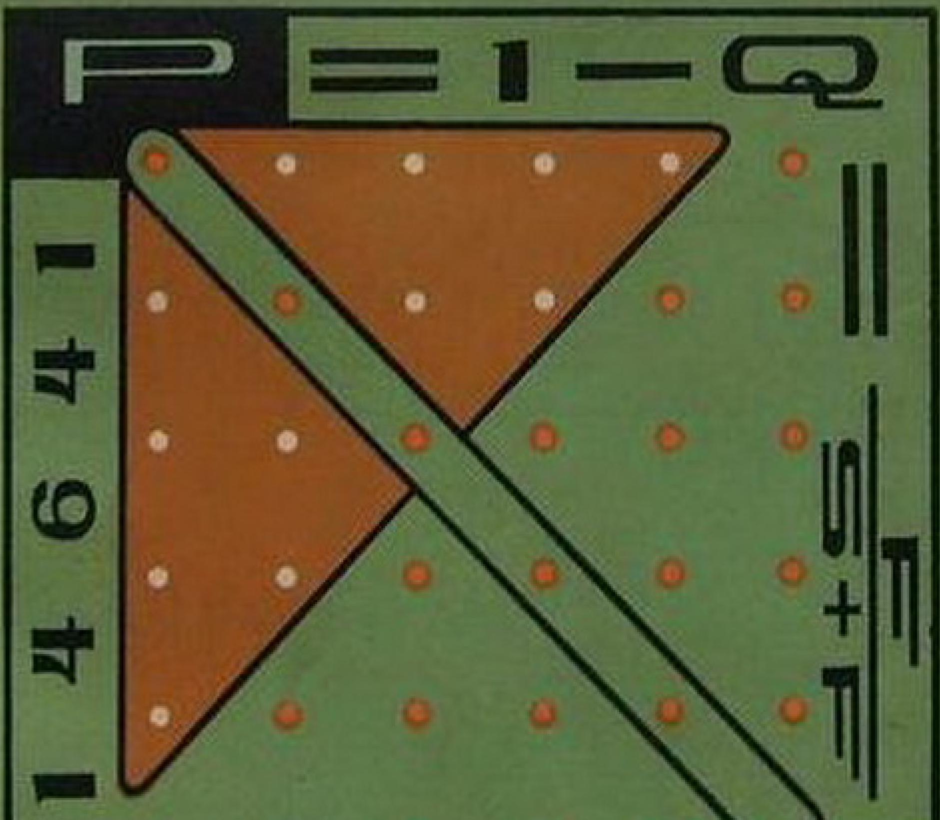
《自修数学》小丛书

概率与机率

〔英〕D. A. 约翰逊 著



科学出版社

《自修数学》小丛书

概 率 与 机 率

〔英〕 D. A. 约翰逊 著

程乾生 译

科 学 出 版 社

1984

内 容 简 介

本书通过生动易懂的例子介绍了概率和机会、概率和集合，以及概率与日常生活、科学实验的关系.

本书内容广泛，对了解概率的意义和应用，提高学习概率的兴趣都是有益的.

本书可作为高中学生和中学教师的参考书.

Donovan A. Johnson

PROBABILITY AND CHANCE

John Murray, London, 1966

概 率 与 机 率

〔英〕D. A. 约翰逊 著

程乾生 译

责任编辑 陈永锵 毕 颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年3月第一版 开本：787×1092 1/32

1984年3月第一次印刷 印张：3

印数：0001—23,600 字数：55,000

统一书号：13031·2510

本社书号：3449·13—1

定价： 0.40 元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书(Exploring Mathematics on Your Own)是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物.该丛书自1964年初版后,于1974年、1976年多次再版印刷.为开阔读者眼界、增长数学知识,我们将选其中的一部分翻译出版,其目次如下:

大家学数学
测量世界
数型
勾股定理
统计世界
集合、命题与运算
数学逻辑与推理
曲线
拓扑学——橡皮膜上的几何学
概率与机率
向量基本概念
有限数学系统
无限数
矩阵

为了避免人们怀疑你的论述不真实，请考虑概率吧。

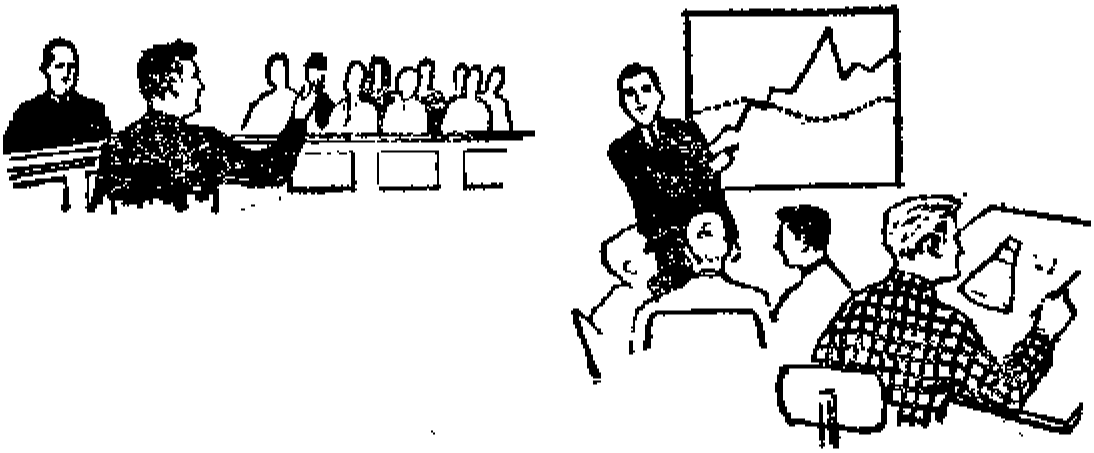
——约翰·盖伊

写 在 前 面

这本小册子向你介绍一个有魅力的称为“概率论”的数学分支。在这本小册子里，你将会发现许多意想不到的趣闻，引人入胜的问题，有用的事实和富有趣味的概念。读任何一本数学书，就象读一本惊险小说或探索一个洞穴一样趣味无穷。希望在你钻研这本书的时候，会由于发现许多新概念而感到乐趣盎然。

你在阅读这本书时，或许需要用一种不同于读故事之类书籍的方法。首先，要慢慢地读。要养成手头备有铅笔和纸的习惯。在阅读时应该充分地利用它们来帮助你弄清概念。如果你开始阅读的时候对每一个句子或每一段话不太理解，请不要感到意外，而要有耐心。如果你勤练习、勤画图和完成问题解答，你将发现本书所介绍的统计事实和概念是容易弄懂的。

目　　录



一、风险和机会[1]

1. 充满风险的世界

我们正生活在一个既有好机会又要冒风险的世界上。几乎每一天，我们都要冒着发生一次意外事故的风险，或者遇到一次新的成功的机会。怎样才能知道我们的运气可能是什么呢？能够控制我们要遇到的风险吗？如何衡量我们赢得成功的机会大小？

在下面的章节中，我们将研究概率、机会和风险，学习如何计算一个事件的机会或概率。我们也将看到如何应用概率去预测事件和发现新的事实。概率论是一门使人感兴趣的数学分支，它已应用于通讯、核物理、保险、销售学等等之中。如果我们知道一些概率论的知识，就会更好地了解世界。

概率论开始于赌博。当然，这个开端名声不好。三百多年

1) "机会"的英文名词是"Chance"。这个词还可译作"机率"、"偶然"、"可能性"等。——译者注

以前，一些赌徒问伽里略，一次掷三粒骰子，计算总点数，为什么出现总和为10的情况比出现总和为9的情况要多呢?1654年，一个赌徒问著名的数学家和哲学家巴斯加，把两粒骰子投掷24次，出现两个6的情况会有多少? 尽管概率论现在成了科学的侍女，投掷两粒骰子依然是概率论中研究事件的一个好例子。

巴斯加为了预测事件把数学应用到概率中。自那时以来的三百多年里，概率的数学规律已经在日常生活中起了重要作用。

政治家用它组织竞选活动。

零售商用它购买供应品。

农民用它计划收获。

教师用它指教学生。

生物学家用它阐述自然规律。

政府用它制定年度预算。

律师用它组织诉讼。

医生用它开药方。

新娘用它计划婚礼。

原子科学家用它预测电子的性质。

商店经理用它预测销售量。

空间工程师用它设计和制造导弹。

心理学家用它研究思维过程。

概率论已成为一门科学，为了人们的利益，它对无数事件的成功机会进行预测。

2. 关于机会的试验

我们谈到事件的时候，常常这样说：

“我成为富翁的机会不太好”.

“今年秋天我大概会踢足球”.

“我不太可能被邀请”.

“你不要冒着生命风险去同汤姆骑马”.

我们用词“机会”、“大概”、“风险”或“可能”来描述一个事件将发生的情况. 这些词告诉我们预期事件出现的程度，但这种叙述是很不确定的. 我们需要给机会一个定量的度量.

为了度量机会，一种方法是进行试验. 关于机会的最简单的一个试验是投掷一枚硬币. 在把硬币投到空中再落到地上以后，记下它是哪一面朝上. 每次试验，至少要投掷硬币二

表 1

试 验	投掷次数	正面朝上的次数[1]
1		
2		
3		
4		
5		
总 数		

1) 有的国家的硬币一面是头像一面是字，我国的硬币一面是国徽一面是字. 以后我们把字面称为反面，另一面称为正面. ——译者注

十次．至少进行五次试验．复制表 1 并把你的结果和你的朋友们的结果填进去．

如果硬币很均称，我们说出现正面或反面的可能是一样的．如果把一枚硬币掷许多次，或者同时掷许多枚硬币，我们预期大约有一半会出现正面．这个估计和你的试验结果相一致吗？

掷一枚硬币，这枚硬币朝上的方式仅有两种：正面（用 H 表示）或反面（用 T 表示）．（这里我们假定硬币落到地上时不会在它的边沿上立起来．）因此，硬币落地可能方式的集合是正面或反面，可以写为

$$C=\{H,\ T\}.$$

因为一枚硬币出现正面和出现反面的可能是完全相同的，所以出现正面的机会是两个等可能方式中的一个，或者是 1 比 2．我们把这个机会写为 $\frac{1}{2}$ 或 0.5．因此，出现正面的机会的度量是 0.5．

假定我们有一个像小孩积木方块那样的立方体，每一面写着一个如下的字母

$$\boxed{A}\quad \boxed{B}\quad \boxed{C}\quad \boxed{D}\quad \boxed{E}\quad \boxed{F}$$

如果投掷这个方块，我们假定一个字母朝上的可能与其它字母朝上的可能完全一样．在这种条件下，方块出现 $\boxed{A}$ 的机会是多少？我们说是“六分之一的机会”．可能结果的集合是

$$T=\{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\}.$$

这个集合有六种元素．其中之一是 A．因此，A 的概率的度量是比值

$$P=\frac{\text{出现 }A\text{ 的方式的个数}}{\text{集合 }T\text{ 中元素的个数}}$$

或

$$P=\frac{1}{6}.$$

现在假设我们有一个袋子，里面有一个红球，一个蓝球，一个黄球．如果我们不看，从袋里拿出一个球，它是红球的机会是多少呢？拿一个球的时候，三个结果之中任何一个都可能出现：红的，蓝的，黄的，或者写为

$$K=\{\text{红球，蓝球，黄球}\}$$

拿出红球仅有一个方式．拿出红球的机会是比值

$$P=\frac{\text{拿出红球的方式的数目}}{K\text{ 中元素个数}}$$

或

$$P=\frac{1}{3}.$$

假设袋子里有两个黑球和两个白球．不要看，从袋子里拿出两个黑球的机会是多少？

为了回答这个问题，我们首先列出拿两个球的所有可能的方式：

白球，白球（白，白）

白球，黑球（白，黑）

黑球，白球（黑，白）

黑球，黑球(黑，黑)

于是，可能方式的集合是

$$M=\{(白，白),(白，黑),(黑，白),(黑，黑)\}.$$

我们可能用四种方式拿出两个球．其中之一(黑，黑)看作是成功，因为它正是我们所希望的．拿两个黑球的机会是比值

$$P=\frac{拿出两个黑球的方式的个数}{集合M中元素的个数}$$

或

$$P=\frac{1}{4}.$$

请你用试验检验这个结果．袋子里放两个白球和两个黑球，每次抽取时拿出两个球．在每次抽取后一定要把球放回去，并把四个球混合起来，然后再作下一次抽取．

如果我们投掷两个硬币，出现两个正面的机会是多少？你可能不正确地认为：两个硬币朝上的方式有下面三种：

两个正面朝上，

两个反面朝上，

一个正面和一个反面朝上．

于是，这三个事件出现的可能是相同的；因此，出现两个正面的机会是三分之一．这个推论的错误在哪里？为了看清楚这个推论为什么是错的，我们需要看表2．用一个一分硬币和一个贰分硬币给出事件的模型

因为每一个硬币可以是正面也可以是反面，所以可能事

表 2

情 况	一分硬币	贰分硬币	事 件
1	正 面	正 面	正， 正
2	正 面	反 面	正， 反
3	反 面	正 面	反， 正
4	反 面	反 面	反， 反

件的集合 E 是

$$E=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$$

在每一个有次序的对中，第一个字表示一分硬币的情况，第二个字表示贰分硬币的情况．因此，出现两个正面的机会是比值

$$P=\frac{\text{出现两个正面的方式的个数}}{\text{两个硬币可能出现方式的个数}}$$

或

$$P=\frac{1}{4}.$$

出现两个反面的机会是多少？出现一个正面和一个反面的机会是多少？

练习 1 机 会

1．讨论在下面的情况下有什么风险、机会或可能：

a．钓鱼 b．打高尔夫球 c．滑水 d．准备晚饭

2．每旅行 100 哩，哪一种旅行方式由于事故而死亡的危险最大？

a．乘火车 b．乘小汽车 c．乘飞机 d．骑自行车

3．用三枚硬币作试验．把三枚硬币掷许多次，记下出现 3 个正面，

2个正面和1个反面，1个正面和2个反面以及3个反面的次数。

三枚硬币出现的方式	出现的次数
3个正面	______
2个正面，1个反面	______
1个正面，2个反面	______
3个反面	______
总投掷次数	______

根据你的试验结果，下面每一个事件的概率是多少？

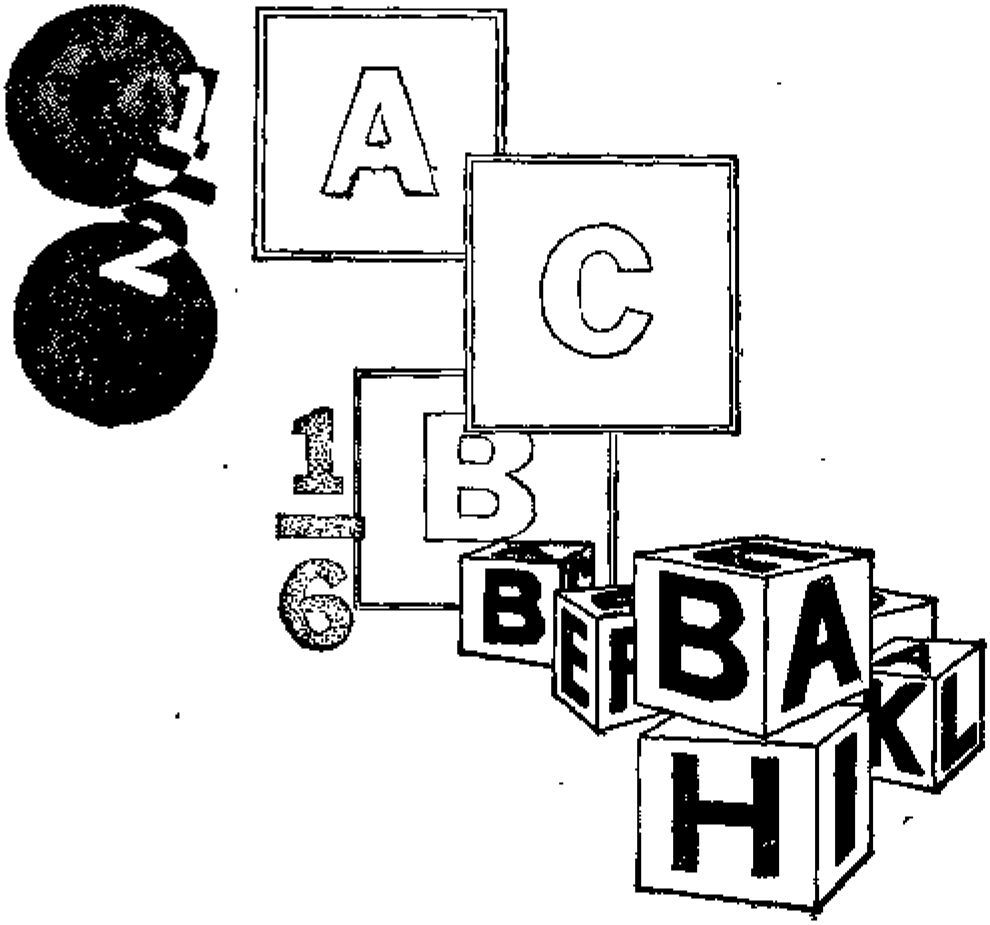
a. 出现3个正面　b. 出现2个正面和1个反面

c. 出现1个正面和2个反面　d. 出现3个反面

上面四个事件的概率之和是多少？

4. 把一粒骰子掷60次，记下每一个数出现的次数。由这些结果，你估计出现下面数的机会是多少？

a. 6　　b. 1　　c. 3



二、概　　率

1. 机会的度量

在上一节，我们就某些事件发生的机会作了试验．我们发现，一个事件机会的度量可以表示为一个比值．用一个比值作为机会的度量就是概率的一种定义．掷一枚硬币，如果硬币在两个等可能方式中有一个出现正面，我们就说出现正面的概率是 1/2．在掷许多枚硬币时，可能有一半硬币出现正面．用符号表示就是

$$P(\text{正面}) = \frac{1}{2}.$$

如果我们掷一粒骰子，出现五点的概率是多少？我们说，带五点的那一面是一粒骰子可能出现的六种方式中的一种。因此，出现五点的概率是

$$P(5\text{ 点}) = \frac{1}{6}.$$

假设一个小孩有三张分别写着 A，B，C 字母的卡片。他把卡片排成一行，那么三张卡片拼出 CAB 的概率是多少？（我们假设小孩很小，还不知道如何拼字母！）三个字母可能出现在一行的不同方式的集合 (D) 是

$$D = \{(ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA)\}.$$

于是，字母可以按六种方式排列，仅有一种拼成 CAB。因此，这个小孩拼出 CAB 的概率是

$$P(CAB) = \frac{1}{6}.$$

如果我们把拼出 CAB 当作希望事件或成功结果，那么上面概率可以写成如下形式

$$P(\text{成功}) = \frac{\text{成功结果的数目}}{\text{可能结果的数目}}$$

为了用公式表示概率关系式，我们需要用几个符号或变量。

设 n 表示事件发生的可能方式的数目，

s 表示成功事件发生的方式的数目，

f 表示不成功事件发生的方式的数目.

于是 $f+s$ 表示所有可能方式的数目,即 $f+s=n$。

成功事件的概率 P 可由下面公式得到

$$P(\text{成功})=\frac{s}{f+s} \text{ 或 } \frac{s}{n}.$$

概率的定义:假设在一次试验中总共有 n 个不同的等可能的结果,使事件 E 成功的结果有 s 个,则使 E 成功的概率是

$$P(E)=\frac{s}{s+f} \text{ 或 } \frac{s}{n}.$$

掷一粒骰子,出现点数大于 4 的概率是多少?因为使该事件成功的结果有 2 个,即出现 5 点或 6 点,

$$s=2.$$

因为使该事件不成功的结果有 4 个,即出现 1, 2, 3 和 4 点

$$f=4.$$

$$n=f+s=4+2=6.$$

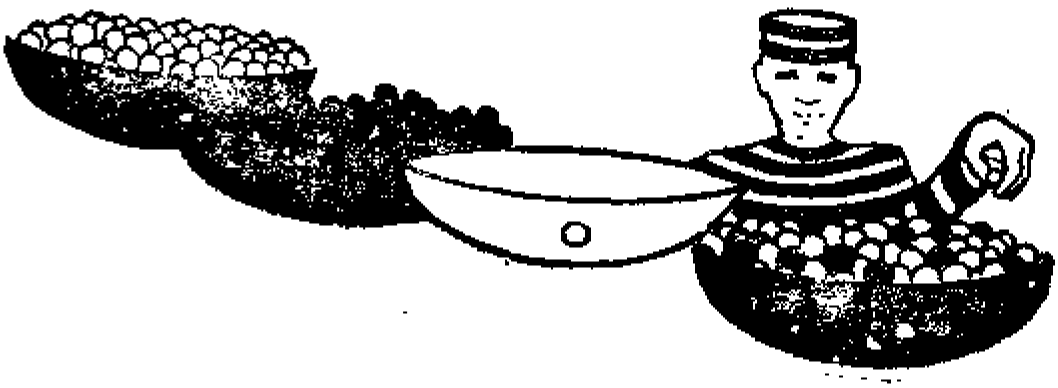
$$\therefore P(\text{点数大于 }4)=\frac{2}{4+2} \text{ 或 } \frac{2}{6}.$$

概率为 1, P (成功) $=1$, 意味着什么?

概率为 0, P (成功) $=0$, 意味着什么?

有一个古老的传说,讲一个犯人曾经用概率增加他得到宽恕的机会.给他两个碗,一个里面装着黑球,另一个装着白球,黑球与白球个数相同.把他眼睛蒙住,然后要他选择一个碗并从里面拿出一个球.如果他拿的是黑球,就要继续关在监狱.如果他拿的是白球,就将获得自由.在蒙住眼睛之前,允许他用他希望的方式把球进行混合.于是这个犯人把所有

的球都放在一个碗里，然后再拿出一个白球放在另一个碗里。他选择带白球的碗的概率是$\frac{1}{2}$．如果他选择错了碗，他还有接近$\frac{1}{2}$的概率能从另一个碗里拿出一个白球．这样，他把获得自由的机会提高到接近于$\frac{3}{4}$。



2. 样 本 空 间

正如我们在试验中已经看到的那样，要能够预测一个事件可能发生的频繁程度，我们必须先知道事件发生的不同方式有多少种．掷两枚硬币，一枚壹分硬币和一枚贰分硬币．我们知道，可能出现不同结果的集合E是

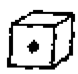
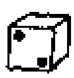
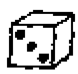
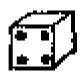
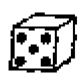
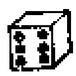
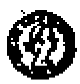
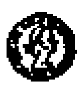
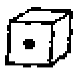
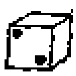
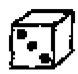
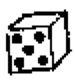
$$E=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\},$$

上面每个字对中，第一个字表示壹分硬币的结果，第二个字表示贰分硬币的结果．在投掷两枚硬币时，一个可能的结果说成是一个元素．所有元素的集合称为试验的样本空间．现在

的样本空间是有四个元素的一个集合．样本空间中的每一个元素称为一个样本点．例如，(正，正)就是上述样本空间的一个样本点．以后我们会明白为什么要用术语空间和点．

例 1 假设我们投掷一枚硬币、然后再投掷一粒骰子．这个试验的样本空间是什么？表 3 表示可能出现的不同结果．

表 3 骰子朝上的数

硬币朝上的面	1	2	3	4	5	6
正						
面						
反						
面						

这个试验可能结果的样本空间有十二个元素或样本点．

出现一个正面和一个六点(正，6)的概率是多少？仅有一个样本点是(正，6)．于是 $s=1$．不是(正，6)的样本点有 11 个，因此 $f=11$．样本空间的样本点或元素的总数是 $s+f$ 或 $n=12$．因此，出现一个正面和一个六点的概率是 $\frac{s}{s+f}$ 或 $\frac{1}{12}$．

出现一个正面和一个三点(正，3)的概率是多少？P(正，3)=？

例 2　在有三个孩子的家庭中，有两个男孩和一个女孩的概率是多少？用男表示男孩，女表示女孩，有三个孩子的样本空间是：

$F=\{$(男，男，男)，(男，男，女)，(男，女，男)，(男，女，女)，

(女，男，男)，(女，男，女)，(女，女，男)，(女，女，女)$\}$.

请注意，这个集合的元素是按照孩子出生的次序写的．我们假设生男孩和生女孩是等可能的．列出样本空间的另一种方法见表 4.

表 4

第一个孩子	第二个孩子	第三个孩子	样本空间点
男	男	男	男，男，男
男	男	女	男，男，女
男	女	男	男，女，男
男	女	女	男，女，女
女	男	男	女，男，男
女	男	女	女，男，女
女	女	男	女，女，男
女	女	女	女，女，女

由两个男孩和一个女孩组成的集合 C 是

$C=\{$(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)$\}$.

在有三个孩子的样本空间中，总点数是 8．因此，在有三个孩子的家庭中，有两个男孩和一个女孩的概率是 $\frac{3}{8}$．有两个女

孩和一个男孩的概率是多少？有三个女孩的概率是多少？

例 3 掷两粒骰子，出现点数总和为七的概率是多少？

为了找到这个试验的样本空间，我们要用一粒红骰子和一粒白骰子．表 5 表示了这个样本空间，它列出了这个试验可能出现的有序对．在有序对中，红骰子点写在前面．例如，有序对 (4, 3)，它是一个样本点，表示红骰子出现 4 点，白骰子出现 3 点．

表 5

	红骰子					
白骰子	1	2	3	4	5	6
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

如果把这些有序对当作坐标，每一个有序对将对应于图中的一个点．这就说明了为什么要把样本空间中的元素称为样本点或样本空间的点．

前面的样本空间有 36 个点．如果骰子是对称均匀的，则出现每一结果是等可能的．因此，在这个样本空间里，每一个点的概率是 $\frac{1}{36}$．

如果掷一粒红骰子和一粒白骰子，样本空间的 36 个点可用图 1 表示。

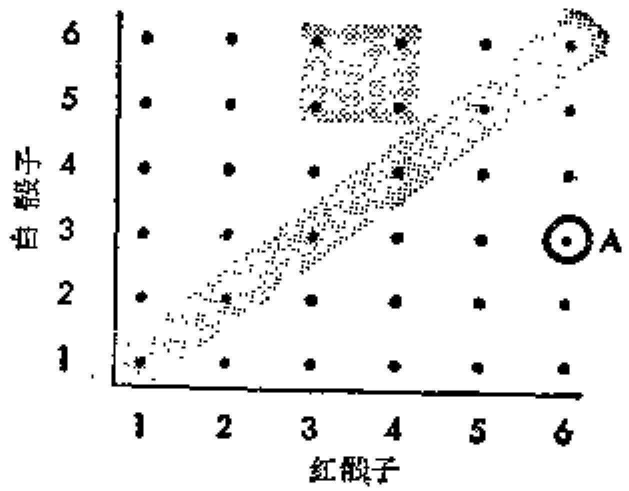


图 1

在这个点阵中，点 A 表示红为 6、白为 3 这个事件．我们用有序对 (6, 3) 表示这个点。

(1) 出现 (6, 3) 的概率是多少?

(2) 在这个点阵中有比其它点更可能出现的点吗?

(3) 图 1 方形中的点表示一个事件，该事件的概率是多少?

(4) 点出现在对角线上的概率是多少?

我们假设两粒骰子出现每一面的可能都是相同的，因此在点阵中出现每一个点的概率都是$\frac{1}{36}$．因为图 1 的方形包含四个点，所以，在一次投掷中，点出现在方形里的概率是 $\frac{4}{36}$ 或 $\frac{1}{9}$．在对角线上有 6 个点，因此，点出现在对角线上的概率是

$\frac{6}{36}$ 或 $\frac{1}{6}$. 点出现在对角线以外的概率是多少？

用这个样本空间可以回答许多问题．例如，出现总和为 7 的概率是多少？给出总和为 7 的有序对集合是

$$S=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

注意这个集合是样本空间的一个子集．用集合的语言，我们要找出集合 S

$$S=\{(r,w)\mid r+w=7\},$$

其中 r 表示红骰子点数，w 表示白骰子点数．这个集合中有 6 个元素．因此，出现总和为 7 的概率是

$$P(r+w=7)=\frac{6}{36} \text{ 或 } \frac{1}{6}.$$

(1) 出现两个相同点数的概率是多少？

(2) 出现总和为 10 的概率是多少？

(3) 出现总和大于 8 的概率是多少？

现在假定我们掷许多硬币，看看它们出现正面或反面的情况．一次掷两枚，三枚，四枚，五枚或六枚硬币，可能出现的结果是正面与反面的不同组合，我们如何计算任一可能事件的概率呢？表 6 可以帮助我们计算．

为了利用表 6，我们需要解释一下．设方程左边 $(H+T)$ 的指数表示硬币的数目．方程右边每一项的指数表示出现正面或反面的次数，H 表示正面，T 表示反面，例如，H^3T^2 表示 3 个正面和 2 个反面，每一项中的系数表示相应事件出现的次数．

表 6

$$(h+t)^0 = 1$$
$$(h+t)^1 = h+t$$
$$(h+t)^2 = h^2 + 2h^1t^1 + t^2$$
$$(h+t)^3 = h^3 + 3h^2t^1 + 3h^1t^2 + t^3$$
$$(h+t)^4 = h^4 + 4h^3t^1 + 6h^2t^2 + 4h^1t^3 + t^4$$
$$(h+t)^5 = h^5 + 5h^4t^1 + 10h^3t^2 + 10h^2t^3 + 5h^1t^4 + t^5$$
$$(h+t)^6 = h^6 + 6h^5t^1 + 15h^4t^2 + 20h^3t^3 + 15h^2t^4 + 6h^1t^5 + t^6$$

例如，掷三枚硬币，H^3 表示出现三个正面的次数为 1，$3H^2T^1$ 表示出现两个正面和一个反面的次数为 3，$3H^1T^2$ 表示出现一个正面和两个反面的次数为 3，T^3 表示出现三个反面的次数为 1. 我们把每种情况出现的次数称为相对频数. 相对频数的总和就得到样本空间的总数，它是 $1+3+3+1=8$. 因此，出现两个正面和一个反面的概率是

$$P(H^2T^1) = \frac{3}{8}.$$

这种分析仅当一个事件的概率是 $\frac{1}{2}$ 时（例如掷一枚硬币）才有意义. 有一个类似的数表，称为巴斯加（1623—1662）三角形[1]，见表 7. 你能看出在表 7 和表 6 之间有什么相似之处吗？

第 6 行可用来给出掷 6 枚硬币的结果. 出现 6 个正面的概率是 $\frac{1}{64}$，出现 5 个正面和 1 个反面的概率是 $\frac{6}{64}$，出现 4

1) 我国称这个三角形为杨辉三角形，杨辉在 1261 年所著《详解九章算术》一书中已使用这个三角形. 实际上我国的贾宪于北宋（约十一世纪）就使用这种三角，因此，我国使用这个表要比巴斯加早 500 年左右.

表 7

行	巴斯加三角形
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

个正面和 2 个反面的概率是 $\frac{15}{64}$，等等．第 5 行告诉我们，在有 5 个孩子的家庭中，有 5 个女孩的概率是 $\frac{1}{32}$，有 4 个女孩和 1 个男孩的概率是 $\frac{5}{32}$，等等．如果你考查表 7 的模型，你会很容易地扩展它，写出第七行、第八行，等等．

图 2 所示的概率板可用来说明建立在概率基础上的事件．这个板子可以使小球沿着一个斜面滚下去．当小球滚下去的时候，它们被均匀地钉在板子上的钉子分散开．概率板是个有盖子的大箱子．如果板子的斜坡调得比较合适，小球落到板子底部每个格子里的个数，就类似于巴斯加三角形中

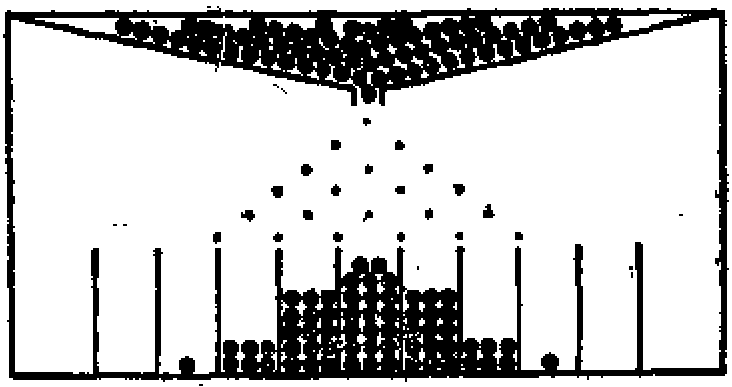


图 2

的数字。

练习 2　概率和样本空间

1.掷一粒骰子和一枚硬币，下面每一个事件的概率是多少？

a. 骰子出现 3 点

b. 骰子出现的点数小于 3

c. 骰子出现的点数大于 2

d. 骰子出现 5 点和硬币出现反面

2.在有两个孩子的家庭中，出现下面情况的概率是多少？

a. 两个男孩

b. 一个男孩和一个女孩

c. 两个女孩

这些概率的总和是多少？

3.下面每一个事件的概率是多少？

a. 在有三个孩子的家庭中，三个全是男孩

b. 掷两枚硬币出现的都是正面

c. 掷两粒骰子出现 (1，1)

d. 掷两粒骰子，出现总和小于 5

4.用两粒骰子作试验，投掷 72 次，每次都记下出现的总点数。计算每个总和出现次数与 72 的比，见下页表。

怎样把每个总和的比值同样本空间中每个总和的概率进行比较？

5.一个袋子里装有相同个数的红球、黑球和白球。每次抽一个球，抽的时候不许看，抽完以后把球放回去并把球混和起来，以准备下一次抽取。现在要抽三次，作出样本点表。抽到下列情况的概率是多少？

a. 三个都是黑球

b. 三个都是红球

c. 一个红球、一个黑球和一个白球

d. 两个红球和一个白球

两粒骰子朝上点数的总点数	总点数出现的次数	比　　值
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

3. 概率和日常事件

大自然像一个充满未知数的大盒子．蜘蛛是怎样学会织网的？燕子为什么要从非洲飞到它原来筑巢的地方？火星上的生命是什么样的？什么力量使原子聚在一起？研究自然就象我们研究由不同颜色的彩球组成的样本．

为了得到这些问题的答案，必须研究样本事件．我们必须明白，我们所观察到的事件仅仅是样本，象从一个盒子里抽取出球那样的样本．因此，必须用概率从抽样结果中作出判断．

现在，大多数科学家都相信，在自然界中，大多数事件都可能与概率有关．例如，在量子理论中，要计算某一电子在某一瞬间将会在什么地方似乎是不可能的，但科学家可以通过计算概率预测一个电子的位置．当然，不是所有的科学家都采用概率．例如，爱因斯坦拒绝用概率，他说："我决不相信上帝会和世界掷骰子．"

科学与概率的这种关系使科学家华伦·威沃尔说："颇为奇怪的是，人们不是在研究科学而是在与信仰打交道的时候才觉得有把握．"

概率在科学中所起的作用，和信仰在人类活动的其它领域中所起的作用相同．在大多数情况下，对"这个命题是真的吗?"的问题，科学家不能给出一个确定的回答．但是概率论可以告诉我们，这个命题有多大可能是真的．

现在给出概率在政治活动中的一个应用．假设保守党和工党在竞选中最终将分别获得m和n个席位，其中m大于n．竞选过程一直通过无线电和电视传播．在竞选中，保守党总是领先的概率是多少?数学家已经得到答案，它是

$$\frac{m-n}{m+n}.$$

4. 大 数 律

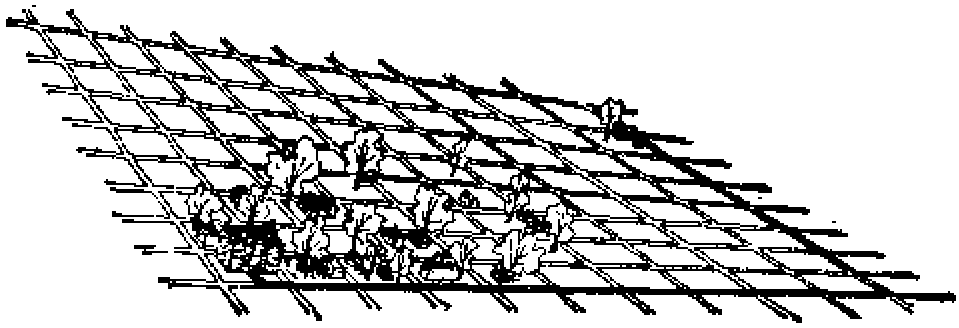
概率论中，一个重要的概念是大数律．用掷一枚硬币的例子可以很好地解释这个规律．假设我们把一枚硬币掷了许多

次，并记下出现正面和反面的次数．大数律表明，如果掷的次数足够多，出现正面的次数与总投掷次数之比和 $\frac{1}{2}$ 之差可以小到我们所希望的一个量．换句话说，当投掷次数愈来愈大时，出现正面次数与总投掷次数的实际比值将愈来愈接近 $\frac{1}{2}$．

有时大数律也称为“平均律”．这个平均律常常被误解．例如，在投掷一枚硬币许多次后，出现正面的次数比较多些，许多人就认为，按照大数律，下一次投掷时出现反面的可能要比正面大．如果硬币是对称的，这个想法则是不对的．每一次投掷和以前的投掷是独立的．不管正面已经出现了多少次，在下一次投掷中，出现正面和反面的可能都是相同的．

对大数律的另一种误解是关于出现正面或反面的次数．随着投掷次数的增加，出现正面次数与总投掷次数之比更接近 $\frac{1}{2}$．但是，出现正面的次数与期望次数的差就更加大了．例如，假设在 100 次投掷中出现正面 60 次，而在 1000 次投掷中出现正面 550 次．出现正面次数与投掷次数之比从 0.60 变到 0.55．因此，随着投掷次数的增加，比值更接近预期的 $\frac{1}{2}$．但是，对于出现正面次数来说，情况就不一样了．在 100 次投掷中期望出现正面次数是 $100\cdot\frac{1}{2}=50$，与 60 相差 10．在 1000 次投掷中，期望出现正面次数是 $1000\cdot\frac{1}{2}=500$，与 550 相

差 50，是 10 的 5 倍．这说明，出现正面次数与期望次数的差，在 1000 次投掷中要比在 100 次投掷中要大．



5. 随 机 游 动

概率论的一个最有用的应用称之为随机游动．最好是用位置描述它．假设有一个学生住在学校以东 10 个街区、以北 7 个街区的地方．所有街道都是东西向或南北向，构成方形网格．在学校放学的时候，这个学生决定每到一个街道拐角处用掷一枚硬币的方法确定走什么路线回家．当硬币出现正面时，他向北走一个街区，当硬币出现反面时，他向东走一个街区． 他可以用两分钟走一个街区，如果他能回到家的话，他要用多少时间呢？

在科学中，这类随机运动常常用在粒子（例如原子）运动的研究中． 一个典型的问题是：“在一束射线中有百分之几的中子能通过水槽而不被吸收？”为了回答这个问题，需要知道中子在与另一原子碰撞之前走过的平均长度，与氢原子或氧原子发生碰撞的概率，以及中子从槽壁弹回的可能性．

随机运动的另一个例子是：在一间房屋里空气分子随机

地运动．假设你在房间的这一半里，那么有可能在某一时刻空气中的所有分子都运动到房间的另一半去了．当然，这将是很不幸的．但是，你可以放心，这种情况几乎不可能发生的．这种情况相当于：假定硬币的数目和空气中分子的数目一样多，投掷它们，要求它们都出现正面．

6. 可 能 对 比 率

有时用可能对比率这个词表示一个事件的机会．“约翰将得到奖学金的可能对比率是多少?”这是一个典型问题．

我们需要小心仔细地分清概率和可能对比率．在一个成功事件的概率用比值 $\frac{s}{s+f}$ 来度量的时候，可能对比率用 $\frac{s}{f}$ 来度量．因此，一个事件的可能对比率大于它的概率．如果掷一枚硬币出现正面的概率是$\frac{1}{2}$，则使正面出现的可能对比率是$\frac{1}{1}$．掷一粒骰子，出现3点的概率是$\frac{1}{6}$，但是使3点出现的可能对比率是$\frac{1}{5}$．类似地，不出现3点的概率是$\frac{5}{6}$，而使3

点不出现的可能对比率是$\frac{5}{1}$. 在这里，使事件"不出现3点"成功的方式有5种，失败(即出现3点)的方式有1种。注意，不出现3点的可能对比率$\left(\frac{5}{1}\right)$是出现3点的可能对比率$\left(\frac{1}{5}\right)$的倒数. 类似地，掷三枚硬币，出现三个正面的可能对比率是$\frac{1}{7}$，因此，不出现三个正面的可能对比率是$\frac{7}{1}$.

7. 概率的解释

一个事件发生的概率用比值来度量. 如果一个事件概率为0，我们就说这个事件不可能发生. 如果一个事件一定发生，那么它的概率是1. 其它的概率用0与1之间的分数表示，参看表8.

表8 概率

1.0	←绝对肯定——有一天你会死去
0.9	
0.8	
0.7	
0.6	
0.5	←——一枚硬币出现正面
0.4	
0.3	
0.2	←——一粒骰子出现3点
0.1	
0.0	←——你在一小时内跑20哩

概率意味着什么呢？例如，对一个学生说："如果你打算进医学院，你将成为一个合格医生的概率是 0.4."这句话是什么意思呢？当然，这名学生要作一次试验（入学考试），或者成功或者失败．但是，对他来说，0.4 是什么意思呢？

回答是："如果有大量在能力、成绩和爱好方面都和你相同的学生进入了医学院，那么在 100 人中约有 40 个能成功地完成学业．学生人数越多，比值就越接近 0.4."

概率不能用对还是错来验证．但是，实际经验表明它是有效的．概率预测：如果你掷一枚硬币 100 次，预期大约有 50 次出现正面．但是，如果你真的把一枚硬币掷了 100 次，结果有 75 次出现正面，那你也不能否定概率．事实上，概率可以告诉你在 100 次投掷中出现 75 次正面的机会有多大．

8. 一种概率游戏

如果你知道概率，你会乐意用一种概率游戏使你的朋友们感到吃惊．游戏的内容是预测事件或东西能否重复出现．你可以要求预测：在你的组里至少有两个人有相同的生日，口袋里有相同的零钱，或者将抽出同样的牌．

例如，假设你要预测：在你的组里，至少有两个人的生日在一年之中的同一天．生日重复的概率比你想像的要大得多，见表 9.

按照表 9，如果你的组里有 30 个人，至少有两人生日相同的概率是 0.71.

表 9

组里人数	至少有两人生日相同的概率
5	0.03
10	0.12
15	0.25
20	0.41
25	0.57
30	0.71
40	0.89

表 9 是根据计算各人生日都不相同的概率公式制作的。对有 r 个人的小组，公式为

$$Q=\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdots\cdots(365-r+1)}{365^r}.$$

至少有两人生日相同的概率是 $P=1-Q$。

对一个仅有 6 人的小组而言，一个猜测不超过 15 种选择，那么出现重复事件的概率为 $\frac{1}{2}$或更大。这里有一些使 6 人中可能出现重复情况的猜测项目：出生的月份，在足球队中的位置，在口袋或钱袋中硬币的数目。

对一个仅有 8 人的小组，为了有一个好的预测成功的机会，可能选择的数目不要超过 28。某些可能项目是：

生日在一个月中的哪一天；

在字母表中选择你最喜欢的字母。

对有 12 人的小组，选择的数目可高达 66。某些项目是：

口袋或钱袋中零钱数量；

每个人的体重；

选择英格兰的一个州；

在扑克中选择一张牌。

练习 3 可能对比率

1. 下面事件的可能对比率是什么？

a. 掷两枚硬币出现两个正面

b. 掷两粒骰子出现点数的总和为 7

c. 有三个孩子的家庭中全是女孩

d. 赢得一场比赛(已知打赢的概率是 4/10)

2. 下面事件的可能对比率是什么？

a. 在你的电话号码里最后一位数是 7

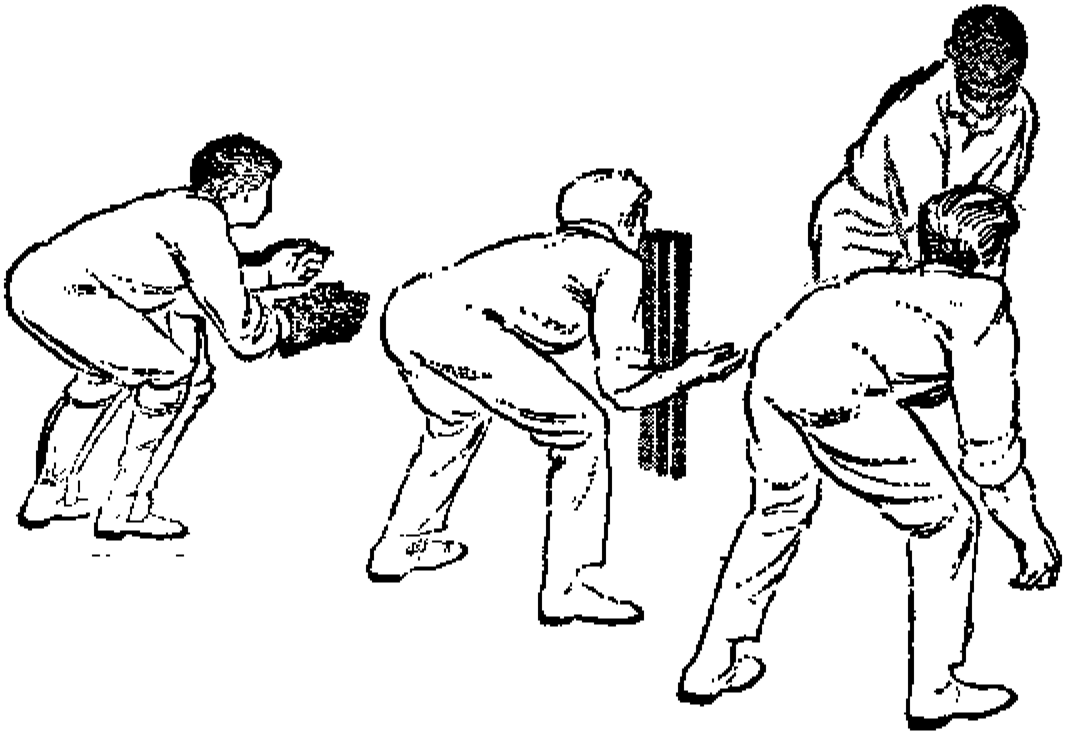
b. 在你的小汽车执照里最后两位数相同

c. 你被指定由某一位导师指导（已知有三名导师，他们的名字作成签放在帽子里，学生由抽签的方法来确定自己的导师是谁）

d. 在有 28 个人(包括你在内)的会议上你获得第一个奖品。

3. 有三个人把他们的帽子交给衣帽间的服务员，服务员没有收票。假定没有其它的顾客，服务员也回忆不起来哪顶帽子是谁的。服务员能够正确地把各人的帽子交还给各人的可能对比率是多少？

4. 用一副扑克牌做一次试验。每人把牌洗干净并抽取一张。记录下你们的结果。用类似于本章第 8 节的 Q 的公式计算至少有两张相同的概率。看看你们的结果是否出现了相同的牌。



三、排　列

1. 一个事件能按多少种方式出现?

用不同的方式编排一堆东西是一个很有趣的问题．重新排列 RST 三个字母可能有多少种不同方式？用三条裙子、两件衬衫和四件毛衣，可以搭配成多少种不同的穿着方式？在锦标赛中可能有多少种不同方式把各队配成对？为了回答这些问题，需要找到一堆东西可能排列的数目．

在以前章节中，为了得到事件的概率，我们列出了事件可能发生的不同方式．我们称这些事件为样本空间中的点．每一个不同的安排称为一个排列．因此，需要找到一种方便的

方法来确定东西或事件排列的数目。我们来看看怎样才能计算东西或事件的排列。

例 1 在板球场上，有多少种方式来安排罗伯特(R)，斯特文(S)和汤姆(T)分别作第一外场员、第二外场员和第三外场员(外场员是板球比赛中的一个位置，就象足球赛中的前锋、后卫等一样)？我们用一张表列出所有可能的排列。

表 10

第一外场员	第二外场员	第三外场员	可能的排列
R	S	T	RST
	T	S	RTS
T	R	S	TRS
	S	R	TSR
S	R	T	SRT
	T	R	STR

解决这个问题的另一种方法是对三名运动员作如下安排：

第一	第二	第三

对第一外场员，我们有三种可能选择，即 R，S，或 T。

第一	第二	第三
3		

在安排好一个运动员作第一外场员后，我们有两个人剩下来可供选择. 在每一次选择好第一外场员后，对第二外场员，我们有两种选择.

第一	第二	第三
3	2	

因此，我们能用 3×2 或 6 种方法选择第一和第二外场员. 在安排好第一和第二外场员之后，仅剩下一人被指定为第三外场员了.

第一	第二	第三
3	2	1

安排运动员担任三个位置的方法总数是 $3\times2\times1$ 或 6，这和表 10 中所得结果相同.

运动员的每一种安排就是一个排列的例子. 按一定次序对这些对象或事件作的任一安排就是一个排列.

例 2 要从有 9 个姑娘的俱乐部中选择一名主任，一名副主任和一名财务秘书，问有多少种选择方法?

	第一个职务	第二个职务	第三个职务
对主任的可能选择数目是 9	9		
对副主任的可能选择数目是 8	9	8	

对财务秘书的可能选择数目是 7	9	8	7

不同选择方法的总数是

$$9 \times 8 \times 7 \text{ 或 } 504$$

要从 5 个小伙子和 6 个姑娘中，选出一个小伙子和一个姑娘组成一个委员会，问有多少不同的选择方法？

2. 不同东西或事件的排列公式

在上一节研究的排列例子中，我们用列出所有可能情况或用乘法得到了排列数目．现在让我们来看一看，能否通过研究这些例子的模型而发现一个计算排列数目的公式．

例 1 用一分硬币，贰分硬币和伍分硬币能作出多少排列？

第 1 个选择		第 2 个选择		第 3 个选择
3	×	2	×	1

例 2 用字母 *GOLD* 能作出多少四个字母的排列？

第一个		第二个		第三个		第四个
4	×	3	×	2	×	1

例 3 用 5 个不同的玩具给 5 个孩子能作出多少排列？

第一个　第二个　第三个　第四个　第五个

$$\boxed{5 \quad \times \quad 4 \quad \times \quad 3 \quad \times \quad 2 \quad \times \quad 1}$$

例 4　把 n 个东西排成一排能给出多少排列？

第一个　第二个　第三个……第 n 个

$$\boxed{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1}$$

为了写出公式，我们用 P 表示排列数．更具体些，用 ${}_3P_3$ 表示从 3 个不同的东西中同时取 3 个的排列数．用上面的符号，前面的四个例子可以表示为：

1. ${}_3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$
2. ${}_4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
3. ${}_5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
4. ${}_nP_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

数学家喜欢用符号表示运算．上面例子中的乘法是用符号“！”来写的．

$n!$ 表示用所有小于 n 的正整数乘 n．例如，

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \times 2 \times 1$$

$${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

$${}_4P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

$${}_5P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

符号“！”读作“阶乘”．因此，4！读作阶乘 4 并表示所有从 1 到 4 的整数乘积．从上面例子可知，从 n 个东西中同时取 n 个的排列数是

$$_nP_n = n!$$

完成下面的阶乘表．

表 11

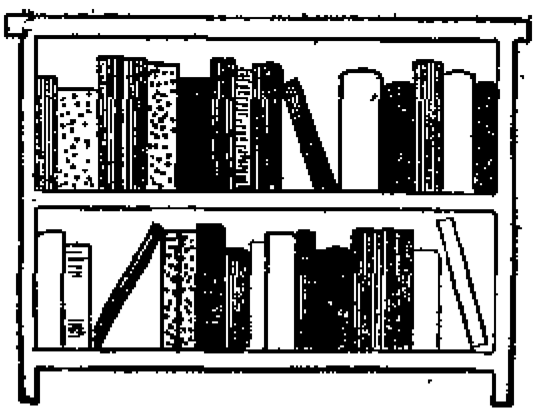
n	1	2	3	4	5	6	7	8	
$n!$	1		6	24	120				

这个表说明阶乘的数值增加得多么快．因为概率常用到排列，而排列包含阶乘，所以阶乘表是很有用的．例如，英文 26 个字母的排列数是 $_{26}P_{26} = 26!$

26！≈403，290，000，000，000，000，000，000，000

有 5 个字母 *LUCKY*．用阶乘表求 5 个字母的排列数．

这里有一件令人惊讶的事情．在我家里的书架上有 30 本书．世界上所有的人——男人、女人和孩子，都来把我的书排成不同的排列．即使他们日夜工作一百万年也不能排出所有



的排列！

世界上有近30亿人，一年有31,536,000秒。如果每个人一秒钟作一次排列，所能作的排列总数将是乘积 3,000,000,000 × 1,000,000 × 31,536,000。

$$3 \times 10^9 \times 10^6 \times 3.1536 \times 10^7 = 9.4608 \times 10^{22}$$

或者

94,608,000,000,000,000,000,000 种排列。

但是，三十本书可以排成 30！ 种排列

$$30! \approx 2.6525 \times 10^{32}$$

或者

265,250,000,000,000,000,000,000,000,000,000

这个数字是前面数字的二十多亿倍。

3. 部 分 排 列

有时我们想知道从一堆东西中取其一部分时的排列数。例如，从 *ABCDE* 五个字母中取三个字母的排列数是多少？我们把这个数写为 ${}_5P_3$。

第一个	第二个	第三个
5	4	3

$${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

要求 ${}_5P_3$，从 5 开始写三个因子，每个因子比前一个少 1 。注意

$$_5P_3 = \frac{_5P_5}{(5-3)!}$$

一般公式是： 如果 $_nP_r$ 表示从 n 个东西中同时取 r 个的排列数，则

$$_nP_r = \frac{_nP_n}{(n-r)!} \text{ 或 } \frac{n!}{(n-r)!}$$

例 1 从 10 本书中拿出 3 本排在书架上，共有多少种排法？

排列为

第一本	第二本	第三本
10	9	8

$$_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

把 $n=10$ 和 $r=3$ 代入公式，得

$$_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 10 \cdot 9 \cdot 8.$$

例 2 用 1，2，3，4，5，6 能组成多少四位数（每个数字不能重复出现在四位数里）？

第一个	第二个	第三个	第四个
6	5	4	3

$n=6,\ r=4\quad {}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$

如果允许数字重复出现，能组成多少四位数？

第一个	第二个	第三个	第四个
6	6	6	6

注意，在允许重复的时候，我们的公式就不能用了．因此，在做排列问题的时候，一定要采用适合于问题的方法．

从数字1，2，3，4，5，6中选出四个组成一个四位数，如果每个数都以偶数打头，能组成多少个四位数呢？

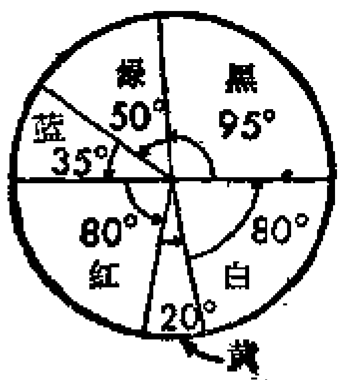
练习 4 排　　列

1．写出所有可能的由字母 x, y, z 组成的三字母码字（每个码字中三个字母互不相同）．

2．如果小张、小李、小江和小王同时上场踢足球，教练能用多少种方法为他们在足球队里安排四个位置？

3．从四个字母 *LUCK* 中选择三个组成一个三字母码字．问共能组成多少个三字母码字？

4．由三面旗子构成一种信号．每面旗子在它的旗竿上可以有三个位置．总共可以构成多少种信号呢？



5．求下面阶乘表示式的值．

a．$6!$　　b．$(3!)(4!)$

c．$(5!)\div(3!)$　　d．$(4!)^2$

6．右面的图形是一种轮盘赌轮．轮子停在黄色上的概率是多少？

7．为了破获一个案件，侦探需要确定一个电话号码．他从见证人那里了解到如下

情况：

（1）电话号码有4个数字；

（2）电话号码数是偶数；

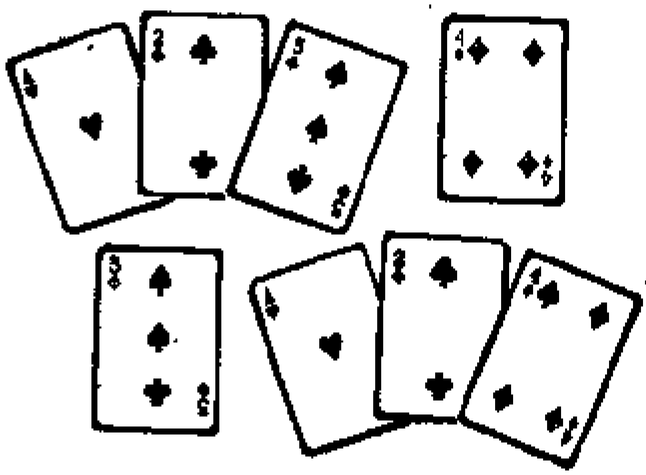
（3）第二个数字是零；

（4）所有数字都不相同；

（5）最大数字是4。

侦探必须检验多少台电话号码？

$${}_4C_3=\frac{{}_4P_3}{{}_3P_3}$$



四、组　合

1. 事物的可能组合

一个排列的次序常常是不重要的．例如，由汤姆，保罗和苏姗组成的委员会与由苏姗，汤姆和保罗组成的委员会是相同的．选择或排列的次序不改变这个三人委员会．类似地，手头有五张纸片，例如 A，10，J，Q，K，它们的排列次序是不重要的．在选择事物而不考虑它们排列次序的时候，我们就得到一个组合． 汤姆(T)，保罗(P)和苏姗(S)的排列有六种，即 TPS，TSP，STP，SPT，PST，PTS．但是，所有这些排列表示的都是一个委员会．从三个事物中取出三个的组合数写为 ${}_3C_3$．为了得到组合公式，审查下面例子的模型．

例 1　由四个人能组成多少不同的三人委员会？设这四人用 $ABCD$ 表示．从四人中选出 3 人的排列数是 ${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$．从四人中选出 3 人的组合是 ABC，ABD，ACD，

BCD，或 ${}_4C_3 = 4$。从 3 个东西中取出 3 个的排列数是 ${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$。

$${}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{{}_3P_3} \text{成立吗?}$$

例 2 用同样的方法讨论另一例子．从五个硬币中同时取出两个的组合数是多少？假设这五个硬币是不同的，分别用字母 A，B，C，D，E 表示． 他们的组合是： AB，AC，AD，AE，BC，BD，BE，CD，CE，DE。因此，${}_5C_2 = 10$。

从 5 个硬币中取出 2 个的排列数是

$${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

从 2 个硬币中取出 2 个的排列数是

$${}_2P_2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

$${}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{{}_2P_2} \text{成立吗?}$$

这暗示出，从 n 个东西中取 r 个的组合数公式是

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r}.$$

${}_nC_r = {}_nP_r \div (r!)$ 成立吗?

有时符号 ${}_nC_r$ 写作$\binom{n}{r}$。

我们现在有一个计算组合数的简单方法了．你能从 6 张牌中用多少种方式抽出 4 张牌(不考虑 4 张牌的排列次序)?

$${}_6C_4 = \frac{{}_6P_4}{{}_4P_4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

${}_6C_2 = {}_6C_4$ 成立吗?

${}_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$ 成立吗?

${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 成立吗?

2. 独立组的组合

有时候一个组合是由几个不同的组的成员组成的，因此，我们要把每一个组的组合结合起来.

例 1 篮球教练需要选择两名攻球手和两名守球手. 如果有 5 名攻球手和 4 名守球手可供选择，那么可以选择出多少个不同的篮球队?

选攻球手的可能组合是

$${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

选择守球手的可能组合是

$${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

对于攻球手的 10 种组合中的每一种，有 6 个可能的守球手组合. 因此，可能的不同队的总数是 $10 \times 6 = 60$.

例 2 为了给商品作上标记，从字 JONES 中选择三个字母并从 1，3，5，7，8 和 9 中选择两个数字，作成一个符号字. 在符号字中不考虑字母的次序和数字的次序，那么可能有多少符号字呢? 5 个字母中取 3 个的组合是

$${}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

6 个数字中取出 2 个的组合是

$$_6C_2 = \frac{_6P_2}{2!} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

符号字的总数是 $10 \times 15 = 150$.

例 3 一个小孩在他的口袋里有 4 枚小的圆形塑料片，上面分别写着数字 1, 2, 3, 5. 当他坐在椅子上的时候有两枚塑料片从他口袋里掉出来. 这两枚塑料片上数字之和大于 5 的概率是多少?

从 4 枚塑料片中抽出 2 个的组合是

$$_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

两枚塑料片上数字之和大于 5 的组合数 = 3. 具体为 (5, 1), (5, 2), (5, 3).

所要求的概率 $= \frac{3}{6}$ 或 $\frac{1}{2}$.

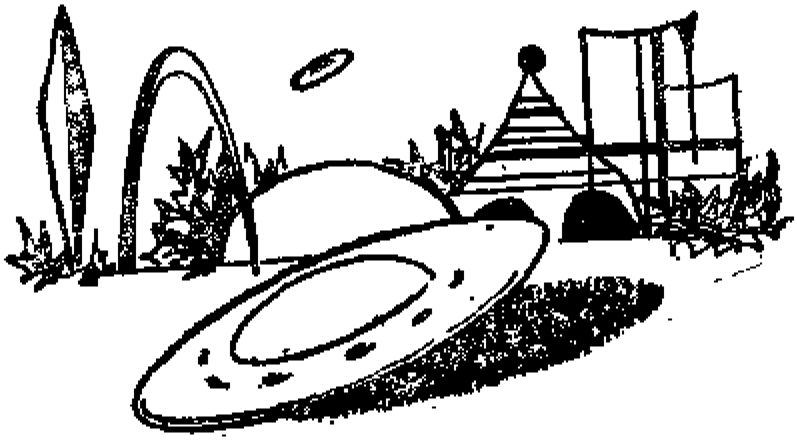
练习 5 组 合

1. 能用多少种不同的方式从 14 个男孩中选出一个足球队?

2. 从 10 个运动员中，能组成多少不同的篮球队 (有 5 个成员)?

3. 曲棍球队由 3 个前锋、2 个后卫和 1 个守门员组成. 现有 9 个前锋，6 个后卫和 2 个守门员，问：能组成多少不同的曲棍球队?

4. 报告论题目录上有 24 个题目. 有三个年青人要作不同的报告. 他们能选择多少种不同的题目的组合呢?



五、再谈概率

1. 集合与复合事件

我们已经用集合这个术语谈论过一个样本空间中的点集．在更多地使用这个术语之前，我们要弄清楚集合的含意．

一个集合就是一堆像书本、字、数字或点之类的东西．属于一个集合里的东西称为这个集合的元素．比如，我们说小于10的偶自然数的集合，那么，这个集合中的元素是2，4，6和8．通常把这个集合表示为

$$E=\{2,4,6,8\},$$

其中E表示整个集合．小于10的质数集合P是

$$P=\{2,3,5,7\}.$$

如果第一个集合中的每一个元素也是第二个集合中的元素，我们就称第一个集合是第二个集合的子集．显然，集合$\{3,5\}$是P的一个子集．

为了比较集合，我们可利用图 3。

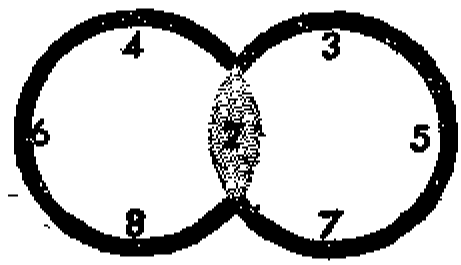


图 3

由所有的 E 的元素和 P 的元素在一起组成的集合，称为集合 E 和 P 的并集。用符号 $\cup$ 表示并，E 和 P 的并集就表示为 $E\cup P$。在图 3 中，$E\cup P$ 由轮廓线画出，即

$$E\cup P=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

由所有的同时属于 E 和 P 的元素所组成的集合，称为集合 E 和 P 的交集。用符号 $\cap$ 表示交，E 和 P 的交集就表示为 $E\cap P$。在图 3 中，$E\cap P$ 由虚点表示，即

$$E\cap P=\{2\}.$$

如果你从未学过集合或由过符号 $\cup$ 和 $\cap$，阅读下一节时就要细心。

集合的并和交在计算概率中是有用的。在下节，我们将通过计算掷两粒骰子的概率来说明这种应用。

2. 概率与集合

掷两粒骰子的样本空间由图 4 来表示，在点阵列中每一个点的位置由掷出的两粒骰子的点数确定，而且在该点上标

出了两粒骰子点数的总和. 例如，点 Q 表示掷的点数为 (1, 6)，总和为 7. R 是 (2, 5)，T 是 (3, 4). 注意，总和为 7 的点出现在一条对角线上.

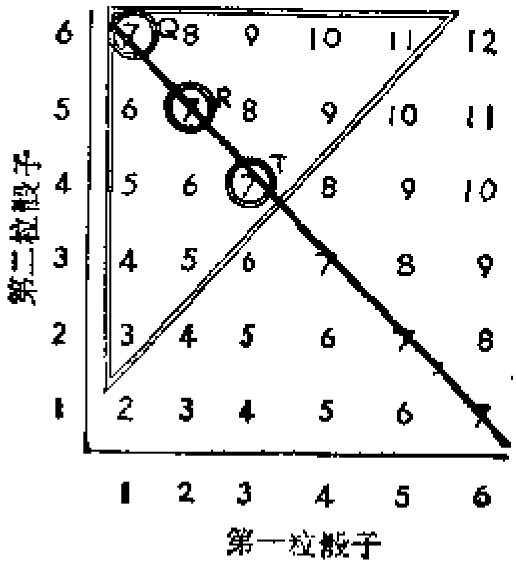


图 4

掷两粒骰子出现总和为 7 的概率是多少？在图上通过总和为 7 的点的一条直线已画出，直线上有 6 个点. 如果用 A 表示总和为 7 的点集，那么 A 是一个有 6 个元素的集合. 如果用 W 表示掷两粒骰子出现所有可能的点集，那么 W 是一个有 36 个元素的点集. 因此，总和为 7 的概率是

$$P(A)=\frac{A\text{中元素的个数}}{W\text{中元素的个数}}=\frac{6}{36}\text{ 或 }\frac{1}{6}.$$

第一粒骰子的点数比第二粒骰子的点数少的概率是多少？设 $B=\{$图 4 中那些使第一粒骰子点数少于第二粒骰子的点数$\}$. B 中的点在图 4 中的三角形内，共有 15 个点. 因此，

$$P(B)=\frac{B\text{中元素的个数}}{W\text{中元素的个数}}=\frac{15}{36} \text{ 或 } \frac{5}{12}.$$

得到总和为 7 同时第一粒骰子点数少于第二粒骰子点数的概率是多少？换句话说，A 和 B 同时发生的概率，即 $P(A\cap B)$ 是多少？A 和 B 同时发生意味着是 A 和 B 的交集。

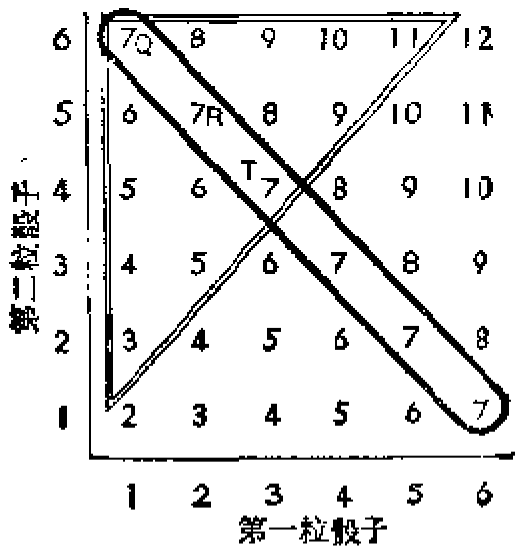


图 5

由图 5 看出，A 和 B 的交集由 Q，R 和 T 三个点组成。因此

$$A\cap B=\{Q, R, T\}.$$

$A\cap B$ 中元素的个数是 3．这样，

$$P(A\cap B)=\frac{3}{36} \text{ 或 } \frac{1}{12}.$$

得到总和为 7 或者第一粒骰子点数少于第二粒骰子点数的概率是多少？我们再次要计算一个与两个事件都有关的概率。但是，在这次，一个事件或另一个事件或同时两个事件都

将满足我们所说的条件．因此，这一次所包含的点是 A 中所有的点和 B 中所有的点．这些点在图 5 中的封闭图线之内，它表示 A 和 B 的并集 $A\cup B$．并集中的总点数是 18．因此，总和为 7 或者第一粒骰子点数少于第二粒骰子点数的概率是

$$P(A\cup B)=\frac{18}{36} \text{ 或 } \frac{1}{2}.$$

比较这些结果：

$$P(A)=\frac{6}{36}$$

$$P(B)=\frac{15}{36}$$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{36}$$

$$P(A\cup B)=\frac{18}{36}.$$

为什么 $P(A\cup B)$ 不等于 $P(A)+P(B)$？参看图 5．$P(A)$ 包含点 Q，R 和 T．但是，$P(B)$ 也包含点 Q，R 和 T，这样，Q，R 和 T 显然被计算了两次．因此，必须从 $P(A)+P(B)$ 中减去 Q，R 和 T．因为 $A\cap B$ 等价于 $\{Q, R, T\}$，所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

例 1 在一次竞赛中有 5 辆赛车，分别记为 F，C，B，R，L．在 5 辆中有 3 辆将获胜．下面事件的概率是多少：

a．F 和 C 都是优胜者，

b．B 和 R 都是优胜者，

c. F，B 和 L 都是优胜者。

分析：可能获胜者的样本空间是由 5 辆车中同时取 3 辆所组成。

$$ {}_5C_3 = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10 $$

$$ S = \{FCB, FCR, FCL, CBR, CBL, CRL, \\ BRL, FBR, FBL, FRL\} $$

现在我们列出 S 的子集，使它们对应我们所描述的事件。

a. F 和 C 都获胜：$A = \{FCB, FCR, FCL\}$

b. B 和 R 都获胜：$B = \{BRL, FBR, CBR\}$

c. F，B 和 L 都获胜：$C = \{FBL\}$

于是

$$ P(A) = \frac{3}{10},\quad P(B) = \frac{3}{10}, $$

$$ P(C) = \frac{1}{10}. $$

例 1 中的事件 a，b 和 c 被称为互斥事件．请注意，像 a 这样的事件将排斥像 b 或 c 这样事件出现的可能性（关于互斥事件，在下一节还要说明）．如果我们考虑互斥事件 A，B 和 C，那么

$$ P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C). $$

3. 相关事件的集合公式

事件集合的交集和并集，告诉我们事件是如何相联系的，

同时为我们提供计算概率的公式．为了说明事件之间的关系，我们再次利用掷两粒骰子的阵列图．这次我们将用一粒红骰子和一粒白骰子，对每一个有次序的数对，红骰子给出第一个数，白骰子给出第二个数．图 6 给出了样本空间的点集和被包含在其中的几个集合．

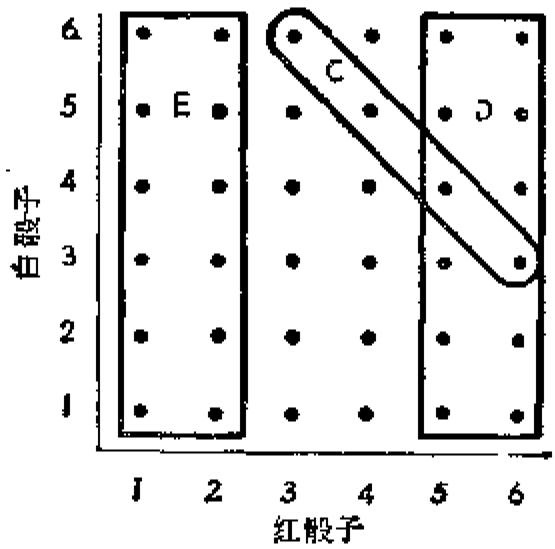


图 6

得到总和为 9 同时红骰子点数大于 4 的概率是多少？

令 $C=\{$总和为 9$\}$和 $D=\{$红骰子点数$>4\}$.

集合C有 4 个元素，而集合D有 12 个元素；但是，C和D的交集中仅有两个元素，(5, 4)和(6, 3).

$$P(C\cap D)=\frac{2}{36}\text{ 或 }\frac{1}{18}.$$

得到总和为 9 或者红骰子点数大于 4 的概率是多少？C和D的并集是 $C\cup D=\{(3,6),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$．于是，

$$P(C \cup D)=\frac{14}{36} \text{ 或 } \frac{7}{18}.$$

等式 $P(C \cup D)=P(C)+P(D)-P(C \cap D)$ 成立吗？可以自己计算出

$$P(C)+P(D)-P(C \cap D)=\frac{4}{36}+\frac{12}{36}-\frac{2}{36}$$

$$P(C \cup D)=\frac{7}{18}.$$

得到总和为 9 同时红骰子点数小于 3 的概率是多少？

$$\text{令 } E=\{\text{红骰子点数}<3\}.$$

没有点满足这两个条件，即没有同时属于 C 和 E。这样的集合称为不交集合．交集 $C \cap E$ 是空的． 空的集合称为空集，用符号 $\varnothing$ 表示．因此，$C \cap E=\varnothing$。所以，

$$P(C \cap E)=\frac{0}{36} \text{ 或 } 0 .$$

如果一粒骰子点数小于 3，要得总和为 9 是不可能的．

得到总和为 9 或者红骰子点数小于 3 的概率是多少？

$$\begin{aligned} P(C \cup E) &= P(C)+P(E)-P(C \cap E) \\ &= \frac{4}{36}+\frac{12}{36}-0=\frac{16}{36} \text{ 或 } \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

这个例子告诉我们，当两个集合不交时（$C \cap E=\varnothing$），两个事件之并（$C \cup E$）的概率是两个事件概率之和．

当两个事件的集合没有共同的点时，称这两个事件是互斥事件．这意味着，两个互斥事件不能同时发生或者一起发生．如果 A 和 B 是不交集合，则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$。同样的原则可以用到几个不交集合的并集． 如果 A，B 和 C

是不交的，则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

练习 6 概率和集合

1.如果在某种比赛中赢的概率是 0.3，那输的概率是多少？

2.一个袋子里有 5 个红球，8 个白球，4 个绿球，7 个黑球. 如果随机地抽取一个，求下面事件的概率：

a. 它是黑的，

b. 它是红的或者白的，

c. 它不是绿的.

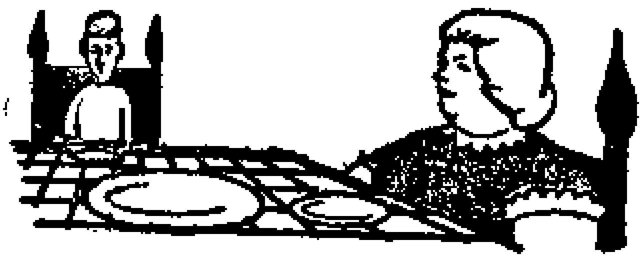
3.有一粒红骰子和一粒黑骰子，如果掷这两粒骰子，下面事件的概率是什么：

a. 黑骰子的点数不小于红骰子的点数，

b. 两粒骰子的总和大于 7，

c. 黑骰子点数不少于红骰子点数，同时两粒骰子点数的总和大于 7，

d. 黑骰子点数不小于红骰子点数或者两粒骰子点数的总和大于 7.



4. 互 补 事 件

你记得下面这首古老的诗吗？“杰克不能吃肥，妻子不能

吃瘦．两人共同进餐，菜盘都被吃光．”杰克和他妻子的爱好和厌恶是相反的，是相互补充的．厌恶肥肉和厌恶瘦肉是相互对立、相互补充的．对杰克夫妇而言，杰克喜爱瘦肉被他妻子喜爱肥肉所补充．因此，对他们两人来说，不论肥肉瘦肉，他们都喜欢，而且都被吃掉．

在集合论中，“补”的概念有着同样的含意．如果 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $A=\{2, 4\}$，A 的补集（通常也称为余集，有时读作“非 A”）写为 A'，则

$$A'=\{1, 3, 5\}.$$

因此，$A\cup A'=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 或 $A\cup A'=U$，同时 $A\cap A'=\varnothing$．一般地，任何一个集合与它补集的并集是全集合，而任一集合与它补集的交集是空集．

如果我们掷三枚硬币，样本空间由 8 个事件组成：

$S=\{$正正正，正正反，正反正，正反反，反正正，

反正反，反反正，反反反$\}$.

不出现两个正面的概率是多少？设 A 是正好出现两个正面的事件的集合．

$$A=\{\text{正正反, 正反正, 反正正}\}$$

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

于是，不出现两个正面的集合由所有剩下的事件所组成．

$$A'=\{\text{正正正, 正反反, 反正反, 反反正, 反反反}\}$$

$$P(A')=\frac{5}{8}.$$

因此，$P(A)+P(A')=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1$，或 $P(A')=1-P(A)$。A 和 A' 称为互补事件。$P(A')+P(A)=1$。事件 A 和 A' 也是两个互斥事件，这因为 $A\cap A'=\emptyset$。因此，

$$P(A\cup A')=P(A)+P(A')=1.$$

图 7 表示了集合 A 和集合 A' 的关系。

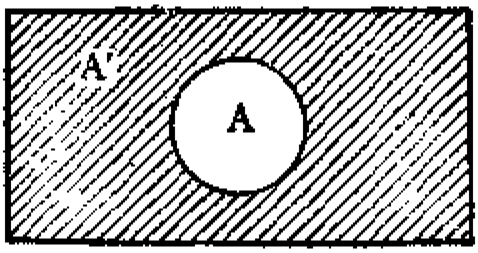


图 7

5. 独 立 事 件

当两个事件毫无关系时，我们称这两个事件为独立事件。我们用掷一枚硬币和一粒骰子来说明。硬币落下来的方式和骰子落下来的方式是独立的。

令

$S=\{$(正，1)，(正，2)，(正，3)，(正，4)，(正，5)，(正，6)，(反，1)，(反，2)，(反，3)，(反，4)，(反，5)，(反，6)$\}$

$E=$ 骰子偶数点朝上的事件的集合。

因为有 12 个等可能事件，所以每一事件的概率是 $\frac{1}{12}$。例如，

$$P(正,\ 2)=\frac{1}{12}.$$

出现正面和偶数点的概率是多少？满足上述两个条件的有序对是(正，2)，(正，4)，(正，6)．因此，概率是 $\frac{3}{12}$ 或 $\frac{1}{4}$，或者写为

$$P(正,\ E)=\frac{1}{4}\ 或\ P(正\cap E)=\frac{1}{4}.$$

让我们分别考虑每一种对象．一枚硬币出现正面的概率是

$$P(正)=\frac{1}{2}.$$

一粒骰子出现 2 点的概率是

$$P(2)=\frac{1}{6}.$$

出现(正，2)的概率是

$$P(正\cap 2)=P(正)\ P(2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

同样，在一次投掷中出现正面和偶数点的概率是

$$P(正\cap E)=P(正)P(E)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

用集合记法，独立事件集合 A 和 B 的关系为

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

当两个事件不能肯定是否独立时，可以用这个公式作出判断．在日常生活中，要判断两个事件独立，并不总是容易的．

我们必须明确独立事件和互斥事件的区别．当事件集合不交时才出现互斥事件，而独立事件则要求事件集合在样本空间中至少有一个共同点．

如果我们掷两粒骰子，通常总假定一粒骰子落下的方式不影响另一粒骰子落下的方式．我们说这两个事件是独立的．

假若你发现，一个朋友掷两粒骰子，共掷 40 次，得到如下结果(见图 8)．

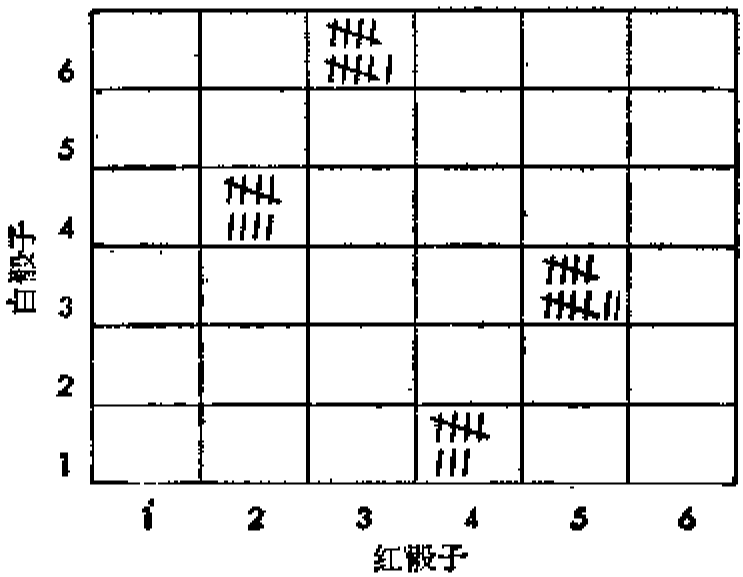


图 8

你将会感觉到这两粒骰子的投掷不是独立的．红骰子出现的情况看来依赖于白骰子．

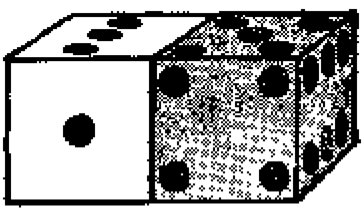


图 9

两粒分别被投掷的骰子是不可能出现这种情况的．你可能猜想，这两粒骰子像图 9 那样被粘在一起．

当然，仅仅由这些试验结果还不能肯定你的猜想.

从试验中作出推断，并判断它有多大的可能性，是概率论在统计中的一种应用.

练习 7　互补事件和独立事件

1. 假设有 5 个女孩，把她们分别记为 A, C, J, K, S. 她们想做秘书工作，但只有 3 个秘书职位，因此 5 人中仅有三人被录用.

a. 女孩们被录用的方式有多少种?

b. 写出 5 人中同时抽出 3 人的所有组合.

c. 如果 5 个人被录用的机会相等，女孩 K 得到一个职位的概率是多少?

d. 女孩 K 和 S 都得到职位的概率是多少?

e. 女孩 K 或 S 得到职位的概率是多少?

2. 假设有 4 个硬币被投掷. 令 $A=\{$正好出现两个正面$\}$, $B=\{$至少出现两个正面$\}$.

a. 求 $P(A)$.　　b. 求 $P(B)$.

c. 求 $P(A\cup B)$.　　d. 求 $P(A\cap B)$.

3. 有两个转盘，一个转盘上有 A, B, C, D, E 五个字母，一个转盘上有 1, 2, 3, 4, 5 五个数字. 转盘停在任何一个字母或数字上的可能性都是相等的.

a. 写出这两个转盘可能事件的样本空间.

b. 出现 A 和奇数的概率是多少?

c. 出现 B 和偶数的概率是多少?

d. 不出现奇数的概率是多少?

e. 出现 A 和奇数或者 B 和偶数的概率是多少?

4. 巴巴拉撕掉了 15 盒蔬菜罐头的商标，并把它们混在一起. 这些罐头外表相同，其中 4 盒里面是豌豆，6 盒里面是蚕豆，5 盒里面是西红柿. 巴巴拉的母亲随机拿出一盒并打开它. 问下面的概率是多少:

a. 里面是豌豆。

b. 里面是蚕豆或者是西红柿。

c. 里面是豌豆、蚕豆或者是西红柿。

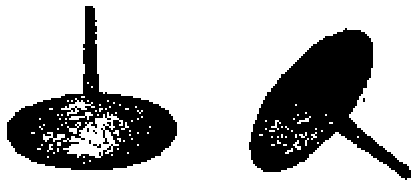
六、应 用 概 率

1. 建立在试验基础上的概率

在掷硬币或骰子时，我们可以列出样本空间中所有的点。我们假定每一个点都是等可能的．但是，当我们把概率论应用到日常事件的时候，譬如天气预报、事故预测或股票市场标价，要列出所有的可能性是不可能的．即使我们列出了所有可能的事件，这些事件也不是等可能的．一些事件要比另一些事件发生得更频繁些．

可以用一个简单的试验来说明．为了作这个试验，需要一个普通的图钉．当它落到一个硬的表面上时，它或者朝上

(用 U 表示)或者朝下(用 D 表示),见图 10.



U　　　D

图　10

虽然这个平头钉像硬币一样，落下时只有两种方式，但是，$P(U)=\frac{1}{2}$ 却是不对的．然而，认为 U 的概率是某个固定的比例，它并不时时都在变化，却似乎是合理的．当然，对于不同规格的钉子，$P(U)$ 可能是不同的．我们可以想到，一个有大平头和短钉竿的钉子比一个有小平头和长钉竿的钉子，有更大的 $P(U)$ 值．因此，在没有弄清楚图钉的具体情况时，我们不应该笼统地写 $P(U)$．实际上，我们只能针对一个具体的图钉或某一类同样规格的图钉谈概率 $P(U)$．

为了得到 $P(U)$ 值的估计值，让我们掷 100 次图钉并记下结果．一个图钉的结果见表 12．

表　12

图钉向上 (U)	60
图钉向下 (D)	40
总 投 掷 数	100

从这些结果看，$P(U)=60/100$ 或 0.6，$P(D)=0.4$．当

然，从这次试验中，我们不可能期望得到确切的概率值．甚至硬币在 100 次投掷中也不是正好有 50 次正面朝上．所以，0.6 只是这个图钉向上概率的一个估计．如果我们投掷 1000 次得到一个类似的概率，那么估计的准确性就更可信．

如果我们投掷两个图钉，有序对的样本空间在表 13 中给出．

表 13　两个图钉的样本空间

		第二个图钉	
		向上 (U)	向下 (D)
第一个图钉	向上 (U)	(U,U)	(U,D)
	向下 (D)	(D,U)	(D,D)

第一个图钉向上和第二个图钉向下 (U, D) 的概率可以表示为 $P(U\cap D)$．在独立事件的讨论中，我们已得到 $P(U\cap D)=P(U)P(D)$．因此，事件 (U, D) 的概率是

$$P(U, D)=P(U)P(D)$$
$$=(0.6)(0.4)=0.24.$$

按同样方法可得

$$P(D, U)=P(D)P(U)=0.24$$
$$P(U, U)=P(U)P(U)$$
$$=(0.6)(0.6)=0.36$$
$$P(D, D)=P(D)P(D)$$
$$=(0.4)(0.4)=0.16.$$

表 14

		第二个图钉	
		U	D
第一个图钉	U	0.36	0.24
	D	0.24	0.16

注意，由表 14 知，所有样本点的概率之和是 1，和应该要求的（样本空间的概率为 1）相一致.

两个图钉都向上或者两个图钉都向下的概率是多少？这个事件是 (U, U) 和 (D, D) 的并集. 因为对互斥事件 A 和 B 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$，因此，

$$P((U, U) \cup (D, D)) = P(U, U) + P(D, D)$$
$$= 0.36 + 0.16 = 0.52.$$

概率 $P(U \cap U \cap U)$ 是多少？读者自己计算.

从一本书里翻一页，然后数出在这一页里元音字母的数目和字母的总数. 把你的结果制成像下面那样的表.

表 15

元音字母	计　数	P
a		
e		
i		
o		
u		
这页字母总数		

利用这个概率预测在另外一页中元音字母"e"的数目，通过检验另外的一页，来看看你的预测与实际计数有多接近.

2. 蒙特卡罗方法

正如我们在以前各节中看到的，有两种方法可以处理概率问题. 例如，在掷硬币问题中，我们可通过分析样本空间的点来确定掷三枚硬币出现三个正面的概率. 这是理论解的一个例子. 我们假设一枚硬币出现正面的可能和出现反面的可能是一样的. 在这个假定下，我们无需投掷一枚硬币就可获得解答.

另一方面，我们可以成千次地投掷三个硬币，以测量出出现三个正面概率的大小. 和所有的测量一样，我们的结果只是概率的一个估计，而不是我们在样本空间分析中所得到的精确值. 通过试验获得概率是经验解的一个例子.

有些概率问题是如此之复杂，以至我们要用经验或试验结果来核对理论答案. 这种理论和实际、分析样本空间和用试验获得概率的方法的结合，称为蒙特卡罗方法.

我们给出蒙特卡罗方法的一个例子. 要解决的问题是"掷两粒骰子，出现总点数大于10的概率是多少". 通过建立样本空间，我们发现，在36个样本点中有三个点(6,6)，(6,5)，(5,6)是满足所述条件的. 因此，答案是3/36. 我们可以用把两粒骰子掷许多次的方法来检验我们的答案. 如果试验结果与理论答案相差较大，我们就要怀疑建立理论的假定是否

合理，即骰子是否匀称，投掷方式是否合理，两粒骰子是否相互独立．用试验来检验样本空间分析结论的方法就是蒙特卡罗方法。

3. 概率的应用

我们把像分析图钉那样的概率方法应用到一些日常生活的事件中去．

例 1 对一个工厂的 100 名工人进行调查，就是否要制定禁止在小卖部抽烟的规定，要每一个人回答两个问题：

1. 你赞成禁止在工厂小卖部抽烟的规定吗？

2. 你在小卖部抽烟吗？

分析：每一个工人属于下面四种情况之一：

A. 赞成规定并且在小卖部抽烟，

B. 赞成规定并且不在小卖部抽烟，

C. 反对规定并且在小卖部抽烟，

D. 反对规定并且不在小卖部抽烟．

调查结果的比例数列在表 16 中．这些数当作事件的概率，而事件则由样本空间中的点表示．

表 16 调查表

	在小卖部抽烟	不在小卖部抽烟	行 总 数
赞成规定	0.40(E_1)	0.30(E_2)	0.70 (F)
反对规定	0.20(E_3)	0.10(E_4)	0.30(F')
列 总 数	0.60 (S)	0.40 (S')	1.00

随机地抽问一个工人，那么他赞成规定的概率是多少呢？

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$
$$= 0.40 + 0.30 = 0.70.$$

一个工人在小卖部抽烟或者反对规定的概率是多少？

$$P(S \cup F') = P(S) + P(F') - P(S \cap F')$$
$$= 0.60 + 0.30 - 0.20 = 0.70.$$

保险公司用类似的方法搜集资料，以确定像事故，火灾或死亡这样一些事件的概率．例如，寿命保险价格就是根据像表 17 那样的死亡数表来确定的．

表 17

死亡数表的一部分

年龄	活到该年龄的人数	在该年龄之中死亡人数
10	100,000	749
15	96,285	735
20	92,637	723
25	89,032	718
30	85,441	720
40	78,106	765
50	69,804	962
60	57,917	1,546
70	38,569	2,391
80	14,474	2,091
90	847	385

根据这张表，你在 15 岁那年去世的概率是多少呢？按照死亡数表，在 96285 个 15 岁人中 735 个死亡.

$$P(\text{在 15 岁死亡})=\frac{735}{96285}=0.00762.$$

如果你是 15 岁，你活到 80 岁的概率是多少呢？

$$P(\text{活到 80 岁})=\frac{14474}{96285}=0.15.$$

然而，在根据这一些经验表格作出结论时，人们必须小心．这些表格所反映的是已经发生的事件，不包括将来要发生的事件．你今年 15 岁了，如果你是一个粗心的骑自行车的人，那么你活到 80 岁的机会就比百分之十五小得多．如果你的家族特别长寿，你活到 80 岁的概率可能大于百分之十五．许多其它因素，诸如假期，娱乐种类和居住地点，都影响这些事件的概率.

练习 8 应 用

1．在掷一个图钉时，已知 $P(U)=0.7$ 和 $P(D)=0.3$．填写下面表格.

第二个图钉

		U	D
第一个图钉	U		
	D		

a．如果掷三个图钉，$P(D\cap D\cap D)$ 是多少？

b. 如果掷三个图钉，$P(U\cap D\cap U)$ 是多少?

c. 如果掷两个图钉，两个图钉都向上或都向下的概率是多少?

2. 用死亡数表确定概率.

a. 从 10 岁活到 70 岁的概率.

b. 在 20 岁时死亡的概率.

c. 在 40 岁到 50 岁之间死亡的概率.

3. 每一个有资格投票的人，要从两个候选人拉恩和维斯特中选出一个当学生的头头，并对是否开放学校食品铺进行投票. 填写下表中空白部分.

	选拉恩当头头	选维斯特当头头	行总数
赞成食品铺	0.4		
反对食品铺		0.2	
列总数		0.5	

随机地抽问一个投票人，他选举维斯特当头头或投票反对开放学校食品铺的概率是多少?

4. 假设在世界棒球锦标赛中虎队和巨人队是对手，而且他们水平相同. 按规定，先赢四盘的队获胜。因此两队最多可打七盘.

a. 如果虎队赢了前两盘，那么巨人队获胜的概率是多少?

还剩下五盘比赛. 用 T 或 G 表示一个虎队队员或一个巨人队队员打赢了. 写出剩下几盘比赛的样本空间(虽然仅有两盘就可能结束比赛). 用这个样本空间，你能回答下面几个问题.

b. 比赛将进行七盘的概率是多少?

c. 虎队赢第三盘的概率是多少?

d. 虎队在六盘之内获胜的概率是多少?

5. 对 50 名学生征求他们对禁止学生驾车到学校的规定的意见. 投票结果制成下表.

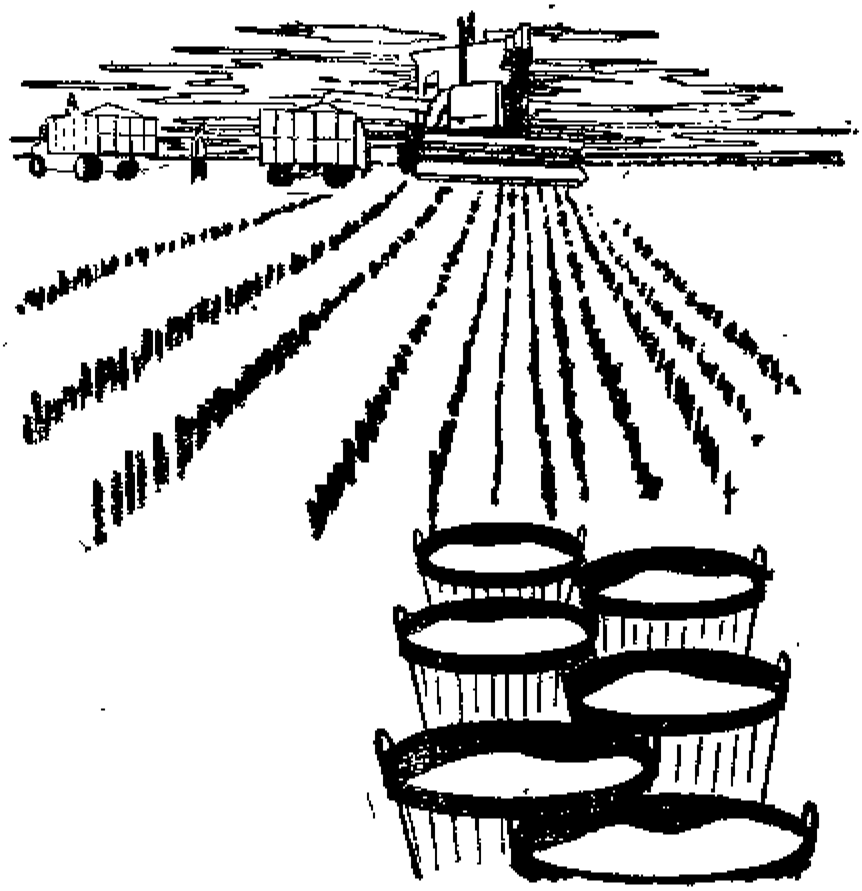
如果随机地抽问一个学生，下面事件的概率是多少:

	坐小汽车到校	乘公共汽车到校	步行到校	总　数
赞成规定	1	12	10	23
反对规定	8	10	4	22
不表意见	1	3	1	5
总　　数	10	25	15	50

a. 赞成规定，

b. 乘公共汽车并反对规定，

c. 乘小汽车或反对规定。



七、数学期望

1. 作出决定

商业和政府机构必须经常根据概率表作出决定。例如，保险公司根据像死亡数表那样的表格决定保险价格.

假设一个人一年付 10 英镑的保险费就可得到一张 1000 英镑的人寿保险单. 如果他这一年都活着，公司就得到 10 英镑. 如果他在这一年内死了，公司就要付出 1000 英镑，公司纯损失为 990 英镑.

如果一个人40岁，按照表17，他当年死亡的概率是765/78106 = 0.0098. 如果100个40岁的人参加人寿保险，他们将交付1000英镑的保险费. 预期在这100人当年将死亡的人数是100·(0.0098)或0.98. 因此，保险公司预期要付出0.98·(1000英镑)或980英镑. 收入与付出之差1000英镑—980英镑 = 20英镑，就是公司能够用来作为经费和利润的钱数.

一个概率和一个钱数的乘积给出一个事件的数学期望. 在一次彩票售货中你获得奖金的数学期望就是一个简单的例子. 如果奖品价值600便士，你获得奖品的机会是1/100，那么你获得奖金的数学期望是600便士 × 1/100 = 6便士. 如果你用比6便士多的钱买一张彩票想获得中彩的机会，那是不值得的.

例1. 假设一个农民估计他将生产10000蒲式耳(量谷类的单位，一蒲式耳，约等于36公升)小麦. 同时他也估计到气候条件、市场价格和劳动价格可能变化，以致他每一蒲式耳将会赚1英镑或损失5先令. 从他的庄稼中，他收益的数学期望是多少呢?

表 18[1)]

每蒲式耳可能赚的钱	每一事件的概率	概率×赚的钱(数学期望)
收益1英镑	0.60	12先令
损失5先令(−5)	0.40	−2先令

1) 这里按旧制，1英镑=20先令.

对每一蒲式耳，他总的数学期望是 $12+(-2)=10$（先令）. 对 10000 蒲式耳，他总的数学期望是 10000×10 先令 $=$ 5000 英镑.

大多数赌博的装置按照数学期望来设计. 计算概率，安排赌金，使赌场进入的钱多于付出的钱. 换句话说，赌博是费钱的. 当你赌博的时候，你要赢的概率是很小的.

例 2. 一个自动售票机要用六便士硬币启动. 赢的概率通常安排在某个值上，譬如 0.4. 如果你一次次把六便士投入自动机共花了 5 英镑，你赢得钱的数学期望是多少呢?

$$\text{数学期望} = 5\ \text{英镑} \times 0.4 = 2\ \text{英镑}.$$

你每花 5 英镑，可能得回的钱只有 2 英镑. 这是一项昂贵的娱乐.

概率首先被用作一种赌博的工具. 当赌徒们要“愚弄”爱赌的人的时候，他们依旧利用概率. 对专职赌徒而言，仅当概率使他们获利的时候，他们才认识概率和赌博. 所有的赌博装置或计划都安排得使玩的人损失的钱比赢的钱要多得多. 如果你知道你赢的概率，你就会认识到赌博是吃亏的事情.

练习 9 你 赢 不 了

1. 一种圆盘赌的玩法要用一个圆盘，圆盘上分为 38 个扇形，其中 18 个为红色，18 个为黑色，2 个为绿色. 玩赌人只能把赌金放在红色或黑色扇形内. 如果指针停在绿色扇形上，经营人将把全部赌金拿去，如果指针停在别的颜色扇形上，经营人将付出与该颜色扇形上赌金相同的钱.

a. 如果选择红色和黑色的玩赌人数相等，那么圆盘每转一次经营

人获胜的概率是多少?

b. 如果赌金都是1英镑，玩一次圆盘赌，每个玩赌人赢钱的数学期望是多少?

c. 如果仅有一个玩赌人,赌金为1英镑,经营人赢钱的数学期望是多少?

2. 用三粒骰子可以玩一种叫做中止运气的游戏。玩赌人把赌金放在1到6中的一个数上。掷三粒骰子，如果正好有一粒骰子的点数和这个数相同,则付给玩赌人与他的赌金相同的钱;如果正好有两粒骰子的点数都和这个数相同,则付给玩赌人的钱是他赌金的两倍;如果三粒骰子的点数都和这个数相同，则付给玩赌人的钱是他赌金的三倍。例如,一个玩赌人把1先令放在数5上,掷骰子的结果是3，5，5，那么他将得到2先令;如果放在数3上,他就得到1先令。

a. 三粒骰子朝上的方式有多少种?

b. 三粒中至少有两粒点数等于一个指定数的方式有多少种?

c. 三粒中至少有两粒点数等于一个指定数的概率是多少?

d. 三粒点数等于一个指定数的概率是多少?

3. 有一种游戏需要掷两粒骰子并计算总数,按总数大于、小于或等于7三种情况论输赢。玩赌人赌1先令，总数大于或小于7时他得到与赌金相同的钱,总数为7时他得到的钱数是赌金的3倍(即3比1)。

a. 总数为7的概率是多少? 掷36次，预期有多少次总数为7? 一个玩赌人每次都赌在总数为7上,按3比1,将要付给他多少钱(包括赌金)?

b. 总数小于7的概率是多少? 大于7时是多少? 掷36次，预期有多少次大于7? 多少次小于7? 一个玩赌人赌36次,每次都赌在小于7上,赌金为1先令,将要付给他多少钱(包括赌金)?

c. 掷36次，每次对大于7、小于7和等于7三种情况都赌上1先令，有多少钱将被用来下赌? 根据a和b,有多少钱将返回玩赌人手中? 经营人将留下多少钱或留下所有赌金的百分之几?

4. 一个赌博经营人从52张扑克牌中抽出一张，看其是多大的数，

然后放回这张牌并洗扑克. 一个玩赌人用1先令打赌,他也抽出一张牌,如果这张牌的数和经营人抽的相同,他将得到10先令外加他的1先令赌金.

a. 抽出一张牌使其点数和给定数相等的概率是多少?

b. 出现不需要的牌和需要的牌的概率比例是多少?

c. 如果经营人没有取得赢利,应该付给获胜者多少钱?

5. 一台自动售票机有三个相同的圆盘,在每个圆盘上有12个标记:1个棒子,2个李子,2个柠檬,1个钟,2个橘子,4个樱桃.

a. 出现3个棒子的方式有多少种?

b. 可能出现多少不同的排列?

c. 出现3个棒子的概率是多少?

d. 出现3个钟的方式有多少种?

e. 出现3个橘子的方式有多少种?

f. 出现3个李子的方式有多少种?

g. 在前两个圆盘上出现李子、在第三个圆盘上出现1个棒子的方式有多少种?

h. 在前两个圆盘上出现李子、在第三个圆盘上不出现1个棒子的方式有多少种?

自动机付出的情况如下:

3个棒子——80个硬币　　3个橘子——9个硬币

3个钟——12个硬币　　3个李子——9个硬币

前两个盘是李子、第三个盘是棒子——4个硬币

前两个盘是李子、第三个盘不是棒子——2个硬币

i. 在大量试验中,人们可以期望,每做1728次试验,各种赢法的次数就和上面(见c—h)计算的一样. 把1728个硬币投进自动机(1个硬币开动一次自动机),那么自动机要付出多少个硬币?

j. 自动机付出的硬币数是投进硬币数的百分之几?

上面的讨论完全是在自动机随机运转的假设下进行的. 许多自动机在安装时使得所希望的标记容易滑过去. 这样,经营者可以把百分比降低到他所选择的数上. 通常,百分比是20%左右. 因此,你赢不了!!!

八、统　计

1. 概率和预测

概率最重要的应用之一是预测将来要发生的事件．天气预报者用像 0.8 这样的概率预测要下雨． 一个轮胎工厂的质量控制单位可以预测，在 1000 个轮胎中仅有 3 个将是有缺陷的． 一个医生可以预测感染的机会是 0.5． 一个数学家将预

测，掷 5 个硬币全是正面的概率大约是 0.3.

为了作预测，我们要审查事件的模型. 有些事件，象树叶从一棵树上落下来，似乎没有模型. 另一些事件，例如在英文单词中字母的出现，就有模型，见图 11.

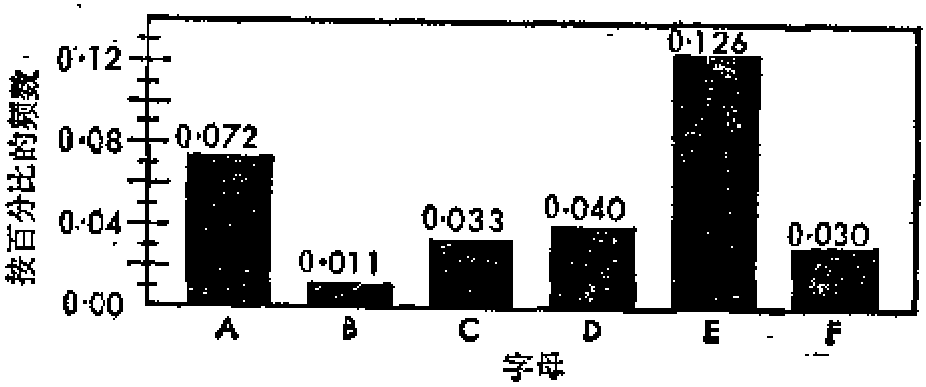


图 11

有些事件，例如投掷一粒骰子，有像图 12 所表示的等频数.

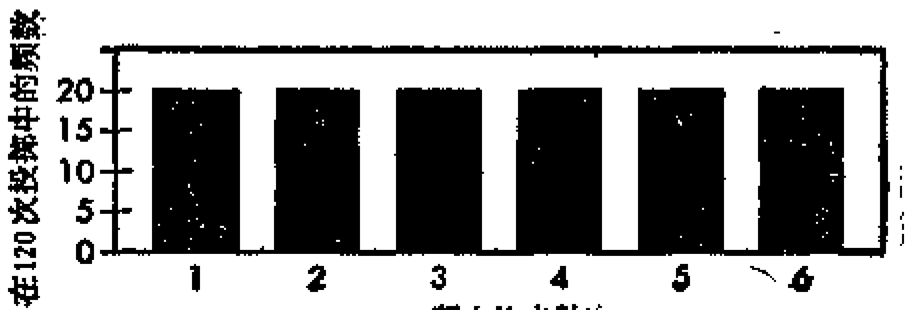


图 12

有些事件，例如投掷硬币，给出对称图形（图 13）. 图 13 是把 6 个硬币掷 100 次的记录.

从图中显示出，在掷六个硬币时，最常发生的事件是出现 3 个正面和 3 个反面. 掷出六个正面在 100 次投掷中仅发生

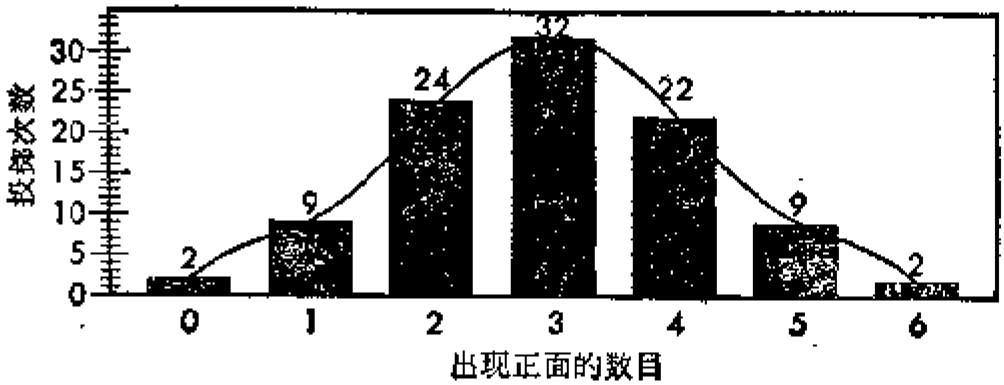
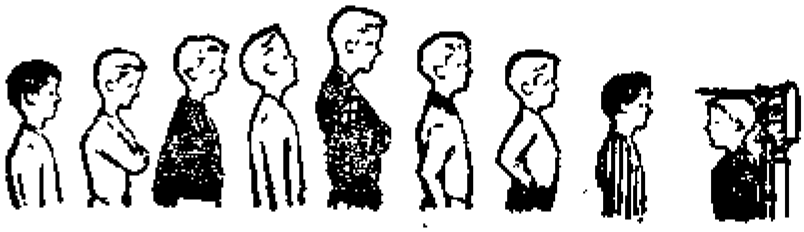


图 13

两次。



2. 正 态 曲 线

另一个对称图形是正态曲线．它是象表 19 中 64 个考试分数之类数据的图形。

因为有 64 个分数，这个分布的样本空间有 64 个点．在这 64 个样本点（或分数）中，仅有 1 个是 9 分，6 个是 8 分．因此，得 8 分或 9 分的概率是 $\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$ 或 0.11。

图 14 画出了表 19 中数据的直方图．把每一个直方条顶部中点联结起来，就得一个图形，它称为频数多边形．如果这

表19　考试分数的分布

考　试　分　数	频数(得分的个数)
3	1
4	6
5	15
6	20
7	15
8	6
9	1
总数	64
平均分数(均值)	6
标准差	1.2

样的多边形是平滑的，像图中平滑曲线所表示的那样，它就与一条正态曲线相似．正态曲线是一种数据图形，在平均值附近，频数较大，离平均值愈远，频数愈低．

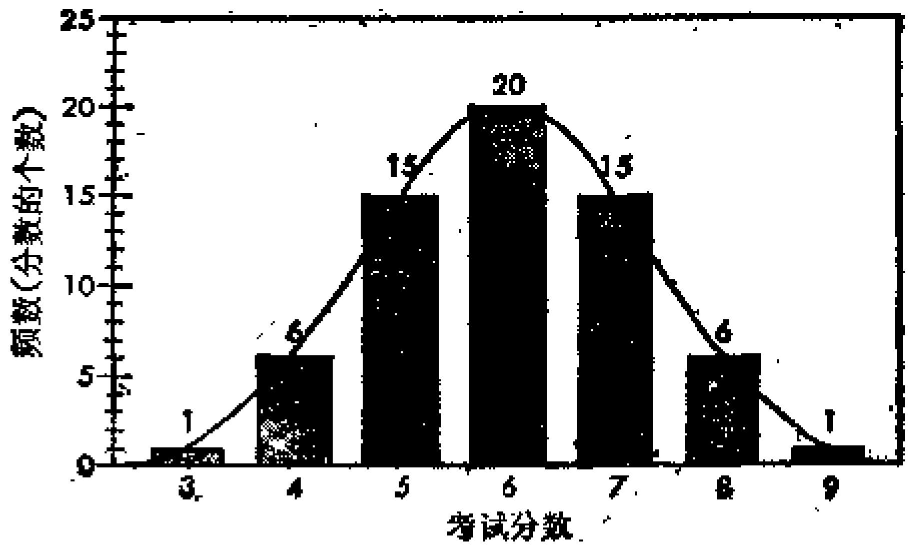


图　14

已经发现许多数据分布都接近于正态分布的模型．例如，如果我们搜集到关于几千个七岁儿童体重的数据，关于几千个苹果直径的数据，或者关于参加统一数学考试的几千个学生的分数数据，我们可能得到的分布都是近似的正态分布．

关于正态分布和正态曲线，有许多重要概念．但其中有许多太复杂了，这里不作讨论．然而，我们能够学到关于正态分布和概率的一些重要概念．为此，需要知道均值和标准差的意义是什么．均值是所有数据的平均值，标准差是数据偏离平均值的一个度量值(见《自修数学》小丛书，《统计世界》，科学出版社，1981 年，p.55)．在上面的数据中我们看到，分数与均值相差愈大，得到这个分数的概率就愈小．例如，得 9 分的概率仅为 $\frac{1}{64}$(换句话说，在考试中得 9 分的机会大约是2%)，而得 8 分或 9 分的概率大约是 $\frac{7}{64}$(大约有 11% 的机会)．正态分布的概率可以借助数据与均值的距离来描述．与均值的距离以标准差为单位计算．例如在上面例子中，8 分大约离均值 2 个标准差，因为均值加 2 个标准差 $= 6 + 2(1.2) = 6 + 2.4 = 8.4$，或大约为 8．

表 20 的第一行说明，对正态或近似正态分布，大于或等于均值以上 2 个标准差的数据的概率是 0.02．第二行说明，出现大于或等于均值以上 $1\frac{1}{2}$ 个标准差的数据的概率是

表 20

正 态 分 布 表	
离均值的标准差数	大于或等于该数的数据的概率
2(均值之上 2 个标准差)	2%
$1\frac{1}{2}$(均值之上 $1\frac{1}{2}$ 个标准差)	7%
1(均值之上 1 个标准差)	16%
$\frac{1}{2}$(均值之上 $\frac{1}{2}$ 个标准差)	31%
0(离均值 0 个标准差)	50%
$-\frac{1}{2}$(均值之下 $\frac{1}{2}$ 个标准差)	69%
-1(均值之下 1 个标准差)	84%
$-1\frac{1}{2}$(均值之下 $1\frac{1}{2}$ 个标准差)	93%
-2(均值之下 2 个标准差)	98%

0.07，等等．

如果我们知道某一数据分布近似于正态，并知道数据的均值和标准差，那么我们能利用表 20 确定出现某些数据的概率．举一个关于体重的例子．假设某一年令男孩的体重构成正态分布，那么大于或等于平均体重以上 2 个标准差的体重在 100 个体重中仅可能出现两次．换句话说，如果你的体重比你的同龄人平均体重高出两个标准差，那么在你的同龄人

中，大概仅有 2% 的人体重和你相同或比你更重。

如果在一次全国统一考试中，平均分数是 42，标准差是 6，考分形成正态分布，那么在这次考试中 48 分的超前百分数是 84. 这就是说，大概有 84% 的考生名次排在得 48 分的考生之后，大约 16% 的考生排在前面。

表 21

正态分布表	
离均值的标准差数	正态分布中的超前百分数
+2.0（均值之上 2 个标准差）	98
+1.5（均值之上 1.5 个标准差）	93
+1.0（均值之上 1 个标准差）	84
+0.5（均值之上 0.5 个标准差）	69
0（离均值 0 个标准差）	50
−0.5（均值之下 0.5 个标准差）	31
−1（均值之下 1 个标准差）	16
−1.5（均值之下 1.5 个标准差）	7
−2（均值之下 2 个标准差）	2

请注意表 20 和表 21 的相似之处. 表 20 说明，得 48 分或更高分数的机会是 $\frac{16}{100}$ 或 0.16，而表 21 则说明，得分低于 48 的机会是 $\frac{84}{100}$ 或 0.84（即 1.00 − 0.16）。

掷一枚硬币 10000 次，出现正面的期望数是 5000. 在这种情况下，已算得标准差是 50. 按照上面表格，我们可以预

测，出现正面的次数小于 5000 + 50 或 5050 的概率是 84%（见表 21 第三行）。

3. 抽 样 试 验

(1) 在画线的平面上投放牙签之类的小棍. 平面上要有平行的直线，就象横格纸上的直线那样. 直线间的距离要等于小棍的长度. 在画线平面上，按随机或偶然的方式投掷小棍. 记下小棍与横线不相交或不接触的次数. 这个次数与总的投掷次数之比，将近似于 π 的一半或近似于 1.57.

(2) 在纸上画一个方格. 方格每一边有六个方块，因此方格总共包含 36 个方块. 在这个方格上随机地投放谷核或小石子. 这些石子就像落在一个表面上的雨点. 记录包含 0，1，2，3，4，…个"雨点"的方块的个数. 大量雨点的分布将接近在阿松分布. 在许多统计研究中都要用到布阿松分布.

(3) 把一个小轮子或小盘子从一个斜面上滚下来. 滚许多次，每次都记下轮子停下来的位置，然后量出滚动的距离. 作出这些结果的频数分布. 通常这些结果聚集在平均值附近. 这些结果可以作为正态分布的一个例子.

(4) 把一个容器，例如一个塑料桶或废纸篓，分成相等的两部分，用粉笔作出标记. 在几呎远的地方，把硬币或小石子投到盆子里. 一定要使分线与投掷方向相一致，硬币应对准分线. 一个小石子将落在一个给定面积里的概率应该近似等

于该面积与总面积之比．如果每一个区域是总面积的一半，那么小石子落在两个区域之中任何一个的理论概率是 $\frac{1}{2}$ 或 0.5．当我们通过投掷许多小石子检验这个结果的时候，就是用实例来说明蒙特卡罗方法．把这些试验结果记在象表 22 那样的一个表格上，当投掷次数增加的时候，这张表将说明比值是如何逼近 0.5 的．

表 22

	投掷次数							
	5	10	15	20	30	40	50	100
在 A 区域内的次数								
$\dfrac{\text{在 } A \text{ 区域内的次数}}{\text{总投掷次数}}$								
十进制数值								

(5) 在一张纸上画一个点的阵列，使相邻点之间的距离等于一枚硬币的直径．在这阵列上随机地投掷这枚硬币．记下投掷总数和硬币盖住一个点的次数，然后填在象表 23 那样的表里．

(6) 概率可以用来确定一个不规则区域的面积，例如图 15 中的黑色面积．作一个大一点的矩形，它具有单位面积，比如一平方呎，并使不规则的区域包含在矩形内．在矩形上随

表 23

	投掷次数 (n)						
	5	10	15	20	30	40	50
盖住一个点的次数(t)							
比 $\frac{t}{n}$							
$4\left(\frac{t}{n}\right)$							

机地投掷一粒小石子．投掷多次，计算在黑面积里石子数与在矩形内石子数的比值．这个比值就是黑色面积的估计值．

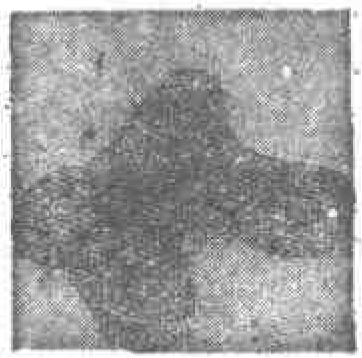


图 15

（7）一个概率游戏．在这个游戏里，你要用指头弹一个图钉．如果你能正确地猜出钉尖将朝上还是朝下，你可得 20 分．因为你不知道朝上或朝下的概率，你有权作试验．但是，每作一次试验，你要丢失一分．在你作出决定之前，要作多少次试验呢？当然，答案依赖于在你的试验中出现的情况．如果在开始六次试验中钉尖都朝上，你可以决定作出朝上的猜测．如果有四次朝上、两次朝下，你大概会要求作更多的试验．

九、回顾和展望

概率论是使人产生浓厚兴趣并且正在迅速发展的一个数学领域．在这个领域内，许多事情和试验给出了意想不到的结果．这个数学领域，开始于简单的概念，例如掷一枚硬币仅有 2 种可能结果，然后扩大到有无限个可能事件的情况．

今天，概率论正在许多领域内作出贡献．几乎在每一个领域的研究中，都要用到概率论：

在生物学中，用它预测遗传特征，

在工业中，用它检验产品质量，

在政府部门，用它预测人口的增长，

在教育部门，用它度量学校办学成功的可能性，

在航天飞行中，用它避免飞行误差，

在物理学中，用它研究原子中的粒子，

在商业中，用它估计经济变化．

在这本书里，我们仅能讨论一些概率的基本原理．这些概念可激发你更进一步研究和做更多试验的欲望．这些概念可以帮助你更好地了解我们每天都生活在其中的世界——一个风险和不肯定的世界．

有关概率论的新概念和新应用正不断被发现．现代电子计算机的应用也扩大了概率论的应用范围．在当今空间时代，概率论正发挥着日益增长的重要作用．

练 习 答 案

练习 1

2. 小汽车(按照大多数的判断)。

3. a. $\frac{1}{8}$; b. $\frac{3}{8}$; c. $\frac{3}{8}$; d. $\frac{1}{8}$; 和 $=1$

4. a. $\frac{1}{6}$; b. $\frac{1}{6}$; c. $\frac{1}{6}$

练习 2

1. a. $\frac{1}{6}$; b. $\frac{1}{3}$; c. $\frac{2}{3}$; d. $\frac{1}{12}$

2. a. $\frac{1}{4}$; b. $\frac{1}{2}$; c. $\frac{1}{4}$; 和 $=1$

3. a. $\frac{1}{8}$; b. $\frac{1}{4}$; c. $\frac{1}{36}$; d. $\frac{1}{6}$

5. a. $\frac{1}{27}$; b. $\frac{1}{27}$; c. $\frac{2}{9}$; d. $\frac{1}{9}$

练习 3

1. a. $\frac{1}{3}$; b. $\frac{1}{5}$; c. $\frac{1}{7}$; d. $\frac{2}{3}$

2. a. $\frac{1}{9}$; b. $\frac{1}{9}$; c. $\frac{1}{2}$; d. $\frac{1}{27}$

3. $\frac{1}{5}$

练习 4

1. xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx（仅构成三字母的码字）

2. 7920　3. 24　4. 27

5. a. 720; b. 144; c. 20; d. 576

6. $\frac{1}{18}$　7. 10

练习 5

1. 364　2. 252　3. 2520　4. 2024

练习 6

1. 0.7　2. a. $\frac{7}{24}$; b. $\frac{13}{24}$; c. $\frac{5}{6}$

3. a. $\frac{7}{12}$; b. $\frac{5}{12}$; c. $\frac{1}{4}$; d. $\frac{3}{4}$

练习 7

1. a. 10;

   b. KSC, KSJ, KSA, KCJ, KCA, KJA, SCJ, SCA, SJA, CJA;

   c. $\frac{3}{5}$; d. $\frac{3}{10}$; e. $\frac{9}{10}$

2. a. $\frac{3}{8}$; b. $\frac{11}{16}$; c. $\frac{11}{16}$; d. $\frac{3}{8}$

3. a.

$A1$	$A2$	$A3$	$A4$	$A5$
$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	$B5$
$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$C5$
$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$
$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$

b. $\frac{3}{25}$; c. $\frac{2}{25}$; d. $\frac{2}{5}$; e. $\frac{1}{5}$

4. a. $\frac{4}{15}$; b. $\frac{11}{15}$; c. 1

练习 8

1. $P(U,U)=0.49$　$P(U,D)=0.21$

$P(D,U)=0.21$　$P(D,D)=0.09$

	U	D
U	0.49	0.21
D	0.21	0.09

a. 0.027; b. 0.147,如果不管次序则是0.441; c. 0.58

2. a. 0.38569; b. 0.0078; c. 0.106

3. 0.6

	拉　恩	维斯特	行总数
赞成食品铺	0.4	0.3	0.7
反对食品铺	0.1	0.2	0.3
列总数	0.5	0.5	1.0

4. a. $\frac{1}{3}$; b. $\frac{8}{15}$; c. 对每一个队赢每一盘的概率都是$\frac{1}{2}$; d. $\frac{1}{5}$

5. a. $\frac{23}{50}$; b. $\frac{1}{5}$; c. $\frac{12}{25}$

练习 9

1. a. $\frac{1}{19}$; b. $\frac{18}{38}$ 镑; c. $\frac{20}{38}$ 镑

2. a. 216; b. 18; c. $\frac{1}{12}$; d. $\frac{1}{216}$

3. a. $\frac{1}{6}$, 6, 24 先令; b. $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{12}$, 15, 15, 30 先令; c. 108先令,84 先令, 24 先令或 22%

4. a. $\frac{1}{13}$; b. $\frac{12}{1}$; c. 13 先令

5. a. 1; b. 1728; c. $\frac{1}{1728}$; d. 1; e. 8; f. 8; g. 16; h. 176; i. 652; j. 大约 38%

[General Information]
书名=概率与机率
作者=（英）D．A．约翰逊著　　程乾生译
页数=88
SS号=10823627
出版日期=1984年03月第1版

九、回顾和展望

练习答案