《自修数学》小丛书

数学逻辑与推理

〔美〕D. A. 约翰逊 D. F. 李勒 著

科学出版社

《自修数学》小丛书

数学逻辑与推理

〔英〕D. A. 约翰逊
D. F. 泰勒 著

向延育 译

张公绪 校

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书是«自修数学»小丛书中的一本．它从实用角度出发介绍了逻辑学中常用的归纳法及演绎法，并结合生活中的实例讲述了数学的推理论证、逻辑结构和逻辑数学等基本知识，书中穿插了不少富有启发性的练习，书末附有答案．本书深入浅出、生动有趣，可供中学生课外阅读，亦可供具有中等文化程度的读者参考．

Donovan A. Johnson and D. F. Taylor

LOGIC AND REASONING IN MATHEMATICS

John Murray, London, 1974

数学逻辑与推理

〔英〕D. A. 约翰逊 D. F. 泰勒 著

向延育 译

张公绪 校

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年 3月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1984年 3月第一次印刷　印张：3 1/4

印数：0001—34,700　字数：60,000

统一书号：13031·2503

本社书号：3436·13—1

定价： 0.38 元

目　　录

一、思维和推理的作用

1. 当我们思索时发生了什么?

谈到思维，我们听说过有关质朴的哲学家的一些事，他有时："静坐沉思"，有时只是"闲待着"．他把我们头脑中所有时间随时闪过的全部东西几乎都收集在了一起．在我们"待着"的时候，脑子里并不是空的：而是充满了各种画面和感觉．我们凝视着一幅美丽的风景画，听着音乐，或者朗读诗歌时，我们的头脑好象在这过程中不费劲地就被充满了．但是，如果我们想要找出摩托车发动机点不着火的原因，或者从一张军用地图上标出达特穆尔*这个地方，或者解一道几何题，我们是以另一种不同的方式来思考的．这就是说，我们正在试着进行推理．

工程师、科学家、医生、经济学家——所有这些人的目标都是要想把握住我们周围的世界．他们希望怎样来做到这一点呢？首先，必须了解有关对象的一些事实．如果你从一架飞机中摔出来，就会朝地面掉下来，而且下落的速度平稳地加快．什么思维也不能推翻这个事实．人们不能怀疑引力定律．但是，如果你事先了解有关气流的一些性质并且运用你

---

* 达特穆尔（Dartmoor），英国东部德文郡的一个城市．

自己的推理能力，就有可能想到利用降落伞。这样，你就可能利用自然界的一些规律把你从另外的自然规律的危险威胁下解救出来。第一个使用降落伞的人正是相信了他自己或别人的推理。

不单那些研究物体的科学（如物理学和工程学等），而且那些涉及到人的科学（如心理学和经济学等），都有一个共同点，就是它们的发展，倾向于运用越来越多的数学语言来探讨和交流它们所涉及的概念。原因就在于数学与推理或逻辑是密切相关的。在有些（不是全部）数学家看来，数学就是逻辑，逻辑就是数学。如同伟大的音乐家给我们创造了音乐一样，伟大的数学家肯定也给我们创造了思考和观察世界的方法。我们普通人虽然不是象贝多芬或者巴赫那样的音乐家，也不是牛顿或者高斯*那样的数学家，但正如我们可以为自己作几支小曲子一样，我们每个人自己也都可以创造一点数学。从十七世纪以来，开创性的数学家们创造了一种语言，使得我们如果不怕麻烦掌握了它的运用规律，就可以不费力气地进行一连串的推理，而这对于古希腊最好的学者来讲，也是有困难的。

如果你学过一点代数的话，大概碰到过那些颇为简单的“难题”（在学校课本里叫“问题”），例如，怎样把不同比例的茶

---

* 贝多芬（1770—1827）德国伟大的音乐家。
巴赫（1685—1750）德国音乐家。
牛顿（1642—1727）英国数学家、物理学家。
高斯（1777—1855）德国数学家、天文学家。

混合起来；火车以未知的速度从A点跑到B点；父亲和孩子忘记了他们多大年纪等等。大多数人会发现，靠直接推理是得不到这些问题的答案的。然而，如果我们学过代数的基本法则，一旦我们把这些问题从普通的字句转换为代数语言，就好象我们摇动机器的摇把，答案立刻从机器里涌现出来了。

要象希腊人曾经做的那样来研究几何，需要头等的头脑。法国伟大的数学家和哲学家笛卡尔（1596—1650）告诉我们怎样把几何问题转化为代数的语言。只要学会了这种语言，对我们来讲就没有什么太难的几何问题了。有名的英国数学家乔治·布尔（1815—1864）为我们创造了一种逻辑代数，如果我们努力学会它的法则和怎样把普通语言翻译成它的符号，就会发现可以用十分机械的方法来解出复杂的逻辑问题，而用通常直接思维的方法，对我们的头脑来讲是不可能完成的。至于电子计算机，一旦教会了它们这种语言，它们处理这类问题比我们还快得多。

十七到十九世纪有创造性的数学家们使得思维大众化了。在那以前，巧妙的逻辑思维是知识贵族的禁苑。而现在，对于任何一个具有一般知识水平的人，这种思维已经变得容易了。做到这一点所要求的，只是学习和理解一些这种语言的规则。这本书的目的就是仔细地研究我们用来推理的方法，说明怎样把普通语言翻译成数学的语言，从而使得复杂的逻辑问题变得容易起来。

2. 语言和逻辑

推理是同使用文字和符号的语言密切关联着的. 人们用语言来表达自己的思想, 了解别人的思想. 怎样使语言来做到这一点, 以及为什么又常常做不到这一点呢? 研究这类问题的学科叫语义学.

为了交流感情,一个词必须词意丰富, 从而就不太准确. 但为了表达思想,用词就要准确,从而词意就要受到约束. 我们用来表达思想的语言, 必须使我们能够精确地说出我们要表达的意思,数学的语言就是为此而深思熟虑地建立起来的. 它提供了一些规则,用来把一个命题变换成另一个命题,使得虽然第二个命题使用的是不同的词汇和符号, 但它所说的和第一个命题完全是同一件事. 例如, 简单的算术规则告诉我们,命题 $4\times 8=32$, $4\times(5+3)=32$ 和 $4\times 5+4\times 3=32$ 说的完全是同一件事. 它们要不就同时成立,要不就同时不成立.

又如,命题 $3\times 2=6$、命题 $2\times 3=6$、$6\div 2=3$ 以及 $6\div 3=2$ 是利用数字 2、3、6 和运算"乘"、"除"之间的关系所作出的命题的不同表达方式.

数学家提供了判断一个命题真伪的精确方法. 例如, 假设我们怀疑命题: $206\div 6=33$, 我们就可以把 33×6 乘出来, 结果发现这个乘积是 198, 从而证明这命题是错误的.

数学家是些"懒人",他们讨厌废话. 他们不喜欢写出象

$1\times1=1$，$3\times3=9$，$5\times5=25$，$7\times7=49$……$99\times99=9801$ 这样一长串的表．他们很喜欢省劲，而直接说"在 0 和 100 间的一个奇数的平方是一个奇数"．更进一步，他们干脆讲"任何奇数的平方仍是一个奇数"，或者"任何偶数的平方必定不是奇数"．所以他们(还有逻辑学家)特别喜欢象"所有"、"每一个"、"有一个"、"没有一个"、"必定不"等这样一些逻辑词汇．

我们在日常生活中使用这些词儿的时候，往往是故意夸张的．当我们发牢骚说："我安排要去野餐的那天总是下雨"，我们并不是真的指这个意思，而是有些夸张． 事实上若有人提醒说，某天某天我们有过一次很愉快的野餐，整天阳光明媚，我们就会感到有点尴尬．所以，当我们真要想表达自己的意思时，我们用象"所有"、"每一个"、"总是"这些词，要十分谨慎．因为只要有一个例外，就会使我们看起来蠢头蠢脑了．这里的教训是，如果我们相信："所有骑墙派全都是见风驶舵的变色龙"，那么，作为诚实正直的数学家和逻辑学家，就必须花点时间来找找看，是否有一个不是变色龙的骑墙派．

有些词可以有好几个意思*．"2 乘 3 的积是 6"． 乘积的"积"和"积累"的"积"这两个"积"的意思就不大一样．在数学上，这些词都有着非常明确和单纯的意义． 而在日常生活中，它们具有较为丰富和广泛的含意，也较为含混．对于药剂师，"素"意味着像四环素、土霉素、青霉素等这些不同的抗菌

---

* 这一段文字是根据汉语中的情况意译的．——译注

素．对于穿衣服，“素”是指颜色不鲜艳、花色单一的衣服．对于数学家，“素”数当然不是一个什么用青霉素做的数，也不是什么不带鲜艳色彩的数，它只是确切地表示一个象13那样的数，即它除了1和它本身之外，再没有别的整数因子．因此，当数学家告诉我们他所说的“素数”是什么意思时，要对我们给出一系列的运算指令．他说：为了确定13是不是素数，写下从2到12在内的所有的数．依次用其中每一个数来除13．如果这些被除数中有一个没有余数，那么13就不是素数．反之，如果没有一个的余数是零，则13是素数．要注意象“有一个”，“没有一个”这样的词在这个数学命题中是怎样出现的．这些是数学家和逻辑学家常用的词，为了节省时间，他们为这些词发明了专门的符号，我们以后会碰到．

由于在搞数学时我们很容易象在日常生活中那样来用词．所以，必须注意防止使用那些没有确切地说出我们的意思的词．数学家欧几里得试图使几何数学化、逻辑化，但他并没有完全获得成功，原因之一就是他用了象“在……之间”这样表面上看来没有害处的词，而又没有确切说明其含意和究竟怎样使用．象数学家路易斯·长罗尔在他的《阿丽丝》一书中所明确的那样，用词必须恰好具有我们选用它们来表达的那个意思，既不能多，也不能少．我们要用词来交流我们的思想，就有责任使它们清楚准确地表达我们的意思．

3. 真实、事实和错觉

如果一个关于日常世界的事物的命题是真实的，我们通

常把这叫做一个事实*． 当然并不是所有关于日常事物的命题都是如此．对命题进行比较时，有一个好主意，就是仔细研究那些能证明命题不成立的方法．

假如我和朋友两个人坐在外面阳光下．我说："我觉得热"．这个命题只有我自己可证明它不真． 我的朋友了解我平常不说谎，就可能不加怀疑，承认它是一个事实．如果我对他说："你看起来很热"．他就可能争辩这一点．然而我们两个人都是通情达理的人，所以都同意找另外一些人也坐到一起，问他们："我看起来热吗"？这样来证明我讲的话是否不真．如果所有这些人（或者至少其中的大多数)回答："是"，他就可能同意我的这个命题是正确的． 但是，在我们烧水沏茶时，我对他说："如果你把温度计放到水壶里，水银柱就会一直上升到 100 度．然后一直停留在这个刻度上到水煮干为止．"这样，我就不仅提出了一个命题，而且也指出了推翻这个命题的方法．

如果我说："黑斯廷斯战役** 发生在 1065 年"，而我的朋友回答说："这不是事实"，我们可以查阅一本大家公认的史学家写的书来解决这个争执．

---

* 在逻辑数学中，习惯上一个正确的命题往往称之为"真"，或者说"真实"、"正确"．反之，我们说错误命题是"不真"、或者"假"．——译注

** 黑斯廷斯战役——英国历史上一次有名的王位争夺战役．十一世纪，诺曼底公爵威廉在他的堂兄英国国王爱德华死后，声称有权继位，1066 年，在英国北部黑斯廷斯附近登陆，并且在一个名叫森莱克的地方击溃了爱德华之后继位的哈罗德，成为英国国王，后被人称征服者威廉．黑斯廷斯濒临英吉利海峡．

设想我们拾到了一个装有一英镑钞票的钱包。 如果我说："留下它是违法的。"我们可以去请教律师或者自己查阅议院法令、法律判例来发现这个命题是否成立。 但是如果我说："留下拾到的东西是错误的"。这实际上告诉他我的意见和态度。他只能用一段时间来观察我的行为，考察我的言行是否一致，从而判断这个命题是否成立。

这样看来，有些命题可以直接用我们自己的感官，通常是用我们的视觉来证明其不成立。关于水和温度计的命题就是这样。这种命题本身就包括了如何证明其不成立的教训。科学方面的命题常属于这种类型。在检验这类命题时，就必须时刻记住我们的感官也会有错觉。 看一下图1，左边的四边形看起来不像是一个正方形，右边图上的对角线也不互相平行。但是当我们用直尺、三角板或者两脚规来量一下时就会发现是我们的视觉欺骗了自己，我们又用自己的眼睛证实了我们最初的印象是错误的。

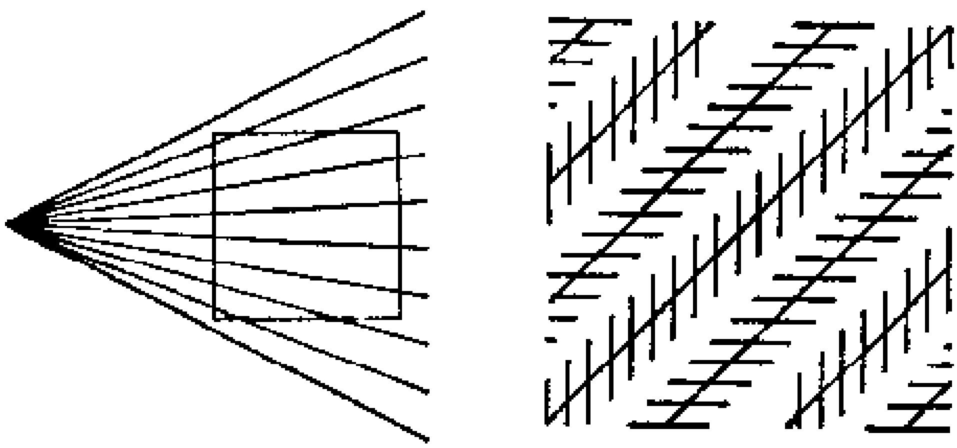


图 1

其它种类的命题，如上述黑斯廷斯战役的日期，可以通过

求教于公认的权威来验证．当我们去请教时，我们是在依赖于别人的感官、技能和诚实．一个历史学家有机会看到各种文件和著作，而我们相信他会如实地报告他所看到的．显然，我们中没有任何人能同一位曾平静地坐在森莱克* 的阵地后面观看这场战斗的人来聊一会儿天．

许多我们认为真实的科学命题是不能用直接经验来证实的．我们大概相信地球大体上是个球形，半径为 6400 公里，显然，我们谁也不能用巨大的皮尺或者卡尺来测量它． 我们相信物质是由原子构成的．但是甚至从理论上我们也不能看到、摸到、听到、嗅到或者尝到单个的原子．

科学家是通过把自己的感官所提供的证据——他们的仪器和仪表的读数——和一系列的推理结合起来做出一些命题的．牛顿掌握了大量关于月球和行星的位置、潮汐涨落深度的测量数据．他的罕见的创造性的想象力使他归纳出了我们称为"万有引力定律"的命题．他的巨大的推理能力使他能够由此进一步指出：如果万有引力定律是正确的，那么，在某某时刻就会发生月蚀；或者在某某位置上，水星离太阳最近．然后，再利用他的感官，他便可以知道实际上这些预言是真还是不真． 万有引力定律的威力就在于它很容易检验事实的真伪．通过万有引力定律可以论证推理得出成千上万个预言．其中每一个都可以用来检验其真伪．但是差不多 300 年来，还没有一个预言经检验出了错．甚至于曾预言：必然存在着一

* 森莱克　英国地名，见前注．——译注

个当时还没有被人看到过的行星，后来也证明是正确的。直到今天，天文学测量精确到了天文学家能测出牛顿力学预计的水星的位置每一百年有43秒角度(一秒是一度的六十乘六十分之一)的误差，直到这时我们才能说牛顿的万有引力定律给出了一个有错误的预言。只要一个科学命题一直能给出没有错误的预见，我们就说它是“真实”的。从这个意义上讲，在我们日常生活中相对简单的事件上，牛顿定律仍然给出正确的预言，因此，它仍然是正确。

象“说谎是不对的”或者“巴赫比当代的第一流流行音乐家都强。”这样的命题是属于另一种不同的类型。它们并没有象表面上看起来那样告诉我们周围具体世界的某件事物，而是告诉我们讲话人的态度、信念或者意见。大多数伦理和艺术方面的命题论断都属于这一类。成功地对它们进行逻辑分析，也就是用逻辑来判断它们的是非与是极为困难的，但是倒也并不排除和忽视这一方面。亚里士多德、爱因斯坦、施韦策、甘地、马克思和圣·保罗*的抽象论断对许许多多人们都是意味深长的，那怕这些论述可能是不合逻辑的。即使你成了一个优秀的逻辑学家时，也还是记住这点为好。

如果你已经思考过上面的例子，你就会看出还有另一种命题可以证明其不成立。“犯法”这个词仅仅是对于议院法令

---

* 亚里士多德(公元前384 322)古希腊哲学家。爱因斯坦(1879—1955)伟大的德国理论物理学家。施韦策(1875—1965)法国哲学家，曾获1952年诺贝尔和平奖金。甘地(1869—1948)印度政治家。圣·保罗(? —AD67)跟随耶稣的十二使徒之一，基督教神学的创立人。

或者法律判例的字句而言的．所以，一个论断的正确与否，在很大程度上取决于语言的使用和含意． 如果我说：“昨天我画了一个正方形的三角形”你马上就知道我是在胡说八道，因为我没有按公认的方式来使用词汇． “三角形”这个词和“三边形”这个词是可以通用的． 在这句话中“正方形”这个词和“一个角是直角而且四边相等的四边形” 是可以通用的． 所以，当我说，我的三角形是一个正方形，就是在瞎说一气．因为我的论断自相矛盾．它和本身不一致．

数学和逻辑的命题当它们表现出这种不一致时就是错误的． $2+3=5$ 从数学上来讲是正确的．因为它和我们赋予“2”、“3”、“5”、“+”和“=”的涵义是一致的．如果我们对这些词赋予不同的涵义，这个命题就很可能是错误的．它并没有告诉我们周围世界的任何事物，但是我们能够赋予它以这样的内容．例如：“2”表示两个苹果，“3”表示三个苹果，而“+”表示把它们一块儿放到一个袋子中去等等．它就给出了一个真实的预计．反之，如果“2”和“3”分别表示水银滴，而“+”表示把它们滴到一个试管中去，那它就并没有给出一个真实的预计．

逻辑学和数学的论断在对真实世界的预卜中起着重要的作用．然而它们自身并不是关于客观世界的论述．预见的真实性首先依赖于原始事实和观察的真实性（这里的真实性是常识意义上的），同时也依赖于推理和数学的真实性或者“有效性”．这里，真实性是指使用语言的一致性，推理的正确性．本书对于一致性和推理的正确性这个概念，还要更深入地考

察。

练习1 事实和错觉

1.什么是检验下列命题的标准?

a. 女孩子比男孩子更聪明,

b. 喷气飞机比螺桨飞机更安全,

c. 饮水中不应含有氟化物,

d. 十五岁的男孩子不应开汽车.

2.我们用来计数的数(1、2、3等)称为自然数. 下面这些命题中,对于用x、y代表的任何一对自然数,当x和y是不同的数时,哪些命题总是正确的?

a. $x+y=y+x$,　e. $x+0=y+0$,

b. $x-y=y-x$,　f. $x\cdot 0=y\cdot 0$,

c. $x\cdot y=y\cdot x$,　g. $x+1=y+1$,

d. $x/y=y/x$,　h. $x\cdot 1=y\cdot 1$.

3.根据(i)几乎全部是经验和测量,(ii)经验测量并结合推理,(iii)权威(iv)几乎全部是推理,来指出下面的命题是否正确?

a. 牛奶比水容易烧开,

b. 如果一个鸡蛋煮不到三分钟,它不会煮老,

c. 地球的直径大约为8000英里,

d. 不存在一个分数p/q使$(p/q)\cdot(p/q)=2$,

e. 诺曼底的威廉于1066年在黑斯廷斯附近登陆,

f. 1964年3月24日英国标准时间6:45太阳出来了,

g. 思维是通过流有电流的神经来完成的,

h. 不自私是对的,

i. 偷窃是犯法的.

4.在图2的各种情况中,先用眼睛,再做测量来确定是否$AB=CD$.

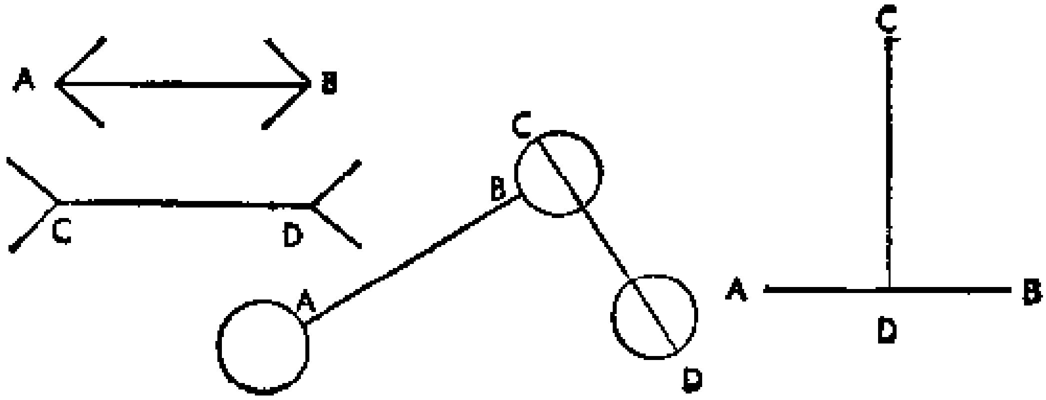


图 2

二、归 纳 法

1. 盖 然 推 断

检验命题真假的另一种办法是通过测量。我们测量一个三角形卡片的三个角以证实三个角的和是180度。我们还可以用把沙子从一个容器倒到另一个中的方法比较有相同底部直径和高度的圆柱和圆锥的容积，准会发现锥的容积是圆柱的三分之一。这种用测量来收集数据的方法是科学家在实验室中经常使用的方法。在收集到数据之后，科学家就要寻找一个模型，使他可以就某种过程或性质做出论断。然而，他有可能永远不能肯定他的论断是正确的。因此建立在测量上的结论还只是可能真实的。有时，我们叫它们是盖然推断。

实验和测量也可能为数学家提示新的思想和新的关系。我们可以用一个在数学中最有用的关系来说明这一点。这就是毕达哥拉斯定理*，因为据信是毕达哥拉斯发现了它。我们并不知道毕达哥拉斯是怎样发现这个想法的。他可能曾经看到过象图3中那样的花砖地板，并且比较了各个面积。

作一个直角三角形，两个直角边的长度分别是3和4；重复作这样的三角形，边长分别为5和12；再重复作边长为8

* 即勾股定理。——译注

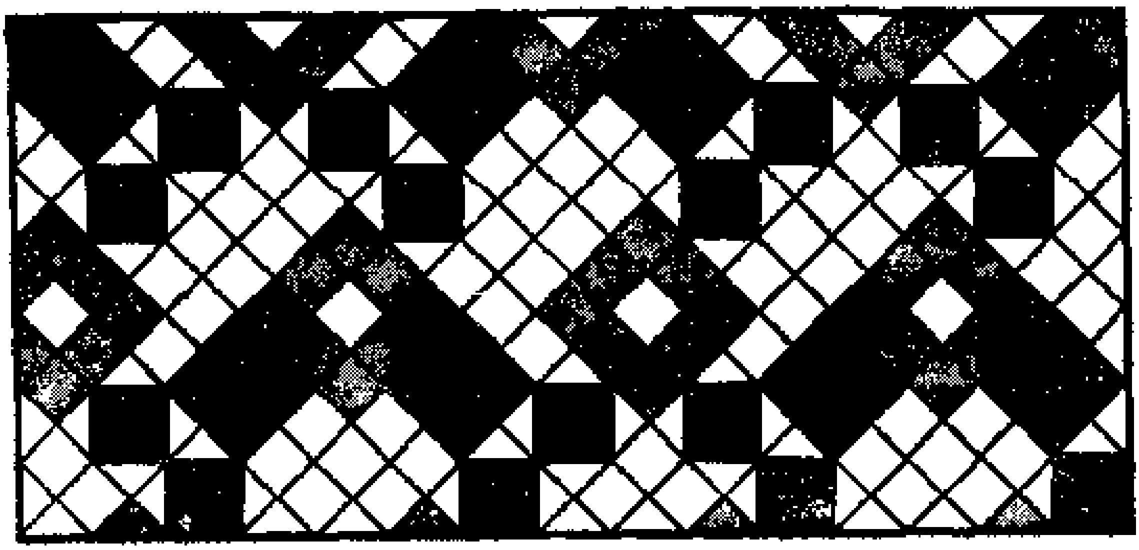


图 3

和 15 的．然后测量最长边(斜边)的长度．

现在我们得到了三个直角三角形，一个边长 3、4、5；另一个边长是 5、12、13；还有一个边长是 8、15、17．从图 4 中你能看出这三个图形有什么共同之处吗？ $3^2\times4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$，$8^2+15^2=17^2$．

这个实验启示我们，对于这三个三角形中的每一个，斜边的平方都非常可能是另外两边的平方的和．通过这些实验可以设想，如果我们用卡片剪下任何一个直角三角形，量一下边长，只要尽量量准些，总会发现最长边的平方等于其他两边的平方之和呢？

很明显，我们不能肯定．实际上我们只能说这可能是真实的．如果我们测量了 300 个三角形，而不只是三个，并且发现这个关系对所有这三百个三角形都是正确的，我们的根据是否更充足一些呢？大多数人觉得会是这样．但是不论我们作出并且量了多少个直角三角形，对于所有直角三角形来讲，

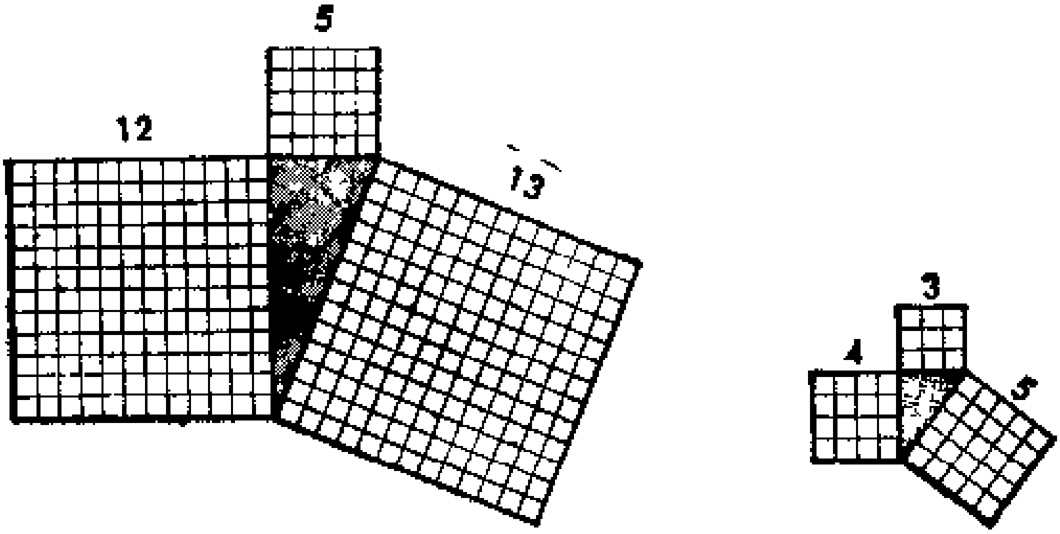


图 4

我们只能说这个关系可能是真实的。

2. 尝试法

有时，我们用尝试方法来检验一个命题的真实性。我们把命题运用到一些不同的情况下来观察它的结果如何。如果尝试给出正确的结论，我们开始相信这个命题在每种情况都可能是真实的。如果尝试导致了错误的结论，哪怕只是在唯一的一种情况中，我们就知道我们的命题不可能对所有情况都真实。这样要原样不动我们就得放弃这命题；也许要做一点修改，然后再进行更多的试验。

在学习数学时，我们应该经常使用尝试法来发现数与数之间、或者点和线之间的一般关系。举例来讲，我们来看一下奇数：$1=1^2$，$1+3=4=2^2$，$1+3+5=9=3^2$，$1+3+5+7=16=4^2$……这启示我们，对于

 1+3+5 ... (2k-1)

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \approx 10^2$$

有什么可能是真实的关系?

由于第一个奇数的和是 1^2，前两个奇数的和是 2^2，而前三个奇数的和是 3^2，你认为前 10 个奇数的和可能是什么? 你的猜想是不是一个真实的预言? 对从 1 开始的更多的奇数序列再试验一下. 它是否是错误的预言? 把你认为可能真实的关于奇数和的一般命题(或者叫定理)写出来.

有一个叫哥德巴赫的律师根据尝试法曾经提出了一个看来是正确的关于偶数的猜想*，他因而在数学史上占了一席。他提出，每一个大于 4 的偶数都是两个素数之和. 如，$8=3+5$，$26=19+7$. 对大量偶数进行的试验都表明这个猜想是正确的. 但是如果有人只要能够找到一个偶数证明它不正确，这个命题就得放弃而再不是一个正确的命题了.

练习 2 （尝 试 法）

1. 下面这些偶数是哪两个素数之和?

a. 48，b. 64，c. 98，d. 124.

2. 一个小难题: “我有两个硬币，加起一共九便士，有一个不是六便士，两个各是几便士? ”**

3. $1=(1\times2)/2$，$1+2+3=(3\times4)/2$，$1+2+3+4=(4\times5)/2$.

$1+2 \cdots +n = (n\times(n+1))/2$

---

* 这个猜想一般称为哥德巴赫猜想. 我国数学家陈景润等人对这个问题的解决做了很多重要的工作. ——译注

** 这道小题目改为中国币制，例如可以讲，共有 3 分钱，一个硬币不是 2 分，问各是几分的硬币.

a. 由上面的事例启示我们对于 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ 应取什么值?

b. 你认为前一百个自然数的和应该是多少?

c. 下面用文字表述的一个原则，你认为应该怎样填空才可能总是对的?

任意多个从1开始的接连的自然数的和是__和__的乘积的一半.

4. 素数数列开始是1, 2, 3, 5, 7 等.

a. $2-1$, 2^2-1, 2^3-1 的值是什么?

b. 由 a 可以启发我们得出什么一般命题?

c. 你能推翻 b 的命题吗?

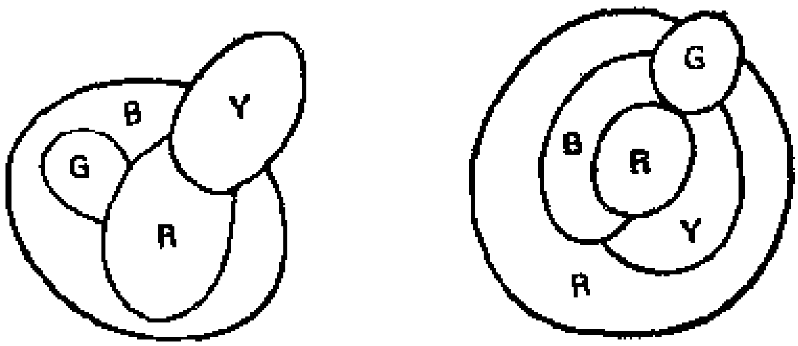


图 5

5. 上面画的是两张地图，你知道可以用红、蓝、绿、黄四种颜色给地图上色，使每一个国家和相邻的国家颜色不同. 再去试一下复杂的地图，注意一下每幅地图需要几种颜色? 这个试验启发你得出什么一般性命题*?

---

* 这个问题就是有名的四色地图问题，已经由美国科学家利用大型计算机彻底解决，问题得到了肯定的答案. 他们的证明方法，也是一种重要的间接证法，叫选择证法. 另外一种重要的间接证法叫反证法，在本书后面第四章作介绍. ——译注

三、演 绎 法

1. 从假设到定理

数学的基础是一种称为演绎法的逻辑推理方法．演绎是一种证明方法，它不是基于经验测量或者尝试法，而是建立在推理上的．演绎法不依赖于我们的感官．

两千多年以前希腊的数学家欧几里德，从怎样使用“点”、“线”、“相交”、“重合”、“相等”等这样一些词的命题出发，建立了一套完整的命题(定理)体系，这些命题它们相互之间以及和初始的命题(公理)都没有一点自相矛盾，在这个意义上，这些命题是正确的．

举例来讲，下面就是一个用点、位于……上、相交、线、通过等词的命题：　通过一个不在直线 XY 上的点 P，有而且只有一条与 XY 不相交(平行于 XY) 的直线．

图 6

从这个和其他的基本命题(公理、假设或者公设)出发，可以推导出下面的论断：“任意一个三角形的内角之和为直角

的两倍”，不会和任何基本命题相矛盾，而命题“存在着一个内角和小于(或者大于)直角的二倍的三角形.”前者至少和后面两个基本命题中的一个矛盾．我们必须认识到这个几何命题并没有告诉我们三角形的角是用长片剪出的，还是用粉笔、直尺在黑板上画出的．真的，几乎在我们所能够测量的情况下，我们的确发现这些三角形的内角和看来的确等于两个直角．但这些三角形都是小三角形．我们知道航天火箭轨道角度的微小差别在火箭轨道的初始阶段是测量不出来的．但是当它飞行了很长距离后，误差就可能大到使火箭偏离目标几千英里．这样，最好的办法是做一个非常大的三角形，一个角放在地球上，另一个在天狼星上，而第三个在恒星参宿七*，想象它的三个边是光线．这时我们就会发现这个三角形的内角加起来不等于两个直角．

数学家们找出哪几组命题同时成立，或者同时不成立；而物理学家和天文学家则找出在这些可能的各组命题中哪一组有助于我们对现实世界做出预言． 我们必须区分这两类命题．

举例说，设想提出这样一个命题：“如果把摄氏温度计插到一锅水中，用水去煮，水银柱会一直上升到100°C，然后停留在这个位置上，直到水煮干.”你可以自己做实验来证明这个说法对不对．我提出的命题如果不能对我们周围世界的事物和事件做出可靠的预计，它就是错的．这样的命题叫做经

---

* 即猎户座α星．

验命题．它给出有关日常生活的信息．

但如果我说："若 A、B、C 是一条直线上的三个点，B 在 A 和 C 之间，则 C 不在 A 和 B 之间．"你要想证明我说的话是错误的话，就要指出"则"以后的结论与公认的"点"、"线""在……之上"、"在……之间"这些词的涵义相矛盾．象这样的命题叫做分析命题． 它并没有告诉我们世界上的什么事．如果我们能够肯定它们不会导致矛盾时，我们就说它是正确的了．所有纯粹数学就是一系列分析命题．

逻辑演绎是一连串的命题，有的简单，有的复杂．我们把这一串命题叫做证明或者论证．证明中用的某些命题叫做理由或已知证据． 这些论述通常由诸如"假设"、"因为"、或者"已知"等词来引出． 而我们推理的结论通常表述为"所以"："那么则有"、"包含"或者"证出"． 我们不加证明而认为是正确的命题叫做"假说"、"公理"、或者"公设"．而那些需要证明的命题则叫"定理"．

在数学中我们经常用字母代表数，在逻辑学中我们用符号代表句子．在逻辑学中一个字母例如 P 就代表一句话："今天星期六．"用这个命题作为前提的一个例子："如果今天星期六，那么我要踢球．"，就是一个复合命题，同时也是一个前提命题．联系词"如果(若)……那么(则)……"用箭头 $\Longrightarrow$ 来表示．假如我们用 Q 代表"我要去踢球"，我们就可以把我们的句子翻译成符号了：

"如果今天星期六，那么我们就要踢球．"

$$P \Longrightarrow Q$$

若 P，则 Q

注意，P 和 Q 表示两个简单命题，而不代表联接词。

表达式 $P \Longrightarrow Q$ 是一个复合命题，称为一个蕴涵关系。如果 P 发生，那就意味着 Q 将发生。假如 R 代表“正在下雪”，S 代表“我们要去滑雪。”请把蕴涵关系 $R \Longrightarrow S$ 翻译成文字。

有时，我们谈起一个命题的反意或者否定。这叫它的否命题。如果 R 表示“天在下雪”则 $\sim R$* 表示“天不在下雪”。

考虑命题“如果星期六出太阳，那么我们去野餐”，这意味着所有出太阳的星期六我们都要去野餐。所以它实际上是有关所有出太阳的星期六(或者说出太阳的星期六的集合**)的一个命题。假如我们知道一个特定的星期六——六月八日是出太阳的，那就知道在那个星期六我们曾经外出野餐。

可以把上面的话用简略的符号写出来。第一个命题叫做大前提。它告诉我们关于集合的全体元素的某件事情。第二个命题是小前提，告诉我们关于集合中的一个特定元素的某件事。若这些前题为真，则从这些前提得出的结论也为真。用 P 代表“星期六出太阳”，Q 代表“我们去野餐”。

大前提：$P \Longrightarrow Q$ 如果星期六出太阳，那么我们就去野餐。

小前提：P，六月八日(星期六)出了太阳。

结论：Q，那么我们在六月八日去野餐过。

---

* 否命题 $\sim R$，在许多书中也有用 $\bar{R}$ 来表示的——译注

** 集合，这是数学中一个最基本的概念，往往不加定义。它是指某一类具有特定性质的事物的全体。集合中的一个成员称为它的一个元素。

这就是演绎法的一个简单的例子。

我们从承认 $P \Longrightarrow Q$ 是真实的前提出发，就得到了逻辑上合理的结论，这可以写成：

$$\begin{array}{c} P \Longrightarrow Q \\ \underline{P} \\ Q \end{array}$$

如果 P 和 Q 是经验命题，只要我们能够找到仅仅一种情况，在这种情况下，事件 P 发生了，但 Q 却一直都不跟着发生，这时就说明复合命题 $P \Longrightarrow Q$ 是不成立的。但是，如果 P 和 Q 是分析命题，而其中所有词的涵义也是我们认可的，那么在下述情况下，复合语句 $P \Longrightarrow Q$ 就被认为是真实的，即若在 P 中用词正确，则也必须承认这些词在 Q 中也使用正确，否则就会自相矛盾。例如，明确了"数"、"+"、和"="的涵义后，如果我们承认 $m+n=n+m$，那么，就必须承认 $3+2=2+3$ 才合乎逻辑。我们也可以两者都不同意，但是如果我们同意前一句命题，也就必须同意后一句命题。

请读者自己用这种逻辑推断的规则找出下面例子的结论：

前提 1. 如果马克在前十一号之内（M），那么他的背心是红色的（R）。

前提 2. 马克在前十一号之内。

要证明一个更为复杂的结论，我们做出下列一连串的支持前提：

如果约翰有了职业，那么他要买辆汽车。

如果约翰买了汽车，那么他开车不会小心。

如果约翰开车不小心，那么他会出事故。

所以，如果约翰找到了职业，那么他就将出意外事故。

我们用符号代表这些前提：

令 J = 约翰有了职业

W = 约翰买了汽车

N = 约翰开车小心

T = 约翰会出事故

我们演绎的步骤是这样的：

$$J \Longrightarrow W$$

$$W \Longrightarrow \sim N$$

$$\sim N \Longrightarrow T$$

$$J \Longrightarrow T$$

或者说，如果约翰有了职业，那么他将出意外事故。

注意我们推理的链环是怎样从一个蕴涵过渡到另一个蕴涵的．仅当我们推理链环中的每一个环节都正确的时候，我们的结论才是正确的．这是演绎法的一个基本原则．

这里有一个代数中的演绎法的例子．我们希望证明如下定理：若 $3x+5=17$，则 $x=4$．

这是一个简单命题还是一个复合命题？如果我们用简单符号把它写成 $P \Longrightarrow R$，P 和 R 代表什么？

我们必须首先掌握那些有关"数"、"等号"、"加"、"减"的公理．此外，我们还需要了解下列公理：

(1) 如果两个相等的数都减去同一个数，那么它们的余

数仍然相等。

（2）如果我们对两个相等的数同除以任何一个非零的数，则它们的商相等。

命题	理由	符号推理
（1）$3x+5=17$	1.假定已知。	P
（2）若 $3x+5=17$ 则 $3x=12$	2.若从两个相等的数中减去5，则余数相等。（公理1）	$P\Longrightarrow Q$
（3）若 $3x=12$ 则 $x=4$	3.若两个相等的数同除以3，则商相等。（公理2）	$Q\Longrightarrow R$
（4）所以，若 $3x+5=17$ 则 $x=4$		$P\Longrightarrow Q$ $Q\Longrightarrow R$ $P\Longrightarrow R$

其中P、Q、R代表什么？

如果我们要使结论是正确的，那么所有前提都必须是正确的，就象一串链环，它的强度不会比其中最薄弱的环节强，所以没有一个证明能比它所用的理由更有力。

下面是另外一类演绎。

“如果巴切斯特学校足球协会的球员平时每天都要练球或者赛一场球的话，那么巴切斯特学校就要把足球作为学校运动予以取消。”

语句	符号	理由
(1) 如果巴切斯特足球协会的球员平时每天都要练球或比赛，则球员每天都很疲劳。	$P \Longrightarrow T$	1. 在学校上六小时课后，还练球或比赛三小时，我们假定每个球员都很疲劳。（公理）
(2) 如果球员平时每天都很疲劳，他们不可能学好数学。	$T \Longrightarrow \sim S$	2 因为没有人能在很疲劳时学好数学。（公理）
(3) 如果球员不能学好数学，那么巴切斯特学校足球协会应当取消。	$\sim S \Longrightarrow x$	3. 因为学数学比踢足球重要.（公理）
(4) 所以，如果巴切斯特足球协会球员每天上学都练球或比赛，学校就应当把足球作为学校运动而取消。		4. 若 $P \Longrightarrow T$ $T \Longrightarrow \sim S$ 和 $\sim S \Longrightarrow x$ 则 $P \Longrightarrow x$。

只要我们同意这些公理，这个演绎就是合理和有效的，因为它是从前提出发合乎逻辑地导出的。如果巴切斯特的男孩们每天都玩两个小时足球而我们又同意这些公理，那么我们

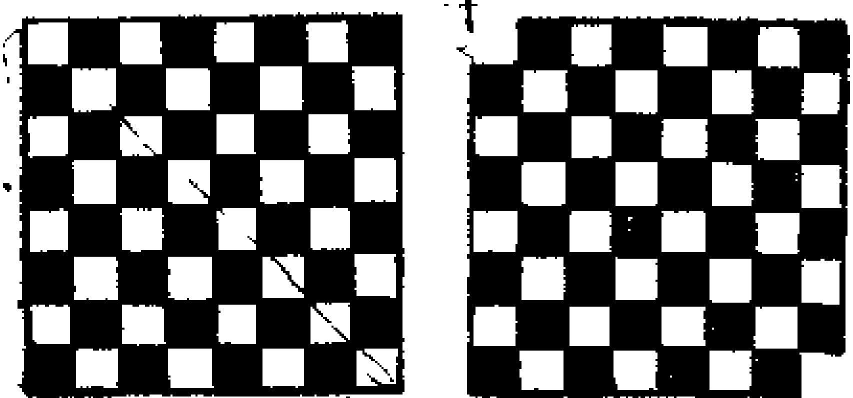
在逻辑上必须同意足球运动应该在巴切斯特学校取消. 注意,论证的逻辑合理性并不取决于命题的真实性. 但是,如果任何前提错了,结论也将是错的. 下章中,我们将要更进一步地研究真实性和合理性间的差别.

2. 演绎法的一个例子

一个棋盘有 64 个方格. 假设你有 32 张多米诺骨牌而每块骨牌恰好占两个方格. 32 块牌就可以盖满全部 64 个方格. 假定从棋盘的对角线相对的两个角各切掉一个方格, 再拿走一块牌. 用剩下的 31 块牌盖住剩下的 62 个格子, 能不做到这一点? 请证明怎样做到这一点, 或者反过来证明这是不可能的.

由于一块牌要占两个方格, 它就必须放成垂直的或者水平的一列. 如果它是沿对角线放,它就不能盖住两个方格.所以当每块牌摆在棋盘上时,它必须盖住两个不同颜色的格子.

用颜色形象化理论



①放棋盘有什么特点

(2)去掉的两个格的特点

(3) 推理

而对角线两对角的格子的颜色是一样的，剩下来的必然是 30 个红格子和 32 个黑格子，或者 32 个红格子和 30 个黑格子。由于一块牌必须盖住两个不同颜色的格子，30 块骨牌就盖住了 30 个红的和 30 个黑的方格。剩下的两个方格的颜色必然相同。这两同色的格子不能用一块牌来盖住——因为一块牌必须盖住两个不同颜色的格子。因此，我们不能用 31 块牌盖住棋盘上剩下的格子。

练习 3　蕴 涵 关 系

1. 用符号形式写出下面的蕴涵关系：

a. 如果玛丽被邀请参加舞会，那么她将会买件新裙子。

b. 如果皮特没有赶上八点钟的火车，那么他将迟到。

c. 如果卡罗琳的数学得了 5 分，那么她将感到高兴。

d. 如果英国的汽车数以它现在的增长率增加，那么十年内大多数英国城市会交通堵塞。

2. 用例子把这些符号翻译成句子：

a. $R\Rightarrow S$　　b. $K\Rightarrow M$　　c. $W\Rightarrow X$　　d. $R\Rightarrow T$

$$\frac{K}{M}\qquad\qquad \frac{x\Rightarrow y}{W\Rightarrow y}\qquad\qquad T\Rightarrow R$$

3. 写出逻辑推演步骤证明下列蕴涵关系：

a. 若 $3x+5=29$，则 $x=8$。

b. 若 n 是一个偶数则 n^2 是偶数。

（提示：令 $n=2x$）

c. 如果约翰上次选举投过票，那么他现在超过 21 岁了*。

---

* 规定年满 21 岁的人才有选举权。

四、数学关系的证明

1. 合理就为真吗?

我们已经说过，结论的真假取决于我们所有基本前提的真假．一个逻辑推理正常但其假设前提错误的结论是否有意义？当一个结论是在正确的逻辑关系之上做出的，我们就说它是一个合理的结论． 这并不意味着结论为真． 结论的真假，还取决于论证所依据的前提的真假．例如，下面的论证是合理的，也就是说，推理是正确的，但它是否为真？

大前提：没有一个偶数能够被 5 整除．

小前提：12 是一个偶数．

结论：12 不能被 5 整除．

如果大前提和小前提都正确，那么结论必然正确．但是在这里，小前提是不是正确呢？大前提是不是正确呢？如果其中有一个不正确，只要存在一个反例就足以说明问题．12 能够被 2 整除，所以它是一个偶数． 因此，小前提是正确的．而 10、20、30 这些数都是偶数，但它们又都能被 5 整除．因此，大前提不对．同时，结论是合理的，因为它是由正常的推理导出的。同时，它碰巧是对的．这是一个从假的前提可以推导出正确东西来的奇怪的例子．

下面是另一个有合理的结论的例子，但这次结论碰巧是

假的.

大前提：所有的车子都有四个轮子.

小前提：自行车是车子.

结论：自行车有四个轮子.

在这个例子中，小前提为真，结论也是合逻辑的，但是因为自行车只有两个轮子，所以结论是不成立的．这里的原因在于大前提不真.

2. 使用维恩图推理

为了校验某些结论的真假，一个方便的方法就是采用所谓维恩图(维恩，1834—1923，英国逻辑学家)．我们用这些图来说明有关集合的元素．这样集合中所有的元素都由圆内的点来代表．例如，集 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 和集 $B=\{2,4,6,8\}$ 就是象图 8 所画出的那样.

阴影区同时包含于两个圆．就是说，数字 2 和 4 同时为集合 A 和集合 B 的元素，我们称集合 $\{2,4\}$ 为集合 A 和集合 B 的交集.

再看图 9，如果 X 代表全部郁金香花，这就是在这个圆中的大量的点，而 Y 代表全体红色的东西，包括花、邮筒、某些邮票、某些交通信号灯等等，那么阴影区代表什么？我们怎么称呼它？显然，它是 X 和 Y 的交集，代表所有红色的郁金香花.

矩形和正方形的关系可用图 10 的维恩图表示．从图中可以看出，所有的正方形都是集合 R 的元素，而集 R 只有一部

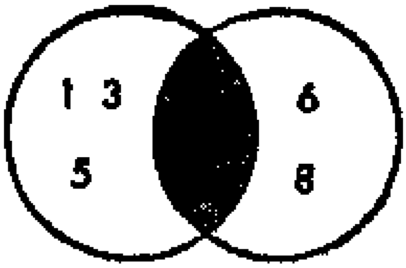


图 8

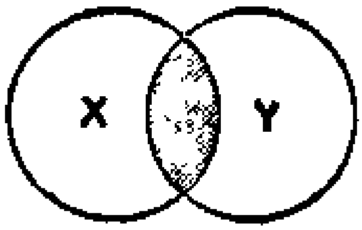


图 9

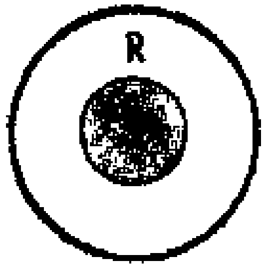


图 10

分元素是集 S 的元素。 也就是说："全体正方形都是矩形"，"有些矩形是正方形"。 R 和 S 的交集是什么呢？

命题"一些整数的平方是奇数"可用如下方式来表示：

A ━ {整数的平方}

B ━ {奇数}

图 11 中阴影区代表 A 和 B 的交集，就是那些构成平方的奇数。

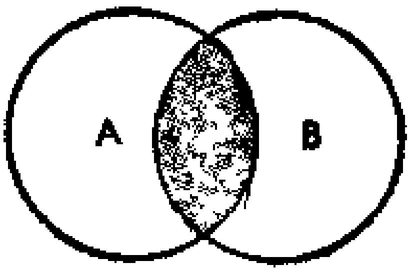


图 11

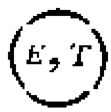


图 12

结论：有些奇数是平方数。

有些平方数是奇数。

假如我们说："所有偶数能被 2 整除。"

E ━ {偶数}

T ━ {可被 2 整除的数}

这两个集合是相同的。

结论：所有可被 2 整除的数是偶数。

所有偶数都可被 2 整除。

大多数命题的关系不这么简单。我们时常要组合几个命题来得出一个结论。为使结论为真，原始命题必须为真。

A. 所有聪明的孩子都学数学。

B. 约翰是个聪明的孩子。

C. 所以约翰学习数学。

这里用到的集合有：

M — 所有学数学的孩子。

I — 所有聪明的孩子。

J — 约翰。

结论：因为约翰是集 *I* 中的一个成员，而集 *I* 又包含在集 *M* 之内，所以他是集 *M* 中的一员。如果原始命题 *A* 和 *B* 都为真，我们可以肯定约翰学习数学。如果命题 *A* 为"某些聪明的男孩子学数学"，那么这个关系就象图 14 那样了。我们就不能肯定约翰是在用阴影区所代表的交集之中，这个交集代

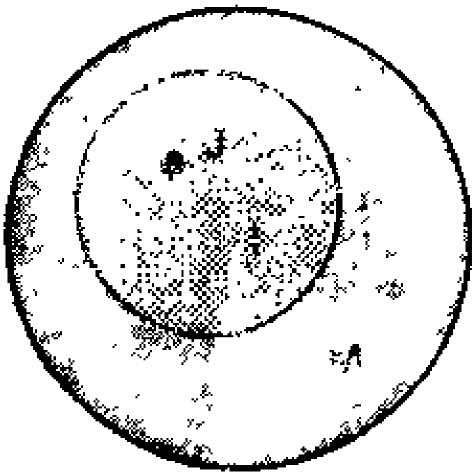


图 13

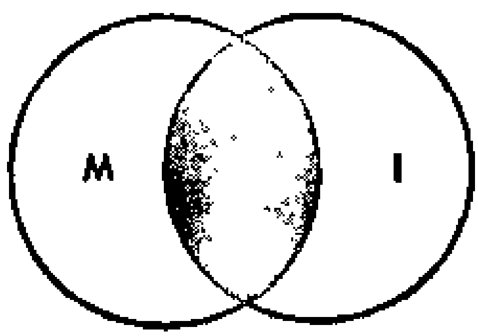


图 14

表了那些学习数学的聪明的孩子.

象这样的一些命题叫做三段论法. 它们从古希腊哲学家的时代起就是逻辑推理的基础. 三段论法由三部分组成:

(1) 大前提(所有聪明的孩子学数学.)

(2) 小前提(约翰是个聪明的孩子.)

(3) 结论(约翰学习数学.)

每一个三段论法至少有三项或者三个集合, 例如聪明的孩子,学习数学的孩子和约翰. 每一项或每一个集合都在三段论法中出现两次.

构成一个三段论法的命题可划分为两类: (1) 全称命题或者 (2) 特称命题. 一个全称命题包含所提到的两个集合的所有元素 (或者不包括任何元素). 命题"所有聪明的孩子都学习数学."就是一个全称肯定命题. 聪明的孩子的集合 (I) 是学数学的孩子的集合 (M) 的一个子集合. 图 15 说明了这些全称肯定命题的关系.

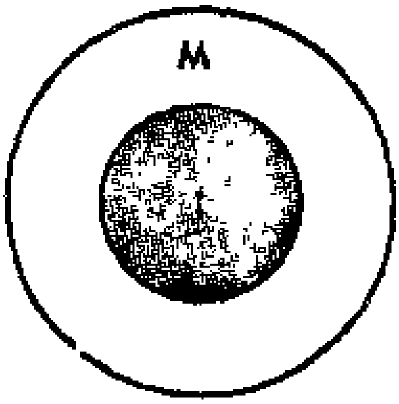


图 15

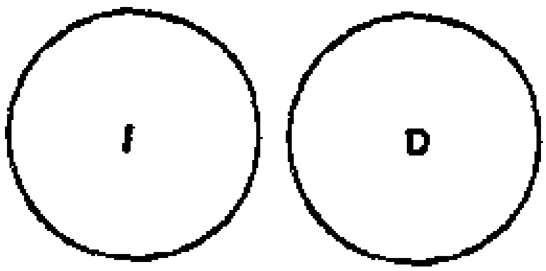


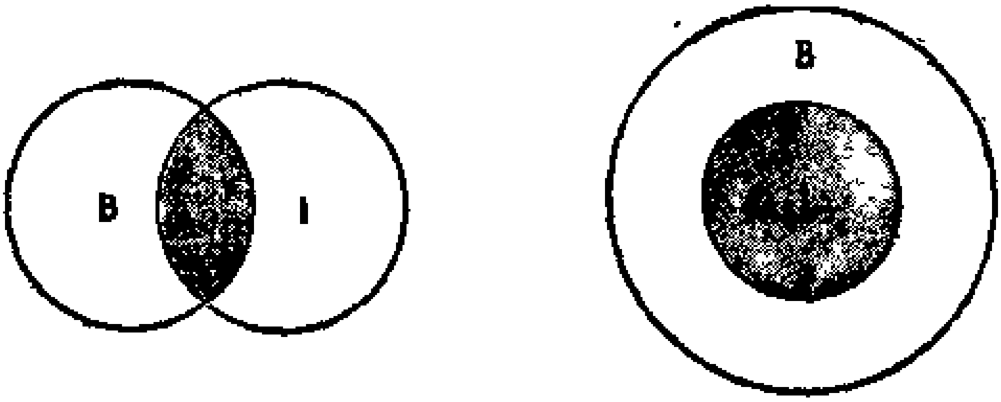
图 16

一个全称命题也可以是否定的. 图 16 表示命题"聪明的孩子没有不老实的."聪明的孩子的集合 (I) 和不老实的人的

集合（D）没有共同的元素，因而不相交．我们可以绕个弯子来叙述这种情况：　I 和 D 的交集没有元素或者是一个空集．表示这种情况的两个符号是 Φ 或{ }．

只与一个集合中的某些元素有关的命题是一个特称命题．"有些孩子聪明"就是一个特称命题．孩子们的集合（B）和聪明人的集合（I）的关系可以有两种表示方法．

如果两个集象图 17a 那样相交，那么有的孩子聪明而有些聪明人是孩子．同时，有些孩子是不聪明的，有些聪明人不是孩子．如果两个集合是象图 17b 那样相交，那么有些孩子是聪明的，而所有聪明人都是孩子了．

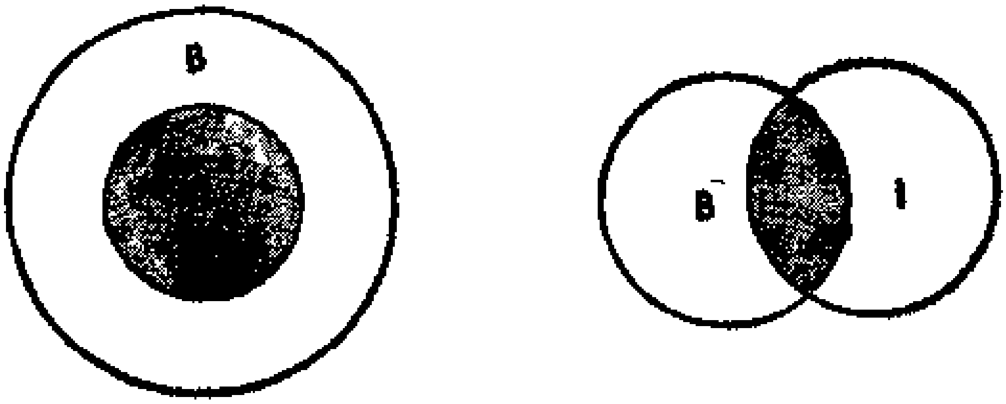


(a)　　　　(b)

图　17

如果一个特称命题说："有些孩子（B）不聪明（I）"，它称为一个否命题．这个否命题意味着图 18 所表示关系中的一种．

注意，图 18 所表示的集合关系正好和图 17a 和图 17b 相同．这样，任何特称命题可以导出两种可能的集合关系．所以，根据特称命题比根据全称命题更难做出逻辑结论．



(a)　　　　(b)

图 18　B的某些元素不在 I 中

许多三段论法既有全称命题也有特称命题．下面是一个具有否命题的三段论法的例子．

A. 所有的数学家（M）都聪明（I）．

B. 有些政治家（P）不聪明．

C. 因此，有些政治家不是数学家．

这些集合的关系表示在图 19 上．阴影区代表了结论，而且表明结论是合乎逻辑的．

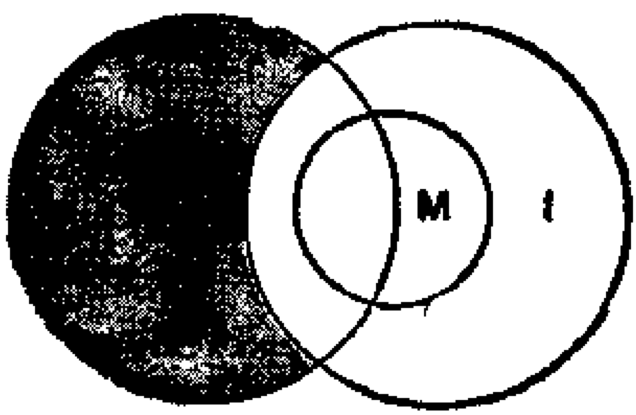


图　19

下面的三段论法给出了一种不同的关系．

A. 骑自行车上学的人(集合 *C*) 没有人迟到(集合 *A*)。

B. 有些女孩子(集合 *G*) 迟到了.

C. 所以,有些女孩子没有骑车上学。

它们的关系画在图 20 上。

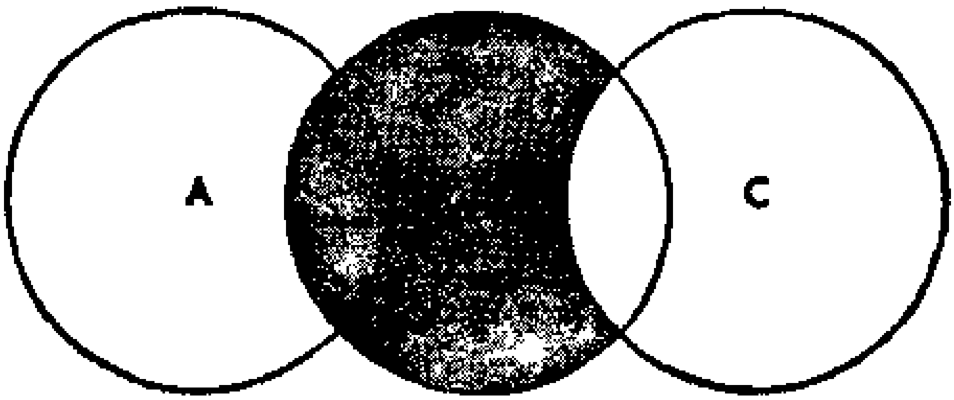


图 20

阴影区代表结论: "有些女孩子没有骑车上学."

在所有我们讨论过的三段论法中，我们从某些大前提和小前提出发得到了结论. 由于我们有些前提不是公认的假设,所以结论也不一定为真. 例如,并不是所有聪明的孩子都学数学. 我们时刻都必须记住，从逻辑推理得到的结论不会比推演出它们的前提或假设更强. 但是，如果我们的前提为真,演绎逻辑将给我们以真确的结论.

"所有"、"有些"、"都没有"和"没有"这样的词叫量词. 在数学中,这些量词用符号 ∀(倒写的 A 字,英文 ALL 的字头)和 ∃(反写的 E 字,英文 EXISTED 的字头) 来表示. 符号 ∀ 用来表示"所有"这个量词,而符号 ∃ 代表"有些(存在)". 例如语句"所有孩子都聪明" 可以写成 $\forall_X P$，这里 *X* 代表孩子，

而 P 代表前提即指“孩子们聪明”。于是 $\exists_x P$ 就表示“有些孩子聪明。”类似地，$\forall_x(\sim P)$ 是“全体孩子都不聪明”的简记。$\exists_x(\sim P)$ 又代表什么？

在数学中，我们还把命题变换成“如果（若）…… 那么（则）……”的形式。例如，“所有的孩子都聪明”和命题“如果一个人是孩子，那么他聪明”是等价的。

3. 真实和证明

由一系列真确命题正确地构成的证明并不能保证结论为真。注意下面两个三段论法的命题序列。

第一个三段论法	第二个三段论法
所有的孩子都有两只耳朵。	所有的孩子都有两只耳朵。
约翰是个孩子。	约翰有两只耳朵。
所以，约翰有两只耳朵。	所以，约翰是个孩子。

在二个论证中所有的命题都假定为真。但第二个三段论法的结论是不能接受的。利用图 21 中的维恩图可以说明为什么不一定得出上图的结论。

在任一时刻我们所感兴趣的全体对象的集合（在现在这种情况下，就是所有有着两个耳朵的东西的集合）通常称为全称集合。第一个命题必须把它的对象（孩子）置于一个更大的类（具有两只耳朵的东西）之中。第二个命题必须确认它的对象（约翰）为第一个命题的对象的子集合。因此，象图上所指

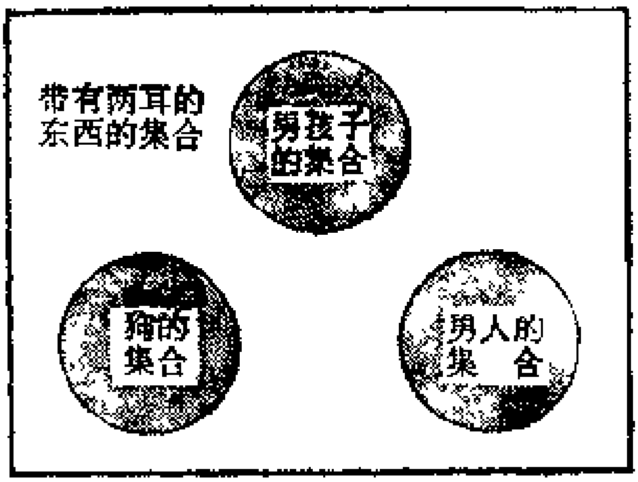


图 21

出的，在这个三段论法中约翰也是全称集合中的一个元素. 如果我们把第二个三段论法略加变动，我们就可以看出为什么结论不合理了.

所有的孩子都有两个耳朵.

狗有两个耳朵.

因此，狗是一个小孩.

有时，三段论法并没有给我们全部结论. 例如，命题"顾客喜欢蓝色汽车"可以叙述为"如果一个人是个顾客，那么他会喜欢蓝色的汽车."或者"如果这个汽车是蓝色的，那么顾客会喜欢它."

不过，顾客也可能喜欢绿色的汽车. 事实上他们喜欢蓝色的汽车并不意味着他们只喜欢蓝色.

一些"如果……那么……"的命题给出了原因和结果. 例如："如果我跳入水中，那么我将弄湿."这里，"如果"语句给出了"那么"语句的原因. 这种类型的命题正是科学家力图做的. 可是，命题"如果两条直线平行，12 是一个偶数"，也有

一个"如果"语句，而它和"那么"语句完全没有关系。即使这些语句没有关系，命题也可以为真。

4. 表明各种可能的关系

用维恩图可以表示许多数学关系：例如，"某些乘积是负数。"这个特称命题指出至少有一个乘积是负数。"如果有些乘积是负数，那么有些乘积不是负数"这种提法对吗？我们很可能不知不觉地把它作为合理的推理来接受。不过，让我们用维恩图来表示原始命题所具有的可能的关系。这里，有多少可能的关系图就有多少种可能的结论。

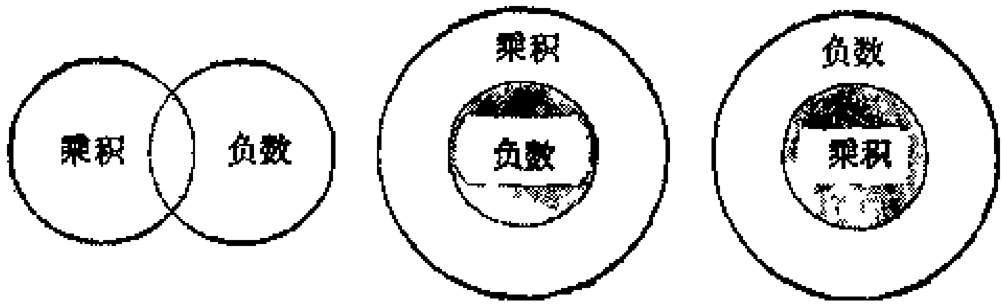


图 22

再考虑下面的几何命题：

A. 没有一个三角形是正方形。*T* — 三角形集合。

B. 没有正方形是六角形。*S* — 正方形集合。

C. 所以，没有三角形是六角形。

H — 六角形集合。

从 *A* 和 *B* 可以导出 *C* 来吗？

这些前提可以用四种方式来表示.

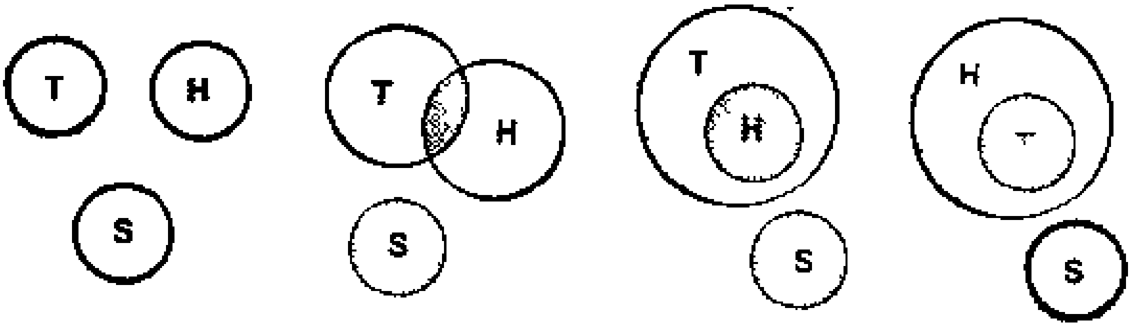


图 23

根据图 23 表明的四种情况,有四种可能的结论.

a. 没有三角形是六角形. T和H的交集是空集.

b. 有些三角形是六角形. 有些六角形是三角形.

c. 所有六角形是三角形. 所有H都包含在T中.

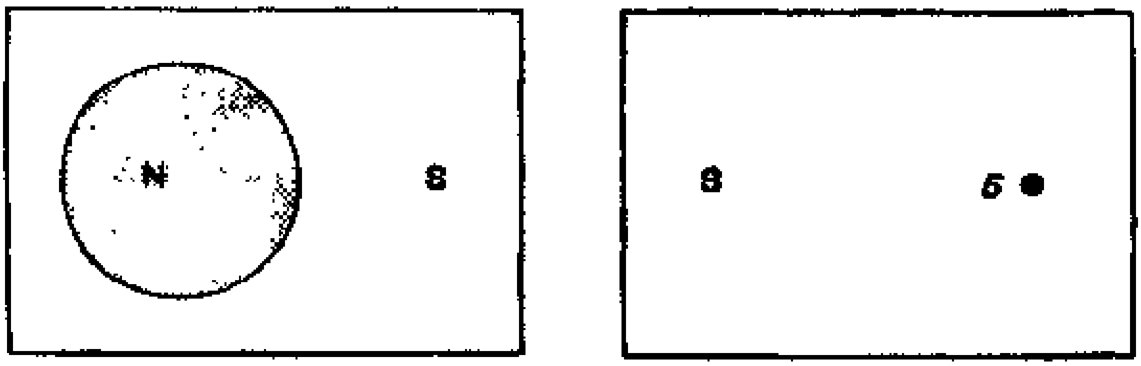
d. 所有三角形是六角形. 所有T都包含在H中.

从而,这个三段论法的结论不一定为真. 再例如:

所有的数字都是符号.

5 是一个符号.

因此, 5 是一个数字.

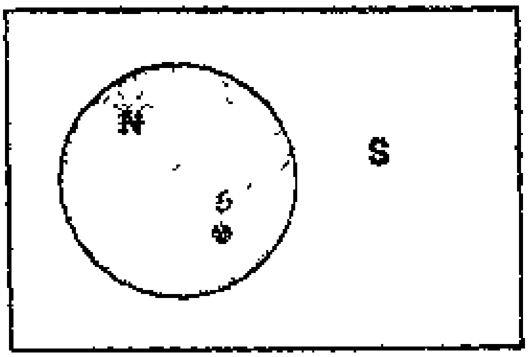


所有数字都是符号　　　　5 是一个符号

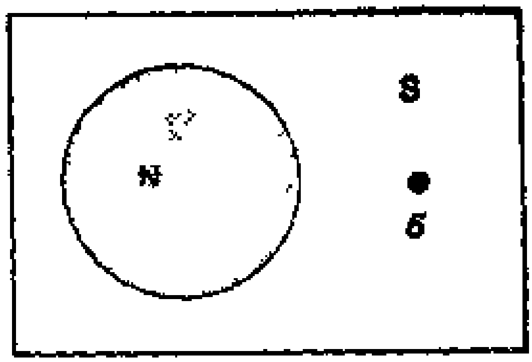
图 24

此结论为真，但推导合理吗？

它们的组合可以是下面两种情况之一：



5 是数字，同时也是一个符号.



5 是一个符号，但不是数字.

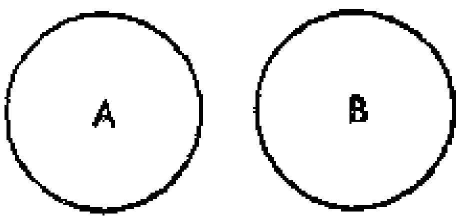
图 25

由于有两种可能的维恩图表示的关系，也就存在着两种可能的结论. 图 25 表明 5 并不必须是数字.

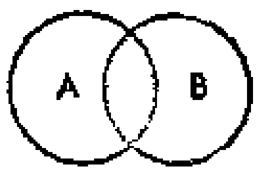
练习 4 用维恩图来推理

1. 写出下面图中表示集合 A 和 B 的关系的一个命题.

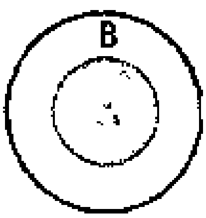
a.



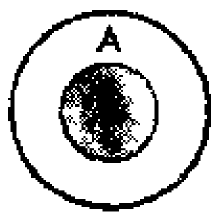
b.



c.



d.



2. 画出说明下列前提的维恩图.

a. 有些狗是很友善温良的.

b. 没有小猫带手套。

c. 有些兔子是白的。

d. 有些中学生六英尺高。

所有六英尺高的男孩子都是蓝球运动员。

3. 根据下列前提，画出维恩图并做出结论。

a. 有些孩子有自行车。

所有有自行车的人成绩都平常。

b. 有些女孩子好多嘴。

有些或者所有好多嘴的人不受欢迎。

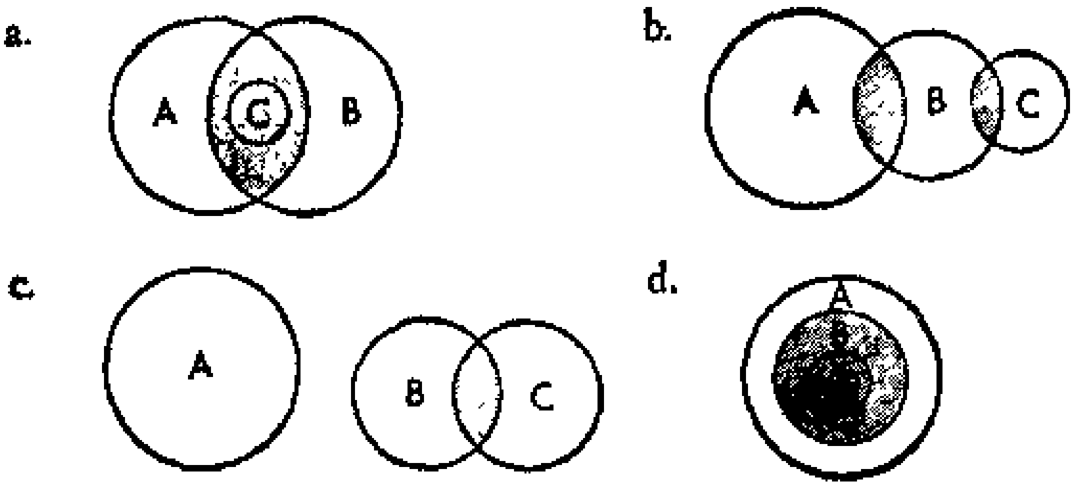
c. 有些英国人是保守党人。

有些保守党人聪明。

d. 有些英国人是数学教师。

所有数学教师都聪明。

4. 写出下列维恩图表示的关系。



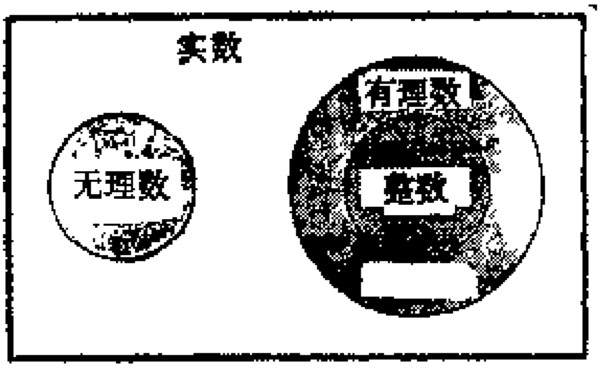
5. 画出维恩图说明下列前提：

所有正方形都是矩形。

所有矩形都是平行四边形。

所有平行四边形都是四边形。

6. 叙述从下列维恩图得到的几个结论。



7. 用维恩图来说明下列三段论法是不合理的："所有伊顿公学的学生都是公立学校的学生，有些公立学校的学生不诚实，所以有些伊顿公学的学生不诚实。"

8. 利用维恩图来说明下面哪些结论是合理的。

a. 所有的孩子都是疯子。
所有的罪犯都是疯子。
所有的孩子都是罪犯。

b. 有些运动员聪明。
查理斯是个运动员。
查理斯聪明。

c. 所有 A-40 牌都是摩托车。
Spitfire 牌不是 A-40 牌。
Spitfire 牌不是摩托车。

d. 所有的女孩子都漂亮。
所有的妻子都是女孩子。
所有的妻子都漂亮。

5. 逆 命 题

有时"如果……那么……"这种形式的命题被反过来讲。例如，"如果马克在散步，那么他活着。"可能倒过来变成"如果

马克活着，那么他在散步。”第二个命题是第一个命题的逆命题。一个命题的逆命题是对换“如果”语句和“那么”语句而构成的。从上面的命题你就可以看出，即使原始命题为真，逆命题也不一定为真。

在数学中，我们时常对逆命题的真假感兴趣。例如“若 $2x+7=19$，则 $x=6$” 是一个为真的命题。逆命题是：“若 $x=6$，则 $2x+7=19$”。逆命题也为真。我们就这样用逆命题来检验我们方程的解。

有时，假设一个真命题的逆命题也为真，会造成错误。命题“如果我们敲圣保罗教堂的钟，那么我们就要进行一次庆祝活动。”可以为真。但是逆命题“如果我们集会庆祝，那么就要敲圣保罗教堂的钟。”就可能不真。命题和它的逆命题表示在下面的示例中。

命

命题	逆命题
若 P，则 Q	若 Q，则 P
$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$

题

下面的推导合理吗？

大前提：$P \Longrightarrow Q$

小前提：Q

结论：P

我们的回答是否定的。仅当 $Q \Longrightarrow P$ 的情况下，结论才是合理的。

6. 否 命 题

改变一个命题的另一种方法是把每一语句表述为否定语句。得到的新命题称为否命题。

命题	否命题
如果莎莉住在格拉斯哥，那么她住在苏格兰。	如果莎莉不住在格拉斯哥，那么她不住在苏格兰。

从这个例子就可以看出，否命题也并不必定为真。不过，如果一个命题的逆命题为真，那么它的否命题也为真。同样，如果逆命题不成立，则否命题也不成立。逆命题和否命题是同时为真或者同时为假。因此，如果你证明了一个命题的逆命题为真，就知道否命题也为真。

有时，命题实际上是暗中假设它的否命题为真而做出的。一个政客在竞选时声称："如果我当选，就要减税。"他就是想让你认为别的候选人不会减税。当然，如果你假定一个真命题的否命题也为真，那除了怪你自己是不能责怪别人的，因为是你自己在推理中出了错。

命题	否命题
若 P 为真，则 Q 为真。	若 P 不真，则 Q 不真。
$P \Longrightarrow Q$	$\sim P \Longrightarrow \sim Q$

下面的推导合理吗？

大前提：$P \Longrightarrow Q$

小前提：　$\sim P$

结论：　$\sim Q$

7. 逆 否 命 题

命题“如果莎莉住在格拉斯哥，那么她住在苏格兰.”是一个真命题. 另一个命题可能为，“如果莎莉不住在苏格兰，她不住在格拉斯哥.” 第二个命题叫做第一个命题的逆否命题. 注意，我们是交换复合命题中两个句子的位置并做出它们的否定句来构成逆否命题的. 当原始命题为真，其逆否命题是否也为真呢?

一个命题和它的逆否命题要么同时为真，要么同时不真. 我们可用下面的命题来检验这个结论:

a. 如果一个整数能够被 2 整除，那么它是一个偶数.

b. 如果一个矩形是三英寸宽七英寸长，它的面积是21平方英寸.

广告和政客都时常用逆否命题. 当一个广告说：“时髦的人都开克利克索牌汽车” 这意味着如果我们不开克利克索牌汽车，那我们就不是时髦的人了. 一个政客可能说：“要求可靠的政府的公民将投我的票.”他是希望我们认为如果我们不选他就是不想要一个可靠的政府.

说话的艺术

命题	逆否命题
若 P，则 Q	若 Q 不真，则 P 不真.
$P \Longrightarrow Q$	$\sim Q \Longrightarrow \sim P$

下面的推导合理吗？

大前提：$P \Longrightarrow Q$

小前提：$\sim Q$

结论：$\sim P$

8．必要和充分条件

考虑命题"为了维持生命，必需要有空气来呼吸．"但是，空气不是生命的充分条件，为了维持生命，我们还必须有食物和水等．

为了说明必要充分条件，让我们使用下列符号：

P — 一个人有空气．

Q — 一个人活着．

当我们说空气对生命是必须的（P是Q的必要条件）我们的意思是：

(1) 如果一个人活着，那么他必须有空气．或者

(2) 如果一个人没有空气，那么他就不能活．

换句话讲，P是Q的必要条件，如果 $Q \Longrightarrow P$ 或者 $\sim P \Longrightarrow \sim Q$．

如果我们打算说空气是生命的充分条件（P 是Q的充分条件），我们的意思是：

(1) 如果一个人有空气，那么他就会活着．或者

(2) 如果一个人活不了，那么他就没有空气．

用符号来表示，我们把P是Q的充分条件写成 $P \Longrightarrow Q$

或者 $\sim Q \Longrightarrow \sim P$.

如果我们想说空气是生命的必要充分条件，则：

(1) 如果一个人活着，那么他有空气. 而且

(2) 如果一个人有空气，那他就活着.

换句话讲，没有空气是造成死亡的唯一原因. 这样，我们要说："当且仅当有空气，一个人才能够生存."

在逻辑语言中，P 是 Q 的必要充分条件写作：

$$Q \Longrightarrow P \text{ 且 } P \Longrightarrow Q$$

$$\text{简写成 } Q \Longleftrightarrow P$$

换句话来讲就是，对于必要充分条件，命题和它的逆命题必须同时成立.

让我们把这些条件用到一些数学上的例子中去. 当我们说："若 $2x+5=19$，则 $x=7$"，条件 $2x+5=19$ 对给出结果 $x=7$ 是不是充分必要的呢？

令 P 表示 $2x+5=19$

Q 表示 $x=7$

(1) 若 $2x+5=19$，则 $x=7$ (真) $P \Longrightarrow Q$. 所以，P 对 Q 是充分的.

而且

(2) 若 $x=7$，则 $2x+5=19$ (真)，$Q \Longrightarrow P$. 所以，P 对 Q 是必要的.

因此，$2x+5=19$ 对于给出 $x=7$ 是充分必要的. $P \Longleftrightarrow Q$

然后，试一试这个命题："如果一个数是奇数，那么它是

一个素数。"

令 P — 一个数是奇数。

Q — 一个数是素数。2是特殊的素数

9 是个奇数但不是素数，所以 P 并不蕴涵 Q。因此，P 不是 Q 的充分条件。 又由于 2 不是一个奇数但它是一个素数，故逆命题（$Q \Longrightarrow P$）也不成立。这样 P 对于 Q 来讲既不必要也不充分。 这个语句的逆否命题是否成立？ 否命题是否成立？

最后，校验命题"如果一个四边形是矩形，则它是一个平行四边形。"

令 P — 一个四边形是矩形。

Q — 一个四边形是平行四边形。

下面是分析：

$P \Longrightarrow Q$ 真　　　$\sim P \Longrightarrow \sim Q$ 不真

$Q \Longrightarrow P$ 不真　　　$\sim Q \Longrightarrow \sim P$ 真

$P \Longleftrightarrow Q$ 不真

必要条件 $Q \Longrightarrow P$ 或 $\sim P \Longrightarrow \sim Q$ 不满足。而充分条件 $P \Longrightarrow Q$ 或 $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ 满足。从而充分必要条件 $P \Longleftrightarrow Q$ 不满足。

小结命题：若 P 真，则 Q 真。

P 是 Q 的必要条件： $Q \Longrightarrow P$ 为真或 $\sim P \Longrightarrow \sim Q$ 为真。

P 是 Q 的充分条件： $P \Longrightarrow Q$ 为真或 $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ 为真。

必要和充分条件： $Q \Longrightarrow P$ 为真且 $P \Longrightarrow Q$ 为真；也即 $P \Longleftrightarrow Q$。

练习5 逻辑命题

1. 下面各命题的否命题是什么？是否成立？

a 如果彼得上了大学，那么他至少有15岁。

b. 如果一个植物开花了，那么它是活的。

c. 如果一个数是奇数，那么它的平方也是一个奇数。

d. 如果一个动物是狗，那么它有四条腿。

2. 写出题1中各命题的逆命题，它们是否为真？

3. 写出题1中各语句的逆否命题，它们是否为真？

4. 在下列情况中，哪些一定对？

a. 苹果好吃的一个必要条件是它是红的。

b. 数学没有考好的一个充分条件是没有课本。

c. 偶数的必要充分条件是它能被2整除。

9. 间接证明(反证法)

我们相信，一个命题若有意义，那么它就必须要么为真，要么不真．给定的语句既真又不真的结论叫做矛盾．读者还记得，如果从一个命题我们可以合乎逻辑地进行论证而不导致矛盾，那么数学家就认为这个命题为真．相反，如果我们在一个逻辑上合理的论证中碰到了矛盾，那么数学家就会要我们承认推理所依据的命题不真．这样，证明 P 的真实性的一个间接的途径就是从它的否命题，$\sim P$ 开始，作合理的论证．如果我们得到了矛盾，那么无论对我们或者数学家来讲，P 必

定为真。

让我们来看一下这种反证法是怎样用来证明某些命题的。

定理 1：如果 n 是整数且 n^2 是偶数，则 n 是偶数。

证明：

(1) 如果 n 是整数，它必然不是奇数就是偶数。

(2) 考虑命题"n 是奇整数而 n^2 是偶数。"如果 n 是奇数，它可写成 $2k+1$ 的形式，其中 k 是整数。

(3) $(2k+1)^2=2J+1$，其中 $J=2k^2+2k$，所以 n^2 是奇数。

(4) 因此命题"n 是奇整数而 n^2 是偶数"引出矛盾。

(5) 所以，如果 n 是整数且 n^2 是偶数。则 n 是偶数。

定理 2：不存在一个平方为 2 的有理数。

证明：

(1) 考虑命题"存在一个有理数 (n)，其平方是 2"这样就必然有两个整数 a 和 b 使 n 等于分数 $\frac{a}{b}$。而且我们总可以化简这个分数使 a 和 b 除 1 以外没有别的公因子。

(2) 因此，这两个数中间至少有一个不是偶数。

(3) 所以若 $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2$

$$\frac{a^2}{b^2}=2$$

$$a^2=2b^2 \quad \text{(i)}$$

a^2 是偶数

a 是偶数（定理 1）

$a=2k$

$4k^2=2b^2$（由 i）

$2k^2=b^2$

b^2 是偶数

b 是偶数(定理 1)

(4) 从而由命题"存在一个有理数 n，其平方为 2." 引出了矛盾的命题：

一方面，a，b 至少有一个不是偶数；另一方面 a 和 b 都是偶数。

(5) 所以命题"存在一个有理数 (n)，其平方为 2"不真。

(6) 反过来，命题"不存在一个有理数其平方为 2" 为真。

10. 一个用间接证法的游戏

在这游戏中使用了从一付扑克牌中所取出的三张 A（也可以是别的牌）。这种游戏由两个人来做，用三张牌——黑桃 A、梅花 A 和红桃 A。把牌洗过，面朝下放着。两个人面前各放一张，中间再放一张。发牌的人下令后，两个人同时看自己的牌，谁先说出对方的颜色谁就赢。可以用间接证明来决定玩这个游戏的最好的方法。

推理如下：

(1) 如果一个人得到了红牌，而另一个人得到的是黑牌。由于只有一张红牌，所以拿红桃 A 的这个人就可以赢。

(2) 要是两个人拿的都是黑牌，其中的一个人就可以这样推理，如果他的对手没有马上表态，他就没有拿到红牌，所以他必然拿得是黑牌。在他的对手还没有发现这种推理之前，这种办法一直行得通。

11. 智力游戏和推理

一个需要推理的，不用或者很少用数字计算的智力游戏，是一个逻辑问题。这里有一些娱乐性的逻辑问题，解答同逻辑有关。

a. 史密斯、琼斯和罗宾逊分别是一列火车上的司机、警卫和司炉。但他们的名字和工作并不一定是按顺序排列的。车上有三个乘客也叫这三个名字。在下面的前提中，用加“先生”来加以区别。

b. 罗宾逊先生住在伦敦。

c. 警卫住在赛利斯伯里。

d. 琼斯先生把他在学校学过的代数早忘光了。

e. 和警卫名字相同的乘客住在伊克赛特。

f. 警卫和一个乘客(知名的数学物理学家)去同一教堂。

g. 史密斯在台球赛中打败了司炉。

谁是司机？

不经过一些系统的分析很难看出这个问题的逻辑结构。一个方便的方法是象图 26 那样来表示，表中的空格可以填充每一组中元素的所有可能的成对的搭配。在这种情况下，因

为有两组元素，所以要两个表，如图 26 所示。

	司机	警卫	司炉
史密斯			0
琼斯			
罗宾逊			

伦敦	赛利伯里	伊克赛特
0		
0		
1	0	0

图 26

每个格子上"1"表示这种组合为真，或者填上"0"表示这种情况被所给的前提排除了。让我们来看这是怎样解出的。前提 g 明显地排除了史密斯是司炉的可能性，所以在表的右上角的格子里，我们填上一个"0"。前提 b 告诉我们罗宾逊先生住在伦敦，所以我们在左下角的格子里填上"1"，同时，在同一列和同一行的其他格子填上"0"，说明罗宾逊先生不住在赛利斯伯里和伊克赛特，而史密斯先生和琼斯先生不住在伦敦。

现在，我们必须做一点思考。前提 c 和 f 告诉我们物理学家住在赛利斯伯里，但他的名字是什么？他不会是罗宾逊先生也不是琼斯先生(他忘光了所学的数学)，所以他必然是史密斯先生。我们把这一点用"1"标在最顶上一行的中间格子里，而把这一行和这一列中剩下的格子里填上"0"。这时，只剩下一个格子可以用来填第三个"1"，证明琼斯先生住在伊克塞特。这样我们把中间一格填"1"，在该行该列剩下的空格填"0"。

其余的推导就容易了。在司炉的那一列，只有最底下的格子可以用来填"1"，这就使左下角的格子要填上"0"，只剩

下左上角有一个空格来填最后一个"1",证明史密斯是司机.

	司机	警卫	司炉	伦敦	赛利斯伯	伊克赛特
史密斯	1	0	0	0	1	0
琼斯	0	1	0	0	0	1
罗宾逊	0	0	1	1	0	0

图 27

在逻辑问题中,另一类为人熟悉的问题可叫做猜帽子.它是由于下面这个有名的例子而得名的.三个人(A、B 和 C)被蒙上眼睛,告诉他们每个人头上都给戴了一顶帽子,帽子的颜色不是红的就是绿的.在这以后,就去掉蒙眼睛的布;要求每个人如果看见别人(一个人或者两个人)戴红帽子就举手并且谁能断定自己头上帽子的颜色,谁就马上离开房间.所有三个人碰巧戴的都是红帽子,因此所有三个人都举了手.几分钟之后,C 首先走开了.他推理比其他人强.他是怎样推导出自己头上帽子的颜色呢?

C 的推理是一个间接证明(反证法),"我的帽子不是绿的就是红的.如果我的帽子是绿色的,则 A 就会知道他的帽子是红的,因为只有他的帽子是红色的时候 B 才会举手,那样 A 就会离开房间.B 也会做同样的推理离开房间.因为 A 和 B 都不知道他们帽子的颜色,所以我的帽子的颜色是红的."

另一类有名的逻辑智力难题是有关说真话和假话.一个典型的例子是讲一个探险家和住在那个地区的两个部落:一个部落的成员总是说谎;另一个部落的成员总是说真话.他碰到了两个土人.他问高个子土人"你是说真话的吗?"这个

土人回答说："古姆"．小个子土人能讲英语，就解释说："他说'是'，但是他是个大骗子．"这两个土人各属于哪一个部落？

这个问题比它看起来要容易．如果你能看透高个子的土人不管他是说真话还是说谎话，他都必然回答"是"，那么就能很快得到解答．既然小个子土人对他的回答讲的是真话，所以他肯定是说实话的，而他的同伴（高个子）就必然是说谎的．

练习 6　智力测验难题

1．拉森、詹斯、墨菲和史密斯四个人的职业是屠夫、银行办事员、杂货商和警察．每个人的职业是什么？

a．拉森和詹斯是邻居并且轮流开车带着对方去上班．

b．詹斯挣的钱比墨菲多．

c．拉森玩滚木球总是赢史密斯．

d．屠夫总是走着上班．

e．警察不住在银行办事员附近．

f．杂货商唯一碰到警察的时候，是警察因为他高速行驶而扣留他．

g．警察挣钱比银行办事员和杂货商要多．

2．卡尔森先生，佛格森先生、米勒先生和史密斯先生在巴克斯特城里当建筑师、银行家、药剂师和清道夫．他们的工作分别是什么？

a．药剂师的工资是清道夫的两倍．

b．建筑师的工资正好是药剂师的两倍．

c．银行家的工资正好是建筑师的两倍．

d．虽然卡尔森先生的岁数比工资高于佛格森先生的人都大，佛格森的工资不到卡尔森先生的两倍．

e．史密斯先生比米勒先生恰好多挣 377 镑．

3．谁是美国小姐？

a．依达（IDA）同亚利桑那州小姐的哥哥订了婚．

b. 玛利（MARY）和马里兰州小姐在对着裁判员的那一行的两端。

c. 安（ANN）在裁判员的右边，紧挨着明尼苏达州小姐。

d. 毛特（MAUD）和维拉（VERA）都不代表衣阿华州。

e. 佛蒙特州小姐在凯蒂（KATIE）和亚利桑那州小姐中间。

f. 堪萨斯州小姐在依达和明尼苏达州小姐中间。

g. 维拉同裁判员左边的姑娘不相邻。

h. 美国小姐是名字和她的州名开头字母相同的唯一的那个姑娘。

五、数学的逻辑结构

1. 逻辑结构的基础

数学是由许多不同的领域或者分支，例如算术、代数、概率论和拓扑学等所组成的．每一个分支都是按照一定的逻辑规则发展和构成的．一个合乎逻辑构成的数学分支叫做一个逻辑结构或者系统．

为了建立一个逻辑基础上的数学结构，数学家必须从用一些词来表达他的思想开始，例如“数”或“点”等等．这些词是不加定义的，有时称为原始术语．它们通常具有一些由我们的使用经验而获得的涵义．此外，数学家还不加证明地承认一些命题是成立的．这些假设称为公设或者公理．命题“线是点的集合”就是一个普通公理的例子．大多数公理是建筑在直觉或经验之上的．其他词的来源是用不加定义的词或者假设来定义新词而得到的．

其次，数学家发展了某些运算或规则来描述用这些数学系统中的元素可以做的事．他可以描述如加法那样的一种运算，也可以叙述测量直线的长度的一条规则．于是为了简化思维和书写，他用“+”这样的符号来表示加法，用 AB 来表示直线．

最后，数学家采用了一个如何进行证明（或者论证）的步

骤．这些步骤通常是一系列演绎的三段论法．如果所假设的词、运算和公理为真，并且步骤是合乎逻辑的．那么结论就叫做必然推断．

我们所使用的词、运算和公理时常与现实世界的物、事和过程相联系．在这种情况下，纯粹数学就变成了应用数学．例如，我们可以用筹码代表数或加法，我们也可以把纸上的一个黑点代表几何上的一个点．不过，作为一个逻辑结构，数学并不需要和任何实物或者事件相联系．在纯粹数学中，数、点、线都是抽象的概念． 集合在数学中既不是具体对象的堆集，甚至也不是纸上的记号． 数学的精髓不在于词句或者记号，而在于它所使用的方法．正如在象棋中，“马”不是特定的方式刻出来的一块木头，而是代表由规则确定的特定走棋模式的一个标记．模型和图可以帮助我们掌握抽象的概念．例如维恩图帮助我们理解数学家们使用“全体”、“某些”、“与”、“或”等等的方法．但图并不是概念本身．我们不能用图来证明我们的定理．数学的证明不需要实物、测量或者经验来证实．因此，数学的证明是处理数学思想和概念，及与此相关的命题．它就是证明这些命题不互相矛盾．同时，我们经常也可以把数学命题解释成现实世界的事物的命题．这样，当我们选用的数学正确时，我们也许能够对日常现象做出预计．但

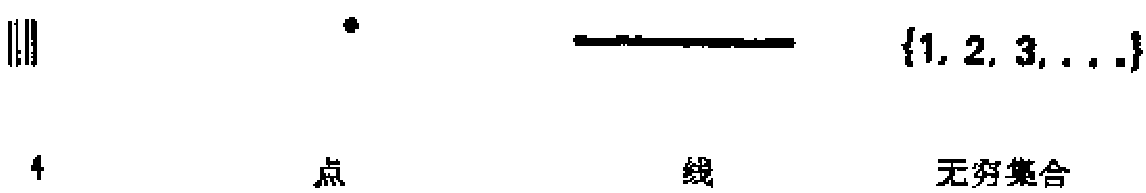


图 28　概念的图示

我们必须记住，数学的正确性并不能保证我们预计的正确性。

2. 不加定义的术语

每当我们想要表达一个观点时，总要使用我们认为听众或者读者能够懂得的术语。我们可能要这样描述一支游行队伍：“有许多**游行车**、**士兵连队**、**骑马警察分队**和丰富多采的**乐队**”。这些黑体字都是多义的，而我们料想读者会挑出用在这儿的那个词义。

如果我们想要知道一个词的涵义或定义，我们可以查字典。但字典经常使用所谓“循环定义”的方法。如果我们查“机会”这个词，其中的一个定义是“运气”。但我们查“运气”这个词，其中给出的一个定义又是“机会”。把这些定义放到一起，我们就得出：机会是机会。

假如你去查“不喜欢”这个词。如果你把查到的解释都排列在下面，你就会注意到，最底下那一行的所有词都是在前面定义中已经用过的，或者又转回到了原来所定义的词。

不喜欢

反感　　**不快**

不喜欢　**厌恶**　**讨厌**　**反感**　**不喜欢**

反感　**讨厌**　**反感**　**不喜欢**　**厌恶**　**不快**

这些例子说明，为什么一本好的词典总要给出例句来加以说明怎样用词。我们也可以理解为什么我们在逻辑中必须

从一些不必其他词来定义的词开始。

我们在数学中常使用不加定义的词，包括“或”、“与”(和)、“一个”、“点”、“线”等等。当我们想要表达一个抽象的思想时，我们常以实例来加以说明.这样，我们就可能说：“一条直线象一段拉紧的丝线，或者一束光线.”本书中前面我们就说过“集合就象在圆内的点.”在推理中，我们必须确实了解我们可以使用哪些不加定义的术语。

3. 定　　义

要想推理正确，我们必须使用恰当的词以做到言必所指，指必所言。我们需要定义术语，使我们能用简短的名称来表示复杂的思想。定义应清楚且表达简化。

下面是一个好定义所具有的性质。

(1) 所定义的术语应该包括在定义之中：“一个正方形是一个……”

(2) 此术语应包含于它所属的下一个集合中：“一个正方形是一个矩形……”

(3) 定义应包含区别这个术语和属于同一个集合的其他成员的特征：“一个正方形是一个矩形，它具有一对相等的邻边。”

(4) 命题中只能含有已定义过的或者公认为不加定义的术语。我们所假定的矩形、边、相等、相邻等这些术语是不加定义就可以接受的。

（5）定义必须是可逆的：“具有相等邻边的矩形，是正方形.”

（6）最后，一个定义要做到能把所定义的术语与所有其他术语区别开来．我们关于正方形的定义就把它和矩形、平行四边形、四边形或者多边形区别开来．

4. 几何学的逻辑结构

几何学是第一个作为逻辑系统发展起来的数学分支．早在公元前500年，古希腊人就完成了这一工作．从那时起，它就用来做为演绎科学的一个范例．一开始，不加定义的词是“点”、“线”、“在……之间”．“在……之间”这个词用于“点B在点A和C之间”这样的情况．几何学的第一公理是：

（1）每一条线都是点的集合．

（2）过两点，有而且只有一条直线．

（3）如果点B在点A和点C之间，则点A不在点B和C之间．

图 29

我们现在就用这些不加定义的词和公理来表述定义．

下面关于线段的定义就是一个例子．

如果A和B是两个点，则线段AB定义为，所有属于过

点 A 和点 B 的唯一的直线而且在点 A 和点 B 之间的所有点的集合。

使用这些不加定义的词、公理以及定义，现在我们就可以证明定理了．下面就是一个简单的例子．

定理：若 A、B 和 C 是三个点且 B 在 A 和 C 之间，则 C 不包含在线段 AB 内。

证明：

命算	理由
(1) B 在 A 和 C 之间.	已知
(2) 若 B 在 A 和 C 之间则 C 不在 A 和 B 之间.	由公理 3，这是不可能的.
(3) 若 C 不在 A 和 B 之间则 C 不包含在线段 AB 之内.	根据线段定义.

5. 算术和代数的逻辑结构

我们都知道，算术是与数打交道的．如果认真地讲，我们没有一个人能够清晰地说明什么是我们所说的"数"．但是我们确实知道在学习数学时，我们曾碰到或创造了一系列不同类型的数．首先，我们学习计数并用自然数系统做到了这一点．我们很快就会发现，不论我们用怎样的顺序来数一堆石头，总是终止在同一个自然数上．所以，我们可以用这个数字来表示一堆石块的多少，这叫做序数．我们还创造了基数，发现对它可以象对序数一样用同样的记号．我们创造了把这些

数成对地结合起来的两种运算．一种我们叫做“加”并且为它选择了记号“+”．另一种我们叫“乘”，使用记号“×”或者更简短一些用“·”作为它的简单符号．我们发现，在基数中有两个相当特殊的数，0 和 1．0 的特殊性在于，无论我们选择其他怎样的数，如 8，用运算 + 把它和 0 结合起来，我们仍然得到我们原来的那个数，就是 $8+0=0+8=8$． 类似地，1 的特点在于如果我们把它和任何别的数用第二种运算——乘法结合起来，结果仍和原来的数相同，即 $8\cdot1=1\cdot8=8$．

仿此，总是使用“任何数”这样的词来给出一长串例子就太笨拙了．所以，我们发明了“代数”(一种描述数的性质的简略语言)． 我们约定使用 a 到 z 的字母代表我们所讨论的集合中的任何一个数．这样，我们可以把整个上面一段有关 0 到 1 的特殊性质非常简明地写成：

$$a+0=0+a=a \qquad a\cdot1=1\cdot a=a$$

这是序数和基数范围内都遵从的一个规则．

这里要强调指出，这是相当多的数都遵从的一条更加基本的规则．因为它太明显了，所以我们已经把它忽略掉了．当你对一个加法的和，或者对一个乘法的积写出答案时，实际上你得到的是什么呢？如果你所处理的是序数，你得到的就是另一个序数；如果你涉及的是基数，你得到的就是另一个基数．你能够把这一点用代数的简写符号写出来吗？下面就是

$$a+b=c \qquad a\cdot b=c$$

如果你把系统内的任何两个数结合起来，你的结果还是这个系统内的一个数．把这一点用学术语言说出来就是：“基

数(序数)系统关于乘法(加法)是封闭的."

但是,我们都清楚,在最开始学算术时,还包括另外两种运算,即减法和除法. 我们能够用加和乘的运算来描述这两种运算吗?

$6-2=?$ 是否可以写成: $2+?=6$ 而 $15\div3=?$ 可否写成 $3\times?=15$. 用简写的办法"a 除以 b"可以写成 $b\times c=a$. 这种作法总是可能的吗? 就是说,运算"除以"在基数系统里总是封闭的吗? 答案是否定的,因为虽然我们能够找到一个 c 使 $3\times c=12$,但是我们不能找到一个 c 使 $3\times c=11$.

为了解决这个困难,我们又创造了一个新的数的系统,叫做分数. 这样一来,除法就变得可能了. 让我们看一下为什么引入分数后就可能了,这倒是很有意思的. 给定任何分数 a,要找到另一个分数 a^* 使 $a\times a^*=1$. 如果 a 是 $3/2$,a^* 等于多少? 我们知道,问 $b\div a=?$ 就是问 $a\times?=b$. 但是,如果我们知道总可以找到一个 a^* 使 $a\times a^*=1$,而 $1\times b=b$,这就有 $a\times a^*\times b=1\times b=b$. 因此,假如 $(a\times a^*)\times b=a\times(a^*\times b)$,分数 $(a^*\times b)$ 就是除法的商. 不过,我们总假定 $(2\times3)\times5$ 和 $2\times(3\times5)$ 是理所当然的. 因此,这个规定,用简写记成 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$,是所有性质良好的数要遵从的一个规则(乘法结合律).

这样,分数的发明就使除法总是可能了. 但是直到我们引入有方向的数,减法才成为可能. 这个过程和前面完全相同. 我们创造了"有符号的数"使得对每个这样的数 x,总存在有另外一个 x',使得 $x+x'=0$. 然后,因为 $y-x=?$

同 $x+?=y$ 是相同的问题，而第二个问题我们总能够答出。对于 $(x+x')+y=0+y=y$，所以我们再一次假设 $(x+x')+y=x+(x'+y)$，数 $(x'+y)$ 就是问题的答案。这里，我们再次认为理所当然的$(2+3)+5$和$2+(3+5)$总相同。因此，用简写表示的定律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 是我们期待性质良好的数应遵从的另一个规则(加法结合律)。

虽然我们大多数人都是依次碰到自然数、分数、有方向的数，但这并不是最简单的逻辑顺序。在自然数之外，逻辑学家可以引进有方向的整数，我们叫做整数。在整数之外，他们构造了有正负号的分数．这个系统叫做有理数，它是第一个我们上面已遇到的四种运算都可以在里面进行的系统。但请想一想！即使在这个系统里除法总是可能的吗？回忆以前讲过的，这相当于我们是在问自己是否总能填上 $a\times?=b$ 的空白，答案是否定的。 它只有在 a 不为 0 的情况下才总是可能的。除以 0 则是没有意义的。不过，这只是唯一的例外。

为了把我们的数系及其算术和代数应用到空间和几何上去，我们的确还必须创造更多的数。 我们还需要有一种数来表示边长为单位长度的正方形对角线的长度、单位半径的圆的面积等。没有这样的数，我们的数学在实际生活中就不能在很多地方应用。逻辑学家已经做了大胆的尝试，创造了这类超出有理数的数。这样创造出来的系统称为实数系统。应该公正地指出，这些大胆的尝试曾被某些数学学派持以很大的异议。如果你有兴趣，可以在数学史中查一下芝诺、克罗内

克、弗雷奇、罗素、布劳威尔和希尔伯特等人*的名字．

可是，逻辑学家已经尝试过：从自然数建立起整数，由整数建立起有理数，由有理数建立起实数的过程和我们是无关的．对于我们数学家而言，我们将要把这些数、相等的关系和这两种运算看成是可以不加定义的，做为“原始术语”．怎样用这些词使那些数所服从的定律建立一定的规则，并且在实际上声称：我们所谓的数，就是遵从这些定律的东西，就象一个棋手把在棋盘上按照某个特定方式来走动的棋子叫“马”一样．我们把这些定律叫做公理．所有可以由这些公理推导出来的定理称为实数(有理数)的数学．

请试着在一页纸上写出你所期望数要遵从的所有规则．用代数的简略写法写成平行的两列，一列是加法运算，另一列是乘法运算．如果你想想下面的问题，可能会对你有帮助：你能用几种方法算出 $2+3+7=?$ 能用几种方法算出 $2\times3\times7=?$ $(+3)+(-3)$ 是什么？$\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{2}\right)$ 是什么？0 和 1 这两个数有什么特殊性？怎样比较快地算出 $(4\times3)\times(3\times7)+(4\times3)\times(6\times3)$？如果一个乘“积”为零，你知道因子会是怎样？

把你写的和下面的比较一下．

---

* 芝诺约公元前五世纪的希腊哲学家．克罗内克（1823—1891）德国数学家．弗雷奇（1848—1925）德国数学家、哲学家．罗素（1872—1970）英国哲学家、数理逻辑学家．布劳威尔（1881—1966）荷兰数学家．希尔伯特（1862—1943）德国数学家．——译注

加法	乘法

对于已知的任何两个数 a、b 存在着一个数 c，使

$a+b=c$	$a\cdot b=c$

每个运算都是封闭的。　　（封闭性公理）

*　　*　　*

$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

每个运算都是可结合的。　　（结合律）

*　　*　　*

$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$

每个运算都是可交换的。　　（交换律）

*　　*　　*

存在一个数 0，使	存在一个数 1 使
$a+0=0+a=a$	$a\cdot 1=1\cdot a=a$

在系统中对于每种运算，都存在一个单位元素。

*　　*　　*

每一个 a，存在一个元素 a' 使	对每一个数 a（除去零）存在着一个元素 a^* 使
$a+a'=0=a'+a$	$a\cdot a^*=1=a^*\cdot a$
a' 称为 a 关于加法的逆，我们通常写为 $-a$。	a^* 称为 a 关于乘法的逆，我们经常记为 a^{-1}。

*　　*　　*

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

乘法关于加法是可分配的(分配律)：

由于 $2+3\cdot 5$ 不等于 $(2+3)\cdot(2+5)$，加法关于乘法是

不可分配的。

* * *

若 $a \cdot b = 0$，则 $a = 0$，或者 $b = 0$

若 $a + x = b + x$，　　若 $a \cdot x = b \cdot x$，且 $x \neq 0$，

则由消去律 $a = b$。　　则由消去律 $a = b$。

现在，如果我们是真正有能力的逻辑学家，我们就要着手去做两件事．头一件，保证这些公理的一致性．就是说，没有一个公理与其它公理的组合产生矛盾．第二件，它们是独立的．也就是说，任何一个公理不能由其它公理推导出来．不过，这些工作超出了本书的范围．

意大利的数学家皮亚诺（1858—1932）实际上做的更多。他建立了四个准则或者公理．由它们出发可以推出自然数性质的所有其他逻辑规律，并且进一步，正如我们所知，可以建立整个熟知的算术体系和相应的代数．但是我们把上面列过的那些做为我们的公理已经满足了．服从它们的任何系统称为一个域．

现在，用上面的公理来验证我们算术或代数论证的每一步过程．

命题：若 $36+n = 3n + 8$ 则 $n = 14$。

证明：

命题	理由
(1) 若 $36+n = 3n + 8$ 则 $3n + 8 = 36 + n$	若 $a = b$ 则 $b = a$
(2) 若 $3n + 8 = 36 + n$	加法定义

则　　$3n + 8 = 28 + 8 + n$

(3) $3n + 8 = 28 + n + 8$　　交换律和结合律

(4) 则 $3n = 28 + n$　　消去律

(5) 若 $3n = 28 + n$　　加法定义

则　　$2n + n = 28 + n$

(6) 则 $2n = 28$　　消去律

(7) 若 $2n = 28$

则　　$2n = 2 \times 14$　　乘法定义

(8) 若 $2n = 2 \times 14$

则　　$n = 14$　　消去律

命题"若 $n = 14$ 则 $36 + n = 3n + 8$"也成立吗？你可以用类似上面的步骤来证明一下。

用相似的方法，我们可以证明代数中的许多命题。当然，要是都这样做，就得要有一库房类似上面已经讨论过的那样的定义和假设。

练　习　7

1 已知 $1+1=2$ 和 $2+2=4$。证明：若 2 乘以 2，则乘积为 4。

命题	理由
a. $2\times2 = 2\times(1+1)$	a. ______
b. $2\times(1+1) = (2\times1)+(2\times1)$	b. ______
c. $(2\times1)+(2\times1) = 2+2$	c. ______
d. $2+2=4$	d. ______
e. $2\times2=4$	e. ______

2. 已知 $1+1=2$，$2+1=3$，$3+1=4$。

证明 $2+2=4$

3.如可能，用一个例子证明下列命题不成立：

a. 若 x 和 y 是自然数，则对任何 x 都能找到一个 y 使

$$x-3=y$$

b. 若 x 和 y 是自然数，则对每个 x 可以找到一个 y 使

$$\frac{x}{2}=y$$

c. 若 x 是任意的奇自然数，则

x^2+11x 是偶数

4.证明下列代数式成立：

a. 如果 $x+5=17$，则 $x=12$

b. 如果 $2x+4=22$，则 $x=9$

c. 如果 $x=7$ 则 $3x+8=29$

d. 如果 $45+x=8x+17$ 则 $x=4$

六、再谈逻辑

1. 真值表

数学家把推理看成一种游戏．游戏的规则就是逻辑演绎的法则．游戏的动作就是我们可以采取的推演步骤．这些步骤就是按照规则可以做出的命题．为了做逻辑游戏，我们必须能够用确定的规则来验证每一个步骤．逻辑游戏的目标就是我们想要得到的结论．每一个动作的目的都是往目标的方向推进．游戏所需要的用具就是一系列已假设为真的前提．

逻辑学家喜欢用诸如 $P \Rightarrow Q$ 这样的符号来做逻辑游戏．这样，他在推理时，就可以不管 P 和 Q 代表的是什么前提．这种方式和我们在代数中用字母符号来代表数字是相似的．例如我们说："对于任何数 a 和 b 有 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$"，而在演绎过程中，我们说："对于任何前提 P、Q 和 R，若 $P \Rightarrow Q$，且 $Q \Rightarrow R$，则 $P \Rightarrow R$"．

如果可以按照一定的规则完成推理，那么甚至电子计算机也可以进行演绎．不管计算机还有什么不能做的，它肯定可以象人一样做逻辑游戏．用计算机来做演绎时，我们需要一份各个前提之间的关系表．这种表叫真值表，它是根据每个命题(或前提)必须要么成立，要么不成立这样的想法做出的．

我们已经清楚，演绎是根据命题做出的．这些命题可以是简单的句子，例如“万里晴空”． 当我们把简单句子组合在一起就得到复合句子，例如“万里晴空，阳光明媚”．

逻辑则依赖于仔细地使用那些构成复合句的联系词，例如“与”（和）、“或”、“若”（如果）……“则”（那么）……等．假如 $x=3$ 而 $y=4$，于是，我们可用联系词来表示蕴涵关系：“若 $x=3$，且 $y=4$，则 $2x+y=10$”．

2. 否 命 题

在前面的章节中我们已经看到过，一个命题的反面叫做否定命题或否命题．若 P 代表任何一个命题，则 $\sim P$ 就表示 P 的否定命题．这样，如果 P 代表“8 是一个偶数”，那么 $\sim P$ 就是说“8 不是一个偶数”．

如果 Q 代表“x 是一个平方数”，$\sim Q$ 就是“x 不是一个平方数”的简略写法．一当我们给出 x 的值，Q 和 $\sim Q$ 中的每一个都会是真或不真． 如果 $x=4$，则 Q 为真，$\sim Q$ 不真．如果 $x=5$，则 Q 不真，而 $\sim Q$ 为真． 我们可以把这些用下面的真值表归纳在一起．其中 T 表示真（成立），F 表示不真（不成立）．

Q	$\sim Q$
T	F
F	T

现在，让我们考察复合命题．假如 P 代表“x“是个偶数”

而Q代表“x是个平方数”。如果我们要把这两个命题放到一起来考虑，就是说既有P也有Q，这在逻辑上叫做合取。在语法中“与”(和)是一个连接词。逻辑中“与”使用的符号是$\wedge$。这样，命题：“x是一个偶数且x是一个平方数”可以写成$P\wedge Q$。

为确定合取命题$P\wedge Q$是否为真，我们必须了解命题P和命题Q是否同时为真。例如，如果$x=4$，上面的合取命题为真，但如果$x=9$，则不真。合取命题为真当而且仅当命题P和命题Q都同时为真。

合取命题的真值表如下：

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

注意表上的头两列包括了所有的可能性。

另一种把这些命题联系在一起的方式是使用“或”这个词(P或Q)。

假如你告诉你母亲说你今天下午要去看足球或者看电影，只要你是去了其中一处或者另一处，那么你就遵守了诺言。当然你不能两个地方同时都去。但是，如果你哥哥说他要在你生日送给你一本书或者一张唱片，而他出于慷慨，两样都给你了，他肯定也并没有失言。因此，词“或”可以有两个意思：“或者一个，或者另一个，但非两者”，以及“或者一个，或者另

一个，或者两者"．你可能会同意逻辑学家选用后一个意思．这样，我们又一次注意到词的涵义系指我们对词选用的涵义．

组合命题，P或Q或两者，写成 $P\vee Q$，在逻辑上称为一个选言命题．如果选言命题约定为真，则两个命题中至少有一个也必须为真．

如前，设P表示"x是一个偶数"和Q代表"x是一个平方数"．下面是P和Q的选言命题的真值表：

x	P	Q	$P\vee Q$
16	T	T	T
8	T	F	T
9	F	T	T
17	F	F	F

把这些真值表组合在一起，我们可以列出 $P\wedge\sim Q$ 的真值表：

P	Q	$\sim Q$	$P\wedge\sim Q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

让我们把真值表应用到一个简单的命题中看看它们是否有意义．我们将用句子"正在下雨"和"正在出太阳"为例．

令 P 代表“正在下雨”，

Q 代表“正在出太阳”，

则 $\sim P$ 代表“未在下雨”，

$\sim Q$ 代表“未出太阳”。

容易看出否命题(非命题)的真值表是有意义的．如果天下雨为真，则天没下雨为不真．

真值表(非命题)

P(正在下雨)	$\sim P$(未在下雨)
T(正在下雨为真)	F(未在下雨为不真)
F(正在下雨为不真)	T(未在下雨为真)

真值表(合取命题)

P(正在下雨)	Q(正在出太阳)	$P\wedge Q$(正在下雨又出太阳)
T(正在下雨)	T(正在出太阳)	T(正在出太阳又下雨为真)
T(正在下雨)	F(未在出太阳)	F(正在出太阳又下雨为不真)
F(未在下雨)	T(正在出太阳)	F(同上)
F(未在下雨)	F(未在出太阳)	F(同上)

真值表(选言命题)

P	Q	$P\vee Q$
T(正在下雨)	T(正在出太阳)	T(正在出太阳或者正在下雨)
T(同上)	F(未在出太阳)	T(同上)
F(未在下雨)	T(正在出太阳)	T(同上)
F(同上)	F(未在出太阳)	F(正在出太阳或下雨不为真)

真值表(蕴涵关系)

P	Q	$P\Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

根据这个表,只是在 P 为真,且 Q 不真时,蕴涵关系才不真.为了更好地理解这一点,你试着完成下面的真值表,其中 P 和 Q 不用实际句子来代替:

$$P \qquad\qquad Q \qquad\qquad \sim P \qquad\qquad \sim P\vee Q$$

(如果你有困难,就让 P 代表"出太阳"Q 代表"我将乐于郊游野餐")你将有:

P	Q	$\sim P$	$\sim P\wedge Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	F	T

现在,再考虑 $P\Rightarrow Q$: 按照通常的意思这意味着如果 P 真,Q 不能不真——P 为真保证了 Q 为真.

你还可以看出,$P\Rightarrow Q$ 的真值表和 $\sim P\vee Q$ 相同.所以,这两个命题叫做等价的.用来表示 P 和 Q 具有同样的真值(等价)的简写符号是 $P\Leftrightarrow Q$.

假如我们有下列句子"当且仅当你有票,你就可以去看

比赛."另外一种说法是"如果你有票,当且仅当那时,你可以去看比赛."这个复合句只是在"你可以去游戏"和"你有票"二者都为真时,或者都不真时才为真.

在数学中经常使用联系词"当且仅当".它给出我们早先讨论过的必要充分条件.

$P \Longleftrightarrow Q$ 给出如下的真值表:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

假如有人提出"若 $P \Rightarrow Q$ 为真,则 $\sim P \vee Q$ 也为真."如果我们把真值表的信息组合在一起,就得到如下真值表:

	P	Q	$\sim P$	$P \Rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
1.	T	T	F	T	T
2.	T	F	F	F	F
3.	F	T	T	T	T
4.	F	F	T	T	T

在这个表中我们的前提之一 $P \Rightarrow Q$ 在1、3和4行中为真.我们的推论是 $\sim P \vee Q$ 在1、3和4行也为真.只要当前提 $P \Rightarrow Q$ 为真,推论 $\sim P \vee Q$ 也为真.所以,我们做出结论:推论是合理的.注意,我们可以在不用 P 和 Q 代表任何具体句子的情况下做到这一点.

这里有几个句子可使这个推论更为具体。

P = 米切尔发出杂货。

Q = 史密斯付的杂货账单

则 $P \Rightarrow Q$ 如表中所记的那样是成立的.这样 $\sim P \vee Q$ 表示"米切尔未发出杂货或者史密斯付杂货账"也为真。

真值表给了我们一个检验合理性的简单方法. 我们记得,如果一个推断是从前提逻辑地得出的,它就是合理的. 首先,按照前提之间关系选择真值表. 查看表中前提都为真的那一行. 如果对于这样的每一行结论都为真,则推理是合理的. 然而,如果任意有一行所有前提为真,而结论不真,则论证就是不合理的. 结论不合理的原因是,它没有从前提合乎逻辑地导出.

校验合理性的一个简单的办法是由蕴涵关系的真值表给出. 若 P 为真且 Q 为真,则 $P \Rightarrow Q$ 为真. 当 P 真且 Q 真,这是 $P \Rightarrow Q$ 的唯一的结论. 这就告诉我们推论是合理的.

为了确定一个命题是否为真,可以做出许多更复杂的真值表. 为说明逻辑推理的一个方法,我们已经把这些基本的真值表列出来了.

这些基本的真值表可以用来建立许多更为复杂的表,然后这样的表可以用来检验各种命题的合理性.

练习 8 逻辑和真值表

1.检验下列推理的合理性:

a. $p \Leftrightarrow q$ b. $p \vee q$ c. $p \wedge q$

$$\frac{p}{\therefore q} \qquad \frac{\sim p}{\therefore q} \qquad \frac{\sim p \Rightarrow q}{\therefore \sim q}$$

2. 检验下列推理的合理性:

a. $p \Rightarrow q$ b. $p \Rightarrow q$

$$\frac{\sim q \Rightarrow \sim r}{\therefore r \Rightarrow p} \qquad \frac{\sim r \Rightarrow \sim q}{\therefore \sim r \Rightarrow \sim p}$$

3. 检验下列推理的合理性:

a. $p \Leftrightarrow q$ b. $p \vee q$ c. $p \Rightarrow q$

$q \vee r$ $\sim q = r$ $\sim p \Rightarrow \sim q$

$$\frac{\sim r}{\therefore \sim p} \qquad \frac{\sim p \vee \sim r}{\therefore \sim p} \qquad \frac{p \wedge \sim r}{\therefore q \wedge \sim r}$$

4. 把下列推理变为符号形式并检验它的合理性:

如果这是一本好书,则它值得一读.

要么数学容易,要么这本书不值一读.

所以,这不是一本好书.

指出下列推理是否合理(不管你自己认为前提或结论是否为真)并给出理由.

5. 若价格再低下去,则经济不景气肯定正在到来.

经济不景气肯定正在到来.

所以,价格会更低.

6. 白天正在变长.

如果白天变得更长,黑夜就会更短.

所以,黑夜正在变得更短.

7. 如果 12 月比 8 月热, 6 月就比 11 月冷.

12 月比 8 月热.

所以, 6 月比 11 月冷.

8. 如果一个男人结婚了,他将有烦恼.

这个人没有烦恼。

所以，他没有结婚。

9.吃绿苹果足以致病。

如果你生命危险你要请医生。

必须是生病方才请医生。

所以，如果你吃绿苹果，你就会生命危险。

10.已知(a)如果下雨，我会弄湿。

(b)仅当我弄湿了，我才生病。

(c)我得病了。

结论：

11.确定下列推理是否合理。根据推论的合理性规则或者不合理的形式来检验你的判断。

a.如果约翰有罪，那么在做案时他必定在现场。

但他当时不在现场。

所以约翰是无罪的。

b.如果病人得的是天花，他的体温要超过华氏 100 度。

病人体温还没有超过 100 度。

所以病人没有得天花。

c.如果皮特在 75 秒内驾车驶了 1 英里，他超过了车速限制。

皮特在 75 秒内驾车没有驶过 1 英里。

所以皮特没有超过车速限制。

3. 逻辑智力难题

我们讨论过的逻辑原则可以用来编出许多不寻常的逻辑

智力题．这里就是一个简单的例子：

为什么这是成立的：即“如果星期六下雨，我就不买新唱片”？

（1）如果我去打猎，我将剩不下钱．

（2）只要当我出去打猎，就没有网球赛．

（3）星期六下雨足以取消网球赛．

（4）不买新唱片是没有钱剩下的必要条件．

解这个题目的第一步是对题中所包含的简单命题选定符号．

P — 我将去打猎．　R = 有网球赛．　Q = 我将有余钱．S = 星期六下雨．T = 我将买新唱片．

现在，我们题目的命题变成：

（1）$P \Rightarrow \sim Q$　　（3）$S \Rightarrow \sim R$

（2）$\sim R \Rightarrow P$　　（4）$\sim Q \Rightarrow \sim T$

如果我们重新安排一下这些命题的次序，我们就得到如下合理的结论：

（1）$S \Rightarrow \sim R$ 如果星期六下雨，那么没有网球赛．

（2）$\sim R \Rightarrow P$ 如果没有网球赛，那么我将去打猎．

（3）$P \Rightarrow \sim Q$ 如果我去打猎，那么我就没有钱剩下．

（4）$\sim Q \Rightarrow -T$ 如果没有钱剩下，那么我就买不了新唱片．

（5）$S \Rightarrow \sim T$　如果星期六下雨，那么我就买不了新唱片．

下面是改写的路易斯·卡罗尔的一个有名的推理：

(1) 如果王军去参加舞会，他不会不梳头.

(2) 为使王军看起来漂亮，他就必须整洁.

(3) 如果王军抽雪茄烟，那么他没有自尊心.

(4) 如果王军梳头，他看起来漂亮.

(5) 只有当王军参加舞会时他才系一条白领带.

(6) 没有自尊心足以使王军看起来不整洁.

所以，如果王军系一条白领带，他就不是抽雪茄烟的人.

让我们用符号把这个难题再来分析一下.

P = 王军去参加舞会.

Q = 王军梳头.

R = 王军看起来漂亮.

S = 王军是整洁的.

T = 王军是抽雪茄烟的.

U = 王军没有自尊心.

V = 王军系一条白领带.

我们的命题是这样的：

(1) $P \Rightarrow Q$

(2) $R \Rightarrow S$

(3) $T \Rightarrow U$

(4) $Q \Rightarrow R$

(5) $V \Rightarrow P$

(6) $U \Rightarrow \sim S$

如果我们重新排列这些命题，我们就得到了一个推理的逻辑链环.

$V \Rightarrow P$, $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$, $R \Rightarrow S$

现在考虑第六步，$U \Rightarrow \sim S$. 利用逆否命题这就变成 $\sim(\sim S) \Rightarrow \sim U$ 或者 $S \Rightarrow \sim U$. 而第三步可以写成 $\sim U \Rightarrow \sim T$ 的形式。于是，我们的推理链环可以继续如下：

$S \Rightarrow \sim U$, $\sim U \Rightarrow \sim T$.

所以有 $V \Rightarrow \sim T$，这就是结论.

到此为止，读者已经学好了可以解决各种逻辑难题或者自己编一些逻辑难题. 在编逻辑题时，在逻辑序列中编一系列命题，然后改变命题的用词并且重新安排次序. 同时可以把没有意义的幽默的命题穿插到你的题目中去.

练习9 逻 辑 难 题

1. 用符号形式写出下列语句，令 P 为"佛里德精明"，而 Q 是"乔治精明".

a. 佛里德精明而乔治糊涂.

b. 乔治精明而佛里德糊涂.

c. 佛里德和乔治都糊涂.

d. 要么佛里德精明，要么乔治糊涂.

e. 既非佛里德也非乔治精明.

f. 佛里德不精明，乔治糊涂.

g. 佛里德和乔治都糊涂是不真的.

2. 令 P 表示"股票价格高"和 Q 代表"股票上涨". 把下面的句子变成普通语言：

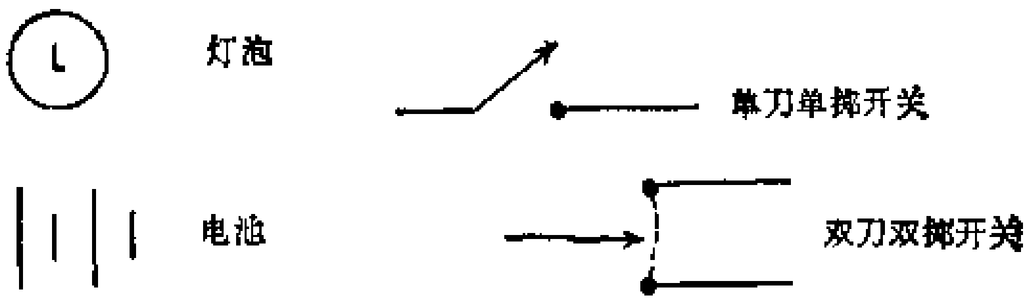
a. $P \wedge Q$ b. $P \wedge \sim Q$ c. $\sim P \wedge \sim Q$ d. $P \vee \sim Q$ e. $\sim(P \wedge Q)$ f. $\sim(P \vee Q)$ g. $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

3. 令 P 代表"琼斯通过了考试"，Q 代表"史密斯通过了考试" 把下面的命题转换成符号形式："琼斯和史密斯同时考得不好是不成立的".

对这个复合命题构造一个真值表．用文字说明在什么条件下这个命题为真。

4. 用电子线路作逻辑推理

真值表的突出用途之一是设计电路，而反过来这些电路又可以用来确定一个命题是否为真，或者一个推论的是否合理。



逻辑演绎用的电路需要电池或变压器、开关、灯泡和联接导线等．开关可以置于开或关来代表 P 和 Q 的真值．灯泡指示整个命题的真值．如果灯亮了，则认为命题为真，如果灯不亮，则命题不真．在下面的电路中，用了上面的记号．

把某些这样的单元电路组合起来，就可以得到检验任何复合逻辑命题的电路。

$P\Rightarrow Q$（蕴涵）：

$P\Rightarrow Q$ 和 $\sim P\vee Q$ 的真值表相同，所以我们必须对 P 接成一个非电路（或叫否电路）以构成 $\sim P$ 和 Q 的或电路，如图31所示．你从虚线可以看出，P 的开关总是同时操作的（双刀双掷开关），所以蕴涵电路可以简化成图32那样。

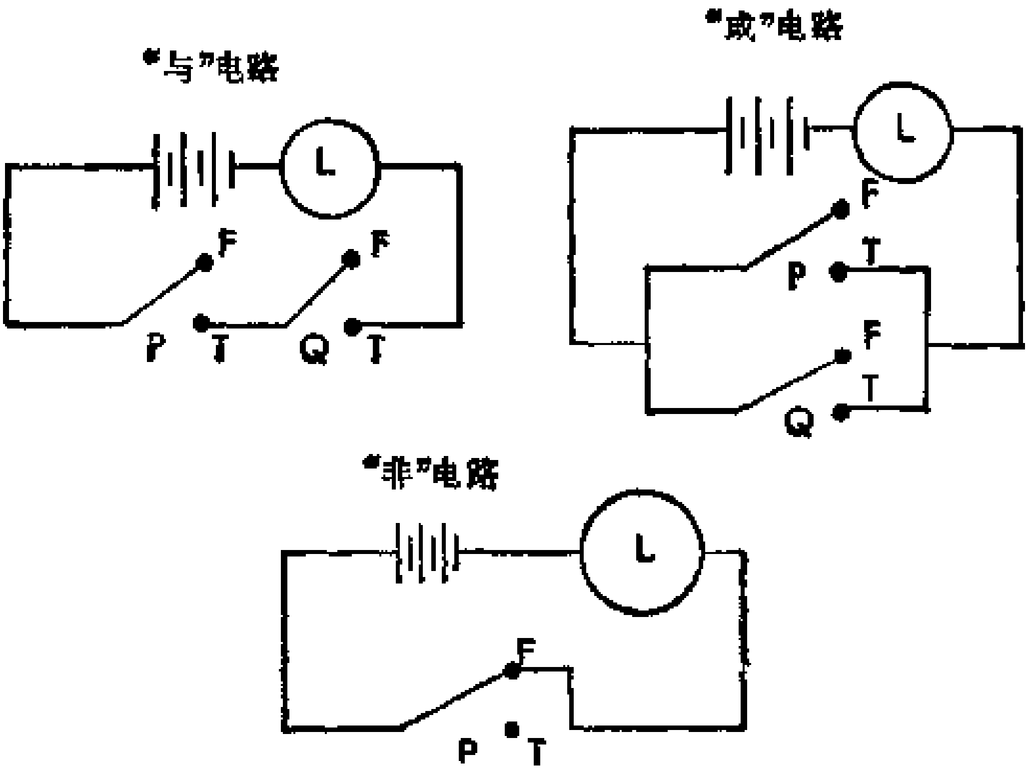


图 30

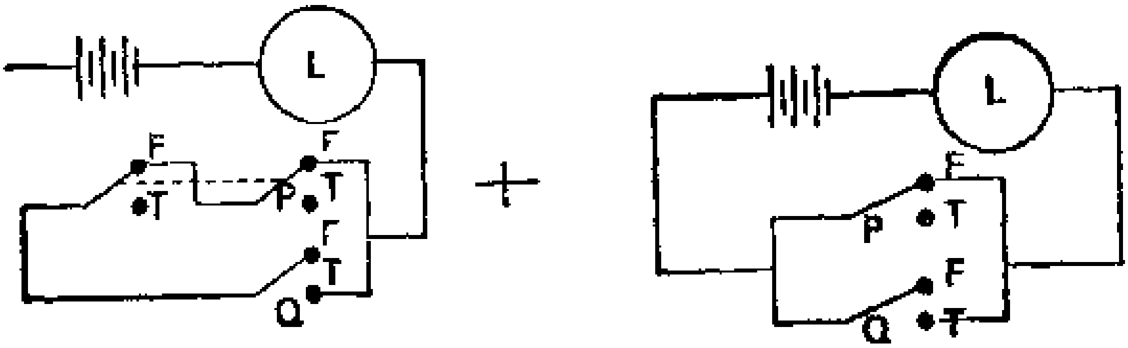


图 31　　　　　　　　图 32

$P\wedge(\sim Q\vee R)$ [与(或)]:

P(从与电路)必须如图 33 那样和一个 $\sim Q$ 及 R 的或电路相串联.

$P\Leftrightarrow Q$ (即当且仅当):

$P\Leftrightarrow Q$ 和 $P\Rightarrow Q$ 与 $Q\Rightarrow$ 相同. 所以我们必须把两个

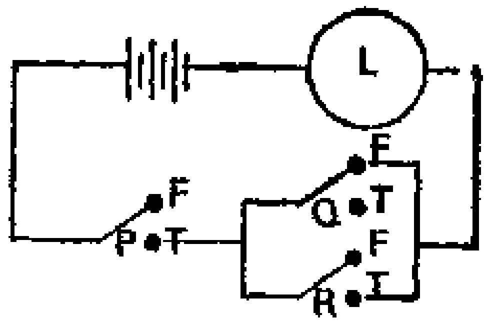


图 33

简单的蕴涵电路联到一起，一个是 $P \Rightarrow Q$，一个是 $Q \Rightarrow P$ 如图 34 所示。

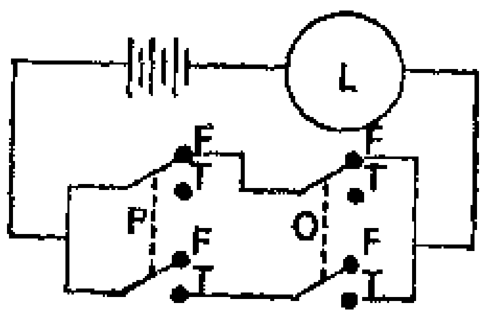


图 34

练习 10 真值表和逻辑电路

1. 利用 $P \Rightarrow Q$ 的真值表作为基础完成下面的真值表：

逆否命题真值表

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim Q \Rightarrow \sim P$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

2. 画出下面复合命题相应的逻辑电路

a. $(P\wedge Q)\wedge R$

b. $(P\vee Q)\wedge R$

c. $(P\vee Q)\vee R$

d. $P\wedge(Q\wedge R)$

3. 是否看起来"与"是可结合的?(提示: 比较上面的 2a 和 2d)

4. 用电子线路或者真值表比较下列逻辑关系以确定"或"和"与"操作是否可分配的:

a. $P\vee(Q\wedge R)$

b. $(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

c. $P\wedge(Q\vee R)$

d. $(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

练 习 答 案

练习1

1. a. 心理学家，男女学生合校中有经验的老师； b. 官方飞机失事报告，统计学家； c. 卫生官员； d. 生理学家和心理学家，有经验的警官和地方行政官员，公认的公路安全机构的统计学家。

2. a. c. f. 总是对的；只有当 x 和 y 代表同一个数时 b. d. e. g. h. 才为真。

3. a. b. 我们自己的经验和测量. c. 权威的经验，测量、推理. 如果我们不怕麻烦可以自己作测量和推理. d. 几乎全是推理. e. 象 c. 一样，但这里与实际的测量很少有关. f. 我们自己的经验（需要极少的测量和推理），或者皇家天文学家的推理、经验和测量. g. 象 c. 一样，只是我们会发现用自身的经验和推理要困难得多. h. 几乎完全要由权威来判定. i. 权威的说法，我们关于小偷的下场的经验，或者自己去查阅有关文件.

练习2

1. 这里每个数可以有几个不同的搭配：48 可分为(5，43)、(7，41)，(11，37)，(17，31)，(19，29). 为了不遗漏任一种情况，可以写出小于 24 的所有素数，再划掉任何一个配对数不是质数的数. 相应于 98 的表则从 (5，93)，(11，87)，…… 开始；64——(3，61)，……；124——(11，113)。

2. 一个 6 便士和一个 3 便士的硬币

3. a. $(10\times11)/2$； b. $(100\times101)/2$； c. （第一个数加上最后一个数）、被加数的个数；或者也可以记成：最后一个数、最后一个数加 1.

4. a. 1，3，7 都是素数. b. 对所有的自然数 n，2^n-1 都是素

数。c. $2^4-1=15$，15 不是素数，因此我们只能说对有些自然数 n，2^n-1 是质数。

5.至今没有一个人画出了一张需要多于 4 种颜色的地图。

练习 3

1. a. $M\Rightarrow B$. b. $P\Rightarrow L$. c. $A\Rightarrow H$, d. $C\Rightarrow T$.

2.这里有几个可能的例子：

a. 如果 2+2 等于 4，则 2×2 也等于 4

b. 如果我开车走 100 英里要用 3 加仑汽油。

我已经开了 100 英里。

所以我的汽车已经用了 3 加仑汽油。

c. 如果一个人是特许会计师，那么他很会计算。

如果一个人很会计算，那么他的加法很好。

因此如果一个人是特许会计师，那么他的加法很好。

d. 如果一个三角形二边相等，则它有二角相等。

如果一个三角形有两角相等，那么它有二等边。

3.命题	理由	简写
a. $3x+5=29$	已知	P
$\Rightarrow 3x+5=24+5$	加法定义	$P\Rightarrow Q$
$\Rightarrow 3x=24$	加法消去律	$Q\Rightarrow R$
$\Rightarrow 3x=3\times 8$	乘法定义	$R\Rightarrow S$
$\Rightarrow x=8$	乘法消去律	$S=T$
如果 $3x+5=29$	蕴涵关系的规则	$P(P\Rightarrow Q$,
则 $x=8$		$Q\Rightarrow R$, $R\Rightarrow S$, $S\Rightarrow T)$ $\Rightarrow T$.
b. n 是给定的偶数。	已知	P
如果 n 是偶数，		
则 $n=2x$	偶数定义	$P\Rightarrow Q$
若 $n=2x$		

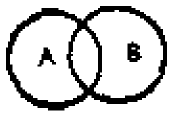
则 $n^2=(2x)^2$	等式相乘仍相等	$Q\Rightarrow R$
若 $n^2=(2x)^2$		
则 $n^2=2(2x^2)$	乘法定义	$R\Rightarrow S$
若 $n^2=2(2x^2)$		
则 n^2 为偶数。	偶数定义	$S\Rightarrow T$
因此，如果 n 是	P, $P\Rightarrow Q$, $Q\Rightarrow R$	
偶数，则 n^2 是偶数。	$P\Rightarrow S$, $S\Rightarrow T$	$P\Rightarrow T$
c. 如果一个男人有投票权，则他必定满 21 岁了。	选举法	$P\Rightarrow Q$
约翰在上次选举中投票了。	已知	R
约翰是个男人。	已知	S
因此约翰过 21 岁了。		$R(S\cdot P)\Rightarrow Q$

练习 4

1．下面是些可能的例子： a. 没有可以被 6 整除的奇数。 b. 有些数学家也是好音乐家。 c. 每个奇数的平方是奇数。 d. 所有正方形都有 4 条边。

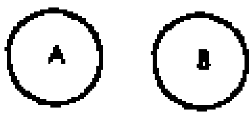
2．a. $A=$ {狗}

$B=$ {温良的动物}



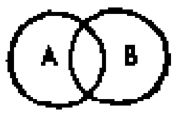
b. $A=$ {小猫}

$B=$ {戴手套的动物}



c. $A=$ {兔子}

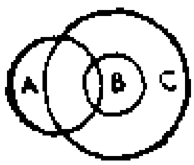
$B=$ {白色的动物}



d. $A=$ {中学生}

$B=$ {六英尺高的男孩子}

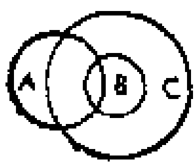
$C=$ {篮球运动员}



3．a. $A=$ {孩子}

$B=$ {有自行车的人}

$C=$ {成绩一般的人}

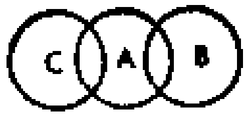


有些孩子成绩平常。

b. A = {女孩子}

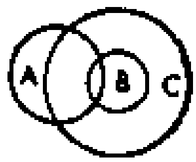
B = {多嘴的人}

C = {受欢迎的人}



有些女孩子不受欢迎

c. 有许多种可能的维恩图——得不出结论。

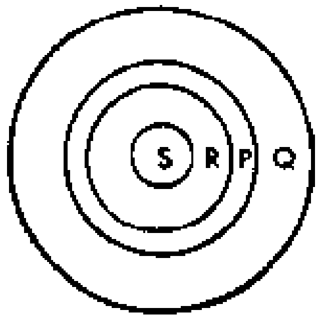


d. A = {英国人}

B = {数学教师}

C = {聪明人}

有些英国人很聪明。



6. 所有无理数都是实数。

所有整数都是有理数。

所有无理数都是实数。

7. A = {伊顿公学学生}

B = {公立学校学生}

C = {不诚实的人}。

8. d.

练习 5

1. a. 如果彼得没上大学，他不是至少 15 岁。不真。

b. 如果一棵植物没开花，它就死了。不真。

c. 如果一个数不是奇数，则它的平方也不是奇数。真。

d. 如果一种动物不是狗，那么它就没有四条腿。不真。

2. a. 如果彼得至少 15 岁，那么他就上大学了。不真。

b. 要是一棵植物活着，它就开花。不真。

c. 如果一个整数的平方是奇数，那么这个数就是奇数。真。

d. 如果一种动物有四条腿，它就是狗。不真。

3. a. 如果彼得不是至少 15 岁，那他就没上大学。真。

b. 如果一棵植物不是活着，那它就不会开花了。真。

c. 如果一个整数的平方不是奇数，这个整数就不是奇数。真。

d. 如果一种动物没有四条腿，那它就不是狗. 真.

4.必定为真的有：a. 如果一个苹果好吃，那它就是红的. b. 如果你没有课本，那你的数学就会得“差”. c. 如果一个数能被 2 整除，它就是偶数(充分的)；而如果一个数是偶数，它就能被 2 整除(必要的).(总之，一个数是偶数的必要充分条件是它能被 2 整除).

练习 6

1.银行会计——拉森. 屠夫(卖肉的)——墨菲. 杂货商——詹斯. 警察——史密斯.

2.银行办事员——佛格森. 建筑师——史密斯. 药剂师——米尔纳. 清洁工人——卡尔森.

3.堪萨斯州小姐.

练习 7

1. a. 已知. b. 分配律. c. 1 的特殊性质和运算 x. d. 已知.

2.

命题	理由
$2+2=2+(1+1)$	已知
$=(2+1)+1$	结合律
$=3+1$	已知加法性质
$=4$	加法定义

3. a. 如果 $x=2$，不存在自然数 $2-3$. b. 如果 $x=3$，不存在自然数 $3/2$. c. 没有发现任何一个反例，所以估计这个命题可能为真. 注意到奇数 x 可以写成 $2k+1$ 的形式，k 为自然数，你可以证明这个命题为真.

4.

命题	理由
a. $x+5=17\Rightarrow x+5\Rightarrow 12+5$	加法定义
$\Rightarrow x=12$	加法消去律
b. $2x+4=22\Rightarrow 2x+4=18+4$	加法定义
$\Rightarrow 2x=18\Rightarrow 2x=2\times 9$	加法消去律，乘法定义.

$\Rightarrow x = 9$ 乘法消去律

c. $x = 7 \Rightarrow 3x = 3 \times 7 = 21$

$\Rightarrow 3x + 8 = 21 + 8 = 29$

d. $45 + x = 8x + 17 \Rightarrow$

$(17 + 28) + x = 8x + 17$ 加法定义。

$\Rightarrow 17 + (28 + x) = 8x + 17$ 结合律

$\Rightarrow 28 + x = 8x$ 加法消去律

$\Rightarrow 28 + x = (7 + 1)x$ 加法定义

$\Rightarrow 28 + x = x(7 + 1)$ 乘法交换律

$\Rightarrow 28 + x = 7 \cdot x + 1 \cdot x$

$\Rightarrow 28 + x = 7x + x$ 分配律的特殊性质

$\Rightarrow 28 = 7x$ 加法消去律

$\Rightarrow 7 \times 4 = 7 \cdot x$ 乘法定义

$\Rightarrow 4 = x$ 乘法消去律

练习 8

1. a. 合理； b. 合理； c. 不合理。

2. a. 不合理； b. 合理。

3. a. 不合理； b. 不合理； c. 合理。

4. $P \Rightarrow Q$

$P \vee \sim Q$ 合理

$\sim R$

$\overline{\sim P}$

5. $P \Rightarrow Q$

Q 不合理

$\overline{P}$

6. 合理。7. 合理。8. 合理。

9. 不合理。

10. 我弄湿了衣服。

11. a. 合理 $\dfrac{P \Rightarrow Q \quad \sim Q}{\sim P}$ b. 合理 $\dfrac{P \Rightarrow Q \quad \sim Q}{\sim P}$ c. 不合理 $\dfrac{P \Rightarrow Q \quad \sim P}{\sim Q}$

练习 9

1. a. $P\wedge\sim Q$; b. $Q\wedge\sim P$; c. $\sim P\wedge\sim Q$; d. $P\vee\sim Q$; e. $\sim P\wedge\sim Q$; f. $\sim P\wedge\sim Q$; g. $\sim(\sim P\wedge\sim Q)$ 或写作 $P\vee Q$.

2. a. 股票价格高，而且股票看涨。 b. 股票价格高，但股票并没有看涨。 c. 股票价格不高，股票也并不看涨。 d. 或股票价高，或股票不看涨，二者至少居一。 e. “股票价高，而且股票看涨”不真。 f. “股票价高，或者股票看涨”不真。 g. “股票价格不高，或者股票并不是看涨”不真。

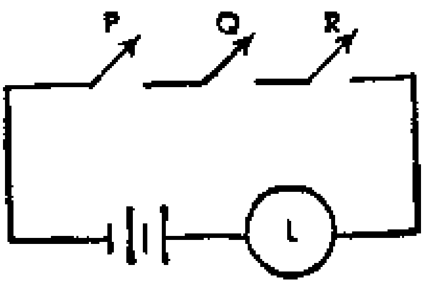
3. $\sim(\sim P\wedge\sim Q)$ 命题为真的情况是除了琼斯和史密斯都没通过考试之外的其它三种情况。

P	Q	$\sim(\sim P\wedge\sim Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

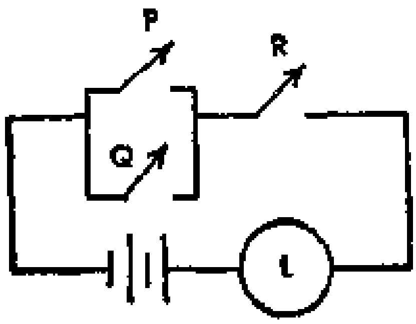
练习 10

1. 记住 $P\Rightarrow Q$ 与 $\sim P\vee Q$ 是等价的。 因之 $\sim Q\Rightarrow\sim P$ 与 $Q\vee\sim P$ 等价。这样在第 4 列有 T、F、T、T。

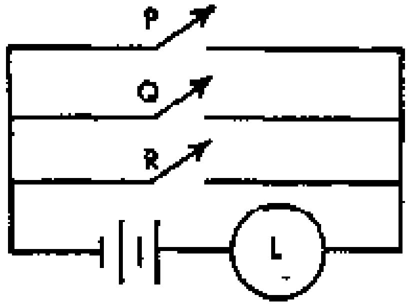
2. a.



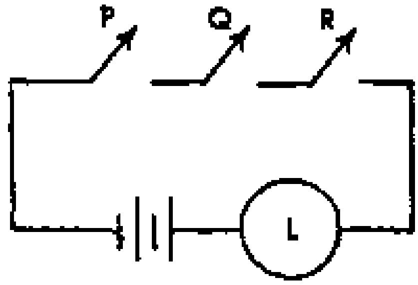
b



c.



d.



3.是

4.与操作对或操作是可分配的，即 $A \Leftrightarrow B$。或操作对与操作也是可分配的，即 $C \Leftrightarrow D$。

[General Information]
书名=数学逻辑与推理
作者=（英）D．A．约翰逊　D．F．泰勒
页数=96
SS号=10441894
出版日期=1984年03月第1版