$，这时存在不全为零的数 c_1，$c_2,\cdots,c_n$，使得

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(x)=\mathbf{0}$$

在区间 (a,b) 上恒成立. 令

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(x)\\ \varphi_{21}(x)\\ \vdots\\ \varphi_{n1}(x)\end{pmatrix},\boldsymbol{\varphi}_2(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{12}(x)\\ \varphi_{22}(x)\\ \vdots\\ \varphi_{n2}(x)\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{1n}(x)\\ \varphi_{2n}(x)\\ \vdots\\ \varphi_{nn}(x)\end{pmatrix}$$

上式可写成分量的形式

$$\begin{cases}c_1\varphi_{11}(x)+c_2\varphi_{12}(x)+\cdots+c_n\varphi_{1n}(x)=0\\ c_1\varphi_{21}(x)+c_2\varphi_{22}(x)+\cdots+c_n\varphi_{2n}(x)=0\\ \cdots\cdots\\ c_1\varphi_{n1}(x)+c_2\varphi_{n2}(x)+\cdots+c_n\varphi_{nn}(x)=0\end{cases}$$

这是一个关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的线性齐次代数方程组,并且有非零解,所以它的系数行列式在区间 (a,b) 上恒为零,即有

$$w(x)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x)\\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x)\end{vmatrix}=0$$

$$(a<x<b)$$

这个 n 阶行列式 $w(x)$ 也称为向量函数 $\boldsymbol{\varphi}_1(x),\boldsymbol{\varphi}_2(x),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(x)$ 的朗斯基行列式. 反之也容易证明,若向量函数 $\boldsymbol{\varphi}_1(x),\boldsymbol{\varphi}_2(x),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(x)$ 是线性微分方程组(2) 的解,且这组解向量构成的朗斯基行列式 $w(x)$ 在 (a,b) 上恒为零,则它们就在区间 (a,b) 上是线性相关的. 由此就能判定 n 个解向量的线性无关性,并可推出线性微分方程组(2)与(1)通解的结构定理.

定理 1 如果向量函数 $\boldsymbol{y}_1(x),\boldsymbol{y}_2(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$ 是线性齐次方程组(2) 的 n 个线性无关的解,而 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个任意常数,则向量函数

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x)+c_2\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{y}_n(x)$$

也是这个方程组的解. 反之,方程组(2)的任意一个解向量 $\boldsymbol{y}(x)$ 必

可表成

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

这种形式.

可见方程组(2)的通解 $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ 就表达了它的一切解.

定理 2 设向量函数 $y^*(x)$ 是线性非齐次方程组(1)的一个特解，而向量函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应的线性齐次方程组(2)的 n 个线性无关解，则对任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，通解.

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y^*(x)$$

就表达了方程组(1)的一切解.

这些定理的证明与二阶线性方程的相应定理的证明十分类似，就把它留给读者自己去完成.

于是欲求一阶线性非齐次方程组(1)的通解应先求出它的一个特解 $y^*(x)$，然后再加上对应齐次方程组(2)的通解 $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$，这又必须去求方程组(2)的 n 个线性无关的解 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$. 后者一般说来是十分困难的. 可是当方程组(2)的系数是常数时，就可以不用积分而只用代数的方法得出它的解来.

12.6.5 代数求解法

设给定线性齐次方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1n} y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{2n} y_n \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots + a_{nn} y_n \end{cases} \tag{1}$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是未知函数,x 是自变量,而 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均为实常数.因为应用消元升阶法所得到的是高阶常系数线性方程,所以自然要来求这个方程组具有指数函数形式的解,即令

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}e^{kx}=\boldsymbol{r}e^{kx}$$

其中 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 及 k 都是待定的常数.将它代入到方程组(1),消去 e^{kx} 并合并同类项就得到

$$\begin{cases}(a_{11}-k)r_1+a_{12}r_2+\cdots+a_{1n}r_n=0\\a_{21}r_1+(a_{22}-k)r_2+\cdots+a_{2n}r_n=0\\\cdots\cdots\\a_{n1}r_1+a_{n2}r_2+\cdots+(a_{nn}-k)r_n=0\end{cases}$$

这是一个未知数为 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 的线性齐次代数方程组.若要它有非零解,就必须系数行列式为零.从而得到确定 k 的方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-k&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}-k\end{vmatrix}=0$$

它称为微分方程组(1)的特征方程.对于特征方程的每一个根 k,可从上面所得的代数方程组求出常向量 $\boldsymbol{r}$,于是向量函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{r}e^{kx}$ 就是微分方程组(1)的一个特解.

如果特征方程有 n 个相异的实根 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,则微分方程组(1)相应的特解是

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{r}_1e^{k_1x},\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{r}_2e^{k_2x},\cdots,\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{r}_ne^{k_nx}$$

这 n 个向量函数线性无关,所以方程组(1)的一切解这时可以表为

$$\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{r}_1e^{k_1x}+c_2\boldsymbol{r}_2e^{k_2x}+\cdots+c_n\boldsymbol{r}_ne^{k_nx}$$

如果特征方程有一对共轭的复根 $k_1=\alpha+i\beta$ 与 $k_2=\alpha-i\beta$,

则微分方程组(1)相应的复值特解为

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{r}_1 \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{r}_2 \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}$$

并总可选取 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$，使其成为共轭的复向量. 由此分离实部与虚部得到微分方程组的两个线性无关的实值特解.

如果特征方程有实重根，则对于每个 s 重实根 k，一般可令微分方程组(1)有如下形式的特解

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1 x + \cdots + \boldsymbol{r}_{s-1} x^{s-1}) \mathrm{e}^{kx}$$

代入方程组(1)后可定出 $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{s-1}$，并得到 s 个线性无关的特解.

如果特征方程有复重根，则对应于每个 s 重共轭复根 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 与 $\alpha-\mathrm{i}\beta$ 亦可求得方程组(1)的 $2s$ 个线性无关的实值特解，它们一般可表示成

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1 x + \cdots + \boldsymbol{r}_{s-1} x^{s-1}) \mathrm{e}^{\alpha x} \begin{Bmatrix} \cos\beta x \\ \sin\beta x \end{Bmatrix}$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - 5z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2y - z \end{cases}$$

解 这是常系数线性齐次方程组，可设它有指数函数形式的解，即设

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mathrm{e}^{kx}$$

其中 α, β, k 是待定常数. 代入方程组后可得

$$\begin{cases} (1-k)\alpha - 5\beta = 0 \\ 2\alpha - (1+k)\beta = 0 \end{cases}$$

于是特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

即 $k^2+9=0$. 它以 $k_1=3\mathrm{i}, k_2=-3\mathrm{i}$ 为一对共轭复根. 为定出 α 与 β, 把 $k_{1,2}=\pm 3\mathrm{i}$ 代入到上面所得的代数方程中, 只得一个独立的方程

$$(1-3\mathrm{i})\alpha - 5\beta = 0$$

由此可取 $\alpha=5, \beta=1-3\mathrm{i}$ 得解为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} (\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x)$$

分离实部与虚部得到所给方程组的两个特解是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sin 3x \\ -3\cos 3x + \sin 3x \end{pmatrix}$$

从而它的一切解就可表示成

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5c_1\cos 3x + 5c_2\sin 3x \\ c_1(\cos 3x + 3\sin 3x) + c_2(-3\cos 3x + \sin 3x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 2 求解方程组(12.6.1 例 3).

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z + x \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + y \end{cases}$$

解 设方程组存在形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mathrm{e}^{kt}$$

的特解.这时确定 α,β,γ 的代数方程组为

$$\begin{cases} -k\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-k\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta-k\gamma=0 \end{cases}$$

令其系数行列式等于零就得到

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix}=0$$

或

$$k^3-3k-2=0$$

这个特征方程的根为 $k_1=2,k_2=k_3=-1$. 其单根 $k_1=2$ 对应于含 α,β,γ 的两个独立的方程

$$\begin{cases} -2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-2\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

由此可取 $\alpha=\beta=\gamma=1$, 并得到所给方程组的一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$$

若把重根 $k_2=k_3=-1$ 代入上述代数方程组中,则确定 α,β,γ 的三个方程就成为一个方程

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

再取 $\alpha=1,\beta=0,\gamma=-1$ 或 $\alpha=0,\beta=1,\gamma=-1$, 又可分别得到所给方程组其它两个线性无关的特解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$$

而通解就是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} - (c_2 + c_3) e^{-t} \end{pmatrix}.$$

从这个例子可以看出，微分方程组的特征方程虽然有重根，但它的通解也可能不含 te^{kt} 的项. 一般说来，若未知函数在方程组中出现是对称的，就会发生这样的情形.

例 3 求线性微分方程组

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y + 4z \\ z' = -4z + x \end{cases}$$

的通解.

解 特征方程是

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 & 0 \\ 0 & -1-k & 4 \\ 1 & 0 & -4-k \end{vmatrix} = 0$$

或化简成

$$k^3 + 6k^2 + 9k = k(k+3)^2 = 0$$

若将单根 $k = 0$ 的解写成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

将它代入到所给的微分方程组就得到确定 α, β, γ 的三个方程，但其中只有两个方程是独立的，例如取

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ \beta - 4\gamma = 0 \end{cases}$$

并且令 $\alpha = 4, \beta = 4, \gamma = 1$，就求得到对应于 $k = 0$ 的一个解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

又因 $k=-3$ 是二重根，故可设对应于此根的解具有形式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 t \\ \beta_1 + \beta_2 t \\ \gamma_1 + \gamma_2 t \end{pmatrix} e^{-3t}$$

代入所给的微分方程组，并消去因子 e^{-3t}，就得到

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 t - \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 t + \beta_1 + \beta_2 t = 0 \\ 3\beta_1 + 3\beta_2 t - \beta_2 - \beta_1 - \beta_2 t + 4\gamma_1 + 4\gamma_2 t = 0 \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 t - \gamma_2 - 4\gamma_1 - 4\gamma_2 t + \alpha_1 + \alpha_2 t = 0 \end{cases}$$

比较这些等式两端常数项及一次项 t 的系数，给出六个方程

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_2 + 4\gamma_1 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ 2\beta_2 + 4\gamma_2 = 0 \\ -\gamma_2 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

由此可取 $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_1 = -2, \gamma_1 = 1$，求得对应于重根 $k=-3$ 的一个解是

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

如果再取 $\alpha_2 = 1, \beta_2 = -2, \gamma_2 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \gamma_1 = -1$，又得对应于重根 $k=-3$ 的另一个解

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t+1 \\ t-1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

这些解是线性无关的，故所给方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4c_1+(c_2+c_3t)e^{-3t} \\ 4c_1+[-2c_2+c_3(1-2t)]e^{-3t} \\ c_1+[c_2+c_3(-1+t)]e^{-3t} \end{pmatrix}$$

关于线性非齐次方程组的求解在 12.6.4 中已归结为求它的一个特解与对应的齐次方程组的通解. 而这个特解也可通过常数变易法求得. 这里仅举一例以示一般.

例 4 求线性非齐次方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2y-5z+\csc x \\ \dfrac{dz}{dx}=y-2z+\sec x \end{cases}$$

的通解.

解 容易求出对应齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x+\sin x \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x+2\sin x \end{pmatrix}$$

将此通解的任意常数 c_1 与 c_2 代之以 x 的待定函数 $c_1(x)$ 与 $c_2(x)$，而假设所给非齐次方程组有形如

$$\begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix}=c_1(x)\begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x+\sin x \end{pmatrix}+c_2(x)\begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x+2\sin x \end{pmatrix}$$

的特解. 代入之后给出

$$\begin{cases} 5c'_1(x)\cos x+5c'_2(x)\sin x=\csc x \\ c'_1(x)(2\cos x+\sin x)+c'_2(x)(-\cos x+2\sin x)=\sec x \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} c'_1(x)=\dfrac{1}{5}(\operatorname{ctg}x+5\operatorname{tg}x-2) \\ c'_2(x)=\dfrac{1}{5}(2\operatorname{ctg}x-4) \end{cases}$$

积分之，有

$$\begin{cases} c_1(x) = \dfrac{1}{5}\left(\ln\left|\dfrac{\sin x}{\cos^5 x}\right| - 2x\right) \\ c_2(x) = \dfrac{1}{5}(2\ln|\sin x| - 4x) \end{cases}$$

于是非齐次方程组的一个特解是

$$\begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(\ln\left|\frac{\sin x}{\cos^5 x}\right| - 2x\right)\begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{pmatrix} + \frac{1}{5}(2\ln|\sin x| - 4x)\begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x + 2\sin x \end{pmatrix}$$

而它的通解是

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(\ln\left|\frac{\sin x}{\cos^5 x}\right| - 2x + c_1\right)\begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{pmatrix} + \frac{1}{5}(2\ln|\sin x| - 4x + c_2)\begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x + 2\sin x \end{pmatrix}$$

习题 12.6

1. 用消元升阶法或代数求解法求下列方程组的通解：

(1) $\begin{cases} x' + 2x - y = 0 \\ y' + x - 2y = 0 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} x' + y = \cos t \\ y' + x = \sin t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$；

(4) $\begin{cases} x' = 2x - y - z - 3t - 1 \\ y' = 3x - 2y - 3z - t^2 + 2t - 4 \\ z' = -x + y + 2z + t^2 - 5t + 3 \end{cases}$

2. 求下列方程组满足所指定的初始条件的解：

$$(1)\begin{cases} x'' + 2y' - x = 0 \\ x' + y = 0 \\ x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x''_1 = x_2 \\ x''_2 = x_1 \\ x_1(0) = x_2(0) = x'_1(0) = x'_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -6x - 11y - 6z + e^{-t} \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

3. 质量为 m 的物体从水平速度为 v_0 的飞机中抛出，设空气阻力与速度成正比（比例系数为 k），求该物体的运动方程及运动轨道.

4. 放射性同位素 A 衰变为放射性同位素 B，B 又衰变成 C，C 不再衰变. 设 A，B，C 三种元素在时刻 t 的原子个数分别为 $N_1(t)$，$N_2(t)$，$N_3(t)$，则衰变规律满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \dfrac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 \end{cases}$$

设 $t = 0$ 时只有同位素 A，其原子个数为 k，而 B，C 均没有，求此问题的解（λ_1，λ_2 分别是 A、B 的衰变常数）.

习 题 答 案

习题 9.1

7. (1)散　(2)敛　(3)散　(4)散　(5)敛　(6)散　(7)散
   (8)散　(9)敛　(10)敛　(11)敛　(12)敛　(13)敛
   (14) $k > 1$,敛;$k \leqslant 1$,散　(15)敛
   (16) $a < 1$,敛;$a \geqslant 1$,散
8. (1)对任意 x 都收敛　(2)敛　(3)敛　(4)敛
9. (1)绝对收敛　(2)绝对收敛　(3)条件收敛　(4)条件收敛
   (5)条件收敛　(6) $p > 1$,绝对收敛;$0 < p \leqslant 1$,条件收敛;$p \leqslant 0$,发散

习题 9.2

1. (1)$x > 0$　(2)$|x| < e$　(3)$|x| \leqslant 1$　(4)$x \geqslant 0$
   (5)$x > 0$　(6)$|x| > \frac{1}{2}$　(7)$0 < x < 6$　(8)$|x| < 1$
2. (1)一致收敛　(2)一致收敛　(3)　a)一致收敛　b)不一致收敛
   (4)一致收敛　(5)一致收敛　(6)不一致收敛　(7)一致收敛
   (8)一致收敛
5. 1 及 $-\frac{1}{4}$.
6. $\frac{1}{2}$

习题 9.3

1. (1)2　(2)1　(3)1　(4)4　(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(6) $\max(a,b)$

2. (1) $\operatorname{arctg}x,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$　(2) $\dfrac{1}{(1-x)^2},\ -1 < x < 1$

(3) $\dfrac{2}{(1-x)^3},\ |x| < 1$　(4) $1 + \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x),\ |x| \leqslant 1$

(5) $e^{\frac{1}{2}x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$

3. (1) $-3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3,\ |x| < +\infty$

(2) $e\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!a^n},\ |x| < +\infty$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1},\ 0 < x \leqslant 2$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!},\ |x| < +\infty$

(5) $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ |x| < 1$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n - 1}{n}x^n,\ -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,\ -6 < x < -2$

4. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ |x| < +\infty$

(2) $x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| \leqslant 1$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| < 1$

(4) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},|x|\leqslant 1$

5. (1)$c+\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!n},x\neq 0$

(2)$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)},|x|<+\infty$

6. $y(x)\approx\frac{1}{1+\lambda}x+\frac{\lambda}{3!(1+\lambda)^4}x^3$

习题 9.4

1. 0.24488，　10^{-5}　　2. (1)0.487　(2)0.494

3. (1)1　(2)e

4. (1) 发散　(2)$p>\frac{3}{2}$,收敛;$p\leqslant\frac{3}{2}$,发散

复　习　题

3. (1)绝对收敛　(2)条件收敛　(3)条件收敛　(4)条件收敛　(5)绝对收敛　(6)条件收敛

(7) $|a|>1$,绝对收敛;$|a|=1$,条件收敛;$|a|<1$,发散

(8) $a>e$,绝对收敛;$1<a\leqslant e$,条件收敛;$0<a\leqslant 1$,发散

4. (1)一致收敛　(2)一致收敛

9. (1) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$　(2)5e

10. (1) $\frac{x}{(x-1)^2},|x|>1$　(2) $\frac{3(x+4)}{(2-x)^3},-4<x<2$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x},|x|<\sqrt{2}$

(4) $\frac{x-1}{2(x+1)}\ln\frac{1+x}{2},x\geqslant 0$

11. (1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, |x| \leqslant 1$

(2) $x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leqslant 1$

(3) $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+2}}, |x| < 2$

12. (1) $c + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, |x| < +\infty$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}, |x| < +\infty$

(3) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(4) $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

习题 10.1

1. (1)收敛 (2)发散 (3)收敛 (4)收敛
   (5)发散 (6)发散 (7)收敛 (8)收敛
   (9)发散 (10)收敛 (11)收敛 (12)发散
   (13)收敛 (14)收敛 (15)发散
   (16) $p > 1$ 时收敛, $p \leqslant 1$ 发散
   (17) $0 < \alpha < 1$ 收敛;(18) $1 < \mu < 2$,收敛

3. (1)绝对收敛 (2)条件收敛 (3)条件收敛 (4)绝对收敛

习题 10.2

1. (1)1 (2) $\frac{\pi}{4}$

2. (1) $\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx - \left(\sin\alpha \cdot e^{\alpha|\sin\alpha|} + \cos\alpha \cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}\right)$

(2) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+a}\right)\sin[a(b+a)]-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+a}\right)\sin[a(a+a)]$ (3) $\frac{2}{a}\ln(1+a^2)$ (4) $\int_0^a [f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]\mathrm{d}x+f(2a,0)$ 其中 $u=x+a,v=x-a$

4. (1) $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$ (2) 当 $|a|\leqslant 1$，为 0；当 $|a|>1$，为 $\pi\ln a^2$ (3) $\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a\ln(1+|a|)$ (4) $\pi\arcsin a$

习题 10.3

1. (1) 处处发散 (2) $u<-1$ (3) $u>1$

   (4) $u<1$ (5) $0<a<3$ (6) $1<a<3$

2. (1) 一致收敛 (2) a) 一致收敛，b) 非一致收敛

   (3) 非一致收敛 (4) 非一致收敛 (5) 一致收敛 (6) 一致收敛

5. (1) $\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$ (2) $\ln(a+1)$ (3) $\sqrt{\pi a}$ (4) $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$

   (5) $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$，当 $a\geqslant 0$；$-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$，当 $a<0$

   (6) $\sqrt{\pi}(b-a)$

6. (1) a (2) $-a^2$ (3) $\frac{\pi}{2}$，当 $a>b$；$\frac{\pi}{4}$，当 $a=b$；0，当 $a<b$

   (4) $\frac{\pi}{2}$ (5) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$ (6) $\frac{\pi}{4}$

习题 10.4

2. (1) $\frac{\pi}{8}$ (2) $\frac{a^4}{16}\pi$ (3) $\frac{3}{512}\pi$ (4) $\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{n}{m},q\right)$ (5) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

(6) $\dfrac{\pi}{2\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}$ (7) $\sqrt{2\pi}$ (8) $(b-a)p\cdot\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$

3. $\dfrac{a^2}{2n}\Gamma^2\left(\dfrac{1}{n}\right)\Big/\Gamma\left(\dfrac{2}{n}\right)$

复 习 题

7. (1) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha\cdot\ln(1+\alpha^2)$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$ (3) $2a\ln 2$

(4) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{m^2+\beta^2}{m^2+\alpha^2}$ (5) $\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

8. (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) $\dfrac{n!}{2}$ (3) $\dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\dfrac{\pi}{2a^{2n-1}}$

(4) $\dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{\sin\dfrac{\pi a}{2}}{\cos^2\dfrac{\pi a}{2}}$ (5) 1 (6) 1

习题 11.1

1. (1) $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}\ (-\infty < x < \infty)$

(2) $-\dfrac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n-1}{n}\cos nx + \dfrac{1-(-1)^n 2}{n}\sin nx\right]$

$$= \begin{cases} -\pi, & -\pi \leqslant x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = \pm\pi \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

(3) $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx\ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$

(4) $\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

(5) $f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\right.$

$\left.\left[\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\right]\sin nx\right\}$

$(-\pi<x<\pi)$

2. (1) $1-\sin\frac{x}{2}=1-\frac{2}{\pi}+$

$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{16n^2-1}\cos 2nx+\frac{4n}{16n^2-1}\sin 2nx\right]\ (0<x<\pi)$

(2) $\frac{x}{3}=\frac{T}{6}-\frac{T}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{T}\ (0<x<T)$

(3) $e^{ax}=2\operatorname{sh}(al)\left[\frac{1}{2al}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2+a^2l^2}\left(al\cos\frac{n\pi x}{l}\right.\right.$

$\left.\left.-n\pi\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\quad(-l<x<l)$

(4) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x=\begin{cases}1, |x|<1\\-1, 1<|x|\leqslant 2\\0, x=\pm 1\end{cases}$

(5) $f(x)=\frac{2}{3}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}x\ (0\leqslant x\leqslant 3)$

3. (1) $f(x)=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$

$f(x)=\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$

(2) $f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$

$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n^3} + (-1)^n\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\right]\sin nx \ (0 \leqslant x < \pi)$

(3) $f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}x$

$$\left(0 \leqslant x < \frac{l}{2}, \frac{l}{2} < x \leqslant l\right)$$

$f(x) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x \ \left(0 < x < \frac{l}{2}, \frac{l}{2} < x < l\right)$

(4) $f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2nh}{n^2}\cos nx \ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$

$f(x) = \frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nh - \sin 2nh}{n^2}\sin nx \ (0 < x \leqslant \pi)$

6. $1 - x^2 = \left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}4\cos nx \ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$

(1) $\frac{\pi^2}{12}$ (2) $\frac{\pi^4}{90}$

7. $\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \ (0 < |x| < \pi)$; $\frac{\pi}{4}$

8. $\frac{H\tau}{T} + \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{H}{k\pi}\sin\frac{k\pi\tau}{T}e^{j\frac{2k\pi x}{T}}$

9. $f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin na\cos nx$

(1) $\frac{a(\pi - a)}{2}$ (2) $\frac{\pi^2 - 3\pi a + 3a^2}{6}$

习题 11.2

2. $\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4l}{(2n+1)\pi}-\frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x$

习题 11.3

1. (1) $\int_0^{+\infty}(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x)\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}f(x), & x\neq T\\ \frac{kT}{2}, & x=0\end{cases}$

其中 $A(\lambda)=\frac{k}{\pi\lambda^2}[\lambda T\sin\lambda T+\cos\lambda T-1]$,$B(\lambda)=\frac{k}{\pi\lambda^2}[\sin\lambda T-\lambda T\cos\lambda T]$

(2) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda}(1-\cos\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$

(3) $\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$

2. (1) $\frac{4\mathrm{i}a\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2}$ (2) $\frac{a}{(\lambda-b)^2+a^2}+\frac{a}{(\lambda+b)^2+a^2}$

(3) $\frac{2\cos\frac{\lambda}{2}\pi}{1-\lambda^2}$

3. (1) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda=\mathrm{e}^{-x}\ (x\geqslant 0)$

(2) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, x>0\\ 0, x=0\end{cases}$

5. $-\frac{2\beta x\mathrm{i}}{\pi(\beta^2+x^2)^2}$

复 习 题

4. $-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}x$

5. $G(\lambda)=-2\sin\lambda\pi/\lambda^2-1$

习题 12.1

1. (1)$y=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x-x-1$ (2)$y=\frac{1}{2}e^x$

2. $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{11}}{4400}$

3. 1.15

习题 12.2

1. (1)无关 (2)无关 (3)相关 (4)无关

2. $y''-2\mathrm{ctg}2xy'=0$

3. (1)$y=\frac{1}{x}(c_1\sin x+c_2\cos x)$

   (2)$y=c_2+(c_1-c_2x)\mathrm{ctg}x$

   (3)$y=c_1x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c_2x-2c_2$

   (4)$y=c_1(4x^3-3x)+c_2\sqrt{1-x^2}(4x^2-1)$

4. (1)$y=c_1x+c_2x^2$ (2)$y=c_1e^x+c_2(x+1)$

   (3)$y=c_1x+c_2(x^2-1)$

   (4)$y=c_1\sin x+c_2\left(1-\sin x\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right)$

5. $y=x^2-e^{x-1}$

6. (1)$c_1+c_2x^2+x^3$ (2)$c_1e^x+c_2x-(x^2+1)$

   (3)$c_1e^{-x^2}+c_2xe^{-x^2}+\frac{x^2}{2}e^{-x^2}$

(4)$c_1\cos kx + c_2\sin kx + \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t$

7. $c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

8. $\pi - 1 + 4\mathrm{arctg}x + x^2$

9. (1)$c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1} + c_2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}x^{2n}$

(2)$c_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \cdots\right) +$

$c_2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \cdots\right)$

(3)$c_1(1+x) + c_2e^x$

习题 12.3

1. (1)$c_1e^{(1+\sqrt{2})x} + c_2e^{(1-\sqrt{2})x}$

(2)$e^x(c_1\cos\frac{x}{2} + c_2\sin\frac{x}{2})$

(3)$e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

(4)$e^x(c_1 + c_2x)$　(5)$c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$

(6)$|\lambda| > 2$ 时，$y = c_1e^{\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}x} + c_2e^{\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}x}$；$|\lambda| = 2$ 时，$y = e^{-\frac{\lambda}{2}x}(c_1 + c_2x)$；$|\lambda| < 2$ 时，$y = e^{-\frac{\lambda}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}x)$

2. (1)$s = e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)$　(2)$s = 4e^t + 2e^{3t}$

(3)$y = 3e^{-2x}\sin 5x$　(4)$y = (x+2)e^{-\frac{x}{2}}$

3. (1)$4\sin\frac{x}{2}$　(2)$(x+3)e^{2x}$　(3)$x(2x+1)e^x$

(4) $\frac{8}{5}e^x(\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2})$ (5) $\frac{x}{2}\sin x$

(6) $\frac{3}{2}x^2e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$ (7) $\frac{1}{9}(3x\sin x-2\cos x)$

(8) $-\frac{e^x}{500}(50x^2+30x+19)$

(9) $\left(x-\frac{3}{2}\right)\cos x+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\sin x$

(10) $\frac{x}{10}+\frac{1}{164}(-4\cos 2x+5\sin 2x)$

(11) $\frac{e^x}{25}[(5x-2)\cos x+(10x-14)\sin x]$

(12) $\frac{1}{16}\cos 3x+\frac{x}{4}\sin x$

4\. (1) $\frac{1}{x}(c_1\cos\ln x^2+c_2\sin\ln x^2)$

(2) $x(c_1+c_2\ln x)$ (3) $c_1x^3+c_2x^7$

(4) $R=c_1r^n+c_2r^{-(n+1)}$

5\. (1) $c_1+c_2x^2+x^3$ (2) $x(c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x+\ln x)$

(3) $c_1x+c_2x^2+x^3+x\ln x$

(4) $c_1\cos\ln(1+x)+c_2\sin\ln(1+x)+2\ln(1+x)\sin\ln(1+x)$

习题 12.4

1\. 取水平轴为 x 轴，质点的平衡位置为原点.

(i) $\ddot{x}+9x=3\sin 3t$

(ii) $x=\frac{1}{6}\sin 3t-\frac{1}{2}t\cos 3t$

(iii) 产生共振现象

2\. $\theta=A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$

3. $v=\sqrt{v_0^2+2k\left(\frac{1}{a-s}-\frac{1}{a}\right)}$

习题 12.5

1. (1) $c_1+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x$　(2) $e^x(c_1+c_2x+c_3x^2)$

(3) $c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$

(4) $c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$

(5) $c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^{-x}$

(6) $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+$

$e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

2. (1) $\cos x$　(2) $\frac{x}{20}(\sin 2x-2\cos 2x)$

(3) $\frac{x}{20}e^x(3\sin x-\cos x)$　(4) $\frac{x^3}{6}+x^2$　(5) $xe^{-2x}+2x^2e^{2x}$

3. (1) $c_1x+c_2x\ln x+c_3x^{-2}$

(2) $x(c_1+c_2\ln x)+c_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x\ln^2x$

习题 12.6

1. (1) $x=c_1e^{\sqrt{3}t}+c_2e^{-\sqrt{3}t}$

$y=(2+\sqrt{3})c_1e^{\sqrt{3}t}+(2-\sqrt{3})c_2e^{-\sqrt{3}t}$

(2) $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+\sin t, y=-c_1e^t+c_2e^{-t}$

(3) $x=c_1e^t+c_2e^{-2t}$　$y=c_1e^t+c_3e^{-2t}$

$z=c_1e^t-(c_2+c_3)e^{-2t}$

(4) $x=c_1+c_2e^t+3t$　$y=3c_1+c_3e^t+t^2-8$

$z=-c_1+(c_2-c_3)e^t-t^2+3t+4$

2. (1) $x = \cos t, y = \sin t$ (2) $x_1 = 2e^t, x_2 = 2e^t$

(3) $x = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-3t}$

$$y = \left(-\frac{t}{2} + \frac{5}{4}\right)e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-3t}$$

$$z = \left(\frac{t}{2} - \frac{7}{4}\right)e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{9}{4}e^{-3t}$$

3. $x = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$$y = -\frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \frac{mg}{k}t$$

或 $y = -\frac{mg}{kv_0}x - \frac{m^2 g}{k}\ln\left(1 - \frac{kx}{mv_0}\right)$

4. $N_1 = ke^{-\lambda_1 t}, N_2 = \frac{\lambda_1 k}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$

$$N_3 = \frac{k}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}\right) + k$$