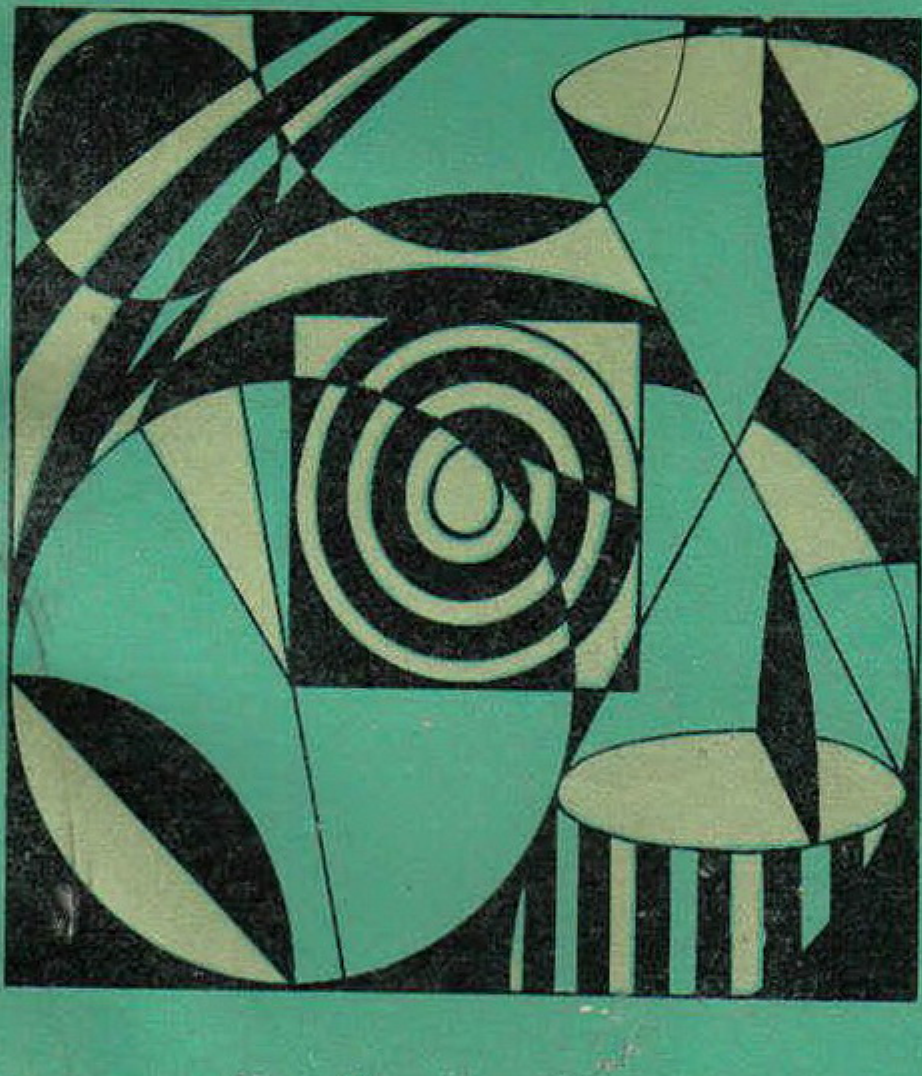
《自修数学》小丛书

曲 线

〔英〕D. A. 约翰逊 著



科学出版社

《自修数学》小丛书

曲　　线

〔英〕D. A. 约翰逊 著

毛毓球 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书是《自修数学》小丛书中的一本。书中把现实世界中常见的事物看作是一些几何曲线，并以通俗易懂的语言介绍了这些曲线（如圆、椭圆、抛物线、双曲线、转动曲线等）的特点以及它们的画法等。

本书深入浅出、生动有趣，适合中等文化程度的读者阅读。它对启发人们的思维、培养人们对数学的兴趣，能起积极作用。

Donovan A. Johnson

CURVES

John Murray London, 1966

曲　　线

〔英〕D. A. 约翰逊 著

毛毓球 译

责任编辑 毕颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980年10月第一版	开本：787×1092 1/32
1986年7月第二次印刷	印张：2 1/2
印数：68,201—70,400	字数：46,000

统一书号：13031·1348

本社书号：1871·13—1

定价： 0.45 元

出版说明

英国出版的《自修数学》小丛书（Exploring Mathematics on Your Own）是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物．该丛书自1964年初版后，于1974年、1976年多次再版印刷．为开阔读者眼界，增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学
测量世界
数型
毕达哥拉斯定理
统计世界
集合、命题与运算
数学逻辑与推理
曲线
拓扑学——橡皮膜上的几何学
概率与机率
向量基本概念
有限数学系统
无限数
矩阵

“在这种有条不紊的安排之下，
宇宙中存在着奇妙的对称；
各种天体轨道的运行和量值，
它们的关系是那样的协调一定。”

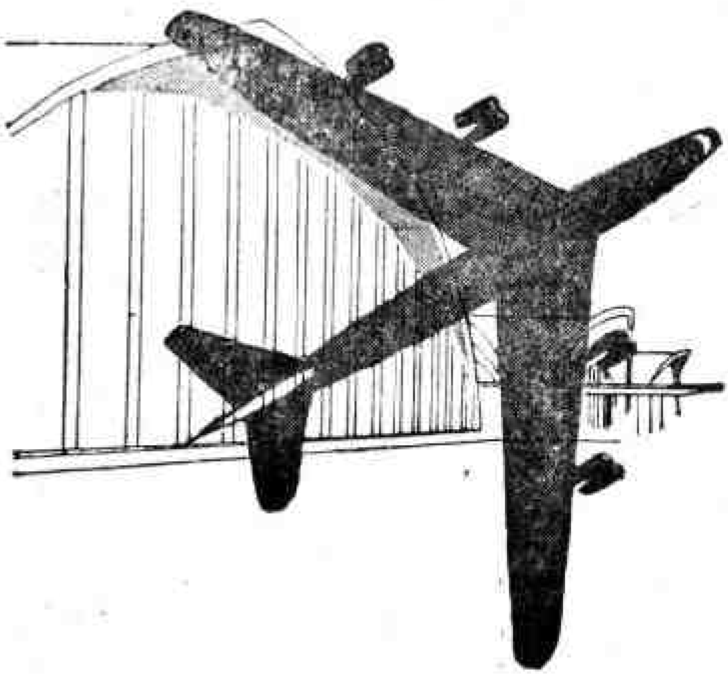
——哥白尼

写 在 前 面

我们写这本关于曲线的小册子，是为了与你们共享在探索有趣的数学概念中的愉快．读数学书就象阅读惊险小说或探索一个洞穴一样．数学里有许多令人惊奇的、迷惑人心的、变幻多端的和生动有趣的概念．我们希望当你在数学中独立进行探索时，借助于这本书，你将会由于发现各种新概念而感到乐趣盎然．

然而，读这本书不同于读别的书，例如，读故事书．开始时要读得慢一些，养成手头备有铅笔和纸的习惯．在阅读时应该充分地用它们来帮助你弄清概念．如果你最初对每句每段并不能十分理解，请不必为此而感到惊讶．但要有耐心．如果你能完成本书中的练习、作图和问题解答，你就会感到本书中一系列的概念容易理解得多了．我们希望这本书会给你带来许多乐趣．

目　　录



一、曲　　线

1. 现实世界中的曲线、形体和模型

我们生活的世界，是一个几何曲线，几何曲面，几何形体以及几何图案的世界. 从行星的轨道到大海的波涛，宇宙中这些曲线的轨迹，已经被人们在数学上加以分析. 从银河的形态到松球的结构，我们看出外形与图案的和谐. 从蝴蝶的对称到雪花的几何形状，足以表明自然界是有待探索的数学图形的模型.

工艺界也离不开曲线、形体和模型. 从宇宙飞船的飞行路线到电视的无线电波，这些曲线都有数学图形. 从喷气式飞机的形状到挖掘机的设计，它们的外形都要依据数学原理

来设计．从乐器的对称到流线型跑车，它们的基本模型都是几何形体和曲线．

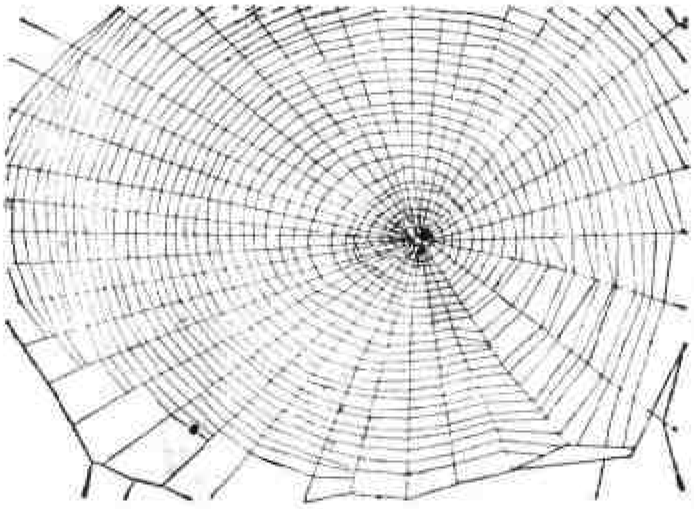


图 1　蜘蛛网上许多直线所组成的曲线

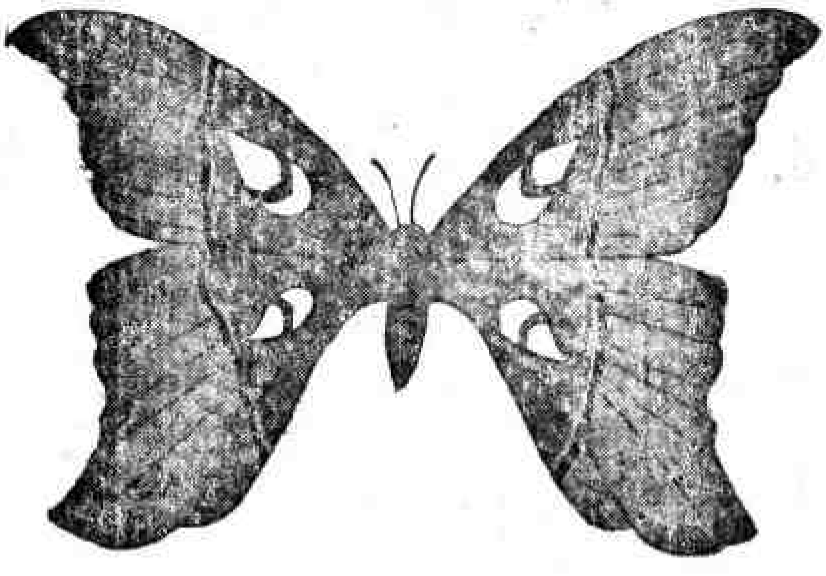


图 2　蝴蝶的对称

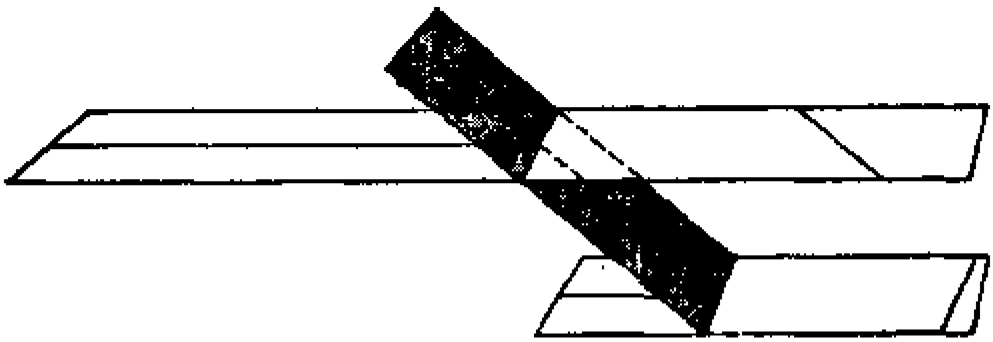
2．我们生活的空间

我们生存在空间里，这空间整个地围绕着我们．空间有

限度吗？我们说空间可以向任何方向扩展而没有限度．有时我们讲有限的空间，象房间里的空间，电冰箱里的空间等．

空间是直的还是曲的？迄今为止数学家们对这一问题已经争论了好几个世纪了．如果我们在地球上朝一个方向走去，譬如说向西方，我们就会回到出发点，因为地球的表面是个曲面．如果我们打算朝空间内一个方向，譬如向上飞行，我们还会回到我们的出发点吗？

数学家们把空间说成是点的集合．空间没有重量，我们不能看到、听到或触及到空间．我们常说到三维空间：长、宽、高．



3. 空间里的点、线和面

点 我们学习空间里的曲线必须从点开始．正象1是构成计数的基础一样，点是空间的基本元素．那么什么是点呢？我们把点想象为针的尖端或书页上的小点，但都不是．点是没有大小的，我们既看不到它，也摸不着它．数学家所说的点是指空间中的一个位置．记住，一个点仅仅表示空间中

的位置.

线 有时点的集合是线. 因此线是点的集合. 一条线没有宽度和厚度，但是我们说线是有长度的. 一条线可以朝两个方向无限伸展. 有时我们也讲线是动点的轨迹. 直线的一部分叫做线段. 度量线段用长度单位，例如英寸，厘米和英里等.

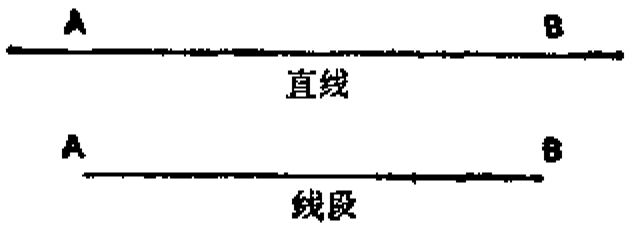


图 3

一条线可以是直线，象直尺的边，一页纸的折痕等. 一条**折线**是直线段的集合，这些线段有不同的方向，但端点相互联结. 再有就是曲线，曲线经常改变着它的方向.

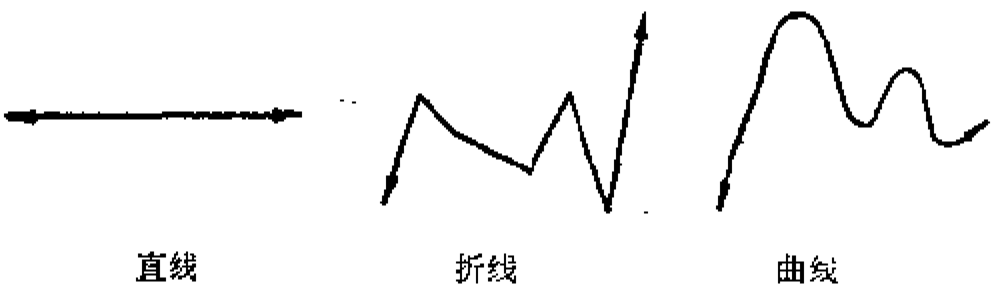


图 4

自然界里常会遇到的直线，如晶体的边、光线和昆虫的腿等. 但是自然界里大多数的是曲线，例如海边各种各样的贝壳、树干的年轮等都是曲线.

海贝的模型

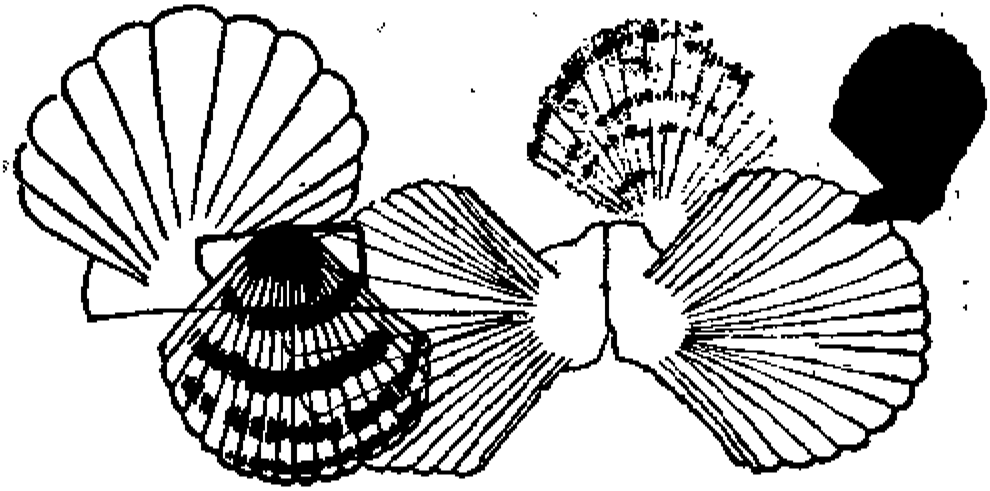


图 5

4. 平面和曲面

有时点的集合是平面．一个平面是平的表面，象桌面和墙壁．但是数学里所讲的平面是无形的．它是点的集合．一个平面没有厚度，但是具有长度和宽度．有时我们也说平面是直线运动的轨迹．一个平面可以无限延伸．平面的一部分可以用面积单位来度量，例如平方尺或亩等．

当一条曲线作非滑动的运动时，它的轨迹是曲面．球是最普通的曲面例子．当直线沿着曲线运动时就形成另外一些曲面．例如直线沿着圆周运动，就形成圆柱曲面．

5. 一维或二维

空间内的直线或平面可有不同的位置，见图 6．

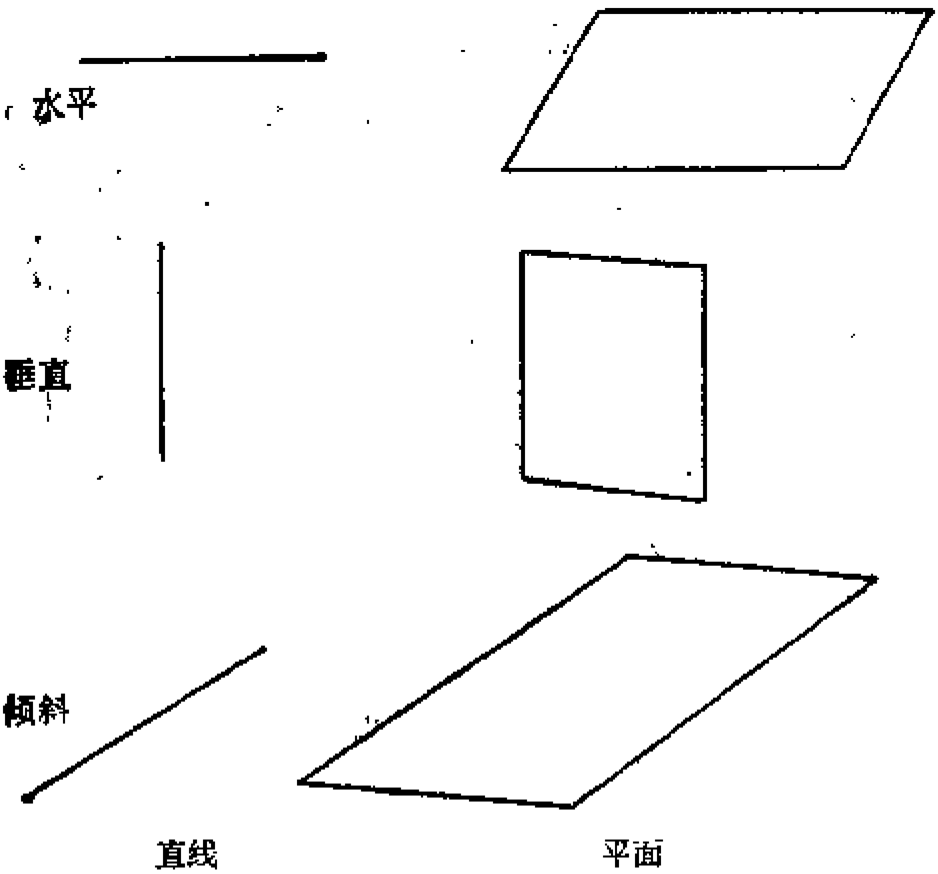


图 6

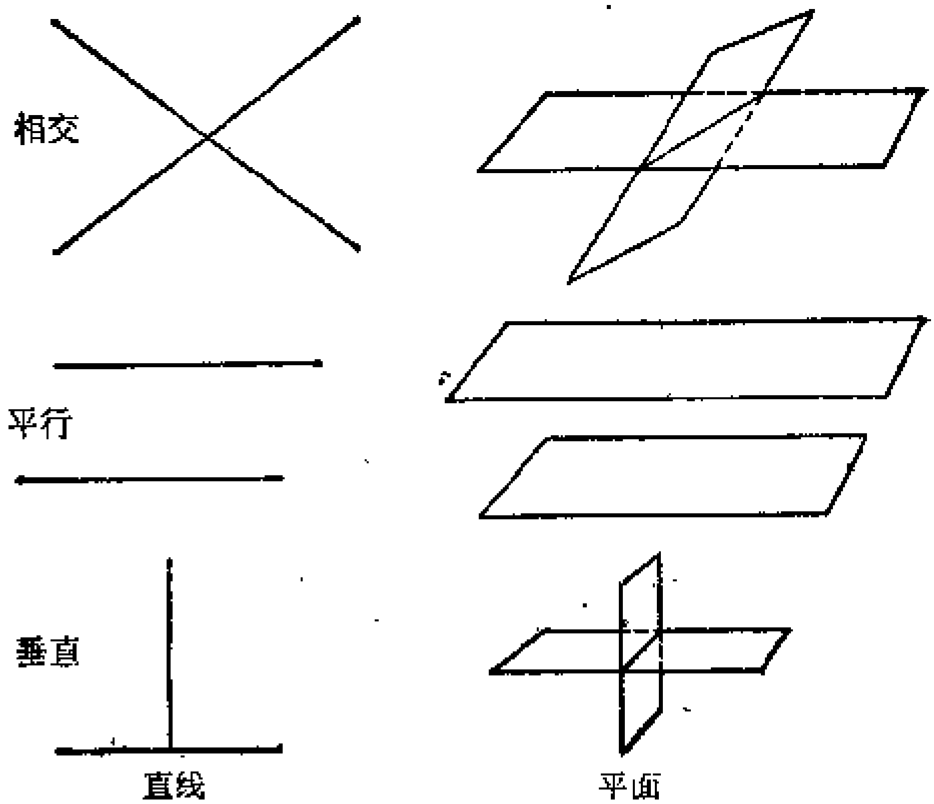


图 7

空间内两条直线或两个平面可以有不同的相互位置关系，见图 7.

当两条直线在不同的平面内而且不相交时，它们叫做**异面直线**. 当几条直线在同一平面上两两相交时，组成不同的几何图形叫做**多边形**(图 8).

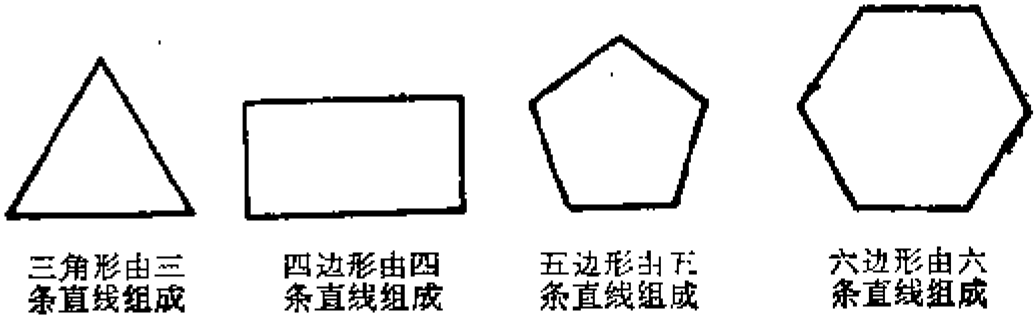


图 8

6. 三维或更多维

当几个平面相交时，组成不同的几何立体叫做**多面体**(图 9).

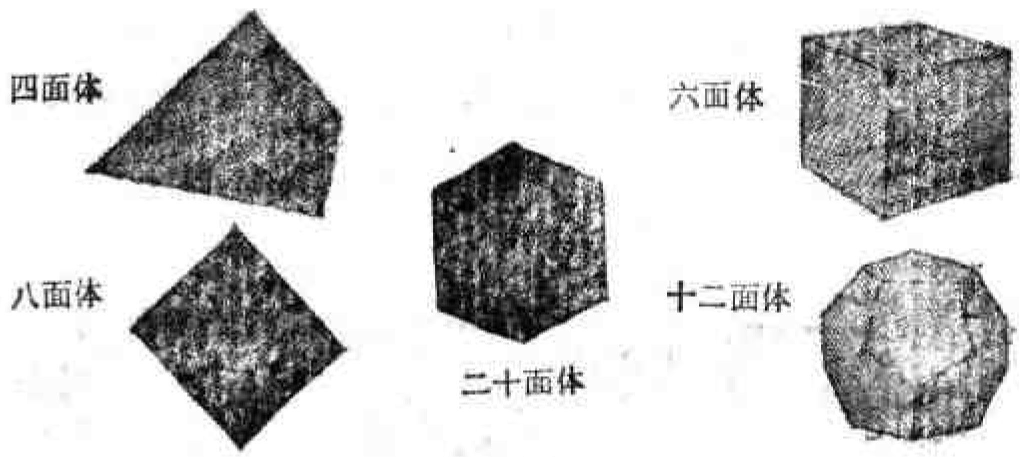


图 9

我们说点是没有大小尺寸的．当点运动时，它的轨迹可以形成线段，线段有一个尺寸（一维）：长度．一条线段被两个端点所限制．

如果一条线段作垂直于它本身的运动，运动的距离等于该线段的长，那么就形成一个二维的正方形．这正方形是由 4 条同一尺寸的线段围成的．如果这正方形作垂直于这一平面的运动，运动的距离等于正方形一边的长，那么就形成一个立方体，立方体具有三维．这个有限的空间由 6 个二维平面围成的．同样，这个立方体“作垂直于这一空间”的运动，那么就形成了四维的超立方体．这个有限的超立方体由 8 个三维空间围成的．上述中每运动一步，角或顶点的个数是原来的二倍．这样对于四维立方体它的顶点的个数是 2^4，或 16．对于 n 维来说，顶点的个数是 2^n． 如果我们检查每一图形的边数和表面数，我们发现边数是 $n\cdot 2^{n-1}$，而它的表面数是

$$(n^2-n)2^{n-3}.$$

因此，空间是个数无限而且广度也无限的点的集合．空间也可看作无数条直线的集合或无数个平面的集合．空间也可看作无数个有限空间的集合．下面就来研究空间里的曲线．

7. 空间里的位置

为了在空间里沿着曲线航行，我们必须确定点的位置并描述曲线．我们在数学上用图象来处理．让我们复习一下某些为了把空间扩展到四维的代数知识吧！我们怎样在直线上确定一个点呢？最简单的方法是用直线表示数轴，见图 10.

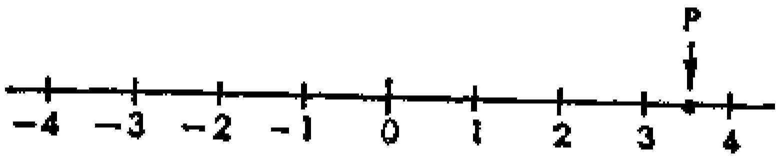


图 10

这样，我们便能用数字在直线上确定一个点，如 $3\frac{1}{2}$ 可以定在 P 点．确定点的位置的数叫做坐标．对于数轴上的每一点我们可以找到一个数，这个数就给定了它的位置． 方程 $x=3\frac{1}{2}$表示 P 点在直线上的位置．表示点在这条直线上的位置的一般方程是 $x=a$，这里 a 是任意实数．

其次，让我们来考虑点在平面上的位置． 如果我们想要在平面上确定一个点，我们就用两条数轴，如图 11 中的 Ox 和 Oy.

这样，P 点就被由坐标 (3，4) 所构成的有序数对所确定了．对于这平面上的任意一点，我们总能找到一对实数来确定它． $x+y=7$ 是经过 P 点的直线方程的一个例子．同样，在 xy 坐标平面内的任何直线方程总可写成 $ax+by=c$ 的形式．对于象 $x^2+y^2=25$ 的方程，它的图象是曲线，如图 11 中

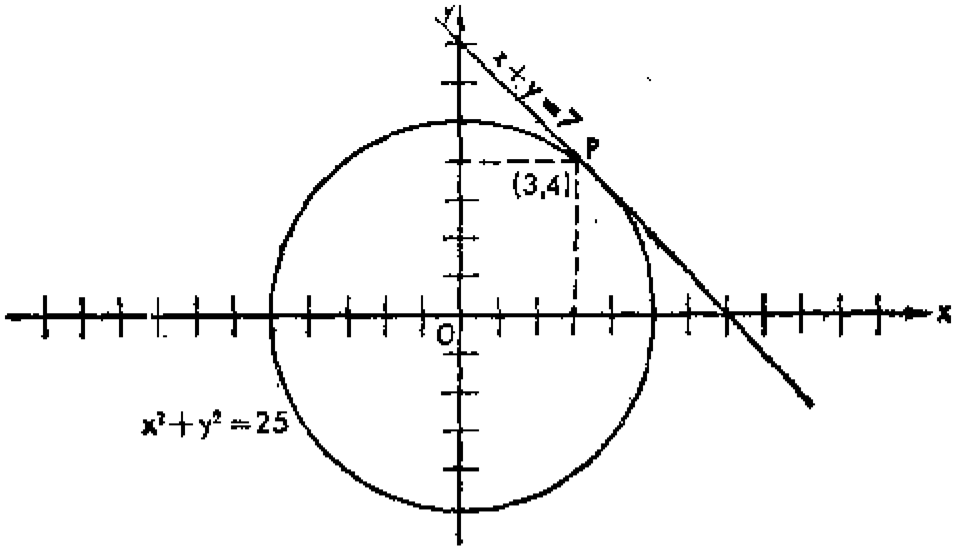


图 11

的圆．因为 $3^2+4^2=25$，所以 P 点也在这个圆上．

在三维空间中确定一点 P 需要三条数轴 Ox，Oy，Oz，如图 12．这样空间中的一点 P 被三个一组的有序数组(3，4，2)所确定．在这个空间中的任何一点，我们总能找到三个一组的实数组来确定它．

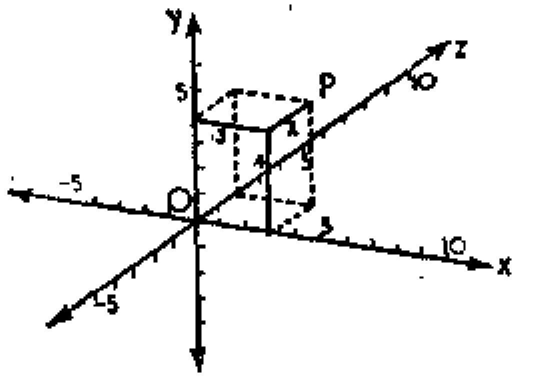


图 12

$x+y+z=9$ 是经过 P 点的平面方程的一个例子．在这个空间里任何平面的方程总可写成 $ax+by+cz=d$ 的形式．如果方程为 $x^2+y^2+z^2=29$，这个图象就是一个曲面，如

图 13 中的球. 因为 $3^2+4^2+2^2=29$，所以 P 点也在这个球上。

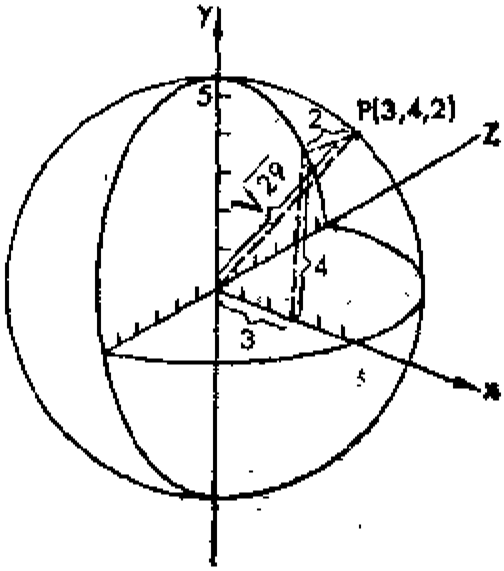


图 13

那么方程 $x+y+z+w=14$ 是什么情况呢？从数学角度来说，这是一、二、三、四维物体在四维空间里的表示式。这样，$x^2+y^2+z^2+w^2=25$ 就是一个超球面。这说明在数学上允许我们把三维的空间扩展到任意多维的"空间"。

8. 空间里的距离

用坐标来确定空间里的点，也能方便地找到它们在空间的距离. 为了便于说明，我们从简单的问题着手，在直线上先求出任意一点到原点 O 的距离. 在直线上，任意一点到原点的距离就是它的坐标的绝对值，例如 A 点到 O 点的距离是 7，见图 14。

在平面上要找出两点之间的距离，我们应用毕达哥拉斯

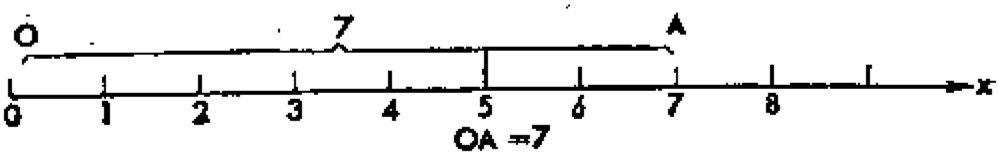


图 14

定理[1]. 在图 15 中，从原点到点 $B(x, y)$ 的距离 d 就是直角三角形 OAB 的斜边 OB 的长。显然 $d=\sqrt{x^2+y^2}$.

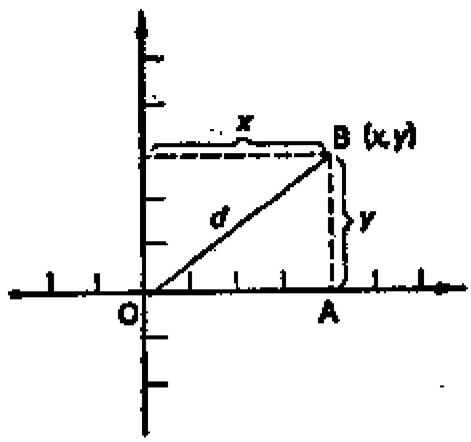


图 15

因此，如果 B 点的坐标是 $(4, 3)$，那么

$$OB=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

在三维空间里，求出一点到原点的距离也用类似的方法。在图 16 中，$C(x, y, z)$ 到原点的距离 d 是一个长方体的对角线的长。

$$d^2=OC^2=OA^2+AC^2=x^2+y^2+z^2$$

因此 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

如果 C 点的坐标是 $(3, 4, 7)$

---

1) 毕达哥拉斯定理，在我国叫做勾股定理。

那么

$$OC=\sqrt{3^2+4^2+7^2}=\sqrt{9+16+49}=\sqrt{74}=8.6$$

（近似值）

这个方法可以推广到在任意维中找出任意两点之间的距离．

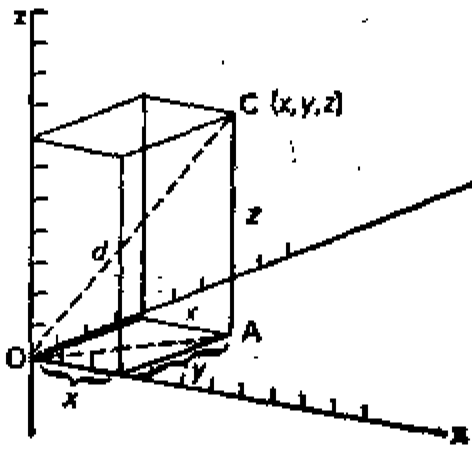


图 16

四维的有关计算对星际航行很有用处．在宇宙空间里没有相应的东西南北方向，甚至没有上下之分．当然在宇宙飞船中太阳是经常看到的，因此也就没有白天和黑夜． 如果你在卫星里作环绕地球的旅行，那么每 24 小时就有几个“白天”和“黑夜”．地球在空间的位置是和季节、月份、日期和小时密切联系着的．换句话说，我们的位置是相对于时间来说的． 因此，空间内的第四个坐标应是时间．

9. 极 坐 标

上面我们已经谈了在空间里确定点的方法，这种方法叫

做笛卡尔坐标系．这个系统是由法国数学家笛卡尔发明的，他还创造了解析几何． 此外，我们也可以用另一种系统来确定点在空间的位置，那就是极坐标．

为了用极坐标在平面内确定一个点，我们仍然用有序数对如 (3, 20°)． 有序数对中的第一个数表示从原点 O（叫做极点）到这一点的距离．第二个数是经过 O 点的水平线（叫始边）绕 O 转动到给定点时所成的角的度数，如图 17 所示．

从 O 到 P 的距离叫做 P 的**矢径或极半径**，常用记号 r 表

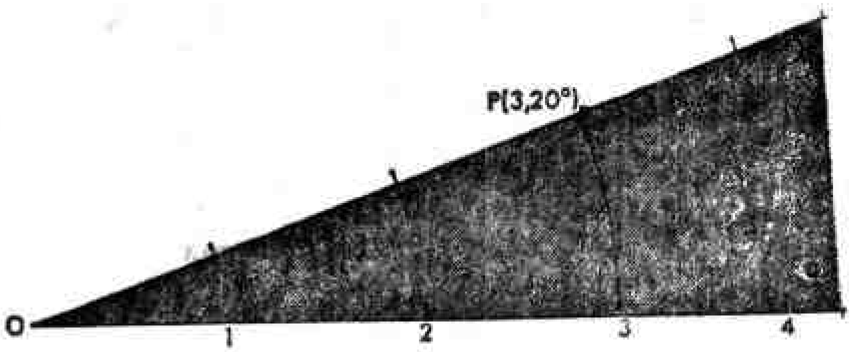


图 17

示．始边与 OP 之间的角叫做 P 的**极角**，常用记号 θ 表示．角的度量单位通常用**弧度**．

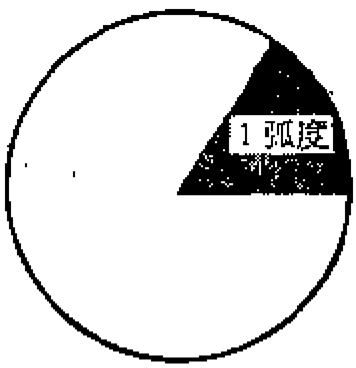
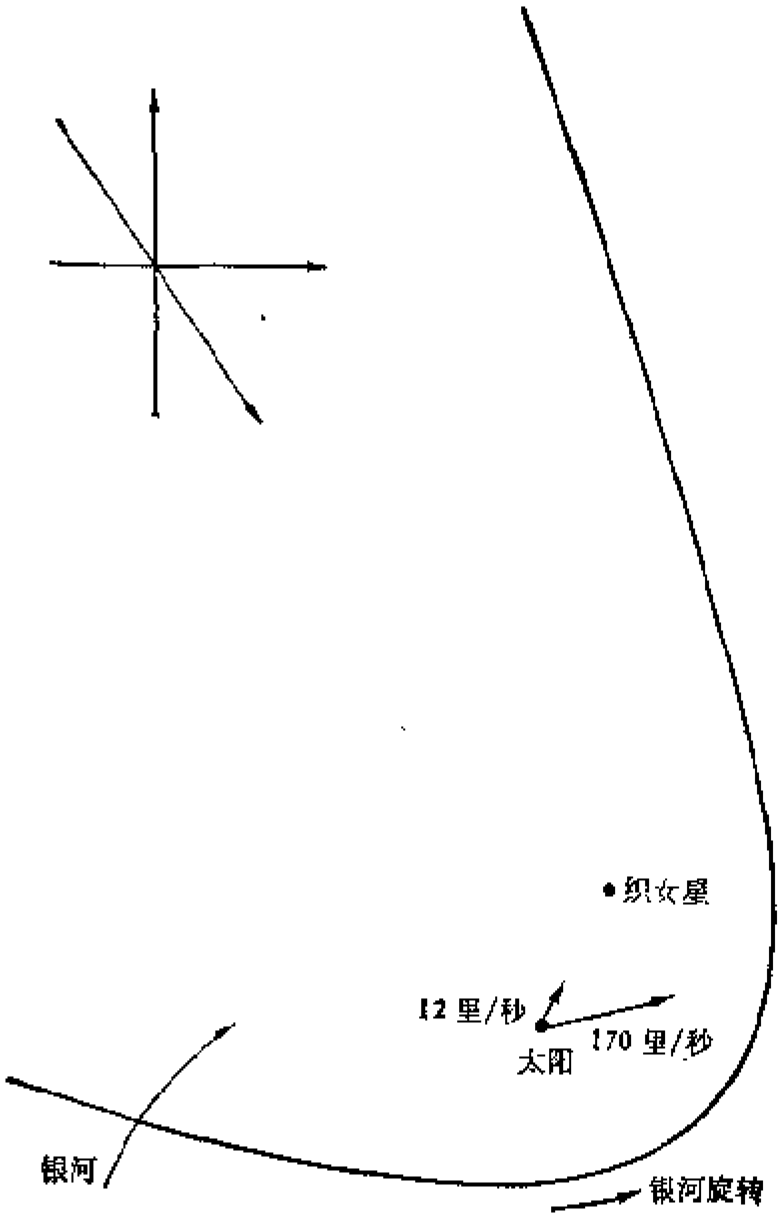


图 18

一弧度的角近似于 57°17′45″． 在圆周上截取一段长度等于半径的弧，这段弧所对的圆心角就是一个弧度．因此 360 度中就有 2π 个弧度． π 弧度等于 180°，$\frac{\pi}{2}$ 弧度等于 90°．如果用弧度来度量，那么图 17 中 P 点的坐标就是 $\left(3, \frac{\pi}{9}\right)$． 某些时候用极

坐标比用笛卡尔坐标来得方便.

太阳同它的行星和彗星位于宇宙的"郊外". 我们的银河以大约每小时 250,000 英里的速度带动我们的太阳在空间旋



太阳在银河系里的运动

图 19

转. 太阳也在银河内运动. 它正朝着它的"邻居"织女星运动着,它们之间相距 4.2 光年.

练习 1 空间中的位置

1. 在二维平面上找出原点 O 到 P 点的距离.

a. $P=(6, 8)$; b. $P=(5, 12)$

2. 在三维空间里找出原点 O 到 P 点的距离.

$$P=(3, 4, 12)$$

3. 在四维空间里找出原点 O 到 P 点的距离

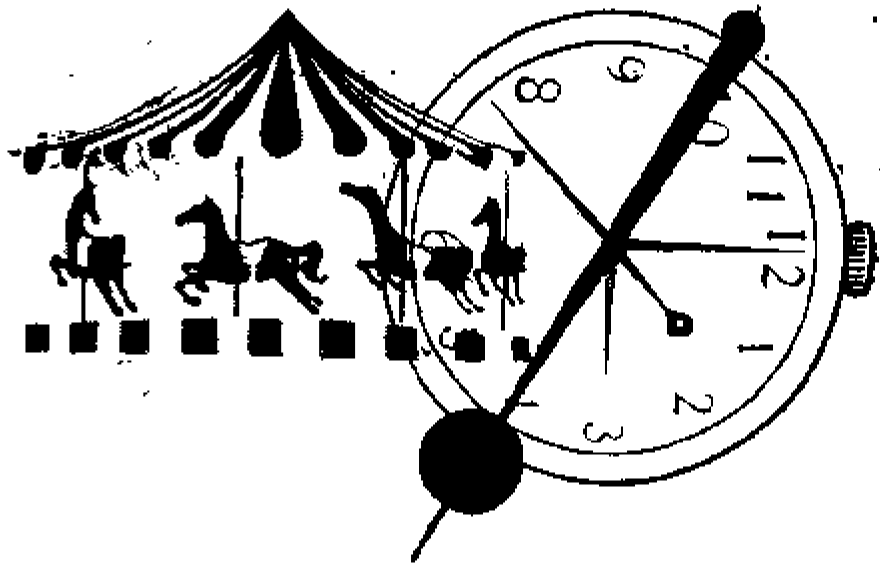
$$P=(3, 4, 5, 6)$$

4. 在极坐标里用这些点作图:

r	1	.87	.7	.5	0
θ	0°	30°	45°	60°	90°

这个图象是什么样的曲线?

5. 到铁匠铺买一些大格子的金属丝网，制成三个相等的边长为 18 英寸的正方形，固定成三维坐标系模型，用彩色橡皮筋或彩色纸板，在这三维坐标系模型里解释方程 $x+y+z=12$ 的图象.



二、曲线图形

1. 圆

最简单的常用曲线是圆．现代文明离不开圆车轮、圆齿轮、圆号码盘、圆钱币、圆盘等．圆周运动也是常见的．手表的指针尖、摆动的钟摆端、转盘上的木马都是沿着整个圆周或圆周的一部分运动．这里我们援引一位喜剧演员对于圆的描述．

“无怪人们通常把绕行一周称之为圆． 要注意圆里面的部分正好达到曲线为止．决不越出曲线之外．圆外面的部分也不能进入曲线之内．圆的主要特征之一是没有角．卵形也没有角，但卵形与圆在没有角这一点上不完全一样． 我们可以在圆里绕圈而感到方便．但在正方形里绕圈就比较困难．圆周上任何一点到中心的距离都相等．但对于平行六面体就

不能那样说。

在棒球比赛记分牌上，圆圈常用来表达还没有得分。而够多的圆圈在某些数字之后又能表示一个大的数字。

目前还没有比圆更圆的东西。但随着近代科学的发展，毫无疑问，不久将会有比圆更圆的东西问世。所以如果圆是指椭圆形的话，圆将变得更加饶有趣味了。”

斯多普奈格尔上校

摘自1949年9月10日《星期六晚邮报》

当一条曲线段起始和终止于同一点时，就组成封闭曲线。如果这条曲线又不穿过它本身，就组成简单的封闭曲线。圆是普通的封闭曲线。它是由在平面上到一个点的距离相同的点的集合组成的。中心的这一点叫做**圆心**。

圆有许多种画法。一般我们用圆规画。但我们也可以用一条细绳或硬纸条画。在硬纸条的一端用钉子钉在中心，铅笔放在硬纸条的另一端。将硬纸条绕着钉子转动就画出一个圈。

组成圆的整个曲线的长叫做**圆周**。其它有关圆的常用术语见图20的说明。

数学里有一个著名的数 π 是和圆联系在一起的。π 是圆周和直径的比值 $\left(\pi=\frac{C}{d}\right)$。度量许多不同的圆周和直径可以得出 π 的数值。用直径的量数去除圆周的量数得出的商近似于3.14。在古代的希腊和埃及用3作为 π 的值。古代东方所罗门的吞波尔王一世时的记载，表示 π 的值是3。

公元前二世纪的阿基米德用一个96边形找出 π 的值在

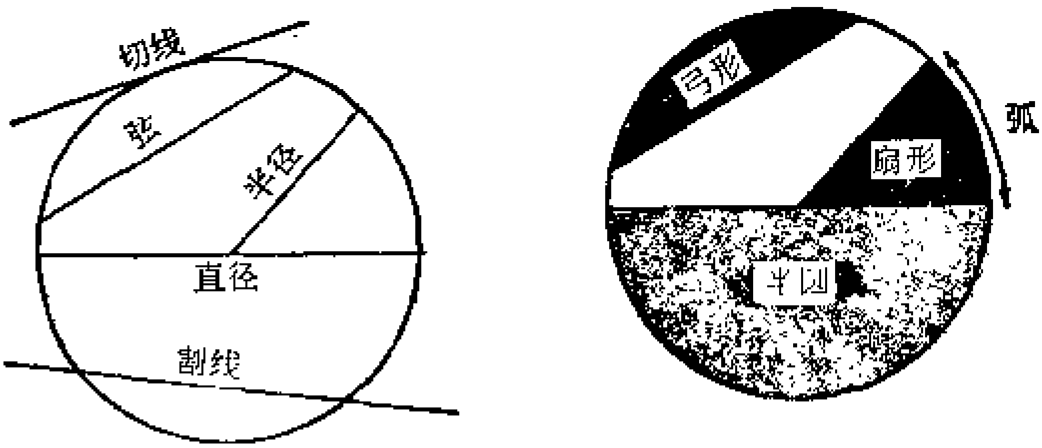


图 20

$3\frac{10}{70}$ 和 $3\frac{10}{71}$ 之间. 公元 150 年波托雷梅所用 π 的值是3.1416。几乎同时期中国人[1]认为 $\pi=\sqrt{10}$ 或 3.16228。π 的七位小数是 3.1415927。

现在 π 的值能够用电子计算机正确地计算到几千位小数. 但不管用多少位小数总不能表示出 π 准确的值. 另外，不管小数点后面算到多少位，在位数中并不存在什么简单规律；因此，π 是无理数.

π 的值可以用许多种形式来表示. 数学家用了下面的几种形式.

---

1) 我国最早的数学书籍《周髀算经》(成书于公元前一世纪)中载有"径一周三"，即 π 等于 3，称为古率，西汉时刘歆推得 π 为 3.1547 称为歆率，东汉时张衡推得 π 为 $\sqrt{10}$，称为衡率. 魏晋时刘徽推得 π 为 3.1416 称为徽率. 南北朝时祖冲之推得 π 在 3.1415926 和 3.1415927 之间并称 22/7 为 π 的约率，取 355/113 为 π 的密率. ——译者注

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \cdots\right)$$

（莱布尼兹 1646—1716）

$$\pi = 2\left(\frac{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2 \cdots}{1^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \cdots}\right)$$

（约翰·威理士 1616—1703）

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}}$$

（劳特·布朗克尔 1620—1684）

飞行在地球上两城市之间，大圆的路线是最短的。两城市之间的距离能够用公式 $D = \frac{2\pi rn}{360}\left(\text{即是 } \frac{n}{360} \times \text{圆周 } 2\pi r\right)$ 来计算，这里 r 是地球的半径而 n 是两个城市之间的弧度数。

找出 π 值的另一种古怪方法是掷牙签。在一张很平的纸上画上平行线。折断牙签，使留下部分的长等于平行线间的距离。将牙签掷在这纸上。这牙签要么穿过一线要么不穿过。如果我们将掷牙签的次数除以牙签触到线上的次数，那么得到的数接近 $\frac{\pi}{2}$。

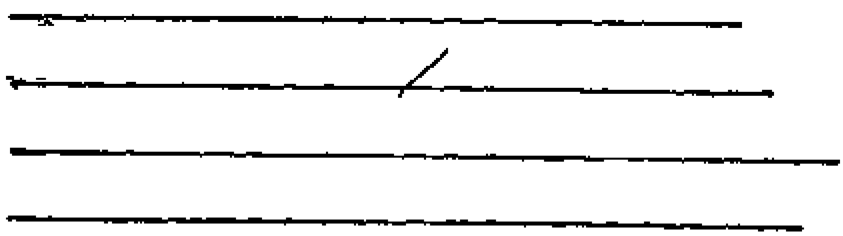


图 21

2. 圆 的 图 象

如果点 $P(x, y)$ 在以原点为圆心，r 为半径的圆上

$$OP^2 = r^2$$

那么，根据毕达哥拉斯定理，

$$x^2 + y^2 = r^2$$

圆上任意一点的坐标 x 和 y 之间的这种关系叫做圆的方程。

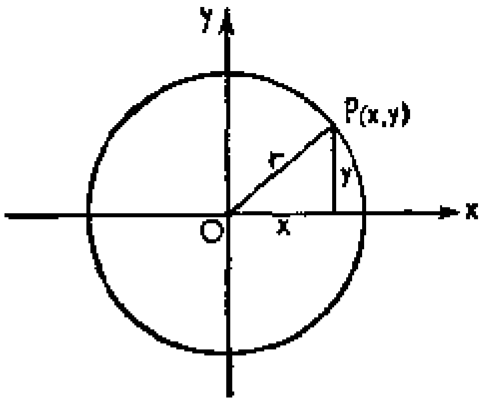


图 22

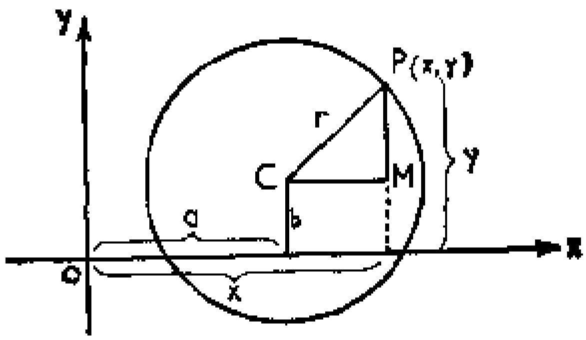


图 23

如果圆心在点 $C(a, b)$，那么圆的方程推导如下：

$$CP^2 = r^2$$

$$CM^2 + MP^2 = r^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

从这些结果我们知道圆的方程为 $x^2 + y^2 = 25$ 时，它的圆心在原点，半径是 5；而圆方程为

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

或 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 时，

它的圆心在 $(1,-2)$，半径是 3。

圆是仅有的有常数半径的曲线．但是直径是常数的曲线有无数种．其中某些曲线应用于机器的凸轮上．具有常数直径的物体，能够象圆轮一样在两条平行轨道之间滚动．

最简单的具有常数直径的曲线作法如下：画一个任意的等边三角形ABC．以 A 为圆心，AB 为半径画劣弧 BC．同样以 B 和 C 为圆心，相同的半径画弧 AC 和 AB．这个具有常数直径的曲线就是由这三条劣弧构成的，这条曲线的长度便是 AB．

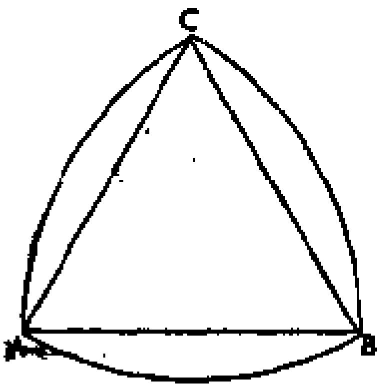
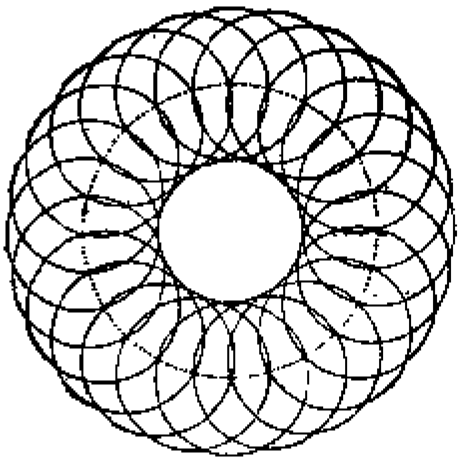
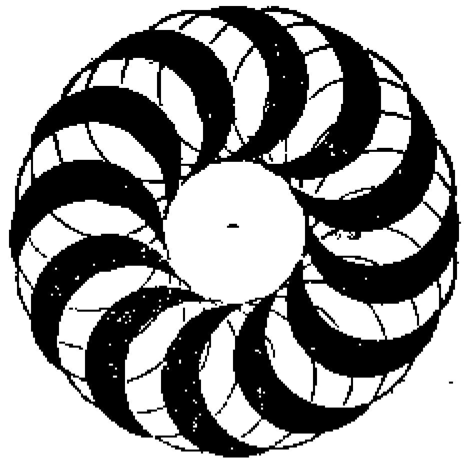
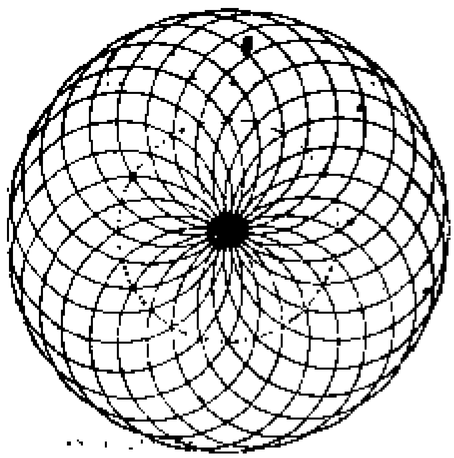
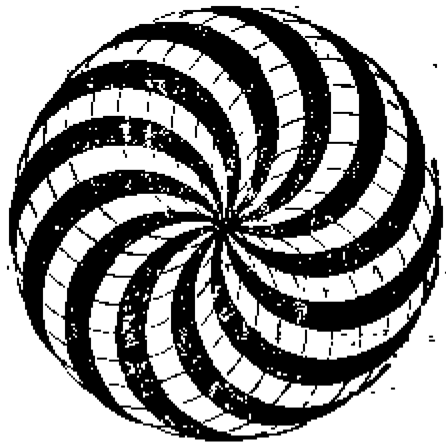
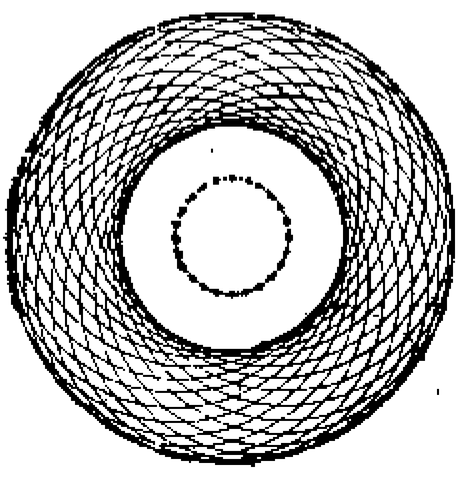
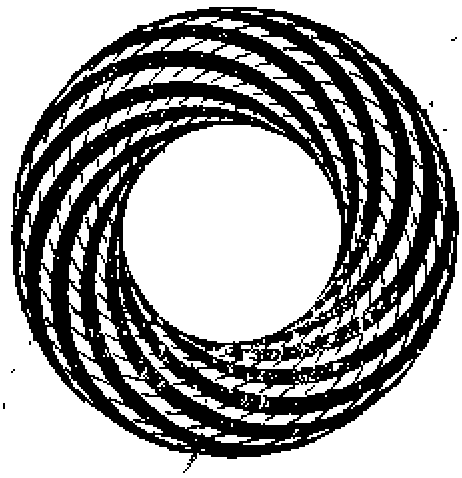


图 24

为了证明这种形状的性质，我们可以用硬纸板或胶合板剪成几个同样大小的这种形状的薄片，并把它们的中心穿在一根轴上，象车轮一样．当这轮子在两块平板之间滚动时（一平板在轮子的顶部，另一平板在轮子的底部），这两块平板保持平行，并且它们之间的距离等于常数直径．

圆是许多天然或人工的美丽图案的基础．许多奇异的图案是将具有相同半径的圆切割成弧这个基本模型得到的．圆也是自然界中普通的图形．第 23 页上的这些图案能用圆规把它们画出来．

在 1846 年波色列发明的反演器，很方便地同时画出一个圆和一条直线．该装置很容易制作，它是由七根木条组成的．

见图 25。

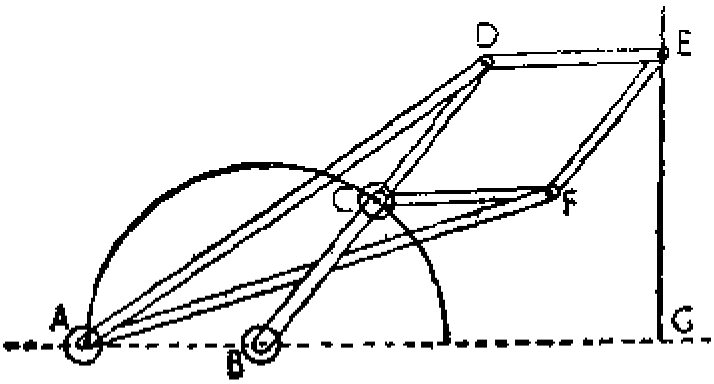


图 25

这个装置中 $AD = AF$，$CD = DE = EF = FC$ 并且 $BC < AD - DC$。画图时，在图板上钉住 A 和 B 使 $AB = BC$。C，D，E，F 可以自由地依枢轴转动。当该装置运动时，C 点描出一个圆弧，而 E 点描出一条垂直于 AB 的直线。

练习 2 圆

1. 画出下列方程所表示的圆的图象。

a. $x^2 + y^2 = 16$

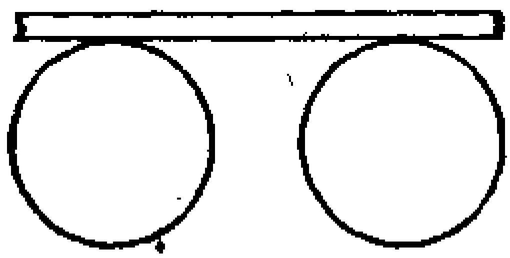
b. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

2. 度量圆形物体的直径和圆周，将它们相除得出 π 的估计值。

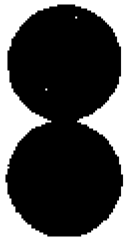
3. 做一个在平行线上掷牙签的实验，得出 π 的估计值。

4. 用胶合板做一个具有常数直径的曲线的模型。

5. 两个圆木上放着一块木板。每一圆木的圆周是 3 英尺。如果圆木滚动一圈，则转动了 3 英尺。现在如果圆木滚动了 3 英尺，木板仍在圆木上，问该木板运动了多远？



6.两个硬币如下图那样相互接触。如果上面的硬币绕下面的硬币转了半圈，颠倒了位置（两个硬币始终接触着）。那么上面的硬币转动了多少？

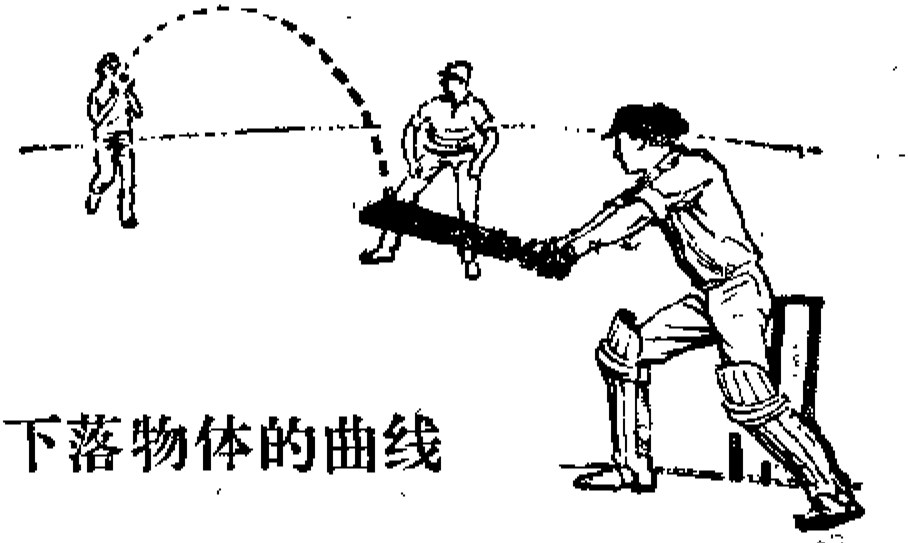


7.不用通常的平分法画出下列圆的图象。

a. $x^2 + y^2 = 16$

b. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ （x 是正值）

c. $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ （x 是负值）



三、下落物体的曲线

1. 抛 物 线

每一个抛向空中的物体都会顺着一条特殊的曲线落地。例如，投向球篮的篮球就是一条曲线，这种曲线叫做抛物线。

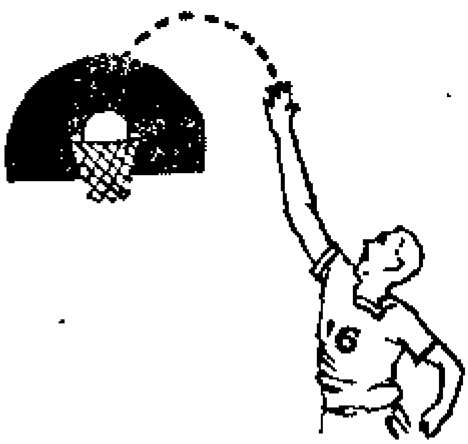


图 26

同样，其它下落物体经过的路线也是抛物线。如果空气的阻力忽略不计，那么象从枪膛内射出的子弹的路线，从悬崖上直冲而下的水流，从烟火中喷出的火星都是抛物线。

抛物线也出现在桥梁高楼等建筑中。它还可以被用于闪光灯上，汽车的车头灯和天文望远镜的反射镜上。甚至一根横梁当它负荷过重时也会弯曲成抛物线。

我们怎样来描述这种曲线呢？如果平面内一个动点到一个定点的距离和到一条定直线的距离相等，那么这个动点的

轨迹就是抛物线．这个定点叫做焦点，这条定直线叫做准线。在图 27 中，焦点是 F，准线是 AB。抛物线上的任意一点 P 到 F 和到 AB 的距离相等，即 $CP = FP$。曲线被轴 DE 分成两个相等的部分．焦点通常在轴上，而准线是垂直于轴的。

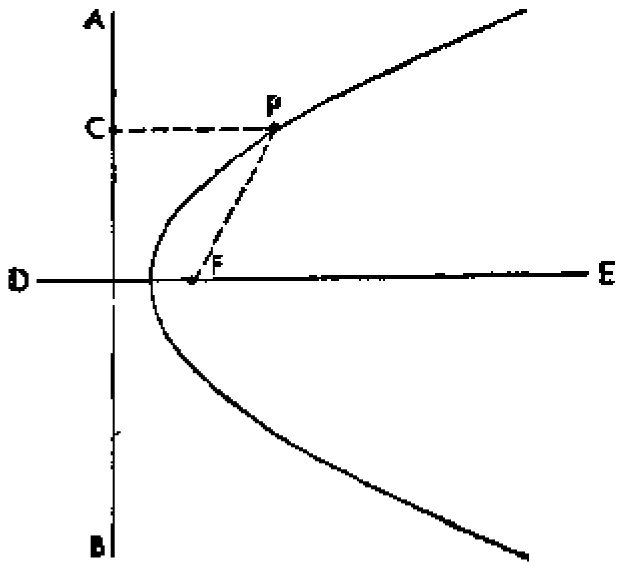


图 27

2. 地心引力和空间行程公式

牛顿关于运动和引力的宇宙定律的阐述与抛物线有关。这可以用从桥上或峭壁上丢下的石头来解释．石头按照表 1 中的数据下落．

如果我们将下落的距离（d）和时间（t）的结果进行比较，我们就可以发现它们符合公式

$$d = 16t^2$$

这里距离的单位是英尺，时间的单位是秒．这个方程的图象是抛物线，如图 28 所示。

表 1

石头下落的时间 (t) 秒数	在该秒内下落的距离 (s)	下落的总距离 (d)
第 1 秒	16 英尺	16 英尺
第 2 秒	48 英尺	64 英尺
第 3 秒	80 英尺	144 英尺
第 4 秒	112 英尺	256 英尺
第 5 秒	144 英尺	400 英尺

任何自由落体的下落运动都是遵循这个方程. 这里常数 16 表示重力加速度. 当一个物体向上抛掷时能得到类似的结果.

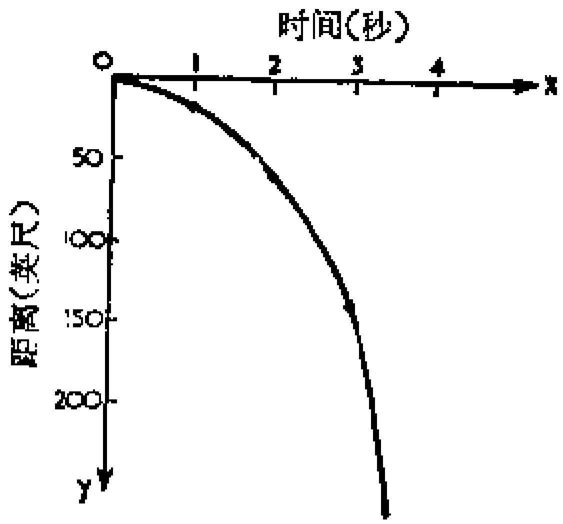


图 28

我们设想以每秒 48 英尺的速度向上掷一个球.将会得到表 2 列出的结果.

描述这个结果的公式是

$$d = vt - 16t^2$$

这里 v 表示我们向上掷球的速度(英尺/秒), t 表示球在空中的时间(秒). d 表示球在投掷点上方的距离(英尺). d

表 2

球在空中的时间 (t)	球向上的行程 (d)	在 $\frac{1}{2}$ 秒内的行程
$\frac{1}{2}$ 秒	20 英尺	向上 20 英尺
1 秒	32 英尺	向上 12 英尺
$1\frac{1}{2}$ 秒	36 英尺	向上 4 英尺
2 秒	32 英尺	下落 4 英尺
$2\frac{1}{2}$ 秒	20 英尺	下落 12 英尺
3 秒	0 英尺	下落 20 英尺

对于 t 的图象，如图 29 所示，也是抛物线.

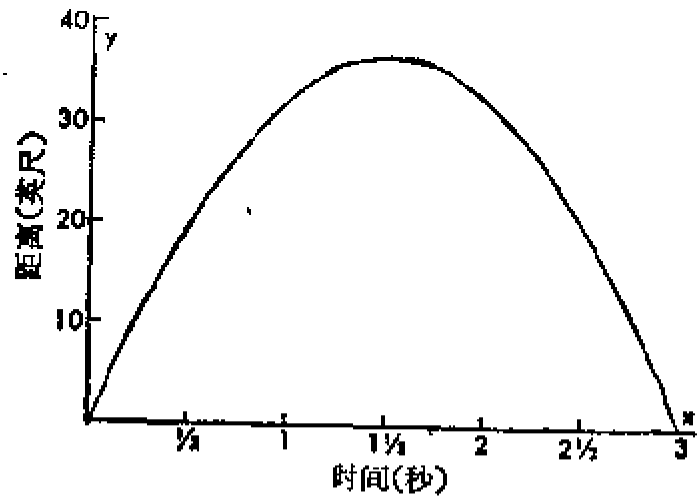


图 29

当球向前上方掷出时，这球本身的运动曲线是抛物线. 如果球掷出时的水平速度是 u 英尺/秒，垂直速度是 v 英尺/秒，这球运动曲线的方程是

$$y = \frac{u}{v}x - 16x^2$$

在这公式中，x 表示所行的水平距离(英尺)，y 表示所行的垂直距离(英尺). 与此有关的公式可以用于设计人造卫星的发射.

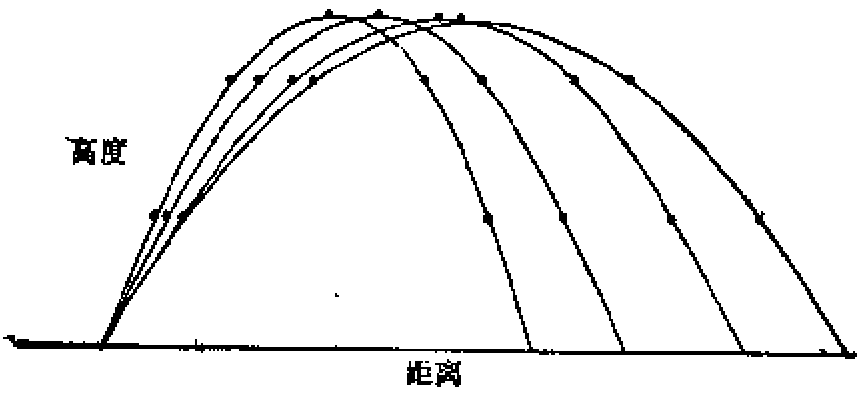

高度
距离

图 30

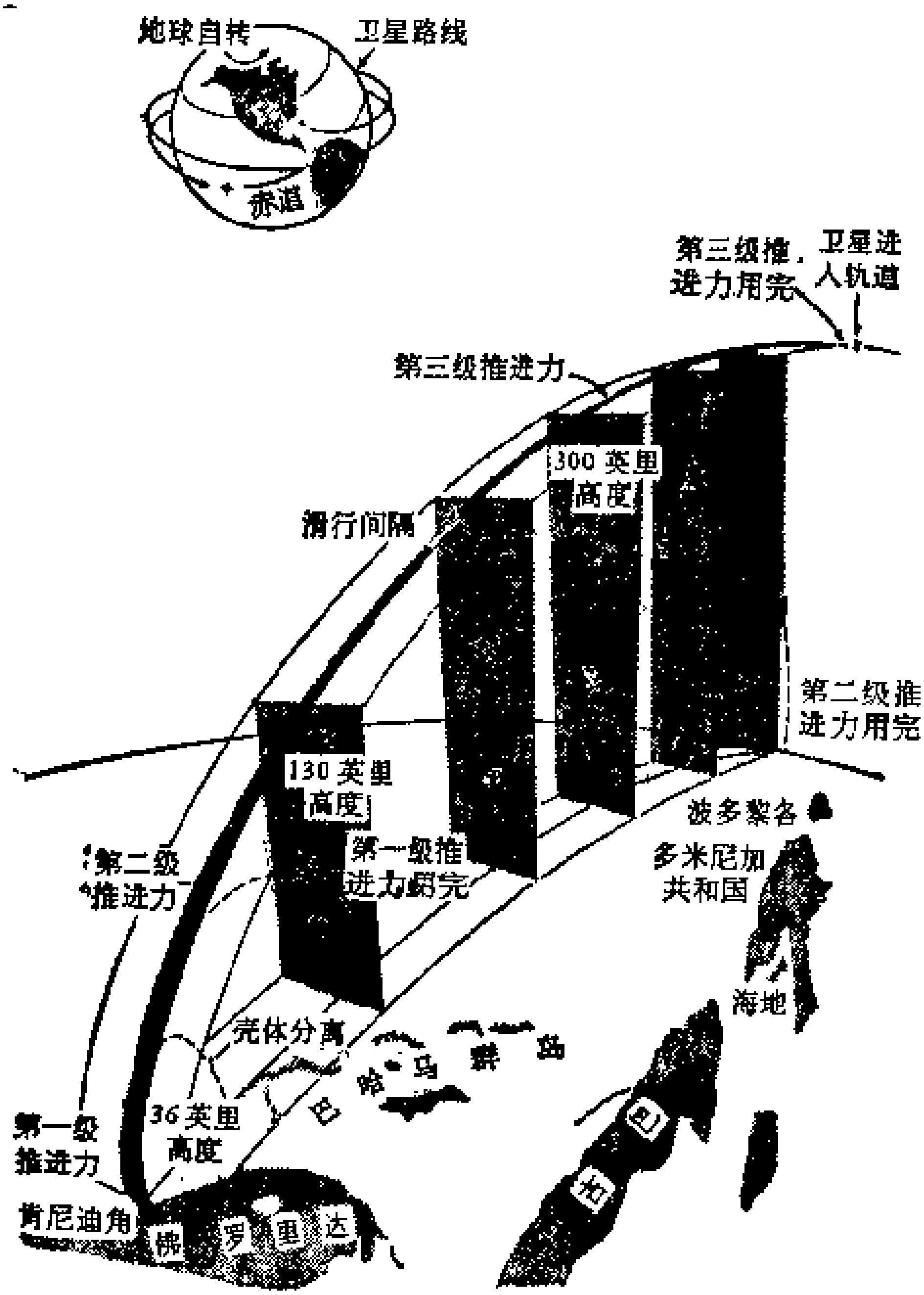

地球自转
卫星路线
赤道
第三级推进力用完
卫星进入轨道
第三级推进力
300 英里高度
滑行间隔
第二级推进力用完
130 英里高度
波多黎各
第二级推进力
第一级推进力用完
多米尼加共和国
海地
壳体分离
巴哈马群岛
第一级推进力
36 英里高度
古巴
肯尼迪角
佛罗里达

图 31

3. 抛物线的图象

图 32 表示在具有焦点 $F(p, 0)$ 和准线 AB [平行于 Oy 并经过 $(-p, 0)$ 的直线]的抛物线上的一点 $P(x, y)$. 根据定义(参看 26 页)

$$FP = CP$$

因而

$$FP^2 = CP^2$$

$$PM^2 + MF^2 = CP^2$$

$$y^2 + (x - p)^2 = (x + p)^2$$

$$y^2 + x^2 + p^2 - 2px = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

这是焦点在 $(p, 0)$、准线为 $x = -p$ 的抛物线方程.

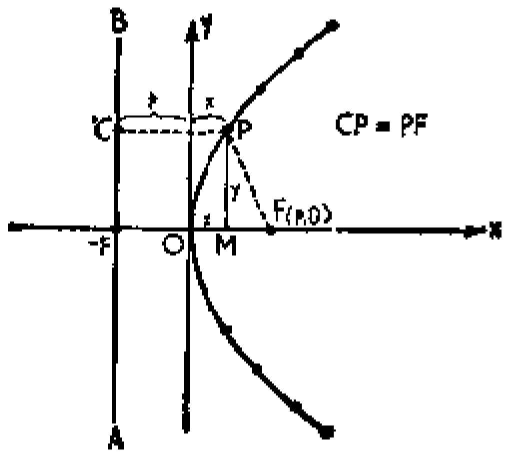


图 32

如果 $p = \frac{1}{4}$,我们得到方程 $y^2 = x$. 这个曲线图象如图 34 所示. 图 33 表示抛物线 $y = x^2$ 的图象的一半.

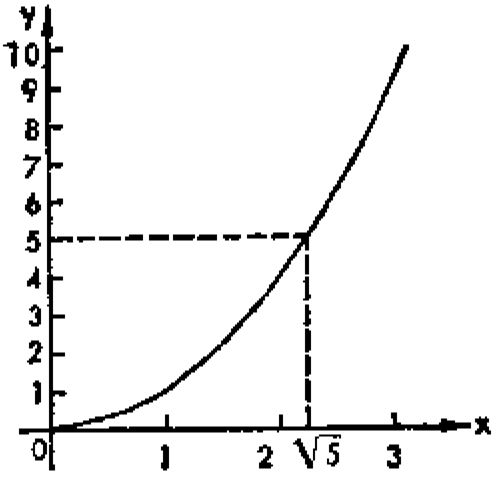


图 33

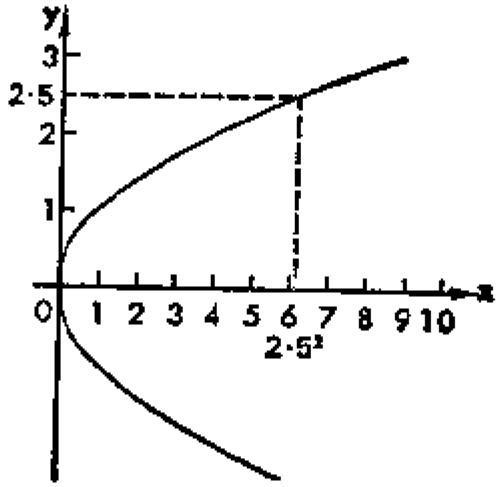


图 34

利用抛物线能找出一数的平方根。图 33 中表示 $\sqrt{5}$ 的近似值是 2.2。在图 34 中表示 2.5^2 近似于 6.2。

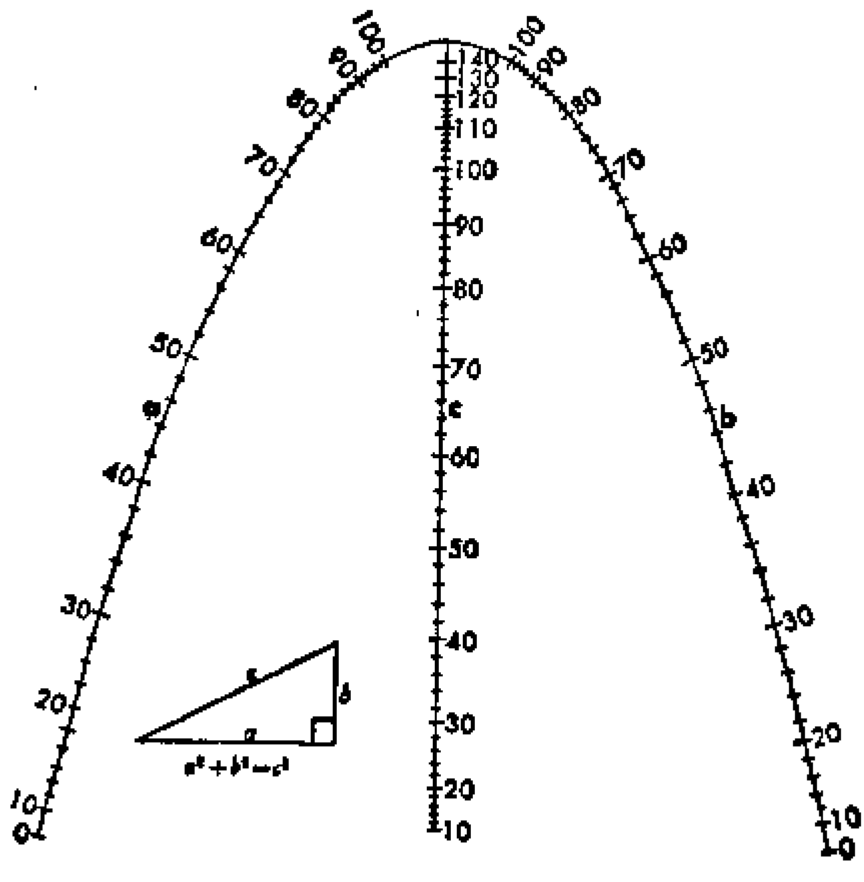


图 35

当已知直角三角形的两边而要求第三边时，可以用抛物线组成一个诺模图（又称算图或列算图）（图 35）。这个诺模图是以毕达哥拉斯公式 $a^2+b^2=c^2$ 为基础的。

在直角三角形中已知 $a=33$ 英寸，$b=56$ 英寸，求斜边。我们把直尺的一端对准 a 曲线上的 33，另一端对准 b 曲线上 56，那么与直线 c 相交的数值 65 便是斜边的值，即这个直角三角形的 $a=33$，$b=56$，斜边 $c=65$。

4. 抛 物 面

当抛物线绕轴自转时，它的轨迹是抛物面，象手电筒的反射罩。如果抛物面做成一面镜子，它就有一个奇异的性质。当一个灯泡放在焦点处时，所有射到抛物面上的光线就会被反射成平行线，如图36所示。车头灯，探照灯和无线电的发射都是应用这一性质的例子。

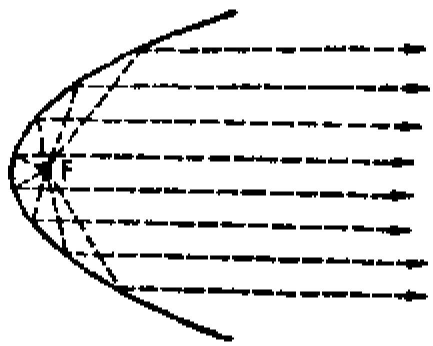


图 36

同样，抛物面常被用来收集太阳光的热量。从太阳射来的平行光线，射到抛物面上被反射后集中到焦点，这就是太阳灶收集太阳热能的原理。将物体放在抛物镜的焦点上，可以

被太阳光线加热到极高的温度．在足球场上，广播员将扩音器放到抛物面反射器的焦点上，以此来收集看台上观众的喝采声．同样，这种反射器还可以接收宇宙飞船上雷达的信号．

传说在古代，阿基米德设计了抛物面燃烧镜．在一次罗马围攻塞来克斯的战争中，就用这种燃烧镜烧掉了罗马的舰队．阿基米德不久也就在塞来克斯去世了．在第二次世界大战中，德国人企图用同样的性质设计太阳枪．但是在很大的距离里太阳枪并不实用．

车头灯的抛物面反射器聚光能力很强．例如，在抛物面反射器焦点上的一个小灯泡，射到抛物面的光线所产生的亮度比没有抛物面反射器约强 6000 倍左右．

将灯泡放置在反射器里不同的位置上，也是控制发射光线的一种方法．如果灯泡正好在焦点上(如图 36 所示)，则反射出来的光线是平行的．

如果把灯泡放在焦点的后面，反射出来的光线就会变宽(图 37)．如果把灯泡放在焦点的下方，反射的光线就会向上(图 38)．同样，如果把灯泡放在焦点的上方，反射的光线就

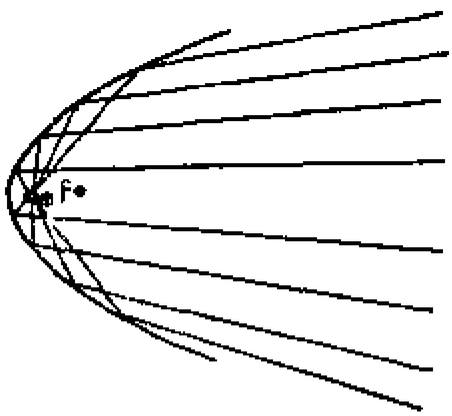


图 37

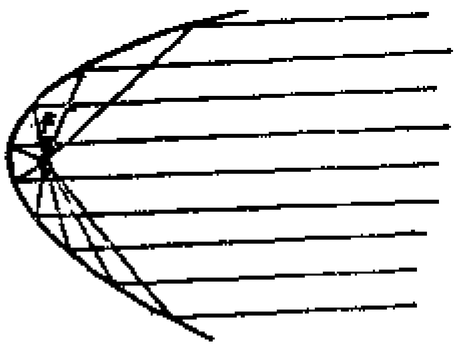


图 38

会向下（图 39）．在密封的车头灯中，通过不同的灯丝来获得各种不同的光线转换效果（图 40）．

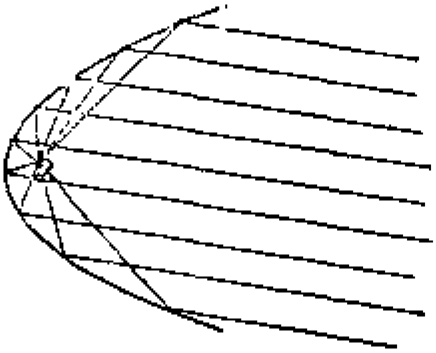


图 39

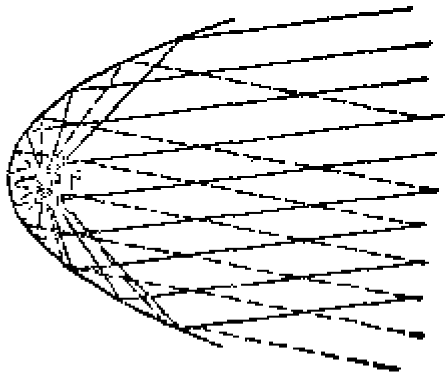


图 40

5. 抛物线的画法

用简单的折蜡纸的方法，可以形成一条抛物线．为了获得一条抛物线，我们先画出或折出任意一条直线 m 作为准线．在准线外标上一点 F 作为焦点，如图 41．折这张蜡纸，使 F 点落在准线 m 上，这样在纸上留下一条折痕，如果沿着准线 m 移动 F 点，再折这张蜡纸将又留下新的折痕，就这样沿着准线 m 移动 F 点，并且反复折 20 到 30 次．留下的这些折痕便是焦点为 F，准线为 m 的抛物线的切线．这些给予我们抛物线印象的切线叫做**抛物线的包络**，而抛物线叫做这些**切线的包络**．

当一个平面去截割一个圆锥面的时候，也能形成一条抛物线，这个截割的平面必须平行于它所对的倾斜的母线（图 42）．因此抛物线也叫一种**圆锥截线**．

如果希望得到一个准确的抛物线图形，我们可以先确定一条准线（KH）和焦点（F），再轻轻地画几条平行于准线的直线，象笔记簿上的线一样，如图 43．为了找出通过 Q 点的

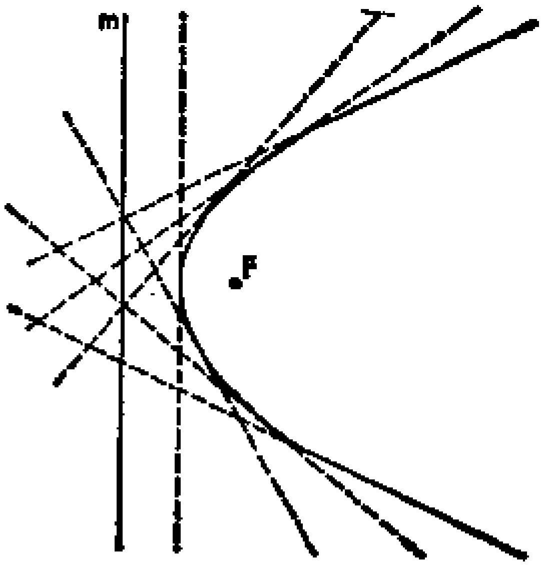


图 41

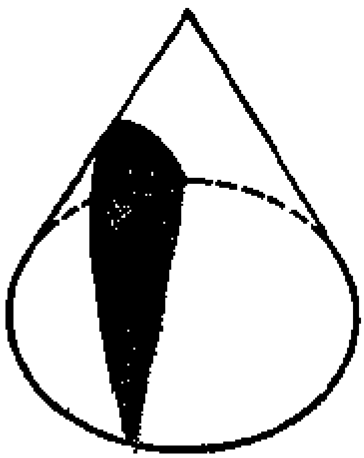


图 42

平行线与抛物线的交点，以 F 为圆心、QA 为半径画弧，交通过 Q 点的平行线于 P 和 P'，P 和 P' 就在抛物线上．用同样的方式处理其它平行线，可找到抛物线上其余各点．想一想为什么 $KP=PF$？

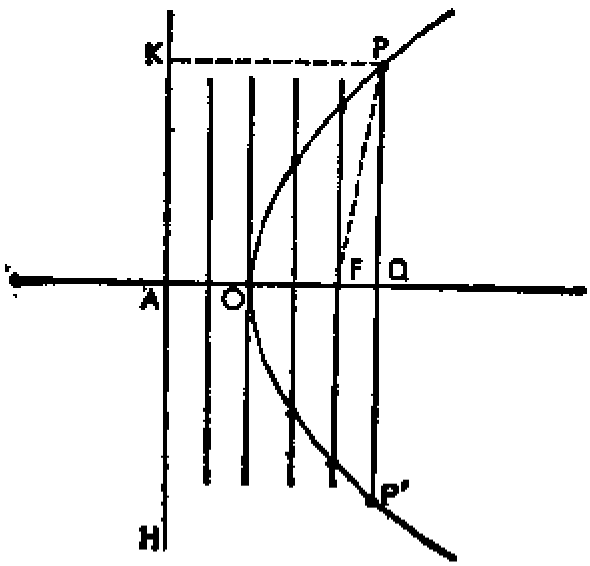


图 43

抛物线还能用图 44 所示的简单装置画出来．用硬纸板或胶合板做成一个 T 字形(ABC)．在 A 点结上一条线，这条线的长等于 AY．画抛物线时，沿着直线 XYZ 移动 T 字形板（这条 XYZ 线很象黑板下部放粉笔的底框）．线的另一端结在任意点 F 上．用一支铅笔 P 将这条线绷紧后，将 T 字形板沿着 XYZ 向左移动，铅

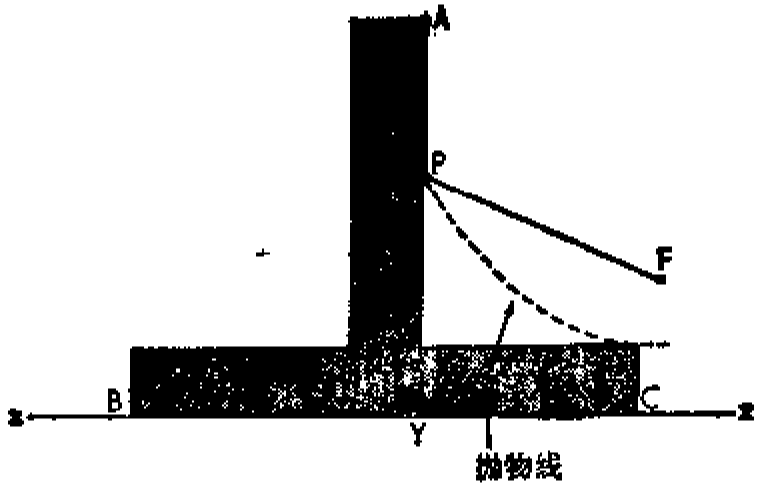


图 44

笔就能画出一条抛物线，因为从P点到 XYZ 的距离总是等于PF。这个装置也可以在黑板上画，F点可以用图钉钉在黑板上，T字形板沿着黑板底框移动。

练习 3 抛物线

1.在桥上向河面抛出一块石头．测出石头落下的时间（秒），然后用公式 $S = 16t^2$ 求出桥的高度(英尺)．

2.一座桥的拱形的方程是 $y = -\frac{9x^2}{80}$．画出这拱形的图象，并画全这座桥．

3.用每秒 26 英尺的速度向上投出一个篮球．现问该球两次到达篮的高度的时间间隔是多少？（篮的高度是 10 英尺）．另画出

$$d = 26t - 16t^2$$

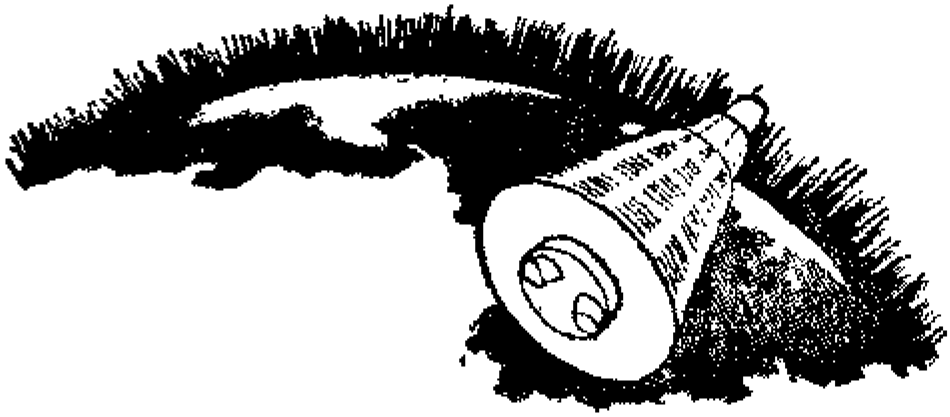
的图象．

4.画出下面方程的图象，并比较下列方程与它图象之间的关系．

a. $y = x^2$ b. $y = 2x^2$ c. $y = 4x^2$ d. $y = \frac{1}{4}x^2$ e. $y = -x^2$

f. $y = -2x^2$ g. $y = -4x^2$ h. $y = -\frac{1}{4}x^2$

什么因素决定抛物线的开口向上还是向下？什么因素决定抛物线坦一些或陡一些？



四、宇宙航行曲线

1. 椭　圆

我们对宇宙飞船遨游太空已成为现实而感到兴奋．对宇宙航行员在飞船中以每小时 17000 英里的速度围绕地球飞行又感到惊奇．然而你和我却以每小时超过 17000 英里的速度在空间旅行呢！而且自人类起源以来，就一直在这个空间旅行．我们旅行的这条路线和人造卫星围绕地球运行的轨道同样都是椭圆．

我们在宇宙中的旅行是几个运动的组合．我们的地球每 24 小时绕它的轴自转一周．在赤道上的任何一点大约行了 24000 英里或者每小时行了 1000 英里．地球绕太阳每年旋转一周，这个运动速度大约每小时 66000 英里．我们的地球与太阳也围绕着银河系在运行，这个速度我们并不知道，但可以肯定超过了每小时 66000 英里．此外，我们的银河系也以极大的速度在空间运动．所以我们也是在椭圆形的轨道上旅行的宇宙航行员．

椭圆在自然界和人类生活中，不象圆和抛物线那样常见。但是有些舞台、游泳池和盛食品的碗是椭圆形的。著名的华盛顿国会低音廊和盐湖城的摩门神堂也是椭圆形的。

香肠不管怎样切片总还是香肠。但是如果你直着切，其切片是圆形的；如果你斜着切，其切片是椭圆形的。

椭圆也是一种圆锥截线，这个截线是用一个不平行于锥底的平面去截圆锥而得到的。

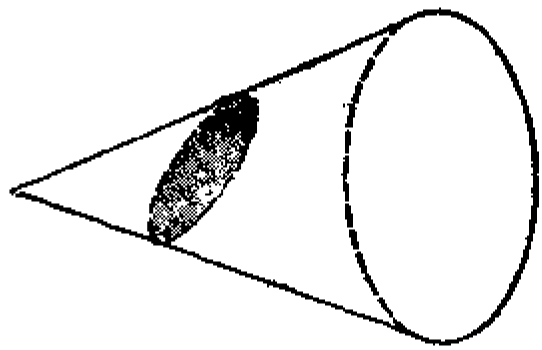


图 45

曾经有个发明家用椭圆来制造没有踏板的自行车。他所制造的后轮是椭圆形的而不是圆形的。当椭圆后轮转动的时候，骑车人便能很简单地移动他的重心位置，这个自行车就向前运动了。

2. 椭圆的图象

椭圆是卵圆形的。它象一个压扁了的圆。它有一个中心，所有通过中心的弦都是椭圆的直径，而这些直径不象圆的直径都相等。其中最大的和最小的直径分别叫做长轴和短轴。

椭圆是这样定义的：在平面上到两个定点的距离之和为一常数的所有的点的集合．定点叫做椭圆的焦点．在图 46 的椭圆中 F_1 和 F_2 是它的焦点．

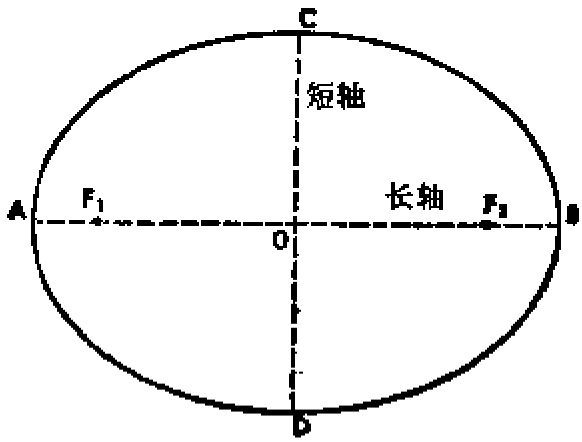


图 46

椭圆方程可以用下式来表示

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a^2>b^2)$$

这里 x 轴和 y 轴分别沿着曲线的长轴和短轴，其焦点是 $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ 和 $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$．长轴的长是 $2a$，而短轴的长是 $2b$．

这样，对于椭圆方程

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \qquad \text{它的 } a=3,\ b=2$$

焦点分别是 $(\sqrt{5}, 0)$ 和 $(-\sqrt{5}, 0)$，长轴的长是 6，短轴的长是 4．

椭圆有几个奇异的性质．如果将一盏灯放在椭圆反射镜的一个焦点上，这盏灯的光线会反射到另一个焦点上．

这个性质就是美国爱达荷州盐湖城的摩门神堂具有声学

特性的道理。 如果一个针掉在位于一个焦点处的传道坛上，那么在另一个焦点处就能很清晰地听到，尽管这个焦点处离传道坛很远！在华盛顿的低音廊也会出现类似的现象. 因为椭圆面上任意一点到两焦点的距离之和是一常数，所以，由一个焦点发出的声音，不论它经由椭圆面上哪一点反射到另一焦点，都传过同样的距离. 因而所有反射后的声波都同时到达另一焦点. 在一个焦点上轻声说话在另一焦点上能清楚地听到，也就是这么个道理. 同样，一个小石子掉到一个椭圆形的游泳池的一个焦点上，所有的波纹都会交到另一个焦点上. 椭圆的这种反射性质可用图 48 所示的椭圆形弹子游戏的台板来说明.

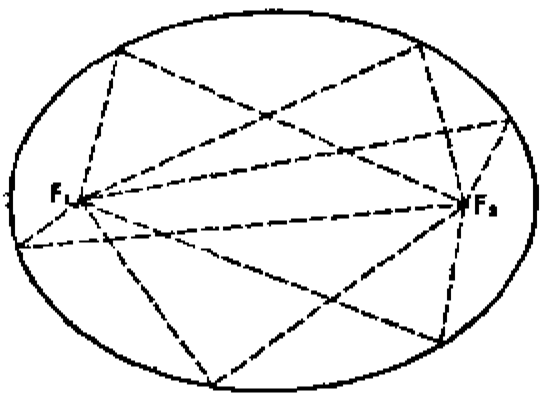


图 47

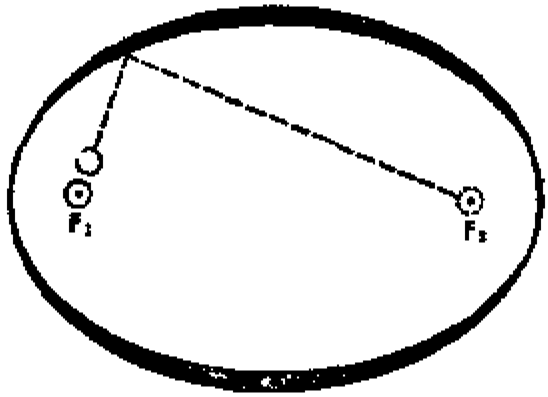


图 48

一个椭圆形板，四周用塑料或软金属加围边框. 每一个焦点（F_1 和 F_2）上各放一个弹子. 只要击出其中任何一个弹子，不管它的方向如何，它总会被塑料带反射后撞击到另一个弹子.

要保证我们的模型准确、有效，必须使板的表面成为一个

光滑的水平面．必须仔细地裁割木板使它的边成为椭圆．塑料边框必须紧贴椭圆板的边缘，并且长度精确地等于椭圆的周长．以便使接缝处没有重叠或隙缝．

3. 椭圆的画法

要画一个椭圆，只要先把一张纸钉在平板上、在纸上的两点（F_1 和 F_2）上各钉一枚小针（见图 49）．做一个封闭的绳圈，使得绳圈的长大于两针间的距离．用铅笔尖把绳子绷紧，使铅笔尖在这平板上移动一圈，就画出了一条椭圆曲线．当绳子的长度或两针尖间的距离发生变化时，就形成不同的椭圆．针尖的位置就是椭圆的焦点．那么绳圈与椭圆上任意一点的位置有什么关系呢？按照椭圆的定义，你能不能说出为什么根据上述方法画出来的图象一定是椭圆呢？在黑板上画椭圆时，可用揿钉固定 F_1 和 F_2 两点．

绳圈画椭圆还可以用来解释为什么在无风的情况下，从航空母舰上起飞的飞机所飞越的区域会限在一个椭圆的范围内．这是由于飞机的航程是一定的，飞机对于航空母舰的“行动半径”限制在椭圆的范围内，相当于给出的绳圈．飞机的起飞点和降落点就是“行动半径”的焦点．这两个焦点间的距离便是航空母舰航行的距离．

用折蜡纸的方法也可以形成一个椭圆：在蜡纸上以 O 为圆心画一个圆．在圆内固定一点 F（但这点不得在圆心）．折叠蜡纸，使 F 点落在圆周上．沿着圆周移动 F 点和折痕，这样

重复 20 到 30 次，每一条折痕是以 F 点和 O 点为焦点的椭圆的切线. 图 50 表示折叠时使 F 点落在 A 点上形成的折痕

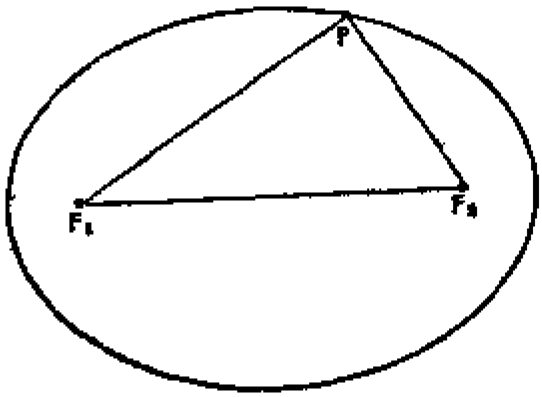


图 49

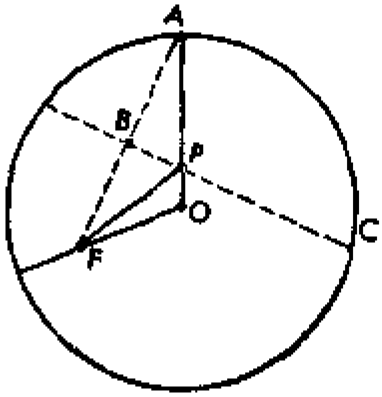


图 50

BC. 因此 BC 是 FA 的垂直平分线，$FP=PA$. 这样 $OP+FP=OP+PA=OA=$ 常数（即半径）. 因而 P 点的轨迹便是椭圆，O 和 F 是它的焦点. 因为 $\angle FPB=\angle BPA=\angle OPC$，所以折痕 BC 是椭圆在 P 点的切线.

似乎很奇怪，齿轮竟会制成椭圆形. 两个全等的椭圆形齿轮，如用枢轴联接它们的焦点便可啮合在一起，如图 51 所示.

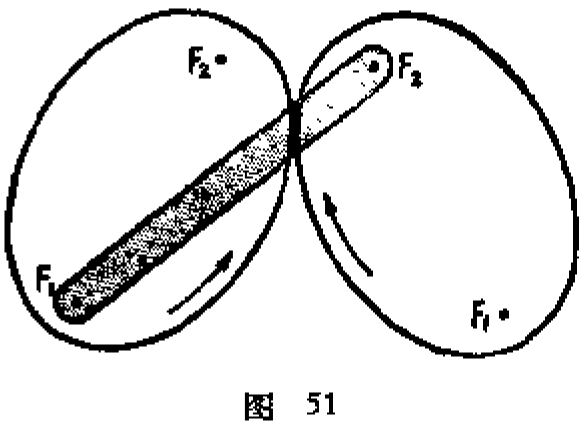


图 51

这些齿轮可以将匀速的旋转运动转变为变速的旋转运

动，在需要慢速工作冲程而要快速还原冲程的机器里就要使用这样的齿轮．试用胶合板制作这样的齿轮模型．用一根长度等于长轴的杆联接两个焦点以保持齿轮的啮合．

4. 椭圆轨道和空间旅行

卫星绕地球运转的轨道是椭圆．地球的中心是椭圆的一个焦点（F_1）．另一个焦点（F_2）是数学上的点．卫星 S 的轨道如图 52 所示．

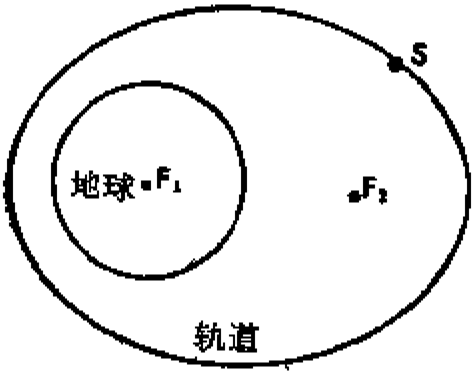


图 52

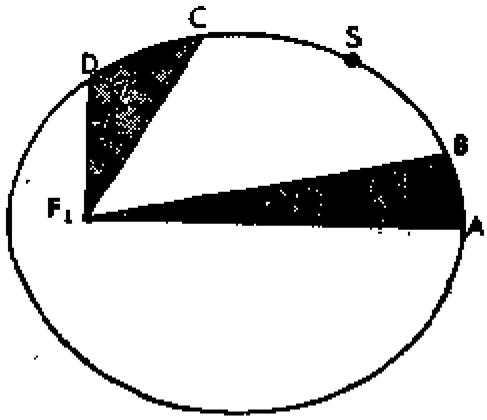


图 53

德国天文学家开普勒，是发现行星轨道为椭圆的第一个人．开普勒还发现了另一个重要的事实：在椭圆轨道上的天体的速度不是一个常数．卫星 S 在椭圆上的某些部份比另一些部份运行得快．开普勒的第二个发现是：在一定的时间内，地球中心到卫星的连线所扫过的面积是一个常数．这就是说，如果卫星 S 在 1 小时内从 A 运动到 B，而在另 1 小时内从 C 运动到 D，那么阴影部分的面积 AF_1B 和 CF_1D 是相同的．由

于弧 AB 和弧 CD 并不相等，而运行的时间却相等，所以卫星从 C 点运行到 D 点快于从 A 点到 B 点．因而卫星离地球越远就运行得越慢．这也意味着越是靠近太阳的行星在轨道上运行得越快．

开普勒用他的发现，将宇宙运行的规律用公式来表示．如果 T 表示行星运转的周期，D 是太阳到行星的平均距离，K 对所有行星是一个常数，那么 $T^2/D^3=K$．对地球来说，$D=$ 93,000,000 英里，$T=1$ 年，那么 K 的值是什么呢？再用这一公式来计算一下火星、金星等，看看得到的 K 是不是有相同的近似值．

开普勒高兴地发现可以用数学公式和几何曲线来描述宇宙．他是个虔诚的宗教徒，他由于自以为发现了上帝所创造的宇宙中的和谐性与对称性而欢欣鼓舞．他感到他找到了上帝在宇宙结构中已创造的许多定律．上帝的创造和它的发现是一致的．但是，经过很长时间以后开普勒发现的宇宙运行规律才被确认为真理．

练习 4　椭　圆

1．找出下面这些方程的图象的焦点和长轴、短轴的长．

a．$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　b．$25x^2+36y^2=900$

c．$x^2+4y^2=4$　　d．$x^2+y^2=49$

2．如果把地球绕太阳运行的轨道看作是圆，试计算在这轨道上我们每天旅行的距离（太阳到地球的距离是 93,000,000 英里）．

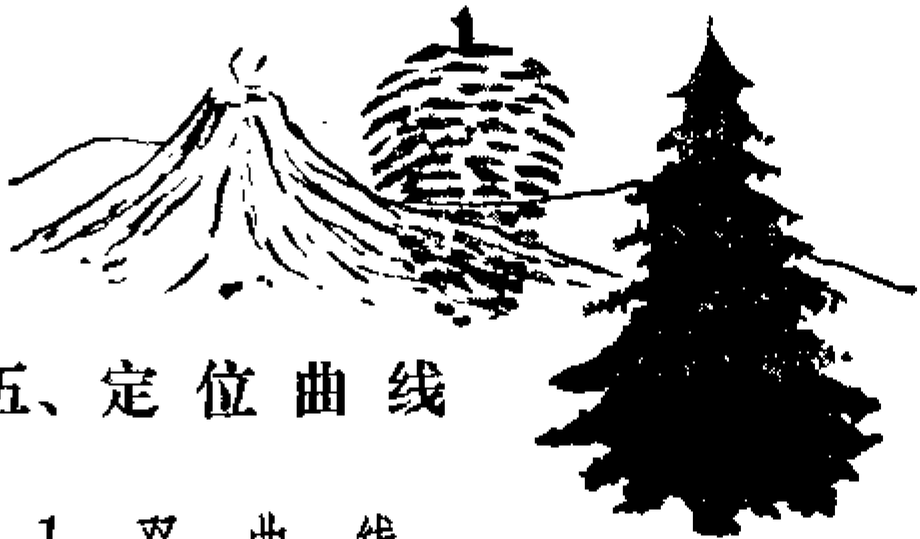
3．用圆锥形光束照射墙面来说明圆锥截线．当灯光束以不同的角度照到墙上时，形成圆、椭圆、抛物线和双曲线的阴影．另一种说明圆

锥截线的方法是在圆锥形容器里放置有颜色的液体（如跟圆锥形有相同形状的漏斗）。将容器倾斜不同的角度，液面的轮廓线是圆锥截线。

4.制作课本里的这样模型：椭圆弹子球器械，椭圆形池子，椭圆形齿轮和各种椭圆的设计。

5.在广告牌、建筑和园地中找出椭圆的例子。

6.什么是椭球？在河岸或湖边找出一个椭球形的石子来。



五、定位曲线

1. 双 曲 线

圆锥形是我们每天要遇到的常见的形状．如圆锥形的冰淇淋，漏斗和圆形塔的塔顶等都是熟悉的例子．在自然界里圆锥形也是很普遍的，像圣诞树，松球，火山等的形状．圆锥形也象边数无限多的金字塔．

当一个圆锥被平行于锥高的平面所切割时，这切割平面

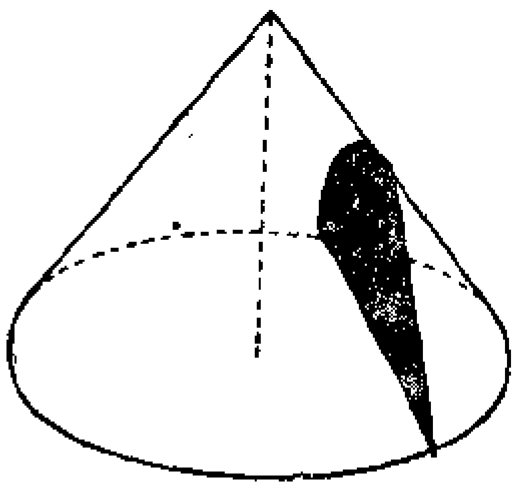


图 54

的周界是双曲线[1]的一部份．所以，双曲线也叫圆锥截线．

德国天文学家开普勒发现，地球绕太阳旋转的轨道是椭圆．但是彗星通常是以双曲线或很长的椭圆轨道绕过太阳旋转的．现在的航海者用双曲线来确定他们所在的位置．将来的星际旅行家或许会用到所有圆锥截线的曲线．

超音速飞机喷射口发出的隆隆声是一个逐渐蔓延开的圆锥．它与地面的交线是双曲线．双曲线上所有的点在同一时间里会听到隆隆声． 图 55 表示了这隆隆声怎样在喷气式飞机的后面蔓延的．

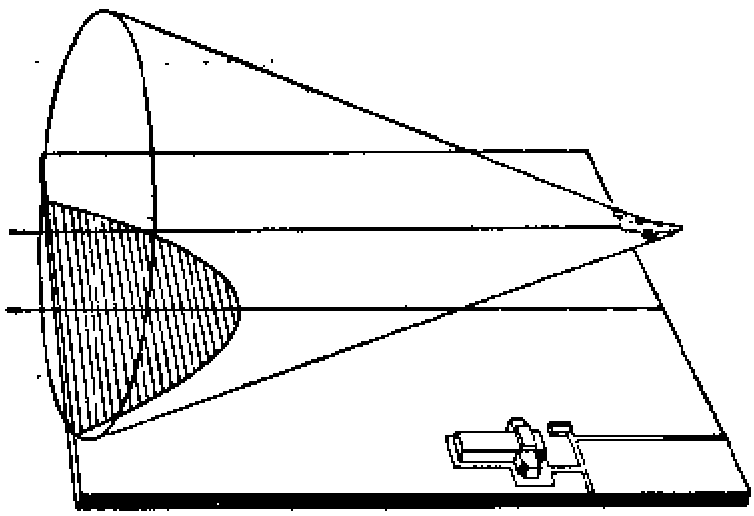


图 55

双曲线是有两个分支的曲线．这两个分支对应着一个完整的圆锥被一个平面切割后所形成的界线．一个完整的圆锥是由两个全等的部份组成的，它们有一个共同的顶点（见图 56）．

1）双曲线是由平行于圆锥高的任一平面截割一个完整的圆锥的两个部分形成的（见图 56）．

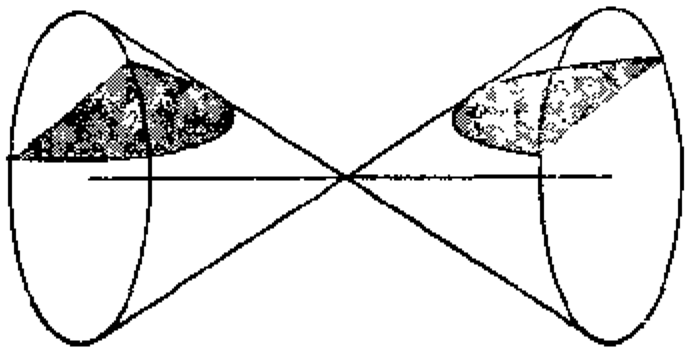


图 56

2. 双曲线的图象

象椭圆一样，双曲线有两个焦点和两个对称轴.

双曲线的定义是：在平面上到两定点的距离之差是一常数的所有的点的集合. 这两个定点是双曲线的焦点.

双曲线方程能用下式来表示

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

这里 x 和 y 轴是双曲线的对称轴，而焦点是在 $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$处. 点$(\pm a,\ 0)$叫做双曲线的顶点. 双曲线另有两条有趣的直线叫做渐近线. 当这两条直线从原点伸展出去后越来越接近曲线. 但是渐近线永远不和曲线相交或相切. 如果我们作一个长方形，它的边是 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$，那么这个长方形对角线延长出去就是渐近线. 渐近线的方程是 $y=\frac{bx}{a}$ 和 $y=\frac{-bx}{a}$. 图 57 所示的双曲线它的方程是

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

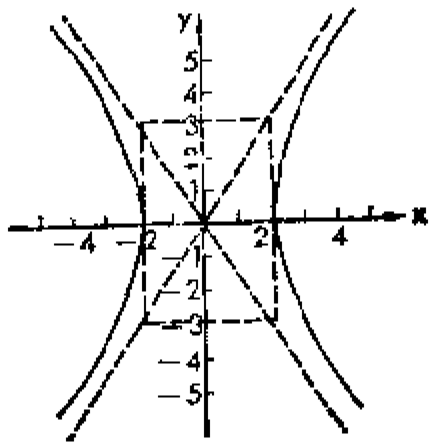


图 57

双曲线的焦点是 $(\pm\sqrt{4+9},\ 0)$ 或 $(+\sqrt{13},\ 0)$ 和 $(-\sqrt{13},\ 0)$. 顶点在 $(2,\ 0)$ 和 $(-2,\ 0)$,渐近线是 $y=\frac{3}{2}x$ 和 $y=-\frac{3}{2}x$.

当双曲线的渐近线是 x 和 y 轴时，它的方程是 $xy=c$，这里 c 是常数.

3. 双曲线的画法

双曲线可以象图 58 所示的那样，用铅笔引导绳子画出. 这个装置是由一块画板，两个圆环和一段绳子组成. 画板上有两个孔，F_1 和 F_2，它们是双曲线的两个焦点. 圆环 R 系在绳子的中间，绳子的一端通过孔 F_1 而另一端通过孔 F_2. 在板的下面，绳子通过另一个圆环 P.

现在就可以用这根绳子画双曲线了. 把铅笔放在圆环 R 里. 用你的左手紧握板下面绳子的端点 A. 用你的右手移动铅笔，你的左手就作上下运动. 在这种情况下你的左手只会使

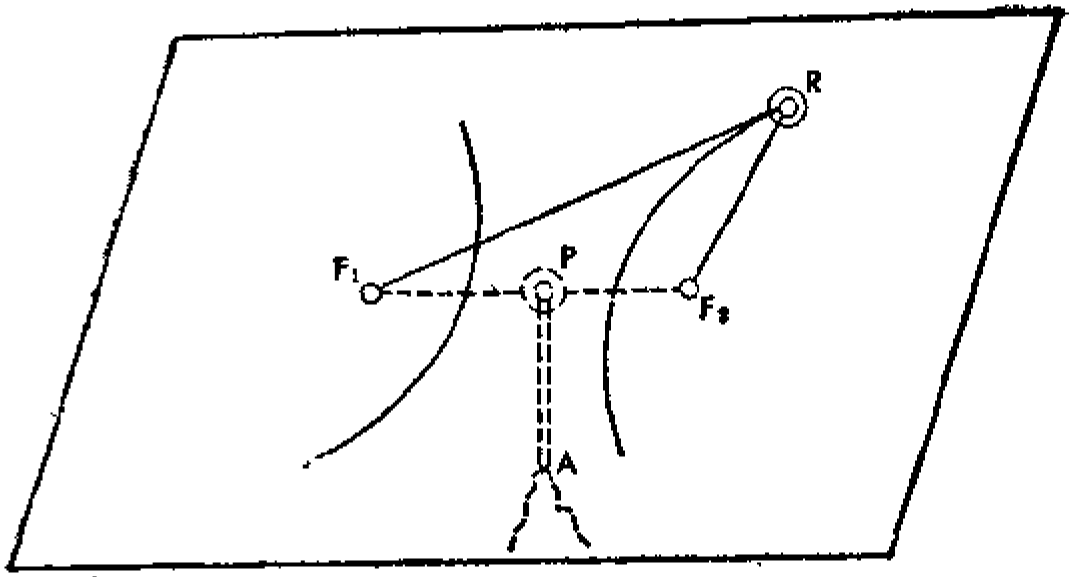


图 58

通过两个小孔的绳子的长度相等. 这样便使铅笔到两孔的距离差是一个常数. 随着铅笔的移动,就画出双曲线的一支. 要画双曲线的另一支,必须使这根绳子变换位置.

这种作图法也可以在黑板上画. 用三个吸杯吸在 F_1, F_2 以及 F_1 与 F_2 的中点处 P. 绳子通过圆环 P 和 R. 用半磅的重量来牵引绳子代替用手来绷紧绳子. 根据粉笔的不同位置或改变两焦点之间的距离,就能比较出不同的双曲线.

双曲线也可以用折蜡纸的方法形成: 以 O 为圆心画一个圆. 在圆外固定一点 F. 象折椭圆那样重复折叠使 F 点落在圆周上. 每一条折痕就是以 O 和 F 为焦点的双曲线的切线. 在图 59 中, F 经折叠后落在 A 上. 因为 BC 是 FA 的垂直平分线, $FP = PA$. 因而 $FP - PO = PA - PO$, 这是一个

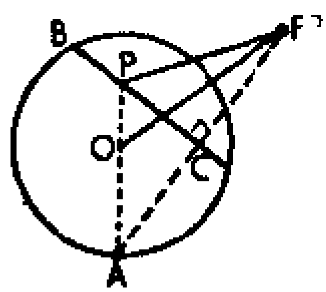


图 59

常数，即圆的半径．另外 $\angle FPC = \angle APC$．

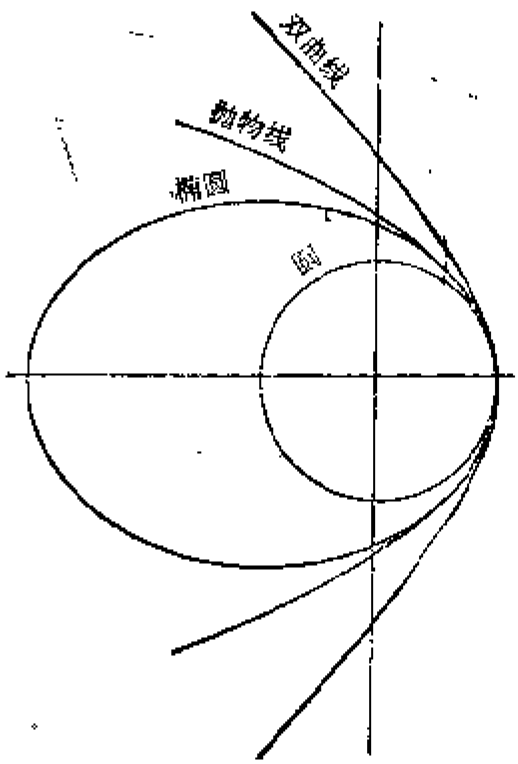
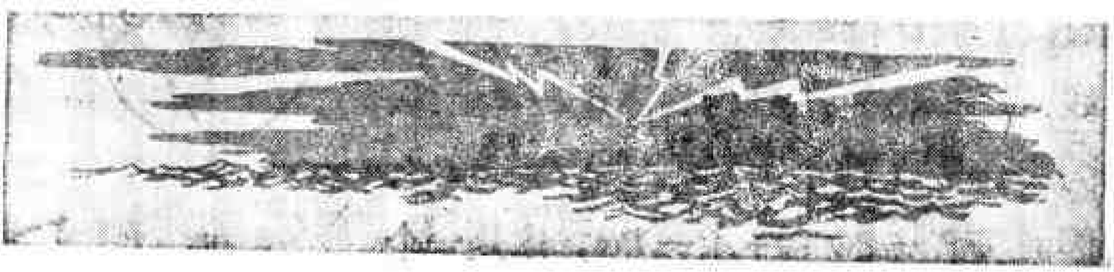


图 60

彗星可能是太阳家族这个天体中暂时的，"只过一夜"的来访者，也可能是一个永久的成员．它们是否一次又一次地绕太阳旋转将取决于它们的速度．一般它们以椭圆的轨道运动．如果速度足够大的话，这轨道就成为抛物线，甚至是双曲线．

4. 航海中的双曲线

双曲线上点与焦点之间的关系被用于航海，称为远距离无线电导航系统．这个系统是以雷达为基础的．在陆上的两个无线电发射站是双曲线的两个焦点．一个站(叫做主站)送出一个脉冲电波，另一站(叫做辅站)能立即收到．因为两站之间的距离与无线电波的速度相比很短．辅站一当收到脉冲波就立即自动地送出它自己的脉冲波．在有导航系统装置的船上，航海者收到两个脉冲



波，并且在荧光屏上指示出到达时间的差，接收器便自动地计算出脉冲波所经过的距离的差（脉冲波的速度和光的速度相同都是每秒 186,000 英里）．这个计算可以用标绘在航海地图上的双曲线来确定轮船位于某一条双曲线上．当接收到另一对发射站的信号时，就画出另一条双曲线．当然，这两条双曲线可以有四个交点．根据推算，航海者便能选择出表示该船位置的交点 S（见图 61）．

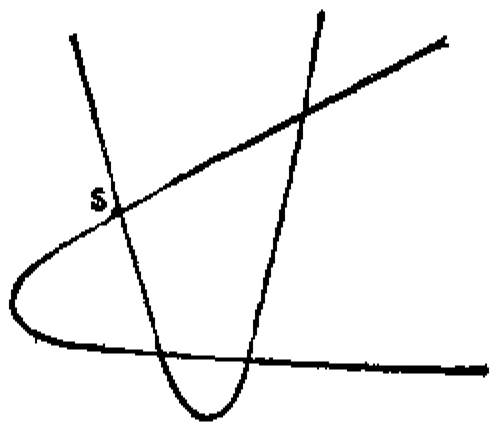
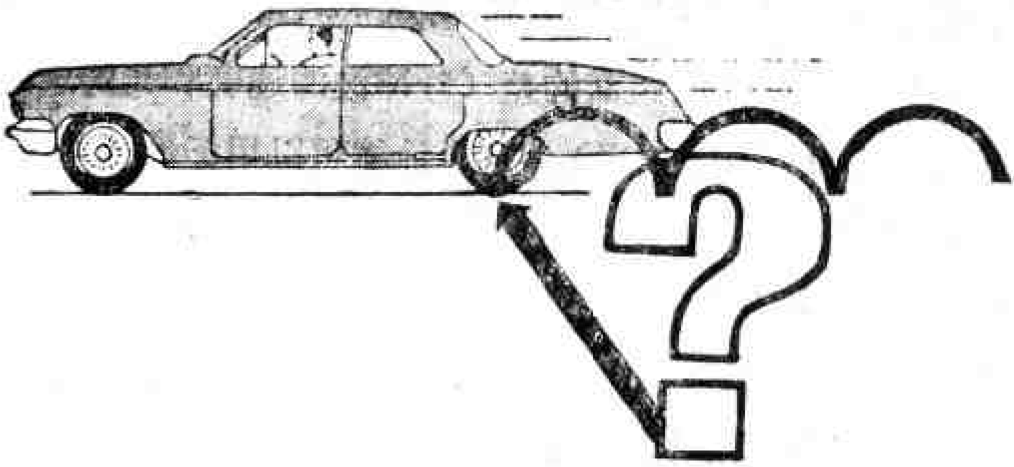


图 61



六、转动曲线

1. 旋 轮 线

当汽车以每小时 60 英里的速度行驶时，汽车的什么部分静止不动的呢？回答这一问题，要依赖于一个叫做旋轮线(或称摆线)的曲线的性质.

在圆周上标记一个 P 点，圆沿着直线滚动而不打滑，你就可以画出这一点的运动轨迹. 这个轨迹是一条曲线叫做旋轮线，如图 62 所示.

当 P 点到达直线上的 A 点时，P 点不在运动. 因此，在运

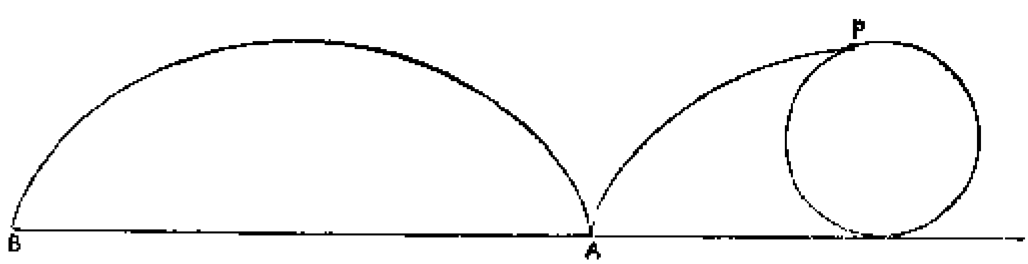


图 62

动着的汽车各个轮胎上的一个给定点，当它一接触到路面的瞬间，它是静止的.

这样，旋轮线就是一圆周沿一直线无滑动地滚动时，这圆周上某个定点画出的一条曲线。 如果这个圆的半径是 a，沿着 x 轴转动，而且这一描迹点在开始时就重合于原点. 那么就可以用下面的方程来画出该旋轮线的图象.

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta)$$

这里 θ 是以弧度为单位的旋转角.

旋轮线是有着许多有趣性质的一种曲线. 例如，在图 62 中那旋轮线的一个拱的长（从 B 到 A）是滚动圆直径的四倍（图 62）. 在拱形下面的面积恰是那圆面积的三倍.

我们设想做一个旋轮线状的斜面（图 63）. 如果我们听任一颗弹子沿该斜面滚下来，我们就会发现，这颗弹子不论从点 T, Y, W 或其它任何一点出发，到达点 X 所需要的时间将是相同的.

这样旋轮线也就叫做等下降曲线. 旋轮线也是最快下降曲线. 如果一颗弹子沿着直线 YX 从 Y 滚到 X，它就不会象沿着旋轮线 $YWTX$ 滚得那样快.

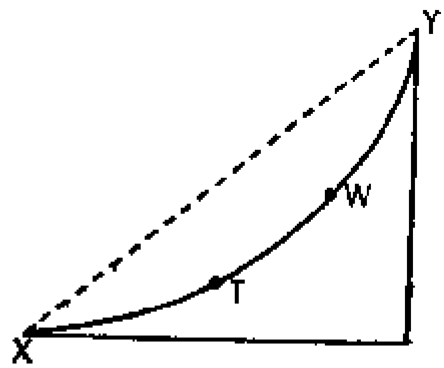


图 63

当圆在直线上滚动时，圆周上一个定点的轨迹就是一条旋轮线. 那么当我们在固定的圆内滚动一个圆时，将会出现什么现象呢？如果滚动着的圆的直径是定圆直径的一半，并且在该定圆内滚动，那么动圆上任

意一个描迹点 P 就沿着 AB 运动，直线 AB 就是大圆的直径（图 64）.

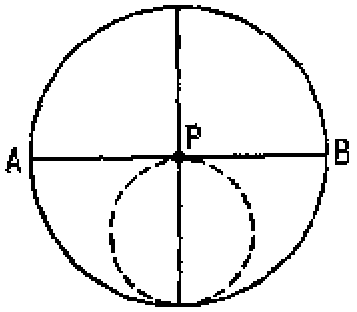


图 64

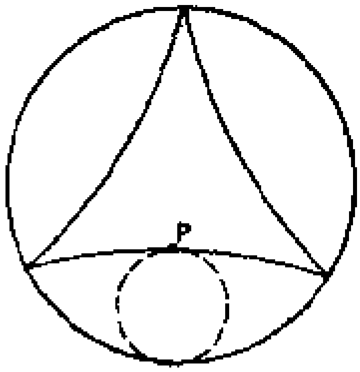


图 65

如果动圆的直径小于定圆的直径的一半，那么动圆周上任意一点所描绘的一条曲线叫做**圆内旋轮线**（或叫内摆线）. 如果两个直径的比是一个有理数，那么 P 点就会回到它的出发点. 当且仅当这个比值是一个整数的时候，P 点才能每环绕一周回到出发点一次. 如果比值是 3，我们得到的结果见图 65. 这就给予我们一个等分圆周的方法，从而我们就能画出任意边数的正多边形.

2. 时间曲线，螺线

螺线存在于我们的周围. 大海里的漩涡，大气中的旋风，

植物和动物生活中的扭转和转动，现代社会中机器的运转等。这些漩涡*旋风*和空间螺旋形的星云是空间螺旋形运动的例子。大海里的贝壳*展示了螺线无限的变化.向日葵，山羊角*和鹰在天空中的滑翔*是有着奇妙变化的螺线.蜗牛身上的螺线记录了它的年龄，螺线形的发条使我们的手表运转准时，螺旋形的弹簧放在沙发里能使我们舒适.最后，螺线是提供给数学家的解决问题的有用曲线.

有一种类型的螺线容易用铅笔和绳子画出，把一个圆物例如胶片的卷轴固定在硬纸板上.把绳子的一头牢固地系在卷轴上，并且仔细地把绳子卷几层在卷轴上. 用一个小圆环系在绳子的另一头，把铅笔放在圆环里，握住绳子一头并绷紧它转开，铅笔就环绕卷轴画出螺线. 这个方法能用在黑板上画，用一个吸杯作为卷绳子的竿.

另一种画螺线的方法是用半圆规画一系列每隔10度的辐射线. 从中心向外量1/16英寸并且在这条直线上标记这一点。在第二条线上离中心2/16英寸处标记一点，再下一条线是在3/16英寸处，等等. 用曲线将这些点连结起来就形成螺线. 用不同的度数间隔和距离，我们就能得到形状和大小都不同的螺线。但是哪里是螺线的终点呢?

另一种是用画直角三角形办法来得到螺线. 开始画出一条长度为1/4英寸的线段 AB. 在 B 点作 AB 的垂线 BC，并使 BC 等于1/4英寸. 根据这样的方法继续画下去直到形成螺线. 用一个硬纸板做成一个直角，并在直角的一边标记

* 严格地说，螺线是属于平面曲线. 文中有"*"的这些是螺旋线. 见60页.

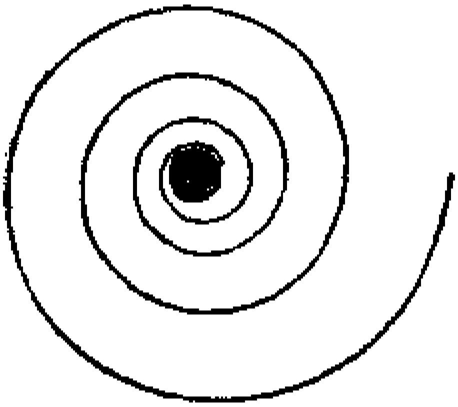


图 66

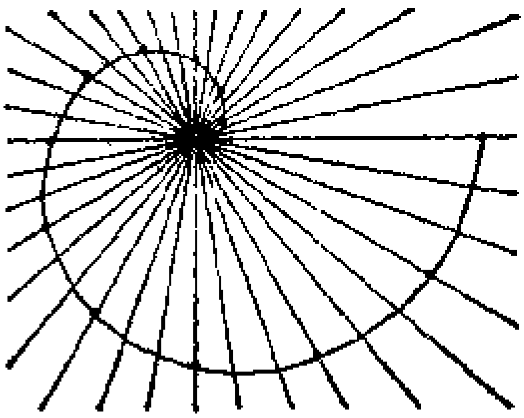


图 67

1/4 英寸的记号，那么就很容易用这种方法画出螺线．注意，每个直角三角形斜边的长度表示出连续整数的平方根（设 1/4 英寸为单位长，这时各斜边分别为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$……）．

上述螺线叫做*阿基米德螺线*． 它在数学上是这样定义的：设直线 a 绕定点 O 作等速转动．如果，同时有动点 M 沿直线 a 作等速移动，那么点 M 的轨迹就是阿基米德螺线． 这可以用从转动中轮子的辐条上飞出物的路线来说明．在转动的留声机唱片上放一块硬纸板，让一支铅笔从中心向外画出去，得到一条近似的螺线． 当然唱片的凹槽本身就是螺线的例子．

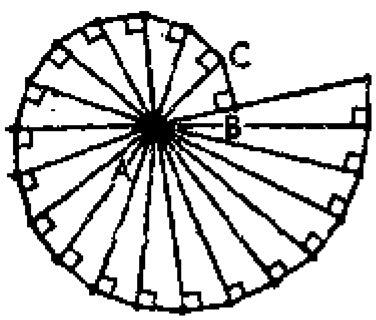


图 68

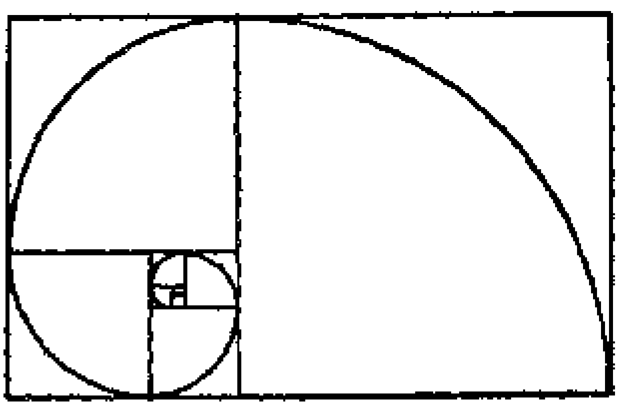


图 69

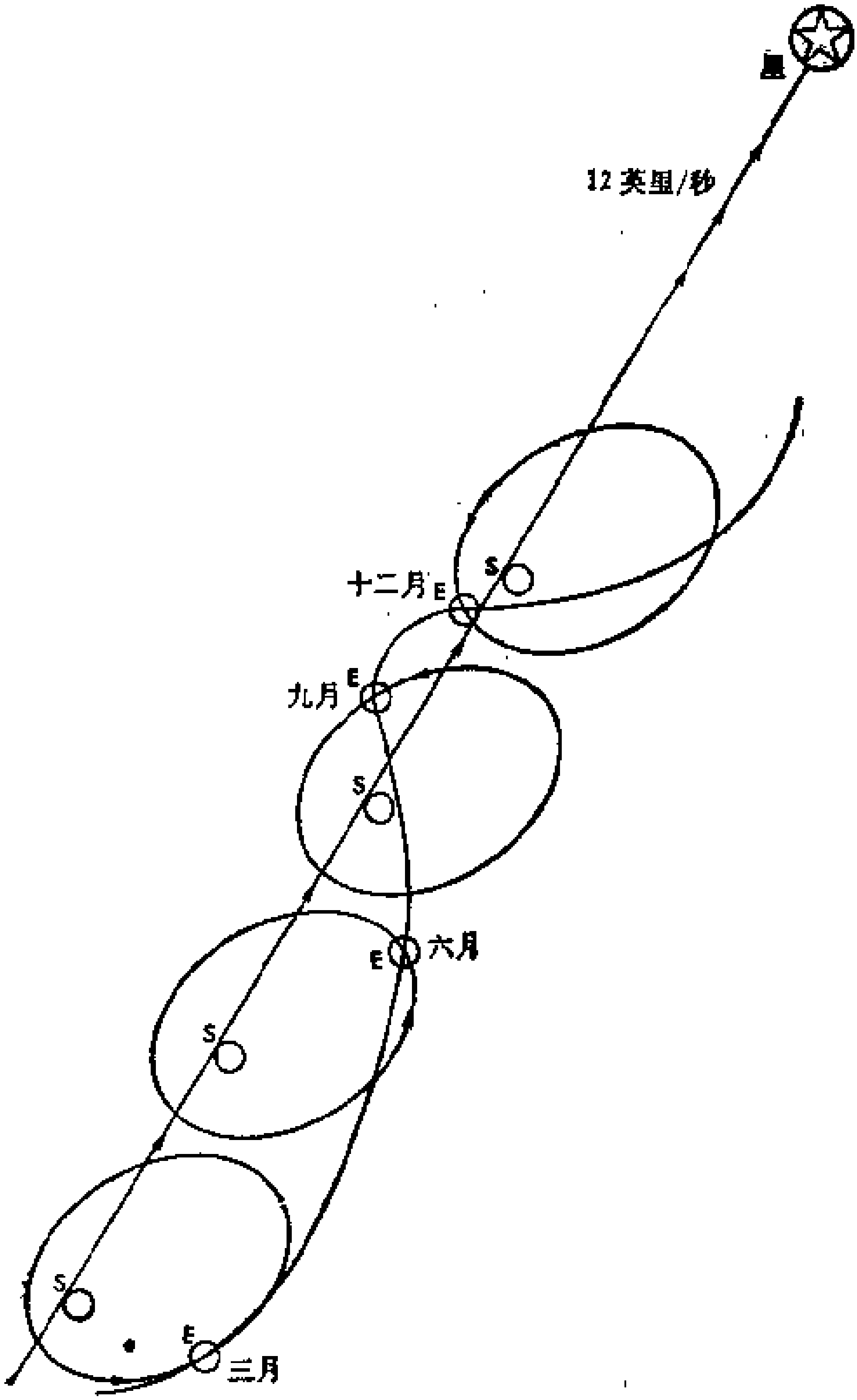
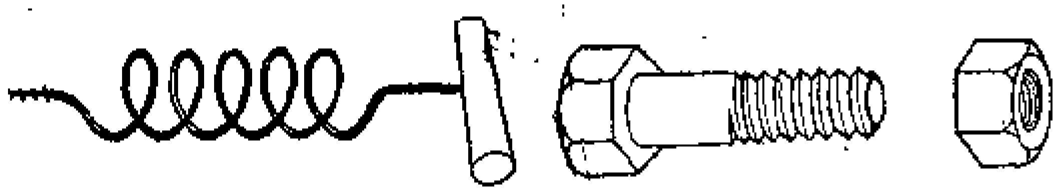


图 70

边长比为 0.618 比 1 的长方形，心理学家认为它看上去最使人舒适。因此它的性质已被图案设计家和艺术家所应用。这种长方形在古希腊时代曾被认为十分有用，因此当时人们称它为**黄金矩形**。

这样的长方形不仅具有看起来令人舒适的性质，而且还有许多其它的性质。如果我们在这样的长方形里划出一个正方形，那么留下的长方形的边长比还是 0.618 比 1，我们可以一直分下去而不会完结。奇怪的是经过正方形相对顶点的曲线，从里面开始逐渐向外伸展，竟是一条对数螺线。

这种现象是和意大利比萨市的斐波那奇的名字紧密地联系在一起的，他大约在 1220 年发现了一个迷人的数列。这个数列的第一项加上第二项得第三项，第二项加上第三项得第四项，如此等等；例如 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144。这个数列越是往后，它的前一项除以后一项的商越来越接近 0.618。



3. 螺 旋 线

在一张画有平行线的纸上，再画一条对角线，然后将这纸卷成一个与这些平行线垂直的圆柱，该对角线不仅与所有平行线形成等角，而且还形成了一条曲线，这条曲线叫做**螺旋线**。

当我们观察到两只松鼠在树干上相互追逐的时候，我们看到它们是沿着螺旋线奔跑的．事实上，从树顶的这一边到树底下那一边，最短距离是螺旋线．松鼠竟会知道这个道理，这不是很奇怪吗？ 普通的螺旋和螺丝钉上的线纹也是螺旋线．木匠用来打洞的钻也成螺旋线．理发店门口的红白两色的旋转招牌给我们显示了正在转动的螺旋线的运动情况．当然，螺旋式的楼梯能够帮助我们在空间向上运动．当螺旋推进器驱动船只前进和直升飞机飞行时，它的轨迹也是螺旋线．

榆树的叶子，橡树的枝条，松树上的鳞片都是按照螺旋线来排列的．在玉米和榆树枝上，每张叶子与上面（或下面）紧接着的一叶相隔半圈．这个关系可以用分数 1/2 来表示．分子表示螺旋线从任何一叶开始绕枝干转动到上面(或下面)正对它的第二叶的圈数；分母表示在这段环绕枝干的曲线线路上，叶子的附着点数．其它植物象山毛榉分数为 1/3，就是说任何一叶到它上面(下面)一叶是绕枝干一圈的三分之一．橡树的分数是 2/5，冬青的分数是 3/8．其它的分数如 5/13，8/21，13/34 和 21/55，表示这种排列的还可以在玫瑰花结，球果和花瓣中找到．

什么是下面这些分数的模型呢？

1/2，1/3，2/5，3/8，5/13，8/21，13/34，21/55

如果我们比较一下分子和分母，我们是会发现这个模型的．从第一个分数以后，每一个分数是由前面的两个分数的分子和分母分别相加而组成的．自然界里居然有这样的数学模型，不是很奇怪的吗？

4. 悬 链 线

由一根绳子或一根链子悬在两根支柱之间所形成的曲线叫做悬链线。它看上去好象是圆弧，但并不是圆弧。看上去好象是抛物线，但并不是抛物线。这是另一种曲线，它是具有另一种形状，另一种性质和另一种方程的曲线。抛物线的方程是 $y = x^2$，而悬链线的方程是

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

悬链线不是圆锥截线，截割圆锥是不能得到悬链线的。

最简单的悬链线方程是 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$，它有着一种奇异的性质。曲线上某一段的长度的量数总是等于这段曲线下面的面积的量数。在图 71 中，悬链线从 C 点到 D 点的长度以英寸为单位时的量数等于阴影部分 $ABCD$ 的面积以平方英寸为单位时的量数。

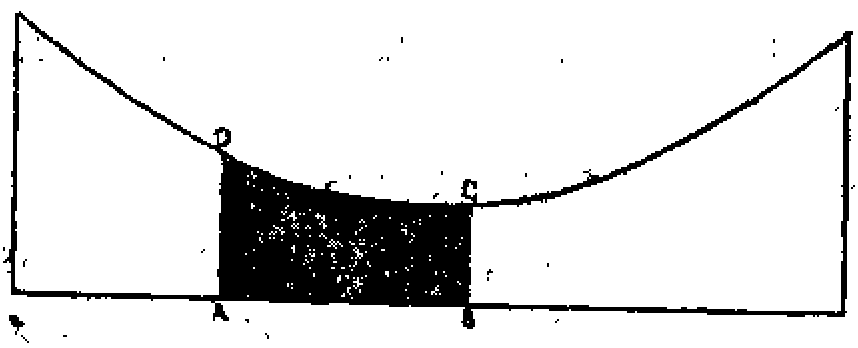


图 71

悬链线也会出现在三维空间里。如果在两个金属圆环之间形成一个肥皂泡，那么在两环之间形成的表面具有最小的

表面积. 令人奇怪的是这表面不是圆柱侧面，这表面的轮廓线（图 72 所示）恰好是悬链线。

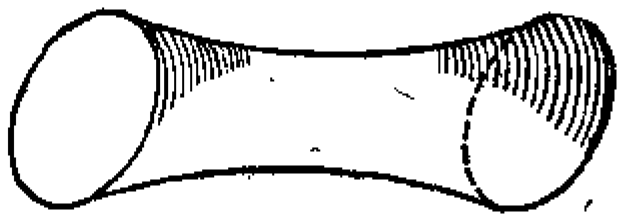


图 72

练习5 曲 面

1. 用表里的这些值画出图象

X	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	-2	-3	-2	$\frac{1}{2}$	3	5
Y	0	1	$2\frac{1}{2}$	3	2	0	-2	$-3\frac{1}{2}$	-2	1

2. 在自然界中，建筑中和机器中收集说明螺线，螺旋线，悬链线和旋轮线的图画。

3. 找出黄金矩形在美术，建筑或自然界中的应用。

4. 收集一些植物，用这些植物叶子的排列来说明螺旋线的非波那奇数列。

5. 将一英寸分为 10 等分，在一页图纸上作出下面的螺线：在图纸的中间固定原点 O. 在离 O 点 1 英寸处固定一点 A. 在 A 点画一条 1 英寸长的线段 AB 垂直于 OA 并固定 B 点。画出 OB. 用 10 等分的英寸量出 OB 的长度，这个长度等于 $\sqrt{2}$. 在 B 点作 BC 垂直 OB 并使 BC 长度等于 1 英寸. 量出 OC 的长度，它的长等于 $\sqrt{3}$. 继续用这样的方式进行，直到你的螺线表示出所有小于 20 的平方根数. 将你的度量值与方根表上的平方根作一比较。

5. 音乐曲线，正弦波

在海滨看到的滚滚波涛可以说明波的运动．声音也是波的运动．如乐曲声在空气中的传播．同样情况，无线电波可以将电视节目从发射台传到你的家里．

这些波动在数学上叫做正弦波．它的数学方程是

$$Y = \sin x$$

这里 x 表示角的量数，Y 表示距离的量数．以正弦表上的读数为依据的图象见图 73．

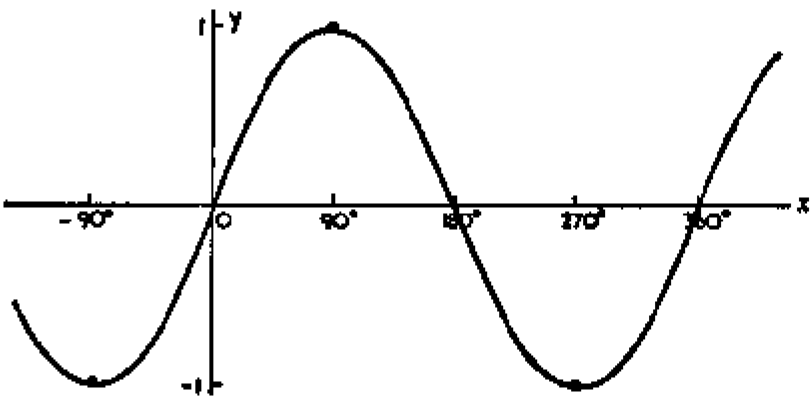


图 73

值得注意的是这种曲线在 360° 以后，又得重复出现．因此，这种曲线叫做**周期曲线**．要解释声波同样是正弦曲线，我们可以把一段铅笔系在一个大音叉的端点．敲击音叉使它产生猛烈的震动，并且把一张纸以匀速拉动．这时铅笔的笔迹是类似于正弦波的周期曲线．如果音叉产生一个较大的响声，那么这个正弦波就会有较大的高度或振幅．较短的音叉音调

高，震动快，结果周期或波长就较短。

你家里的交流电也有一个象正弦波那样交变的电压和电流．当然这种快达每秒 50 次的波动，人类的感觉器官是感受不到的。

灌进唱片的音乐，不可能用一条简单的正弦波线来表示。这类音乐是许多乐器的谐音和泛音的混合．这种混合给我们以愉快的和谐的声音．但是你听到的声音无疑可以画出一条联合的正弦曲线． 事实上，唱片的迹线在放大镜下就是一条记录声音的图象．大多数音乐声波的性质可由它的图象的形

各种音调频率图象

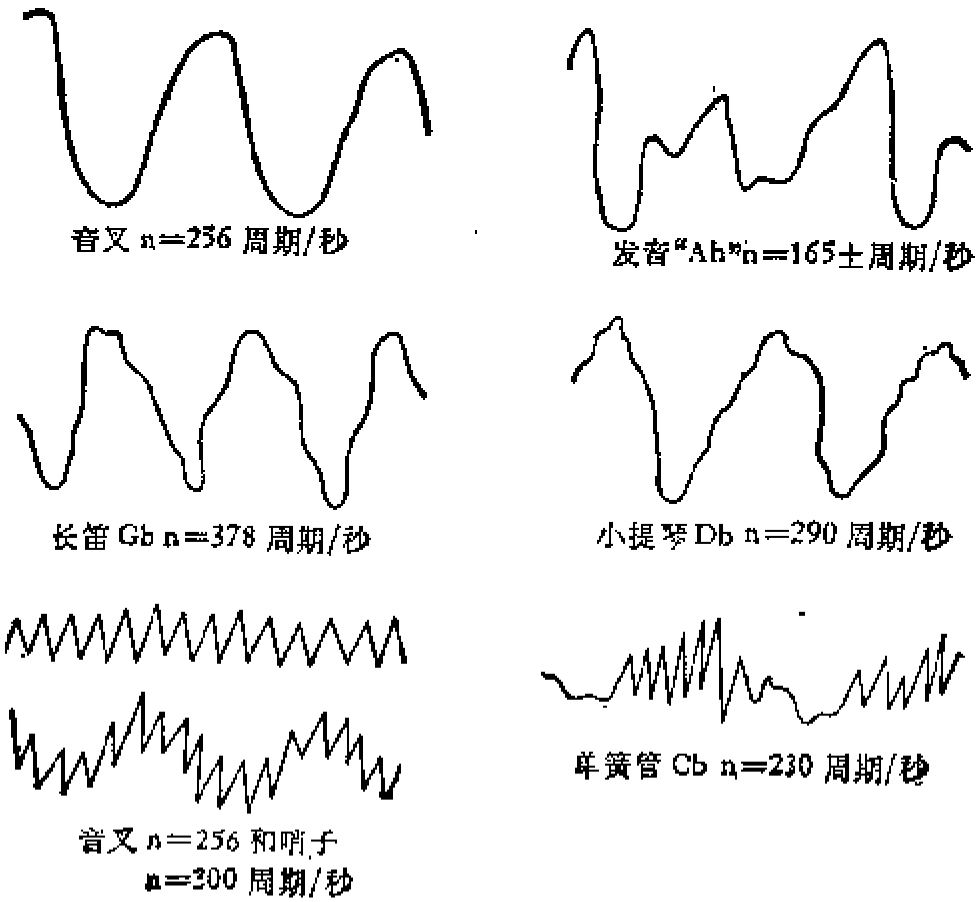


图 74

状或规律显示出来。这样，数学就被应用来分析音乐曲线和改善音乐录音的真实性。

练习6 正弦波

1.用三角函数表画出这些曲线的图象。

a. $y=\sin x$ b. $y=\cos x$ c. $y=\operatorname{tg} x$

2.用三角函数表比较这些正弦曲线的图象。

a. $y=\sin 2x$（如果 $x=10°$，$\sin 2x=\sin 20°$）

b. $y=\sin\frac{1}{2}x$（如果 $x=10°$，$\sin\frac{1}{2}x=\sin 5°$）

c. $y=2\sin x$（如果 $x=10°$，$2\sin x=2\sin 10°$）

3.从百科全书里查出不同音调的频率。

4.按同一尺度绘制两个音乐声波的图象。用坐标的相加或相减得出几个点的坐标，画出两个声音叠加后的图象。

5.从表中各值用极坐标画出图象，我们得到的曲线叫做蚶线，它的方程是 $r=1-2\cos\theta$

θ	0°	30°	60°	75°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
r	−1	−.73	0	.5	1	2	2.73	3	2.73	2	1	0	−.73	−1

七、曲线的缝制

用颜色线穿引成曲线的包络，可以构成迷人的图案。它可以是圆、抛物线、椭圆或双曲线。有些家庭里甚至用这种图案做成壁幔。

曲线的背景通常是一块任意大小的纸板。用一块已经打过小洞，小洞之间相隔 1/2 英寸的板，使用起来更为方便。线可以用有颜色的刺绣线，棉线或松紧带。用大一些的缝衣针引线穿缝。

先在纸板上用直线或圆弧画出曲线的基本图案。然后再用圆规将直线或圆弧等分。

圆 在纸板上画一个大的圆。将圆周分为 24 个等弧。用线连结相邻两点成 24 条等弦。再用不同的颜色，将每一点与顺次第三点连结起来。然后再用另一种颜色，将每一点与顺次第四点连结起来。这样不断的连结直到最后有六种颜色为止。因为相等的弦到圆心是等距离的，因此每一组弦将会围成一个与原来的圆同心的圆。

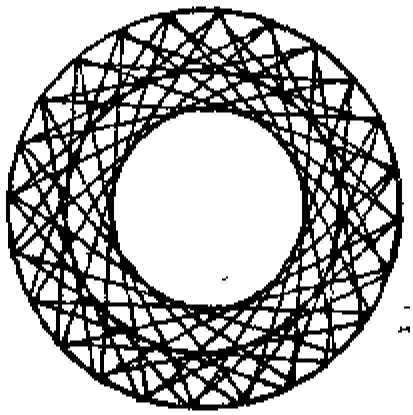


图 75

抛物线 要缝制抛物线，先在纸板上画一个任意的角。在

角的两边标出等分的线段．一边上的线段与另一边上的线段的长度必须不同，但每一边上的线段数应该一样．如同图 76 那样注明线段的数字．然后用线缝制，从 1 到 J，2 到 I，3 到 H 如此等等．当你缝完以后，缝制品上就会出现抛物线的轮廓，更精确地说形成了抛物线的包络．将某些多边形的角或对顶角也应用这样的基本顺序去做，会形成有趣的图案．把圆分成相等的弧与将半径或直径分成相等的线段．把这些分点采用不同的方法联结起来，将会有更多的变化．

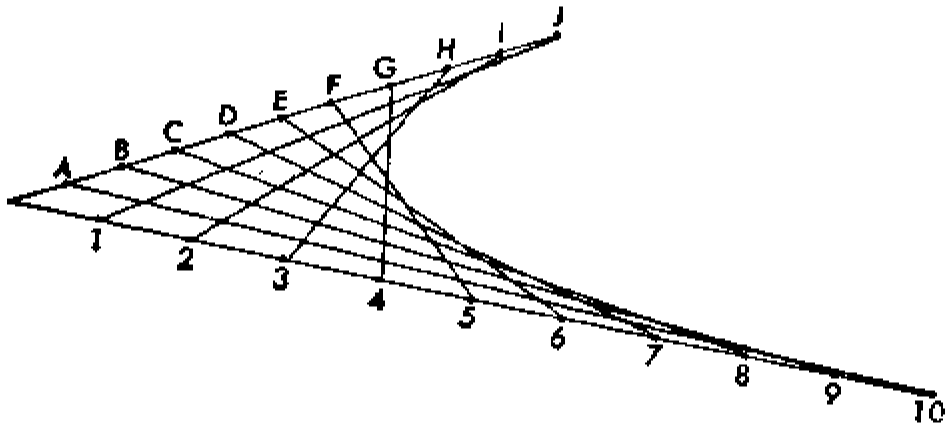


图 76

椭圆 缝制一个椭圆，你必须在圆上联结许多点．画线定出这些点见图 77．在纸板上画一个圆，并且在圆内固定一点 F，F 点可以是圆内除圆心 O 以外的任何一点．经过 F 点画一条直线交圆于 1 和 1′．从点 1 和 1′ 画圆的直径 1 A' 和 1′A．用同样的办法确定点 2，2′ 和 B，B'，以及其它许多类似的点．用线缝制从 1 到 A，1′ 到 A'，2 到 B，2′ 到 B'，等等．直到所有成对的数字和字母联结为止．你的缝制品就形成一个椭圆．这个椭圆的一个焦点是 F，而另一个焦点是在 O 的

另一侧的对称点. F 点离圆心 O 越远，椭圆就越拉长.

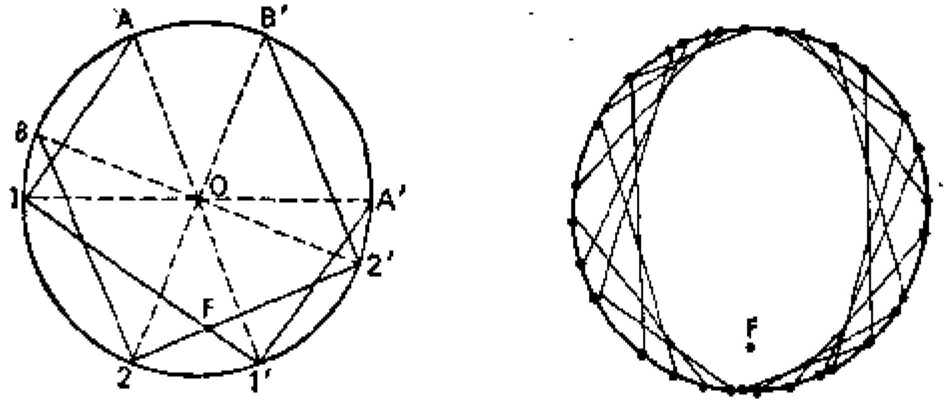


图 77

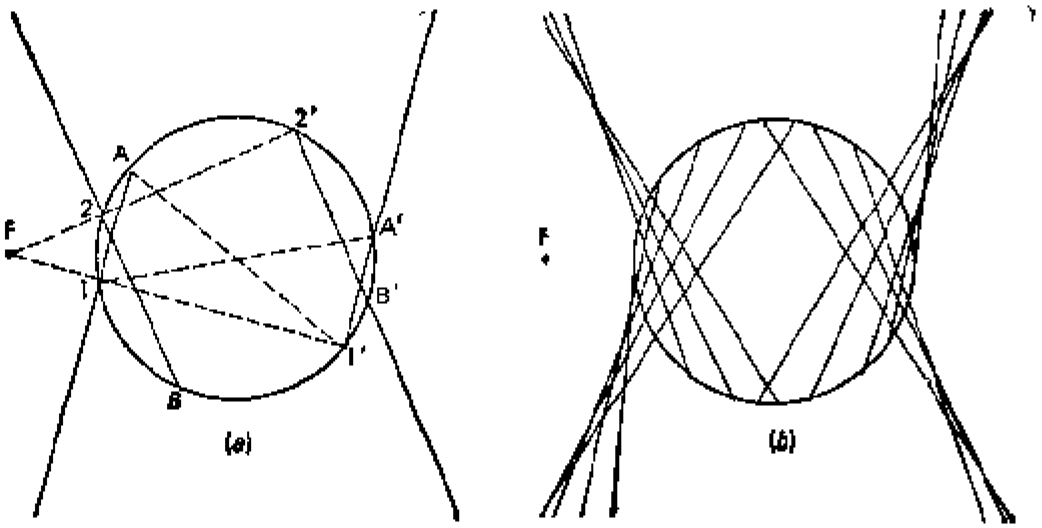


图 78

双曲线 要缝制一条双曲线，在纸板上画一个圆并且在圆外固定任意一点 F. 经过 F 点画一条直线交圆于两点 1 和 1′, 从这两点画直径 $1A'$ 和 $1'A$. 以同样的方式，固定 2, 2′, B, B' 和许多其它类似的点. 用线缝制从 1 到 A, 1′ 到 A', 2 到 B, 2′ 到 B', 等等. 但要把你缝制的线延伸而超出圆，如图

78(a)所示．这样一直缝制到所有成对的数字和字母都联结起来为止．缝制线延伸后所形成的图形，它的轮廓是双曲线．这条双曲线的一个焦点在 F，而另一个焦点在圆另一侧的对应点[图78(b)]．

练 习 解 答

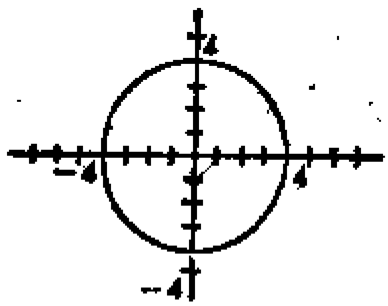
练习 1

1. a. 10 b. 13　2. 13　3. $9\frac{1}{4}$（近似值）

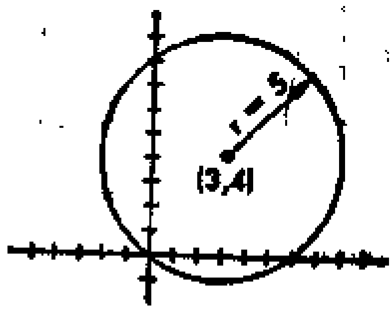
4.

练习 2

1. a.

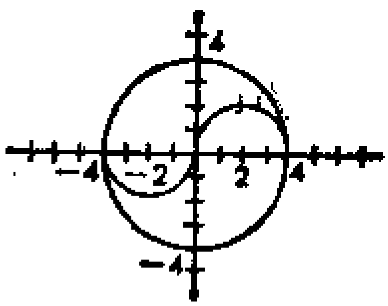


b.



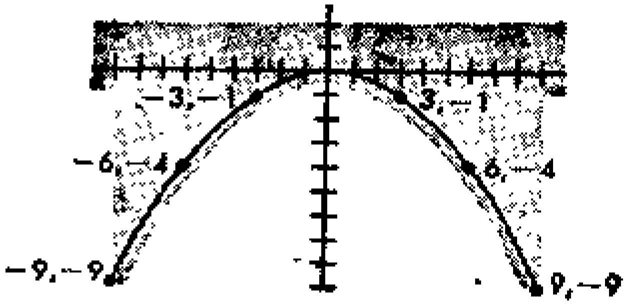
5. 6 英尺　6. 一整转

7.



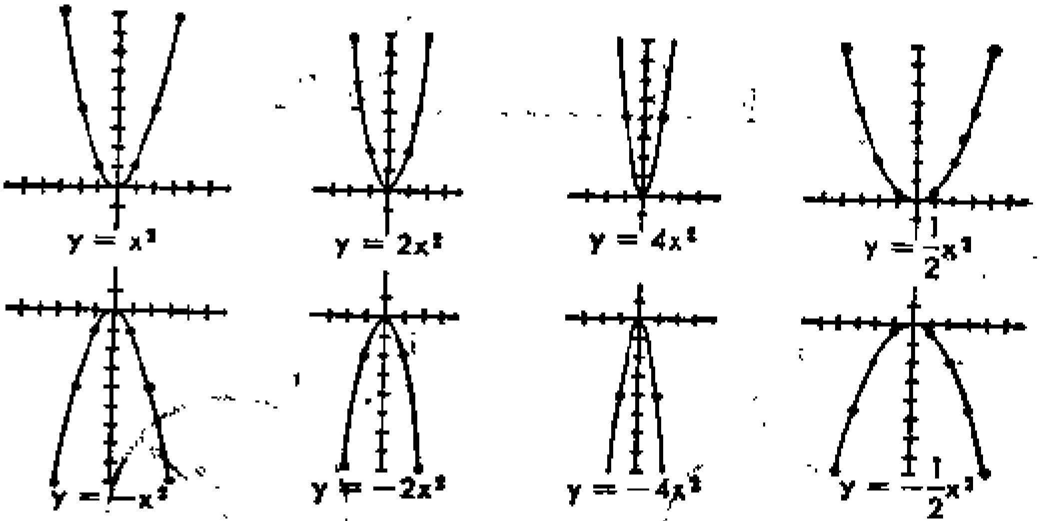
练习 3

2.



3. 5/8 秒和 1 秒

4.



如果 x^2 的系数是正数，抛物线开口向上。x^2 的系数的绝对值越大，曲线就越陡。

练习 4

1. a. 焦点（0，$\sqrt{7}$），(0，$-\sqrt{7}$)；长轴＝8；短轴＝6。

   b. 焦点($\sqrt{11}$，0)，($-\sqrt{11}$，0)；长轴＝12，短轴＝10。

   c. 焦点(2，0)，(−2，0)；长轴＝4，短轴＝2。

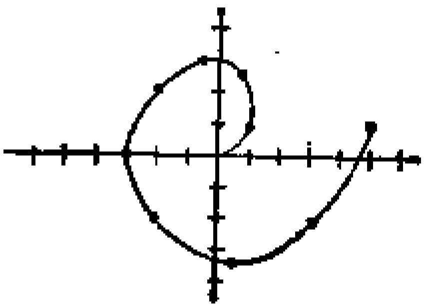
   d. 焦点(0，0)；长轴＝7，短轴＝7（圆）。

2. 近似于 1，600，000 英里。

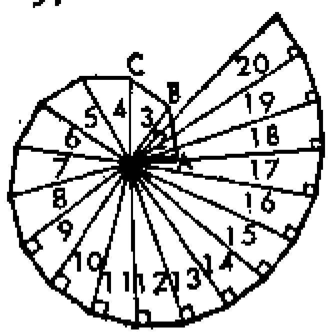
椭球是曲面或立体，椭圆不论在哪条轴上旋转就形成椭球。

练习 5

1.

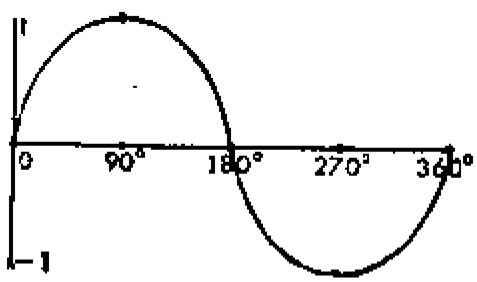


5.

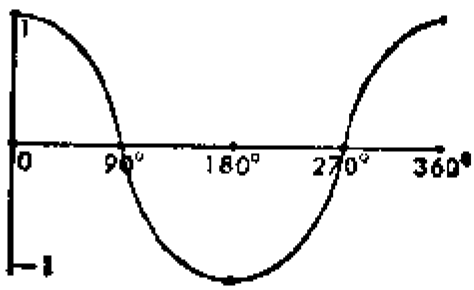


练习 6

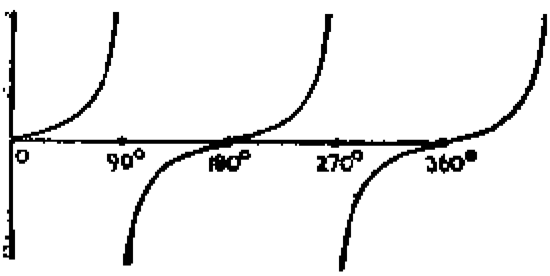
1. *a.*



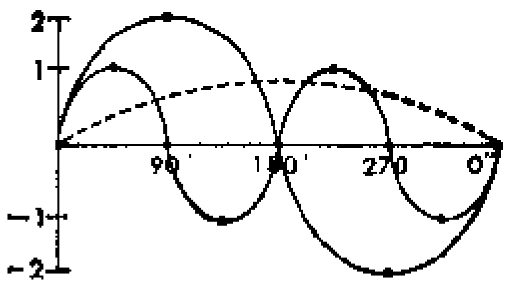
b.



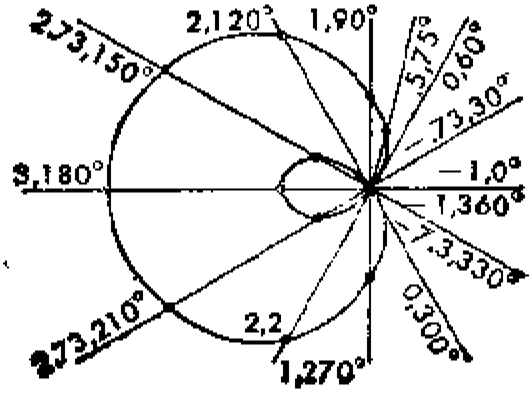
c.



2.



5.


2,120°
1,90°
5,75°
0,60°
2,73,150°
-7,3,30°
-1,0°
3,180°
1,360°
-7,3,330°
0,300°
2,73,210°
2,2
1,270°

[General Information]
书名=曲线
作者=（英）D.A.约翰逊著 毛毓球译
页数=74
SS号=10998982
出版日期=1980年10月第1版

七、曲线的缝制

练习解答