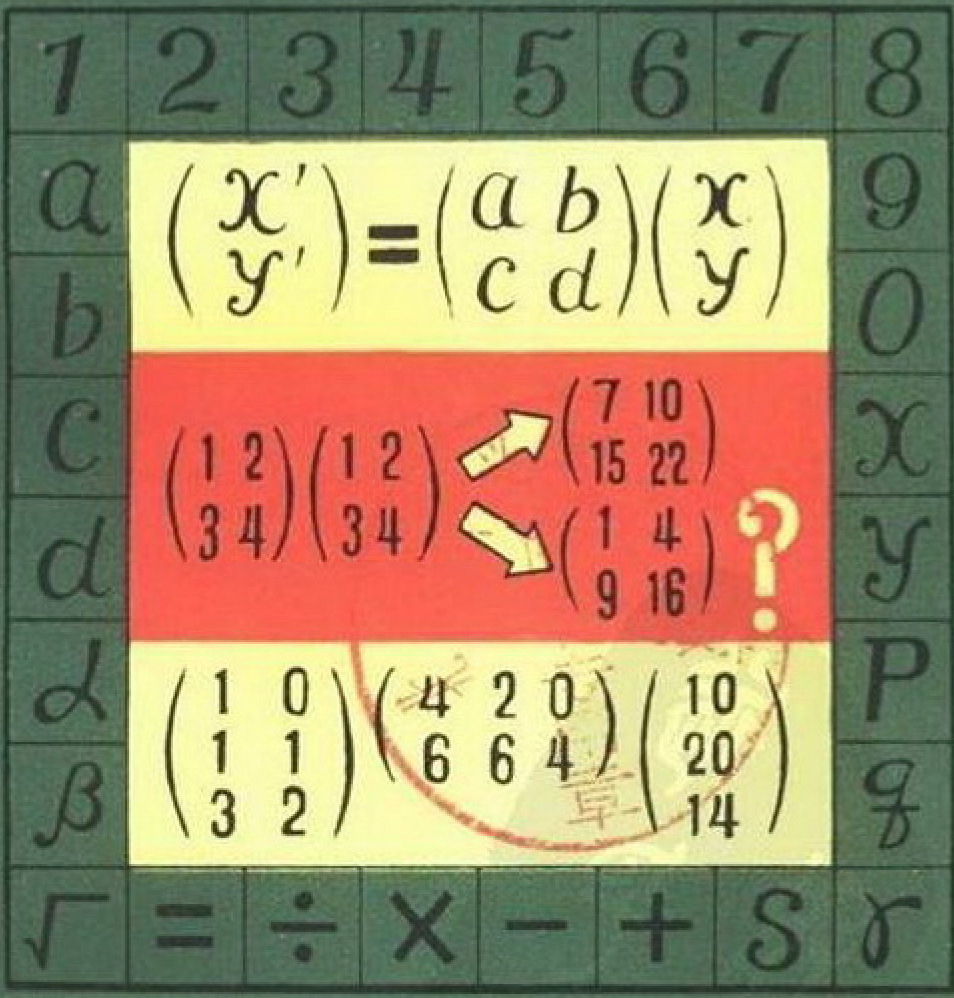
《自修数学》小丛书

矩　阵

〔英〕J. R. 布伦菲尔德 著



科学出版社

《自修数学》小丛书

矩 阵

〔英〕J. R. 布伦菲尔德 著

刘 远 图 译

科 学 出 版 社

内容简介

本书是英国《自修数学》小丛书中的一本．矩阵是很有用的一种数学方法，矩阵可用来解线性方程组，计算数据，研究几何和概率等．书中用通俗浅显的文字，形象生动的举例，介绍了矩阵的基本概念、运算法则及其应用情况，并穿插了不少富有启发性的练习，书末附有答案．可供中学生课外阅读，亦可供具有中等文化程度的读者参考．

J. R. Branfield

MATRICES

John Murray, London, 1971

《自修数学》小丛书

矩　阵

〔英〕J. R. 布伦菲尔德 著

刘远图 译

责任编辑　徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1982年5月第一版　开本：787×1092　1/32

1982年5月第一次印刷　印张：3 3/4

印数：0001—23,200　字数：71,000

统一书号：13031·1883

本社书号：2558·13—1

定价：0.42元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书（Exploring Mathematics On Your own）是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物。该丛书自1964年初版后，于1971年、1974年，1976年多次再版印刷，为开阔读者眼界，增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学

测量世界

数型

毕达哥拉斯定理

统计世界

集合、命题与运算

数学逻辑与推理

曲线

拓扑学——橡皮膜上的几何学

概率与机率

向量基本概念

有限数学系统

无限数

矩阵

写 在 前 面

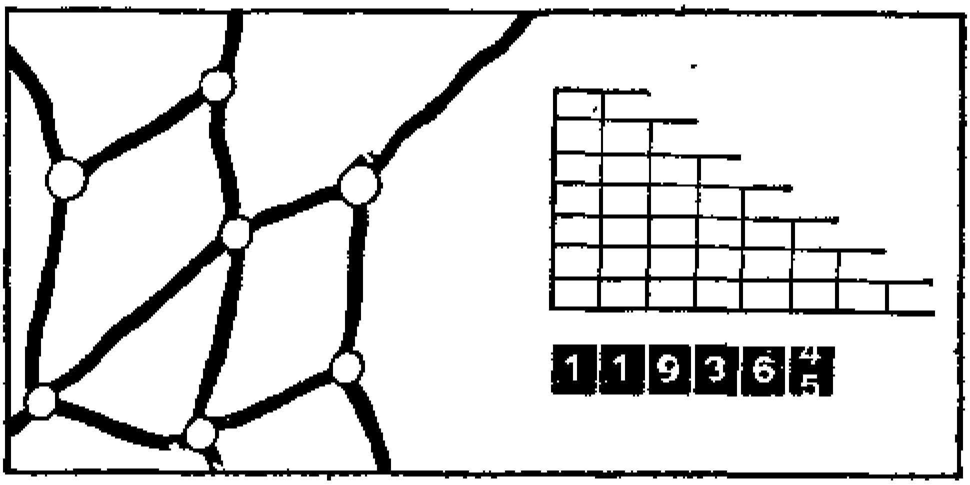
一组数目繁多的数据，可以用表的形式简单明了地表示出来．一张表就是一个矩阵．这本小册子《矩阵》将讨论怎样用两个矩阵去获得关于实际问题的更多的数据资料．

本书讨论的内容涉及网络、物价、数据、几何和概率等几个方面的问题．矩阵的概念和应用矩阵的方法，是从几个城市间道路交通情况——网络——开始引入和讨论的．然后以求几种商品的价值和从表中取出的数据为例，继续讨论矩阵的应用方法．几何方面只讨论变换，并且把变换看作是矩阵．概率方面包括了下列求概率的问题：一个学生学习的规律一定时，学期末最后一天他学习数学的概率有多大？

讨论的一般目的是用通常的方法找出问题的答案，并且探讨怎样用矩阵描述实际问题，为什么矩阵是更迅速地给出答案，以及为什么矩阵能给出有关问题的更多的数据资料．

矩阵方法的应用日益广泛，本书仅就这些方法的应用和效果作了初步的介绍．

目　　录



一、矩　　阵

1. 数　据　表

我们经常要使用各种表——公共汽车行车时刻表、值班表、所得税表等．下面是几个城市间的距离表(单位：英里)

伦敦								
498	阿伯丁							
111	411	伯明翰						
54	552	160	布赖顿					
115	490	88	134	布里斯托尔				
74	563	185	82	189	多佛			
193	314	110	246	196	257	利兹		
184	333	81	237	162	257	41	曼彻斯特	
56	473	63	97	70	129	164	144	牛津

如果我们要知道从阿伯丁到布里斯托尔的距离，只要从阿伯丁这一列往下看，直到布里斯托尔一行为止，查到的距离是 490 英里．从布赖顿到牛津的距离是多少英里呢？从曼彻斯特到伦敦呢？

要表示一组数据，简便的方法就是列表．当我们把一组数据列成表时，我们总是把各个数据排成几行和几列．要想从表中找到一个数据，只需读出相应的行和列交叉处记的数值就行了．

2. 矩　　阵

任何一张表都是一个矩阵．一个矩阵是将数按行和列整齐地排列起来的一个数据仓库．其中每一个数叫做矩阵的元素．

一个矩阵，除了它本身包含的数据以外，有时还可以把这个矩阵作为一个整体同另一个矩阵一起使用，一般说来，我们用一组数据构成一个单一的矩阵，发现矩阵表示数据简单明了，从矩阵中得到资料效率又高，一定会心满意足．但是在有些情况下，如果我们用两个矩阵表示一种情况，却可以获得更多的资料．研究两个矩阵的连接，会引出许多有趣的和有用的结果．一张地图上面画了几个城市和连结它们的道路，就提供了应用两个矩阵进行研究的实例．在这一章里，我们先讨论一下单一的矩阵是怎样构成的．

四个城市 a、b、c 和 d 之间的道路连接见图 1．

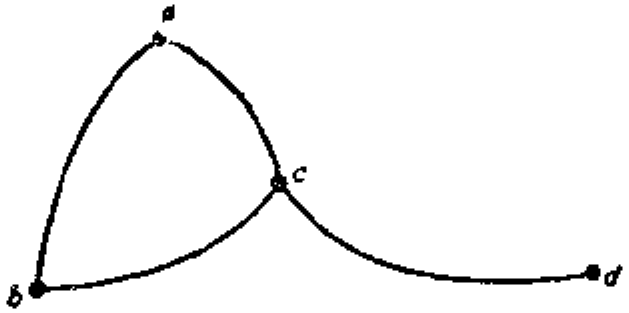


图 1

可以用结点(本例中的城市)和连线(本例中的道路)来表示的每一种情况,叫做网络.

3. 用矩阵表示网络

首先,我们要找出用矩阵表示图 1 中的网络的办法. 我们希望表达的信息是,两个城市之间是否有一条道路连接它们. 开始时我们这样写矩阵,把各个城市写在各列的上面和各行的左边,得到如下的一张表

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

填表的方法是,如果两个城市之间有一条道路连接它们,就记上 1;如果没有,就记上 0. 城市 a 走到它本身,当然无道路可言,所以 a 行、a 列的第一个表列值是 0.

	a	b	c	d
a	0			
b				
c				
d				

城 a 到 b 和到 c 各有一条路，但是没有到 d 的路，所以表的第一行是

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b				
c				
d				

图 1 中网络的完整的表是

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	0	0	1	0

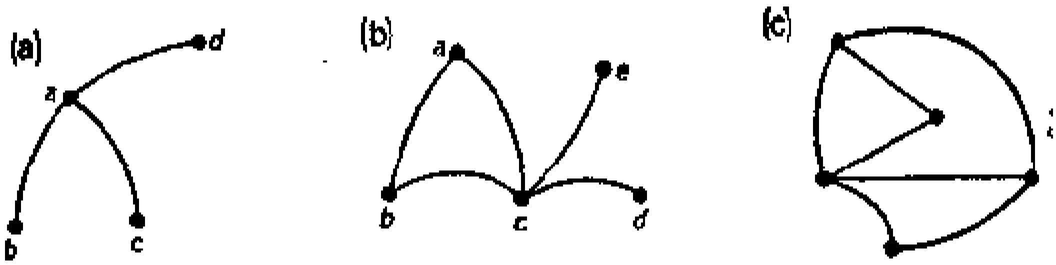
现在，我们把表写在一个圆括号里面，其中的数据都保持不变，这样的写法就叫做矩阵，并且用大写的黑体字母表示．图 1 中网络的矩阵是

$$
\mathbf{M}=\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}\\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

矩阵的重要性就在于它可以把一个几何图形变化成一个数值表，这样我们就可以用数来进行研究了。

练　习　1

1.写出表示网络的矩阵。



2.画出矩阵所表示的网络。

(a)
$$
\begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
\hline
a & 0 & 1 & 1 \\
b & 1 & 0 & 0 \\
c & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}\\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

(b)
$$
\begin{array}{c}
\\ p \\ q \\ r \\ s
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} p & q & r & s \end{array}\\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

(c)
$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

3.表示图 1 中网络的矩阵 M，c 行各数的和是 3。这个 3 表示什

么意义?

4.从矩阵的左上角到右下角这条直线，叫做主对角线. 为什么表示网络的矩阵关于主对角线对称呢?

4. 扩大网络矩阵的应用

图 2 中的网络，用矩阵应该怎样表示呢?

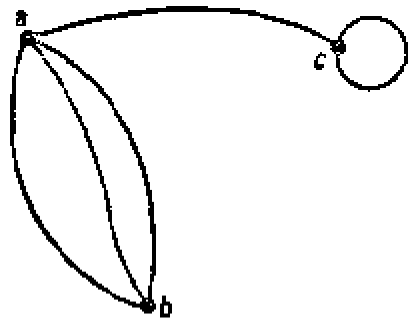


图 2

a 和 b 之间有三条路. 除了用 0 表示两个城市之间没有路，用 1 表示它们之间有一条路以外，我们还可以推广，用一个城市到其他城市有几条路就记作几. 例如图 2 中 a 到 b 应当记作 3，c 到 c 本身有两条路，每一条都是沿着圆环形路走的(只是方向不同)，所以 c 到 c 应记作 2. 表示图 2 中网络的矩阵是

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

象图 3 那样限制两点之间只能有一条“单行道”的网络，应当

怎样表示呢?

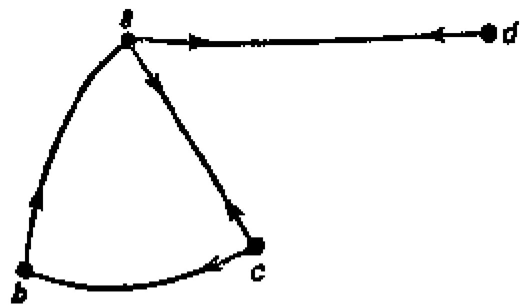


图 3

从图上可看到,如果两个城市之间只有一条道路,而且箭头号表示道路通行的方向,只有满足这些条件才能从一个城市到另一个城市去旅行. 我们可以从 a 城到 c 城和 d 城,但是不能到 b 城. 因此矩阵的第一行是

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ & 到 \\ 从\ a & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

必须注意,记入的数字要符合"从____到____"的约定;从 a 到 b 不能通行,从 b 到 a 却可以通行.

表示图 3 中网络的完整矩阵是

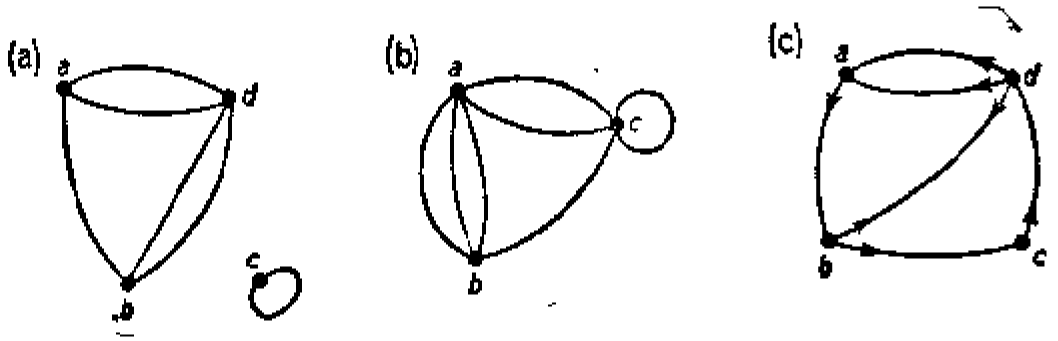
$$\begin{array}{cc} 到 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 从\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

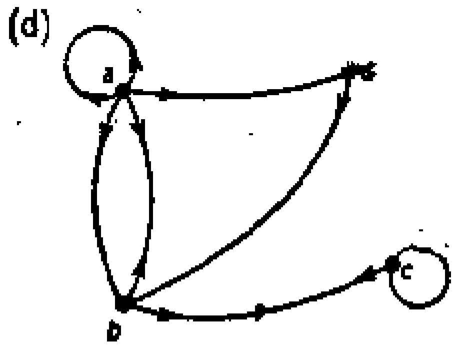
练 习 2

1.图 3 的矩阵关于主对角线是不对称的，为什么? 矩阵 a 行各数

值的和是 2，这个 2 具有什么意义？ a 列各数值的和是 3，这个 3 具有什么意义？

2. 找出表示下列网络的矩阵.



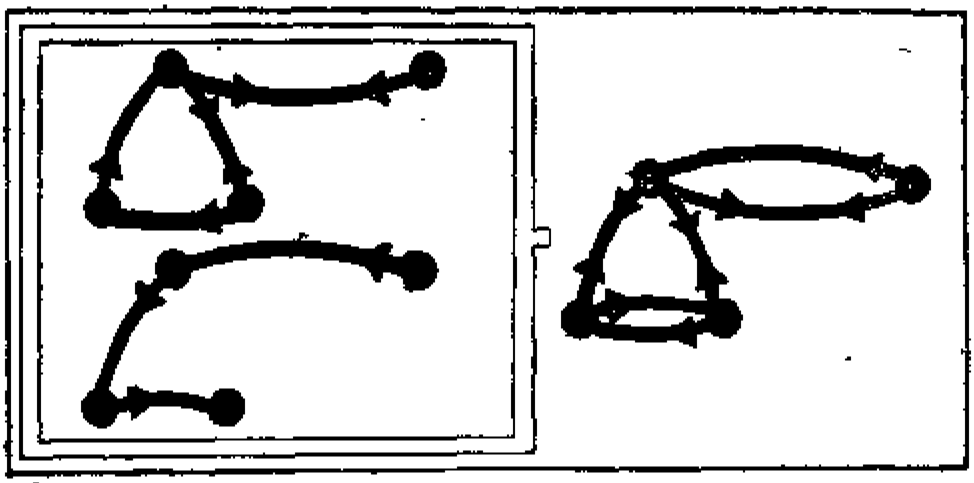


3. 画出和下列矩阵相对应的网络。

(a)
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(b)
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(c)
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

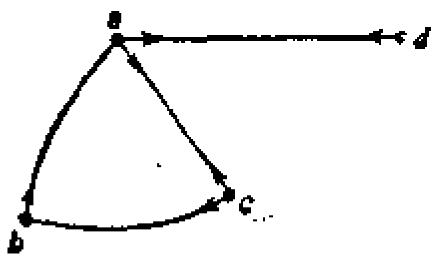


二、矩阵的连接

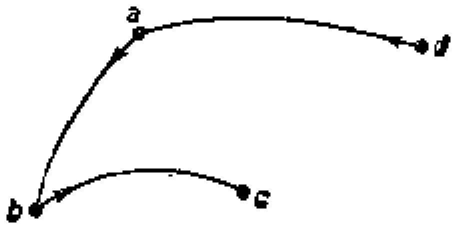
矩阵可以用来描述网络内部线路连接的情况．现在我们将进一步研究，利用两个矩阵能不能得到有关网络的更多的知识．

1. 两个矩阵的加法

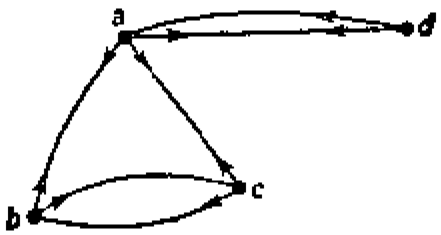
图 3 的线路图是



新的线路已经批准建成，如下图所示

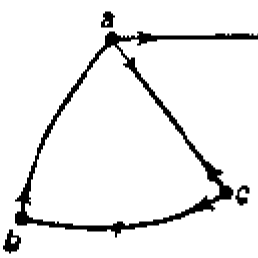


于是现在的情况是

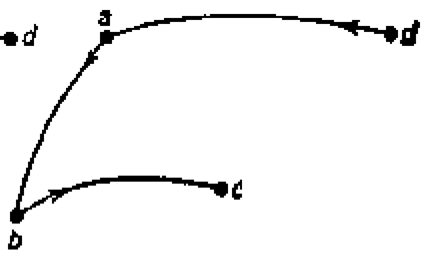


（b 和 c 之间两条线路都是单行线）

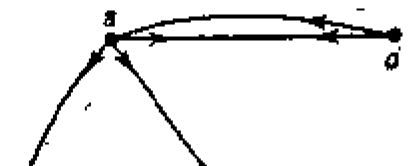
这就是说



加上



得



用矩阵描述网络的迭加

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

加上

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

得到

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

前两个矩阵怎样相加才可以得到后一个作为相加结果的矩阵呢？得到后一个矩阵的算术方法是，把前两个矩阵对应的数相加。我们把这种连接两个矩阵的方法叫做**矩阵的加法**，用符号"+"来表示，记作

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

练　习　3

1. 把下面两个矩阵相加并且画出相应的网络

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 四个城市之间已经建成的线路可以用下面的矩阵描述

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在准备兴建新的线路，把每个城市和其余各个城市至少用一条线路连接起来。每个城市有一条线路通往其余各个城市的网络，怎样用矩阵描述它呢？从已有的矩阵写出一个矩阵描述所需要新建的线路。

2. 两个矩阵的乘法

a、b、c 和 d 四个城市之间的火车交通情况如图 4。

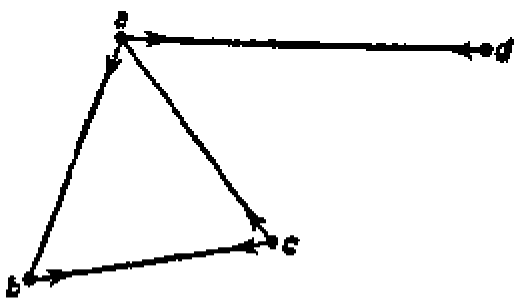


图 4

描述火车交通情况的矩阵 $\mathbf{T}$ 是

$$\mathbf{T} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{从}\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

（列标注：到）

在这四个城市之间另外还有公共汽车，线路图如图 5 所示。

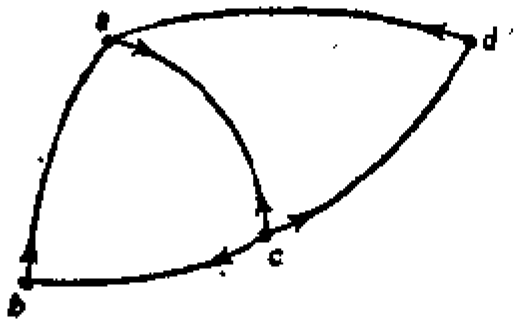


图 5

描述公共汽车交通情况的矩阵 **B** 是

$$
\mathbf{B}=\begin{array}{c} \text{从} \\ \end{array}
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{c} \text{到}\quad a\quad b\quad c\quad d \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

火车和公共汽车的线路图放在一起，就得到图 6.

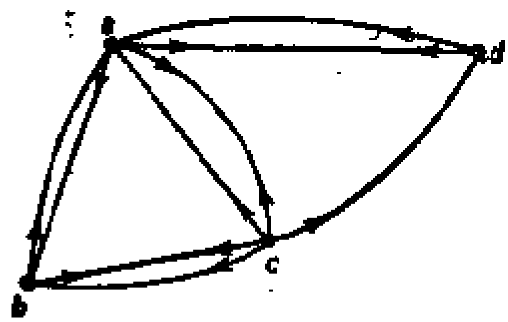


图 6

我想作一次旅行，先坐火车，后坐公共汽车，也就是说，我从一个城市坐火车到另一个城市，然后从这个城市坐公共汽车到其他某个城市．在哪两个城市之间才能作一次使用两种交通工具（先坐火车后坐公共汽车）的旅行呢？从图 6 看出，我可以先坐火车从 a 到 b 或到 d．从 b 可以坐汽车回到 a，从

d也可以坐汽车回到a. 所以我可以从a到a作两次旅行，即先坐火车后坐公共汽车的旅行，但是有两种不同的路线(经过b或者经过d). 但从a到其他任何城市都不可能作这种旅行. 如果我住在b城，我可以坐火车到c（坐火车只能到c)，然后坐公共汽车回到b，当然也可以去a或者去d，因此，从b到a、b或d都可以先坐火车后坐公共汽车. 利用图6可以看出，先坐火车后坐公共汽车从一城到另一城的旅行可以用下面的矩阵来描述

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{到} & a & b & c & d \end{array} \\ \text{从} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

在这个问题中，我们用到的矩阵有：火车矩阵**T**，它描述坐火车可以从哪个城市到哪个城市；公共汽车矩阵**B**，它描述坐公共汽车可以从哪个城市到哪个城市；另一个是回答下列问题的矩阵："在哪两个城市之间才能作先坐火车后坐汽车的旅行呢?"我们能不能把**T**和**B**两个矩阵放在一起而得出后一个矩阵呢? 也就是说，我们能不能找出一种办法来说明下面的事实呢?

$$\begin{array}{cc} \mathbf{T} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{连接} \quad \begin{array}{cc} \mathbf{B} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{得出}\quad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

这种办法是可以找到的，为此我们来分析矩阵 **T** 和 **B**.

矩阵 **T** 的 a 行是

T	a	b	c	d
a	0	1	0	1

它说明我可以坐火车从 a 到 b 或 d.

矩阵 B 的 a 列是

B	a
a	0
b	1
c	1
d	1

它说明我可以从 b、c 或 d 到 a.

现在我已经坐火车来到 b 或 d，从 b 和 d 我可以坐公共汽车回到 a.因此，从 a 出发先坐火车后坐公共汽车回到 a，可以有两种不同的路线. 我们注意到，当 **T** 的 a 行里数字是 1 而且 **B** 的 a 列里相应的数字也是 1 时，从 a 到 a 的旅行才是允许的. 我们可以做这样一种算术

T	a	b	c	d
a	0	1	0	1

$$\begin{array}{cc} \mathbf{B} & a \\ a & 0 \\ b & 1 \\ c & 1 \\ d & 1 \end{array}$$

同

得出

$$0\times 0+1\times 1+0\times 1+1\times 1=2$$

也就是把 a 行各数分别同 a 列对应的各数相乘，然后相加. 这种计算方法能不能用来求出从 a 到 b 先坐火车后坐公共汽车的路线的数目呢？我们知道，问题的答数应当是零. 矩阵 $\mathbf{T}$ 的 a 行是

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{T} & a & b & c & d \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 列是

$$\begin{array}{cc} \mathbf{B} & b \\ a & 0 \\ b & 0 \\ c & 1 \\ d & 0 \end{array}$$

因此，可以允许的路线的数目是

$$0\times 0+1\times 0+0\times 1+1\times 0=0.$$

这种计算方法每次都能给出正确的结果，是由于它能选择哪两个对应的数都是 1（1 表明每两个城市之间有铁路和公路通行）. 我们已经得到了 a 到 a、a 到 b 的结果，下面再讨论 a 到 c 的情况

$$
\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{T} & a & b & c & d \\
\hline
a & 0 & 1 & 0 & 1 \\
b & 0 & 0 & 1 & 0 \\
c & 1 & 1 & 0 & 0 \\
d & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\quad \text{同} \quad
\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{B} & a & b & c & d \\
\hline
a & 0 & 0 & 1 & 0 \\
b & 1 & 0 & 0 & 0 \\
c & 1 & 1 & 0 & 1 \\
d & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\text{得到}\quad
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
\hline
a & & & 0\times1+1\times0+0\times0+1\times0 & \\
 & & & =0 & \\
b & & & & \\
c & & & & \\
d & & & &
\end{array}.
$$

最后得到的矩阵中，每一个数都是用各行和各列依次相乘各对应数再相加而得出的，然后把得数填入最后得到的矩阵相同的行和列的位置上。

对于两个小的矩阵来说，计算过程如下

$$
\begin{pmatrix} \boxed{0\quad 1} \\ 1\quad 0 \end{pmatrix} \text{ 同 } \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \end{pmatrix} \text{ 得到 } \begin{pmatrix} \boxed{0\times1+1\times1=1} & \\ & \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \boxed{0\quad 1} \\ 1\quad 0 \end{pmatrix} \text{ 同 } \begin{pmatrix} \begin{matrix}1\\1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} \end{pmatrix} \text{ 得到 } \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0\times1+1\times0=0} \\ & \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0\quad 1 \\ \boxed{1\quad 0} \end{pmatrix} \text{ 同 } \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \end{pmatrix} \text{ 得到 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{1\times1+0\times1=1} & \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0\quad 1 \\ \boxed{1\quad 0} \end{pmatrix} \text{ 同 } \begin{pmatrix} \begin{matrix}1\\1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} \end{pmatrix} \text{ 得到 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \boxed{1\times1+0\times0=1} \end{pmatrix}
$$

因此，$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$同$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$得到$\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$.

象这样用一行的各数乘以一列的对应各数然后相加的运算，叫做矩阵的乘法，将符号"×"写在两个矩阵之间(也可以省略)，记作

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

你可以用先坐火车后坐公共汽车旅行的实例，继续检查由矩阵乘法所得矩阵的各个数是否正确.

练　　习　　4

1.(a) a 城和 b 城之间火车路线用矩阵表示是 $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$，公共汽车路线用矩阵表示是 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. 画出火车路线和公共汽车路线的网络图. 由网络图写出先坐火车后坐公共汽车旅行的各种可能的路线，所得结果应当正好是上面求得的矩阵.

(b) 计算矩阵 $\mathbf{BT}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

这个矩阵说明网络里可以作怎样的旅行?

(注意：$\mathbf{TB}$ 的结果和 $\mathbf{BT}$ 的结果是不一样的，也就是说，$\mathbf{TB}\neq\mathbf{BT}$；一般说来，矩阵的乘法不满足交换律.)

(c) 计算矩阵 $\mathbf{T}^2=\mathbf{TT}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

这个矩阵说明网络里可以作怎样的旅行?

(d) 计算矩阵 $\mathbf{TBT}$. 这个矩阵说明网络里可以作怎样的旅行?(注意，$\mathbf{TBT}$ 的结果可以有两种办法计算，先求出 $\mathbf{TB}$ 的结果，然后再在后

面乘以 **T**，即 (**TB**)**T**；也可以先计算 **BT**，然后在所得结果的前面乘以 **T**，即 **T**(**BT**)。这两种方法计算 **TBT** 所得结果相同，用此例可以说明矩阵的乘法满足结合律.)

2.求下列情况下作为结果得到的矩阵

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.　　(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

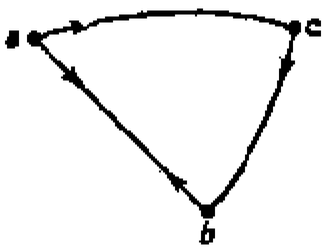
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　(d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$.

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ 和

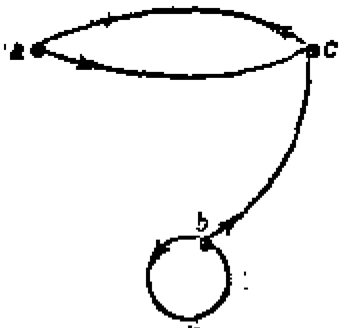
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

第 (*e*) 题说明矩阵乘法对于矩阵加法满足分配律.

3.三个村子 *a*、*b* 和 *c* 之间公共汽车交通情况可以用下面的网络表示



我很喜欢散步，同时发现在这三个村子之间散步最有趣的路线如下图所示



(a) 对上面两种线路图写出公共汽车矩阵(B)和散步矩阵(W).

(b) 如果我想先坐一段公共汽车，然后再步行走一段，在哪两个村子之间可以这样作呢?

(c) 如果我想先步行走一段，然后再坐一段公共汽车，在哪两个村子之间可以这样作呢?

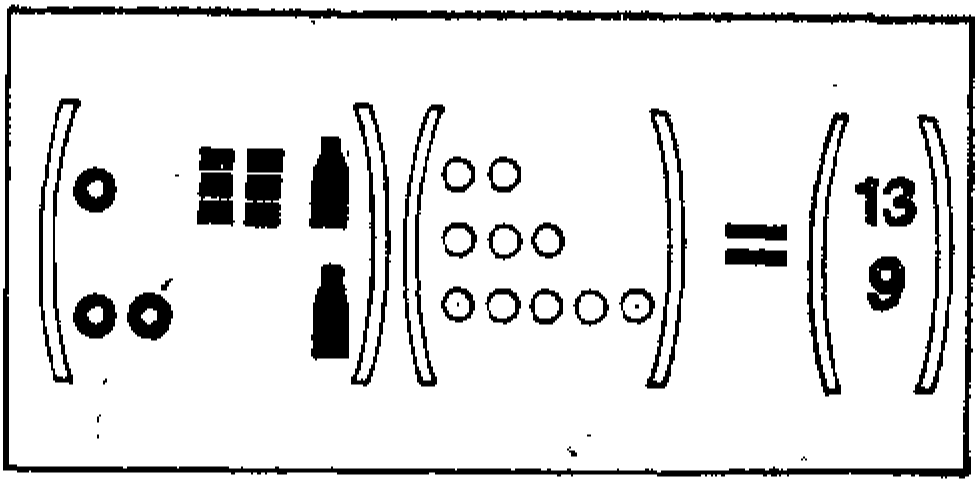
(d) 天气晴朗(同时自己感到精力充沛)时，我就在村子之间散步.在哪两个村子之间我可以走两段路呢?

(e) 同连续走两段路比较起来，先走一段路，再坐一段公共汽车，然后再走一段路要好一些. 在哪两个村子之间可以这样作呢?

(f) 下雨天，在哪两个村子之间我可以坐三段路的公共汽车呢?

3. 矩阵方法的效果

矩阵乘法的算术计算方法，使我们可以很快而且准确地计算出两地间旅行的路线是否存在，存在时应当有几条. 矩阵乘法给出了一种很好的算法，比起在图上试着寻找路线要好得多. 这种方法的效果还表现在它可以应用于许多其他情况.



三、用矩阵算账

安德鲁和布伦达到附近一家小吃店去吃东西．安德鲁要了一个炸面圈、两块巧克力和一杯牛奶．一个炸面圈值 2 便士，一块巧克力值 3 便士，一杯牛奶值 5 便士．所以安德鲁应付 $1\times2+2\times3+1\times5=13$ 便士．

从这个式子我们可以看出，用两个矩阵并把它们相乘也可以算出安德鲁应当付多少钱，因为我们做矩阵乘法时，正好是把每两个数相乘然后相加．描述安德鲁买的食品的矩阵是

$$\begin{array}{cccc} & \text{炸面圈} & \text{巧克力} & \text{牛奶} \\ \text{安德鲁} & \big(1 & 2 & 1 \big) \end{array} = \mathbf{m}$$

我们知道，仅有一行或者一列的矩阵可以看作是一个行向量或者列向量[1]，并且用小写黑体字母表示．$\mathbf{m}$ 是一个行

1）在这套丛书的《向量基本概念》一书中（15 页—38 页），讨论了两个向量的加法．向量加法只要把相应元素相加，这和两个矩阵的加法 $(1,\ 2)+(3,\ 4)=(4,\ 6)$ 很相似，所以我们可以把行矩阵和列矩阵看作向量．

向量．物价矩阵是

$$\begin{array}{l} \\ 炸面圈 \\ 巧克力 \\ 牛奶 \end{array}\begin{array}{c} 物价 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} = \mathbf{n}\ (\mathbf{n}\ 是一个列向量).$$

那么安德鲁应付款是

$$\begin{aligned} \mathbf{mn} &= (1\quad 2\quad 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= 1\times 2 + 2\times 3 + 1\times 5 = 13\ 便士. \end{aligned}$$

如果布伦达买了两个炸面圈和一杯牛奶，那么我们可以把安德鲁和布伦达所买的东西列成一个矩阵 **P**

$$\begin{array}{l} \\ 安德鲁 \\ 布伦达 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 炸面圈 & 巧克力 & 牛奶 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

然后利用物价矩阵 **n** 可以求出他们各自应付多少钱．

$$\begin{array}{l} \\ 安德鲁 \\ 布伦达 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 炸面圈 & 巧克力 & 牛奶 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 炸面圈 \\ 巧克力 \\ 牛奶 \end{array}\begin{array}{c} 物价 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{l} 安德鲁 \\ 布伦达 \end{array}\begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 3 + 1\times 5 \\ 2\times 2 + 0\times 3 + 1\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

因此，当应用矩阵时，必须注意把各项目正确地写到矩阵的一定位置上，同时把矩阵放到一起时，要使第一个矩阵中各列上的项目正好对应后一个矩阵中相应行上的项目．

另外一次，安德鲁在小吃店买了一个炸面圈和一杯牛奶，布伦达买了两块巧克力和两杯牛奶．他们各应付多少钱呢？

当用矩阵来表示网络时，矩阵呈正方形，它的行数和列数相等，这样就可以用地名作为行和列的名称。

上面第一次购物的矩阵是

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

它有两行和三列，是一个长方形矩阵．这样的矩阵叫做“二行三列矩阵”，简单记作“2×3”，前一个数表示行数．

行向量 $\mathbf{m}=(1\ 2\ 1)$ 是 1×3 矩阵，物价向量 $\mathbf{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ 是 3×1 矩阵．

1. 长方形矩阵的乘法

长方形矩阵的乘法可以象下面这样来作

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 2\quad 1}\\ 2\quad 0\quad 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\3\\5\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{1\times2+2\times3+1\times5=13} & \qquad\qquad\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 2\quad 1}\\ 2\quad 0\quad 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{matrix}2\\3\\5\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & \boxed{1\times1+2\times2+1\times3=8}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & & 8 \\ \boxed{2 \times 2 + 0 \times 3 + 1 \times 5 = 9} & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 9 & \boxed{2 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 = 5} \end{pmatrix}.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

注意，一个 2×3 矩阵乘以一个 3×2 矩阵，得到的结果是一个 2×2 矩阵.

练　习　5

作矩阵的乘法（如果可能的话）

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. (h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}$.

2. 结婚蛋糕的成本

一家食品店做三种不同规格的结婚蛋糕．每种蛋糕配料的比例（取适当单位重量来度量），可以用下面的配料矩阵 $\mathbf{I}$ 表示

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{I} & \begin{array}{cccccc} \text{水果} & \text{黄油} & \text{糖} & \text{面粉} & \text{鸡蛋} & \text{白兰地酒} \end{array} \\ \text{蛋糕} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 & \frac{3}{4} & 5 & 3 \\ 1\frac{1}{2} & 6 & 6 & \frac{1}{2} & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & \frac{1}{4} & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

一个星期当中，这家食品店根据定购单要做 A 种的两个，B 种的四个，C 种的三个．各种配料单位重的单价(以便士为单位)，可以用物价向量 $\mathbf{P}$ 表示出来

$$\begin{array}{cc} \mathbf{P} & \begin{array}{cccccc} \text{水果} & \text{黄油} & \text{糖} & \text{面粉} & \text{鸡蛋} & \text{白兰地酒} \end{array} \\ \text{物价} & \begin{pmatrix} 16 & 1 & \frac{1}{2} & 4 & 1\frac{1}{2} & 20 \end{pmatrix} \end{array}.$$

每种蛋糕的成本是多少钱呢?

定购向量 $\mathbf{o}$ 是

$$\begin{array}{cc} \mathbf{o} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{定购} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

这个向量乘以配料矩阵，就可以得到完成定购单所需各种配料的总量.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{ol} = \text{定购} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{水果} & \text{黄油} & \text{糖} & \text{面粉} & \text{鸡蛋} & \text{白兰地酒} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 & \frac{3}{4} & 5 & 3 \\ 1\frac{1}{2} & 6 & 6 & \frac{1}{2} & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & \frac{1}{4} & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{水果} & \text{黄油} & \text{糖} & \text{面粉} & \text{鸡蛋} & \text{白兰地酒} \end{array} \\ = \text{定购} & \begin{pmatrix} 13 & 52 & 52 & 4\frac{1}{4} & 35 & 17 \end{pmatrix}. \end{array}$$

把定购矩阵和配料矩阵象上面那样排列得整整齐齐，再利用矩阵的乘法就可以得到所需配料的总量.

现在利用物价向量就可以求出全部蛋糕的总成本：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{水果} & \text{黄油} & \text{糖} & \text{面粉} & \text{鸡蛋} & \text{白兰地酒} \end{array} \\ \text{定购} & \begin{pmatrix} 13 & 52 & 52 & 4\frac{1}{4} & 35 & 17 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{水果} \\ \text{黄油} \\ \text{糖} \\ \text{面粉} \\ \text{鸡蛋} \\ \text{白兰地酒} \end{array} \begin{array}{c} \text{物价} \\ \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 4 \\ 1\frac{1}{2} \\ 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

物价

$$=\text{定购}\left(695\frac{1}{2}\right)=6.95\frac{1}{2}\text{ 英镑.}$$

从上面我们看到，只要把数据排列成矩阵形式，同时使一个矩阵各列上的项目同后一个矩阵各行右边的项目一致，这时利用矩阵乘法来求总成本，确实是一种行之有效且计算简便的方法.

3. 模型赛车的价钱

模型赛车的跑道是由分装在两种包装里的零件组成的.第一种包里有 4 根直板和 2 根 180° 的曲线形板；第二种包里有 6 根直板，6 根 180° 曲线形板和 4 根 90° 曲线形板. 用这两种零件包装，可以配成 A、B、C 三种成套零件：第一种包一个就是 A 种成套零件，第一种和第二种各一包配成 B 种成套零件，第一种三包和第二种两包配成 C 种成套零件. 直板每块值 10 便士，180° 曲线形板每块值 20 便士，90° 曲线形板每块值 14 便士. 现在的问题是，每种成套零件值多少钱呢？

首先，我们把上面的数据写成矩阵

$$\begin{array}{l} \\ \text{第一种包} \\ \text{第二种包} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{直板} & 180^\circ & 90^\circ\end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{第一种包} & \text{第二种包} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \text{直板} & 180^\circ & 90^\circ \\ \text{单价} & (\;10 & 20 & 14\;). \end{array}$$

为了求得 A、B、C 三种成套零件的价钱，我们把三个矩阵放在一起作矩阵乘法

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{第一种包} & \text{第二种包} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \text{第一种包} \\ \text{第二种包} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{直板} & 180^\circ & 90^\circ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \text{直板} \\ 180^\circ \\ 90 \end{array}\begin{array}{c} \text{单价} \\ \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{直板} & 180^\circ & 90^\circ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 10 & 8 & 4 \\ 24 & 18 & 8 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \text{直板} \\ 180^\circ \\ 90^\circ \end{array}\begin{array}{c} \text{单价} \\ \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix} \end{array}
= \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \text{单价} \\ \begin{pmatrix} 80 \\ 316 \\ 712 \end{pmatrix} \end{array}.$$

因此，A 种成套零件值 80 便士，B 种值 3.16 英镑，C 种值7.12 英镑。

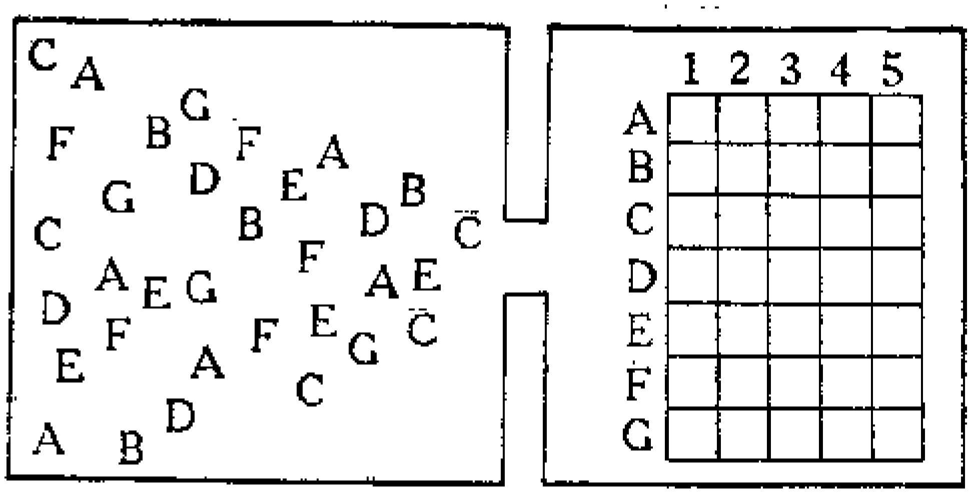
练　习　6

1. 一个人为他自己和他的邻居向苗圃定购了一批花草。他定购的有 12 株金鱼草，24 株紫罗兰，24 株美国石竹，12 株菊花，6 株水仙花，12 株松叶菊。一个邻居需要 24 株金鱼草，12 株翠菊，12 株菊花，12 株水仙花。另一个邻居要 12 株紫罗兰，12 株美国石竹，12 株翠菊和 12 株松叶菊。半打(即 6 株)金鱼草值 12 便士，半打紫罗兰值 10 便士，半

打美国石竹值12便士，半打翠菊值12便士，每株菊花值5便士，每株水仙花值3便士，半打松叶菊值10便士．每人为定购的花草需付多少钱?

2．制造一种有电子设备的模型时，先要把三种不同的零件分组，然后把各组零件装配成模型．把这三种零件分别记作甲、乙、丙，那么零件甲、乙、丙的价钱分别是3、2、4个单位．3个甲种零件、4个乙种零件、3个丙种零件组成组件I；2个甲、3个乙、5个丙组成组件II．模型A包含3个组件I和3个组件II，模型B包含2个组件I和4个组件II，模型C包含3个组件I和5个组件II．一天做了8个模型A、5个模型B和4个模型C．写出每一种模型的零件矩阵，并求出这一天做的模型值多少钱．

3．一家糖果公司为圣诞节准备了三种精致的盒装糖果．“雪车”牌盒装糖果有：2片维夫饼干，一袋夹心糖，三块巧克力（一块果仁巧克力，一块奶油巧克力，一块糖心巧克力），一袋太妃糖，一袋冰糕和三个圆球糖．“圣诞老人”牌盒装糖果有：1片维夫饼干，一袋夹心糖，一块果仁巧克力，一袋太妃糖，一袋冰糕，一包巧克力棒糖，一个巧克力烟斗和6个圆球糖．“铃铛”牌盒装糖果有：一袋夹心糖，4块巧克力（一块果仁巧克力，两块奶油巧克力，一块糖心巧克力），2包巧克力棒糖，2个巧克力烟斗，6块圆巧克力和12个圆球糖．一片维夫饼干值1便士，一袋夹心糖值3便士，一块巧克力（不论那一种）2便士，一袋太妃糖值4便士，一袋冰糕1便士，一包巧克力棒糖值2便士，一个巧克力烟斗值1便士，一块圆巧克力值1便士，一个圆球糖值$1\frac{1}{2}$便士．每个盒子的包装费是5便士．一家商店订购了10盒“雪车”，15盒“圣诞老人”和10盒“铃铛”，它应当付给公司多少钱?



四、数据矩阵

一个工厂有七个工种，每个工种有五种不同等级的工资。下面的矩阵 M 表示的是每一个工种和每种工资等级的工人数

$$\begin{array}{cc} & \text{工种} \\ \mathbf{M} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \text{工资等级} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 2 & 8 & 4 & 0 \\ 10 & 6 & 12 & 4 & 10 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

设 $\mathbf{n}$ 是行向量 $(0\ 0\ 1\ 0\ 0)$，

$$\mathbf{m}\text{ 是列向量 }\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

由 **nM** 得到的数据表示的是什么呢?

$$\mathbf{nM}=(0\ 0\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}2&3&4&0&6&2&0\\4&2&6&2&8&4&0\\10&6&12&4&10&7&0\\3&0&5&1&2&3&1\\1&1&3&1&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$=(10\ \ 6\ \ 12\ \ 4\ \ 10\ \ 7\ \ 0),$$

其中当行向量 **n** 作为"被乘的"矩阵乘以 **M** 的每一列时，向量 **n** 中的"1"挑选出来的是 M 每一列的第三个数，同时把这样得到的结果写到所乘的列的相应位置上. **nM** 挑选出来的正好是各个工种三级工的人数. 由 **Mm** 得到的数据表示的是什么呢?

$$\mathbf{Mm}=\begin{pmatrix}2&3&4&0&6&2&0\\4&2&6&2&8&4&0\\10&6&12&4&10&7&0\\3&0&5&1&2&3&1\\1&1&3&1&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\1\\1\end{pmatrix}.$$

当矩阵 $\mathbf{M}$ 的每一行乘以列向量 $\mathbf{m}$ 时，列向量 $\mathbf{m}$ 中的"1"挑选出来的是 $\mathbf{M}$ 的第四列。就是说，$\mathbf{Mm}$ 挑出来的是工种 D 的工人的人数。 $\mathbf{nMm}$ 挑选出来的是工种 D 的三级工的人数。

设 $\mathbf{p}=(1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1)$，$\mathbf{q}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

由 $\mathbf{pM}$ 给出的数据表示的是什么呢？

$$\mathbf{pM}=(1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 0 & 6 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 6 & 2 & 8 & 4 & 0\\ 10 & 6 & 12 & 4 & 10 & 7 & 0\\ 3 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=(20\quad 12\quad 30\quad 8\quad 26\quad 17\quad 3)$$

给出的是每个工种工人总共有多少人。 $\mathbf{Mq}$ 和 $\mathbf{pMq}$ 给出的数据表示的是什么呢？

练　习　7

1.用适当的向量，从矩阵$\mathbf{M}$求出下列数据：

(a) 每个工种一、二级工的人数。

(b) 工种 E 和 F 每一级工人的人数。

(c) 工种 B、C、D、E 中二、三、四级工的总人数。

(d) 高于三级工的总人数。

2. 一个班里的男学生和女学生，按照他们有几个兄弟和姐妹进行分组，得到一个矩阵 **N**。

$$
\begin{array}{cc}
 & \mathbf{N}\quad \text{兄弟的人数} \\
 & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\text{姐妹的人数}\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

设 $\mathbf{m}=(0\ 1\ 0\ 0\ 0)$，$\mathbf{p}=(1\ 1\ 1\ 1\ 1)$，$\mathbf{r}=(0\ 1\ 2\ 3\ 4)$，

$$
\mathbf{n}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{s}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.
$$

(a) **mN**、**Nn** 和 **mNn** 给出的数据表示的是什么？

(b) 用上面哪几个矩阵可以得出下列数据：

(i) 按有几个兄弟分组，每组的总人数；

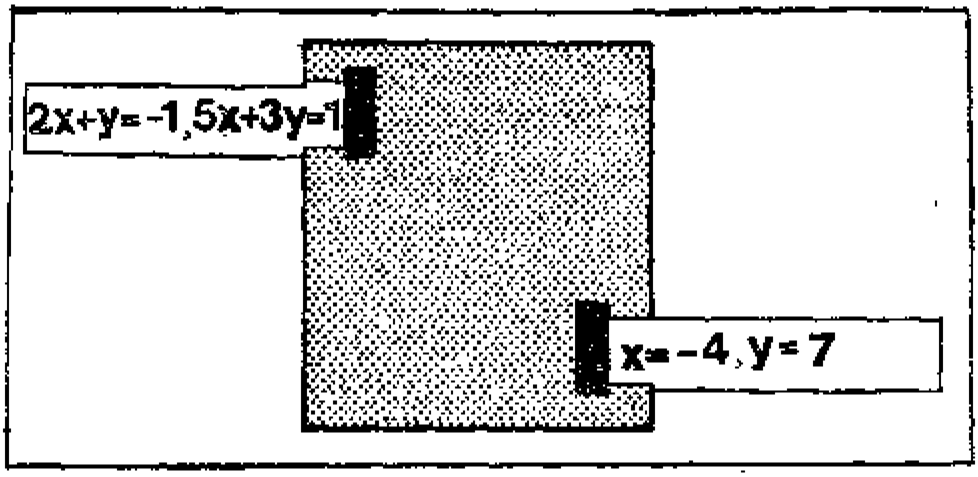
(ii) 按有几个姐妹分组，每组的总人数；

(iii) 全班的总人数。

(c) **rN** 和 **Ns** 给出的数据表示的是什么？

(d) **rNq**/**pNq** 给出的数据表示的是什么？

(e) 用哪些矩阵可以得出全班平均每人有几个兄弟？



五、用矩阵解线性方程组

1. 线性方程组的矩阵

当我们解方程时，方程中的数值是很重要的，因为正是这些数值决定着方程有怎样的解. 在联立线性方程组

$$2x+y=-1$$
$$5x+3y=1$$

中，x 和 y 的解所取的数值（可以记作 a 和 b 或者其他任何符号），依赖于方程已有的数值. 我们可以把两个方程的左边出现的数值写成矩阵形式 $\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}$，其中各个数值按照它们作为 x 和 y 的系数的位置排列. 把 x 和 y 写成列向量 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，然后把它和前一矩阵相乘 $\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，就得到两个方程左边的矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 5x + 3y \end{pmatrix}.$$

两个方程右边的数值，我们可以把它们写成列向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

现在，如果我们写出

$$\begin{pmatrix} 2x + y \\ 5x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

我们说这两个矩阵（2×1 的列向量）相等. 所谓两个矩阵相等，就是说它们对应的数相等，因此

$$2x + y = -1,$$

$$5x + 3y = 1.$$

这样一来，我们可以把联立线性方程组

$$2x + y = -1,$$

$$5x + 3y = 1.$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

练 习 8

1. 下面用等号连结每两个矩阵，其中哪些是对的?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.如果 $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$，$a$、$b$、$c$ 和 d 应当取什么数值？

3.把下列联立方程组写成矩阵形式：

(a) $2x + 7y = 3$，
$x + 4y = 1$。

(b) $3a - 2b = 14$，
$a - b = 6$。

(c) $3P + 2Q = 14$，
$4P + 5Q = -11$。

2. 解线性方程

解线性方程 $ax = b$ 时，我们要把方程两边都除以 a。我们把这个步骤可以看作是把方程两边同乘以 $\frac{1}{a}$。我们为什么挑选 $\frac{1}{a}$ 去乘呢？这是由于 $\frac{1}{a} \times a = 1$。把方程 $ax = b$ 的两边同乘以 $\frac{1}{a}$，得 $\frac{1}{a} \times ax = \frac{1}{a} \times b$。利用结合律可以把 $\frac{1}{a} \times ax$ 写成 $\left(\frac{1}{a} \times a\right)x$，由此得出 $1x = \frac{b}{a}$。由于 $1x = x$，我们便得出 x 的解是 $\frac{b}{a}$。在上面求解的过程中用到了两点基本性质：(i) $1x = x$，即 1 乘以任何一个数值仍得这个数值；(ii) $\frac{1}{a} \times a = 1$。对于数的乘法来说，我们知道，1 是单位

元[1]，$\frac{1}{a}$ 是 a 的逆元，通常记作 a^{-1}。

3. 用矩阵方法解方程组

矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

可以记作 $\mathbf{Ax} = \mathbf{h}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。当我们解这个矩阵方程时，我们可以探讨一下，能不能用解方程 $ax = b$ 同样的步骤去求解呢！首先，我们希望找到一个矩阵，当它乘以另一个矩阵时，得到的仍然是后一个矩阵。具有这种性质的矩阵叫做*单位矩阵*。其次，我们必须找到一个矩阵，当它乘以 $\mathbf{A}$ 时，得到的是单位矩阵。这样的矩阵就是*逆矩阵*。如果用 $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵，$\mathbf{A}^{-1}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，那么 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$。

因此，我们可以这样来解矩阵方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{h}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{h}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h} \qquad \text{两边同乘以 } \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h} \qquad \text{因为 } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h} \qquad \text{因为 } \mathbf{Ix} = \mathbf{x}$$

为此我们必须求出单位矩阵 ($\mathbf{I}$) 和逆矩阵 ($\mathbf{A}^{-1}$)。

1) 请参看这套小册子之一：《有限数学系统》。

4. 单位矩阵

用单位矩阵去乘一个矩阵，得到的仍是这个矩阵，这和用 1 去乘一个数得到的仍是这个数是很相类似的。因此，对于同一类型的所有矩阵来说，单位矩阵只能有一个。

如果 $\mathbf{I}\mathbf{x}=\mathbf{x}$，或者 $\mathbf{I}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，那么 $\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，这是一个 2×2 矩阵，它的主对角线上都是 1，其余都是 0。

要使 $\mathbf{I}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，单位矩阵 $\mathbf{I}$ 应当是怎样的呢？

5. 一个矩阵的逆矩阵

如果 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，那么 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$ 应当使

$$\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

由于 $\mathbf{A}^{-1}$ 乘以 2×2 矩阵得到一个 2×2 矩阵，所以 $\mathbf{A}^{-1}$ 一定是 2×2 矩阵。

用一系列的矩阵逐渐把矩阵 $\mathbf{A}$ 变成单位矩阵，就可以求得 $\mathbf{A}^{-1}$。

取 $\mathbf{E}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，那么

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

所得的矩阵的左上角是 1，正好和单位矩阵左上角的数相同。注意，$\mathbf{E}_1$ 形式上和单位矩阵相同，第一个数是 $\mathbf{A}$ 的第一个数的倒数。

取 $\mathbf{E}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}$，那么

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

所得的矩阵左下角的元素正好是 0。

$\mathbf{E}_2$ 中除了左下角的数等于矩阵（$\mathbf{E}_1\mathbf{A}$）左下角的数加上负号以外，其余三个数和单位矩阵相应的三个数相同。

取 $\mathbf{E}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，那么

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

所得的矩阵右下角的元素是 1。$\mathbf{E}_3$ 中右下角的数等于矩阵（$\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$）右下角的数的倒数，其余三个数和单位矩阵相应的

三个数相同。

取 $\mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，那么

$$\mathbf{E}_4(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

——即单位矩阵．$\mathbf{E}_4$ 中右上角的数等于矩阵（$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$）右上角的数加上负号，其余三个数和单位矩阵相应的三个数相同。

现在我们有 $\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\mathbf{I}$．由于 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$，所以有 $\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1=\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\ -\dfrac{5}{2} & 1\end{pmatrix}\text{每两个矩阵相乘}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}.$$

经过验算，$\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$确实等于$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

从上面我们看到，求一个矩阵的逆矩阵的过程很麻烦，但是步骤是清晰的．当未知数的个数很多时，计算过程更长，但是求逆矩阵可以编成程序用电子计算机处理．下面的习题将

说明怎样建立求逆矩阵的一般公式。

练　习　9

1. 用适当的 E 矩阵求出下列矩阵的逆矩阵：

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.　(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

你发现上列矩阵和它的逆矩阵之间有什么相似的地方呢？写出矩阵 $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵．检验你的答案．

写出矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵．检验你的答案．（如果写出的矩阵是错误的，便用 E 矩阵找出正确的逆矩阵。除数 10 是从哪里得出来的呢？）

2. 用适当的 E 矩阵证明一般形式的矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-c}{ad-bc} \\ \dfrac{-b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

由于逆矩阵中每一个数都有因式 $\dfrac{1}{ad-bc}$，我们可以把这个公因式提出来，把上列矩阵简写成：

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

利用这个一般公式可以求出任何一个 2×2 矩阵的逆矩阵．

当我们用一个数去乘一个矩阵时，就是要将矩阵中的每一个数都乘以那个数。我们知道，$ad-bc$ 的值是这个矩阵的行列式．例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的行列式是

$$4\times 3-2\times 1=10.$$

3. 利用上面的公式，写出下列矩阵的行列式和它们的逆矩阵. 然后验证已知矩阵乘以它的逆矩阵得到的是单位矩阵.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. 用矩阵解方程组

现在我们可以按照第 37 页阐述的步骤来解那里的矩阵方程:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$的行列式是$6-5=1$，它的逆矩阵是$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

用逆矩阵去乘矩阵方程的两边，得

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

从两个矩阵相等得出 x 和 y 的解是

$$x=-4 \quad 和 \quad y=7.$$

练 习 10

1.解下列各联立方程组

(a) $2x+7y=3$,
$x+4y=1$.

(b) $3a-2b=14$,
$a-b=5$.

(c) $3P+2Q=4$,
$4P+5Q=-11$.

2.用矩阵方法解方程 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}$依次取下列值：(a) $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}5\\ -8\end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$.

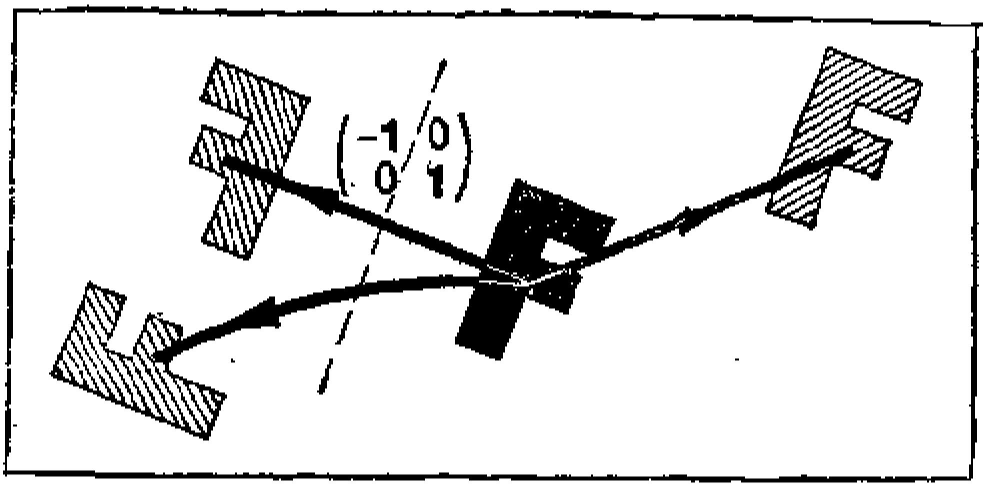
3.验证 3×3 矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix} \text{的逆矩阵是} \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

把方程组

$$x+2y+3z=3,$$
$$2x+4y+5z=4,$$
$$3x+5y+6z=5$$

写成矩阵形式，然后用逆矩阵解方程组，求出 x、y 和 z 的值。



六、用矩阵研究几何

几何学是研究形状、位置和大小的学科．一个图形移动到一个新的位置，或者改变它的形状或大小，就说对这个图形作了一次变换．矩阵可以用来描述各种变换．

当一个平面图形移动到一个新的位置，而且形状或者大小都不改变时，图形内部两点间的距离和两线间的夹角，经过这种变换后都保持不变．有一种变换，它不改变图形的形状，却改变图形的大小，而且图形内部两线间的夹角保持不变，但两点间的距离将发生变化．当一种变换不改变图形的大小时，图形的面积也保持不变．

1．保持距离和角度不变的变换

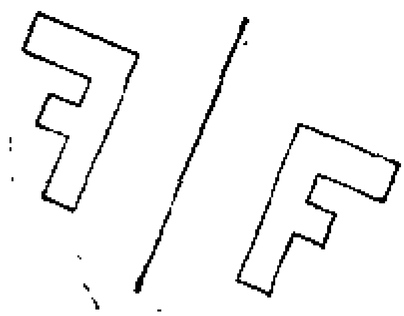
在一张纸上画一个适当的图形，如图形 **F**，并且在一张

不变形的透明纸上描出 **F** 的图形. 由于透明纸是不变形的，所以它可以保证对原图 **F** 施行变换时，两点之间的距离和两线之间的夹角都保持不变.

对于原图 **F** 可以作哪些变换呢?

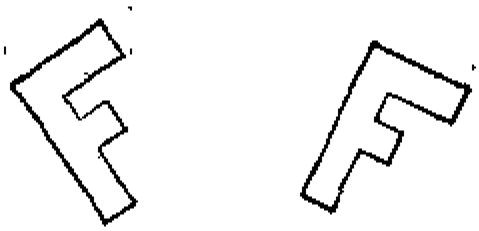
在讲下面每一种变换以前，我们都约定纸上的 **F** 和透明纸上的 **F** 仍处于重叠的状态.

(1) 在纸和透明胶片上画一条直线. 把透明纸翻转过去，同时使两条直线重叠. 把透明纸上 **F** 的图形画到原图 **F** 的纸上.



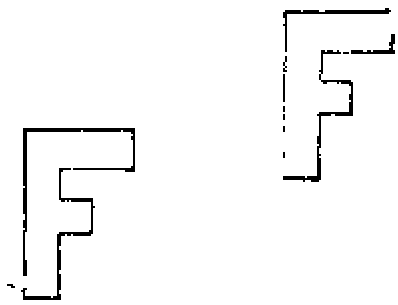
我们知道，这种变换叫做反射.

(2) 用一个大头针穿过玻璃纸和画有原图 **F** 的那张纸，依反时针方向绕着大头针转动玻璃纸，然后把玻璃纸上的 **F** 描到下面那张纸上.



我们知道，这种变换叫做旋转。

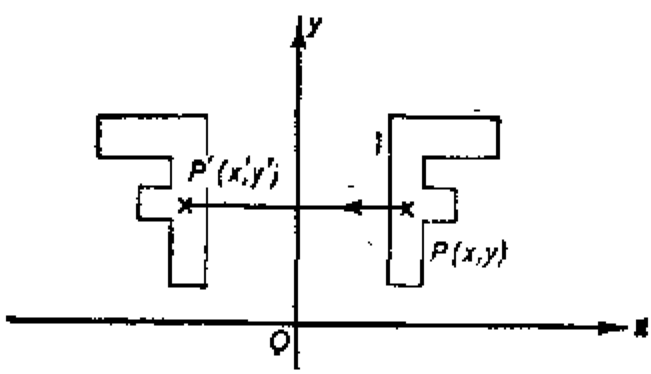
(3) 把玻璃纸从 **F** 重叠的位置移动到一个新位置时，一点也不转动玻璃纸的方向，然后把玻璃纸上的 **F** 描到下面那张纸上。



我们知道，这种变换叫做平移。

2. 变换的矩阵表示

在一种变换下，原图 **F** 上的点 P 变成变换后的图形 **F** 上的一个点 P'，这时我们说，在这个变换下 P 被映射到 P'（记作 $P\to P'$），并称 P' 是 P 的象点（或象）[1]。我们可以把上面几种几何变换放到坐标平面上加以考察。



1) 这一句是译者加的。——译者注

(1) 反射的矩阵

对于直线 Oy 作反射时，任一点 $P(x, y)$ 被映射到点 $P'(x', y')$. 由于反射时 y 坐标不会改变，而 x 坐标要变号，所以有

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

我们可以把方程组 (1) 写成下面的形式

$$x' = -1x + 0y,$$
$$y' = 0x + 1y.$$

现在就可以把这两个方程写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

矩阵形式(2)是方程组 (1) 的矩阵表示，而矩阵 $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 刻划了对于直线 Oy 的反射的几何性质.

利用这个矩阵，我们可以求出一个具体的点在反射时被映射到哪个点上. 以点 $(-2, 3)$ 为例，把这点的坐标作为列向量 $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$，有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

得出映射后的象点是 $(2, 3)$.

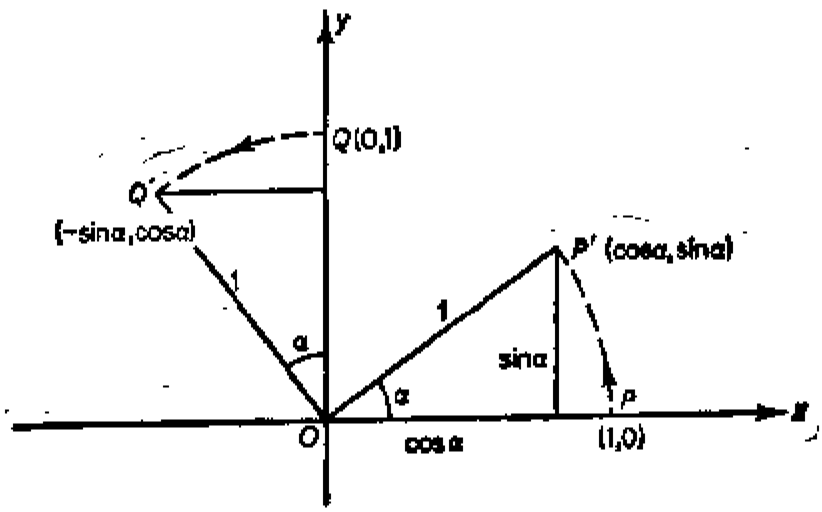
利用矩阵 $\mathbf{R}$ 求出 $(-1, -2)$, $(4, 3)$ 两点的象点.

证明对于直线 Ox 作反射的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，并求出

$(-1, 2)$，$(4, 3)$ 两点的象点。

(2) 旋转的矩阵

由于我们考察的是保持图形为距离或角度不变的变换，所以我们只要知道三点和它们在变换下的象点，就可以确定这种变换。因此，当一个不变形的图形被移动时，只要知道它上面三点是怎样移动的，就可以确定对这个图形实行了怎样的变换。在绕原点 O 作旋转的情况下，O 被映射到它本身，这样原点和它的象点是已知的。对于绕 O 点按反时针方向转 α 角的旋转来说，点 $P(1, 0) \to P'(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$Q(0, 1) \to Q'(-\sin\alpha, \cos\alpha)$。



我们需要找出一个形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的矩阵来描述下面这种变换

$$(1, 0) \to (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

和

$$(0, 1) \to (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

也就是，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$. 由矩阵相等得

$$a = \cos\alpha, \quad c = \sin\alpha.$$

同时有 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$. 因此

$$b = -\sin\alpha, \quad d = \cos\alpha.$$

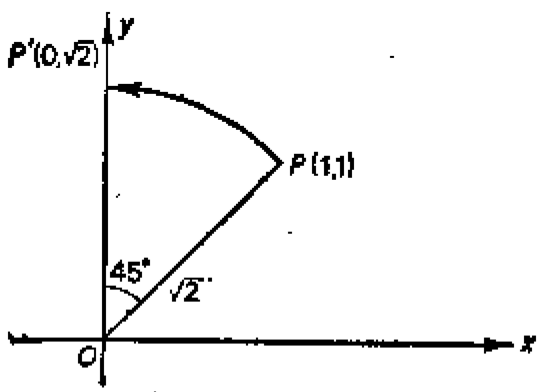
这样，矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 描述了绕原点按反时针方向转 α 角的旋转。除非我们特别说明的情况以外，以后我们一般只讨论绕原点按反时针方向的旋转。

如果 α 是 45°，旋转的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

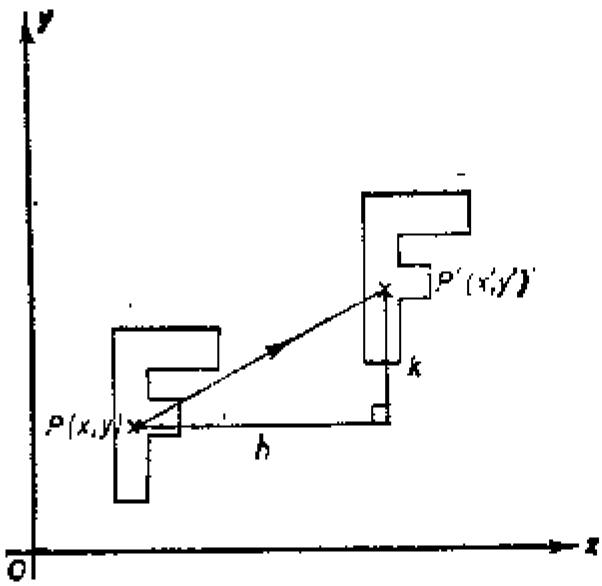
这种旋转将点 (1, 1) 变为 (x', y')，其中

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$



求出转 $90°$ 和 $180°$ 的旋转的矩阵，并分别求出点 $(0, 2)$ 和 $(-1, 1)$ 的象点。用 $-\alpha$ 代替 α，求出绕 O 点按顺时针方向转 α 角的旋转的矩阵。

(3) 平移的矩阵



点 $P(x,y)$ 在水平方向平移的距离是 h，在垂直方向移动的距离是 k，到达点 $P'(x', y')$. 因此，

$$x' = x + h,$$
$$y' = y + k.$$

这两个方程用矩阵形式写出就是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这里，由于要在 x 和 y 后面加上 h 和 k，所以需要用 2×3 的

矩阵。但是正方形矩阵更便于使用，所以上面的 2×3 矩阵可以改成

$$\begin{pmatrix}1&0&h\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix},$$

这时新的矩阵形式是

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&h\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}.$$

把矩阵相乘，得

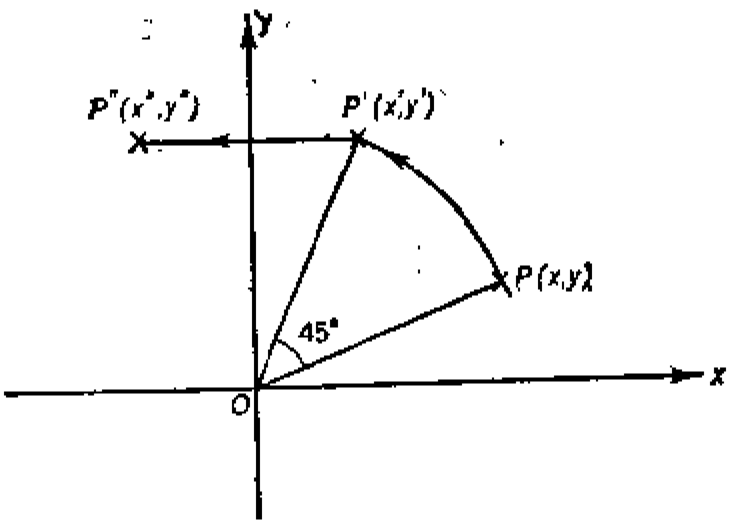
$$x'=x+h,$$
$$y'=y+k,$$
$$1=1.$$

最后一个方程当然是对的。

在水平方向移动 2 个单位距离，在垂直方向移动 -1 个单位距离，求这种平移的矩阵。点 $(-2, 3)$ 的象点是什么？

3. 变换的组合

上面我们已经求出描述某些变换的矩阵。当我们依次实行几个变换而把这几个变换组合到一起时，我们能不能把每个变换的矩阵放在一起去描述依次实行的变换呢？



先旋转 45°,再对于 Oy 轴作反射,矩阵应当是怎样的呢?我们知道,旋转 45° 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

从 P 到 P' 有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1}$$

对于 Oy 轴作反射的矩阵是 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 从 P' 到 P'' 有

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{2}$$

我们希望得到的是从 P 到 P'' 的矩阵形式,因此我们将 (1) 代入 (2)

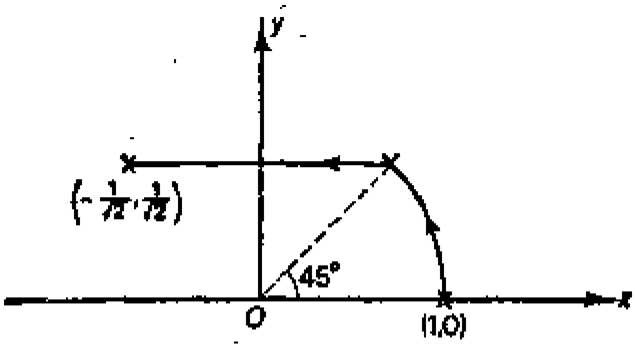
$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\qquad(3)$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{把前两个矩阵相乘}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

矩阵 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 表达了先旋转 45° 再对于 Oy 轴作反射这样相继两次变换的性质．对于点(1，0)来说，由矩阵可以求出它的象点是

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$



现在，我们可以用矩阵乘法求出几何变换的任一组合的矩阵表示．由于描述变换的方程都是用矩阵记号表示的，所

以在求几个几何变换的组合的矩阵时，需要用矩阵乘法才能求出。

如果我们仍然用方程，而不用矩阵，我们就会发现，当一组方程化成另一个方程时（和上面用矩阵由(1)化到(3)相类似），得到的结果与用矩阵相乘所得到的结果，在形式上是相同的（参看下面练习的第5题）。应当注意，当我们把(1)代入(2)时，变换的先后次序和(3)式中矩阵的次序是相反的；也就是说，在(3)中，如果象平常那样从左到右看下去，我们先看到的是反射的矩阵$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，后看到的是旋转的矩阵

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

这意味着先作的是转45°的旋转，然后接着作的是对于Oy轴的反射。如果我们先作的变换的矩阵是$\mathbf{A}$，后作的变换的矩阵是$\mathbf{B}$，我们需要计算的两次变换的组合的矩阵是$\mathbf{BA}$[1]。

练　习　11

作图检查下列各映射。

---

1) 本书前面讨论火车(**T**)和公共汽车(**B**)在一个网络中的路线时，我们曾经提出先坐火车后坐公共汽车作旅行的问题，从中引出了矩阵的乘法，那里计算的是**TB**，而不是相反的顺序。这是由于我们规定在矩阵中"从甲地到乙地"必须由左向右读。如果反过来规定"从乙地到甲地"，矩阵的顺序就必须倒过来。通常，当两个矩阵作"行乘以列"的矩阵乘法时，矩阵的书写次序要求反过来写。

1. 先对于 Oy 轴作反射，然后作转 $45°$ 角的旋转，求矩阵。点 $(1,0)$ 的象点是什么?

2. 先旋转 $90°$，再旋转 $180°$，求矩阵。证明所得矩阵就是旋转 $270°$ 的矩阵。

3. 先旋转 α 角，再旋转 β 角，求矩阵。所得的矩阵一定等于旋转 $\alpha+\beta$ 角的矩阵。对旋转 $\alpha+\beta$ 角的矩阵作出分析，并由此建立“加法公式”。

4. 求出对于直线 $y=x\operatorname{tg}\alpha$ 的反射的矩阵。（可以利用下列变换的组合的矩阵来求：先旋转 $-\alpha$，再对于 Ox 轴作反射，然后旋转 $+\alpha$。）求出点 $(1, 2)$ 对于直线 $y=x\operatorname{tg}30°$ 作反射后的象点。

5. 点 $P(x, y)$ 被映射到点 $P'(x', y')$，它们的坐标之间的关系可以用下列方程表示

$$x'=ax+by,$$
$$y'=cx+dy.$$

把上列方程写成矩阵形式。

点 $P'(x', y')$ 被映射到点 $P''(x'', y'')$，它们的坐标之间的关系可以用下列方程表示：

$$x''=px'+qy',$$
$$y''=rx'+sy'.$$

把上列方程写成矩阵形式。

求出把点 $P(x, y)$ 映射到 $P''(x'', y'')$ 的映射的方程(在上式中代入 x' 和 y' 的表示式)。把所得方程写成矩阵形式。

利用两个独立的矩阵和结果矩阵建立矩阵乘法的法则。

6. 当 3×3 的平移矩阵和另外的 2×2 矩阵一起使用时，我们必须把 2×2 矩阵扩充成 3×3 矩阵。对于 2×2 矩阵 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 来说，在最后添上一行和一列 0　0　1，就得到

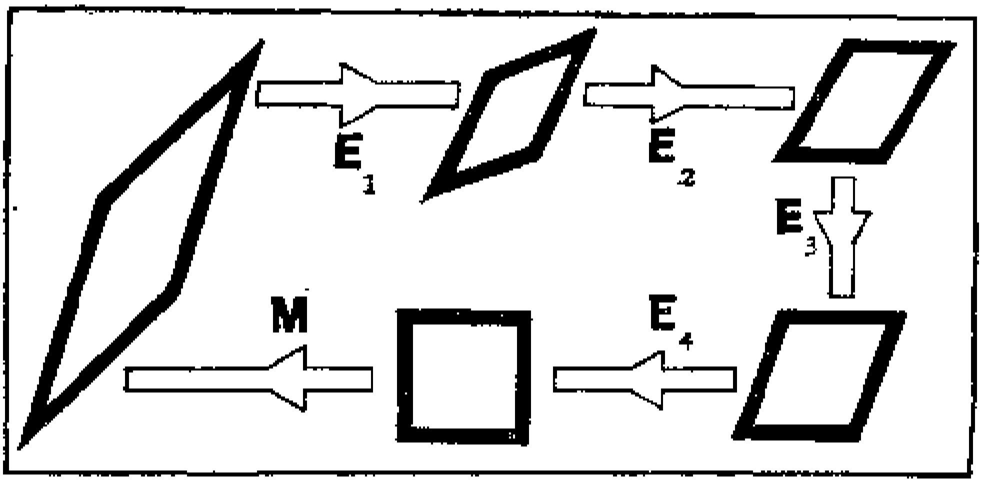
$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

那么旋转 45° 的矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

怎样扩充为 3×3 矩阵呢?

先在水平方向上平移 3 个单位，在垂直方向平移 1 个单位，然后旋转 45°，求出两次变换的矩阵，并求出点 (1，2) 的象点。

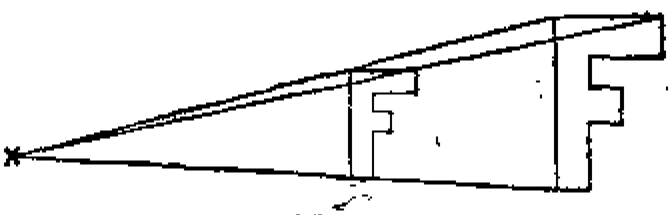


七、再用矩阵研究几何

1. 使直线之间的夹角保持不变的变换

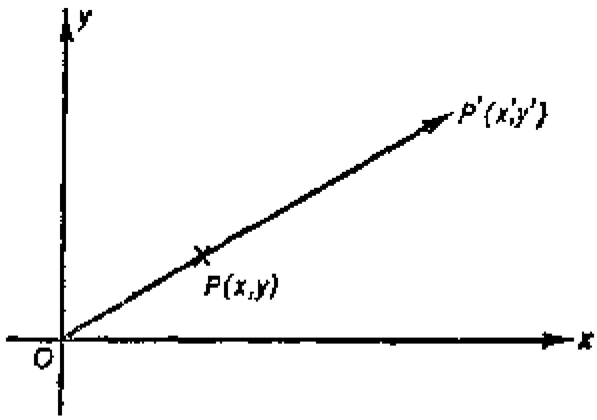
为了研究这种变换，我们可以先来观察在纸上画的一个图形 **F**，并且在一点上固定几条细松紧带，带的另一头固定在图形 **F** 的一些点上．每一条细松紧带按照长的方向都拉长 k 倍．拉长后细松紧带一头所形成的新图形 **F**，将保持角度不变，而长度按一定比例变化，同时新旧图形相似．

我们知道，这种变换叫做放大．



如果我们把坐标平面上的原点作为放大的出发点，那么点 $P(x, y)$ 被映射到点 $P'(x', y')$，且

$$x' = kx,$$
$$y' = ky.$$



上面两个方程的矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中矩阵 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 说明所作的变换是放大，比例系数是 k.

分别求出放大 2 倍、缩小为 $\frac{1}{2}$ 的变换的矩阵. 画出顶点为 $O(0, 0)$、$A(1, 0)$、$B(1, 1)$ 和 $C(0, 1)$ 的单位正方形，并分别利用上面求出的每一个矩阵求出各顶点的象点，作出变换后的正方形.

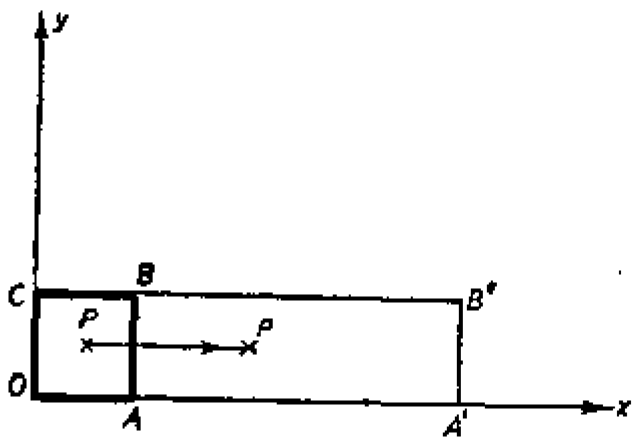
2. 拉伸变换

如果在矩阵 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 中，令其中一个 k 等于 1，矩阵变为

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. 矩阵$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$具有怎样的几何性质呢?

通过观察一个图形变化的情况，我们可以发现所作变换的矩阵的几何性质. 取顶点为 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ 和 $C(0,1)$ 的单位正方形，我们用矩阵$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$求出这四个顶点的象点. 依次用矩阵去乘各顶点坐标，得

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} O & A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} O & A' & B' & C' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & k & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$



这个图形自然会使我们想到，上列矩阵的几何性质是对图形作平行于 Ox 轴的拉伸. 如果 $OABC$ 是一块可以伸缩的橡皮薄膜，一边固定在 OC，那么矩阵$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$将使 AB 伸长到 $A'B'$，且 $\dfrac{OA'}{OA}=k$. 对于点 $P(x, y)$ 来说，有 $P \to P'(x', y')$，用矩阵可求出

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix},$$

得到

$$x' = kx,$$
$$y' = y.$$

由于 y 坐标不变，而 x 坐标被乘以系数 k，矩阵 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的几何性质是平行于 Ox 作伸长 k 倍的变换． 我们知道，这种变换叫做线性伸缩变换．

矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 具有什么几何性质呢？

3. 保持面积不变的变换

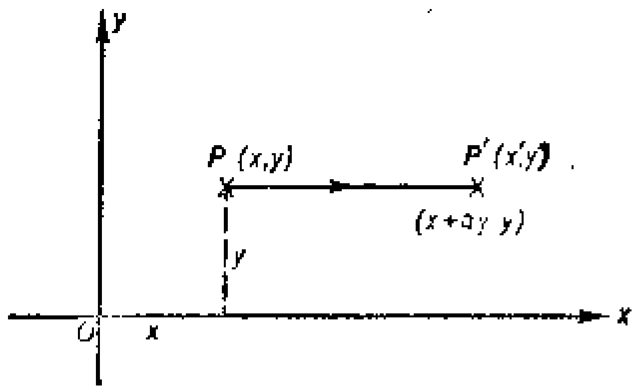
把一个图形(如下图)中的矩形两边一拉，它就会变成平行四边形． 这种变换的特点是保持面积不变，而距离和角度可以改变．

我们知道，这种变换叫做切变．

坐标平面上任意一点 $P(x, y)$，沿水平方向移动的距离同这点的纵坐标成正比；也就是说，点离 Ox 愈远，它移动的距

离也愈远。设比例系数是 a，那么点 $P(x, y)$ 变到 $P'(x', y')$ 时有

$$x' = x + ay,$$
$$y' = y.$$



这两个方程写成矩阵形式是 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，其中矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表明变换是比例系数为 a 且平行于 Ox 的切变。

求出比例系数分别为 2 和 -2 且平行于 Ox 的切变的矩阵。画一个单位正方形，并利用所求的每个矩阵画出变换后的图形。

求出比例系数分别为 3 和 -3 且平行于 Ox 的切变的矩阵。画出点 $A(1, 1)$，$B(3, 1)$，$C(3, 2)$ 和 $D(1, 2)$，并求出变换后的图形。

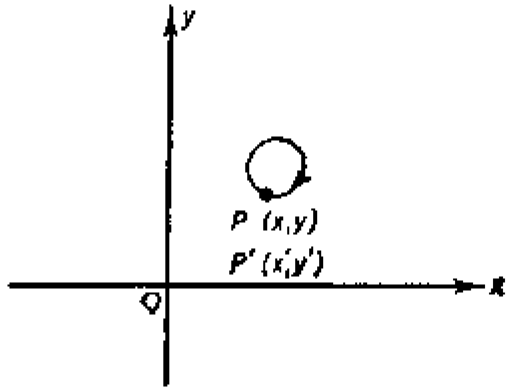
比例系数为 b 且平行于 Oy 的切变的矩阵是怎样的？

4. 不变的变换

图形的位置和性质都不改变的变换，叫做恒等变换。

坐标平面上一点 $P(x, y)$，变换后仍然是 (x, y)，那么 $P'(x', y')$ 的坐标可以由下式求出：

$$x' = x,$$
$$y' = y.$$



这两个方程写成矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是单位矩阵，它表明变换后图形的位置和性质都不改变这一特点。

5. 一个变换的逆变换

如果对一个图形先实行矩阵为 $\mathbf{A}$ 的变换，再实行矩阵为 $\mathbf{B}$ 的变换，结果使得变换后的图象仍然是原来那个图形，那么变换 $\mathbf{B}$ 叫做变换 $\mathbf{A}$ 的逆变换。

对于 Oy 的反射的矩阵是 $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，要把反射后

的点仍回到原来位置，必须再对于 Oy 作一次反射. 因此，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

用一个矩阵和它的逆矩阵同时施行变换，结果是什么都不改变，这一事实可以用单位矩阵来表示. 因此，对于 Oy 作一次反射后又对于 Oy 作一次反射，应当是什么都不改变，有

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

切变矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，这是由于

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

线性伸缩变换的矩阵 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和切变矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵分别是怎样的呢?

6. 逆矩阵的几何性质

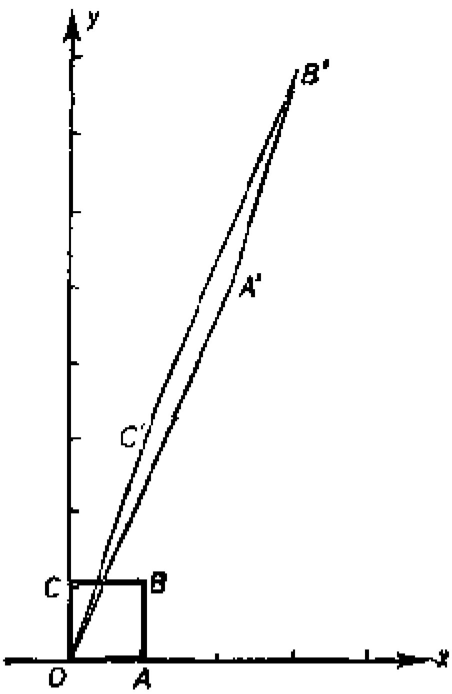
对于反射和切变的矩阵的逆矩阵来说，它们的几何性质是很容易理解的. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵具有哪些几何性质呢? 我们知道，$\mathbf{A}$ 的逆矩阵是 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$，它是通过

一系列的 **E** 矩阵求得的(见第 39—40 页):

$$E_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix};$$

$$E_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix};\quad E_4=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

当我们对单位正方形 $OABC$ 实行矩阵为 A 的变换时，正方形会发生怎样的变形呢?

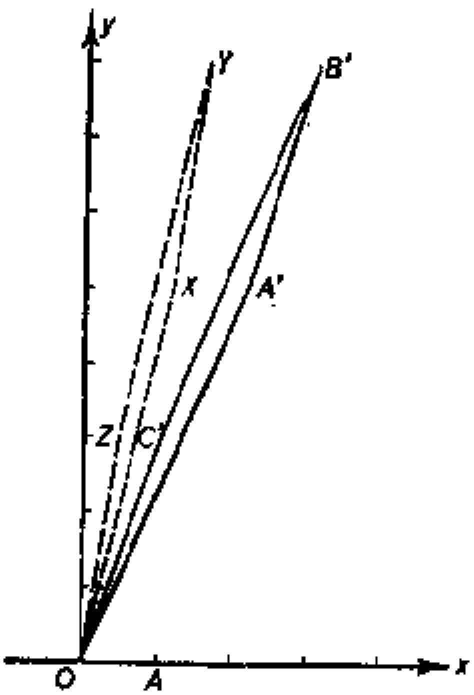


$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}O & A & B & C\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}O & A' & B' & C'\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 8 & 3\end{pmatrix}\end{array}$$

A 的逆矩阵应当把 $OA'B'C'$ 变回到 $OABC$。下面我们将会看到，用 E 矩阵求逆矩阵的过程中 $OA'B'C'$ 是怎样被一步一步地变回到 $OABC$ 的。

$$E_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$ 它把 $OA'B'C'$ 变为



$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\quad O \quad A' \quad B' \quad C' \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow
\end{array}
$$

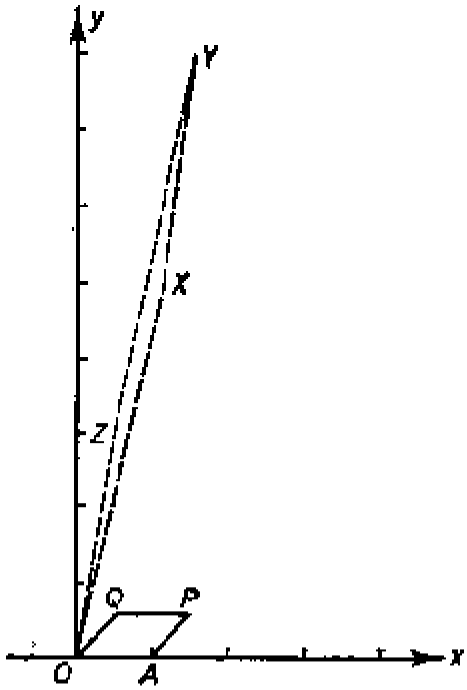
$$
\begin{array}{c}
O \quad X \quad Y \quad Z \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

矩阵 $\mathbf{E}_1$ 实行的是线性伸缩变换，其比例系数 $k=\frac{1}{2}$. 它依平行于 Ox 的方向，把 $OA'B'C'$ 往 Oy 上压缩 $1/2$，使 A' 的横坐标变成 1（等于 A 的坐标）。

$\mathbf{E}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$，它把 $OXYZ$ 变为

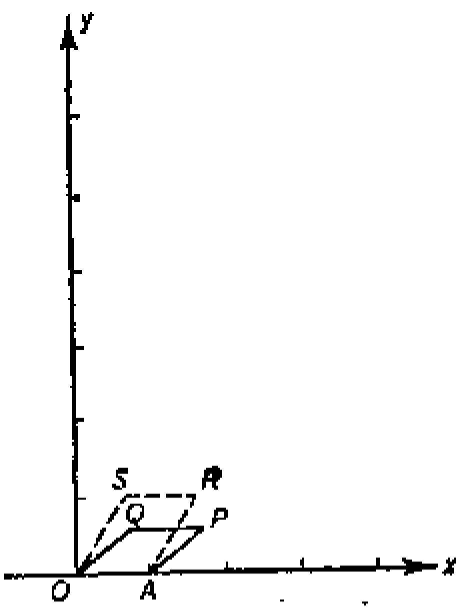
$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\quad O \quad X \quad Y \quad Z \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
O \quad A \quad P \quad Q \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{array}
$$



E_2 是切变矩阵的逆矩阵，它把 $OXYZ$ 往 Ox 上作切变，使 OX 和 OA 重合.

$E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，它把 $OAPQ$ 变为

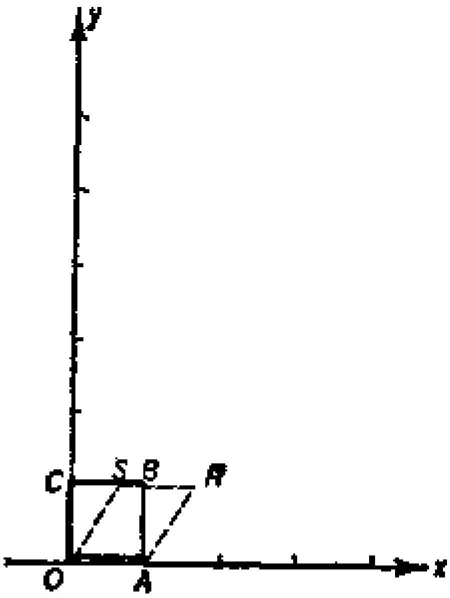


$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{array}{cccc}O&A&P&Q\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}0&1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}\end{array}\rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc}O&A&R&S\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}0&1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&1\end{pmatrix}}\end{array}.$$

$\mathbf{E}_3$ 是线性伸缩矩阵，由于 $k=2$，它仍平行于 Oy 的方向，把 $OAPQ$ 拉伸到 PQ 处于 $y=1$ 的位置(即单位正方形顶上一边的位置).

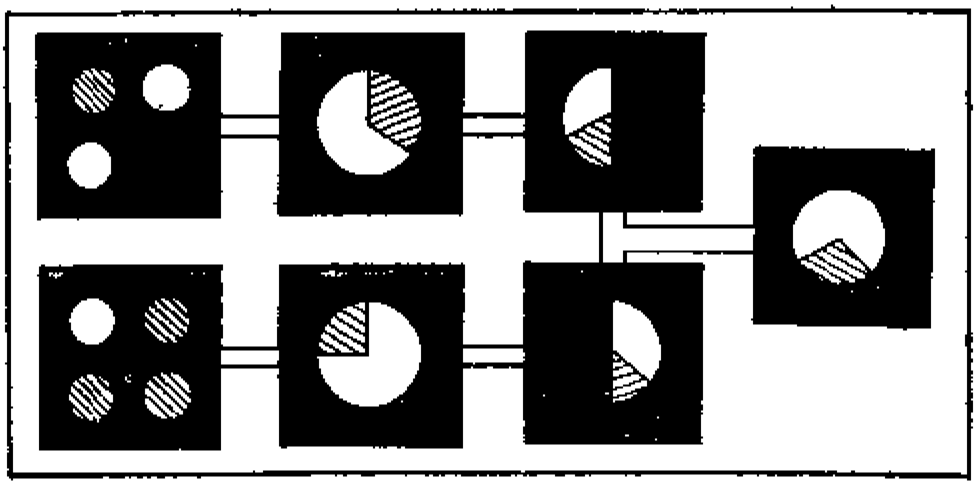
$\mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，它把 $OARS$ 变为



$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}O & A & R & S\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}\to \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}O & A & B & C\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}.$$

$\mathbf{E}_4$ 是切变矩阵的逆矩阵，它使 $OARS$ 往 Oy 上作切变，使得 OS 和 OC 重合，重新得到单位正方形.

求出矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵，并作图说明 $\mathbf{E}$ 矩阵怎样把单位正方形从上列矩阵所表示的映射后的图形变回到单位正方形。



八、用矩阵研究概率

一个黑袋子 X 装有三个球：2 个红的，一个白的. 另一个黑袋子 Y 装有四个球：3 个红的，一个白的. 假定两个袋子很难分别，而且可以随便取哪一个，现在要求先取一个袋子，再从里面取出一个球，那么从里面取出一个红球的概率[1]有多大呢？

两个袋子可以随便取哪一个，所以取出 X 和 Y 的概率相等；也就是说，取出 X 的概率是 $\frac{1}{2}$，取出 Y 的概率也是 $\frac{1}{2}$. 取出袋子 X 以后，从袋子里取出一个红球的概率是 2/3（因为袋子 X 里 3 个球中间有 2 个红球）. 由于选取 X 和以后从中取出一个球这两个事件是独立的，所以从袋子 X 中取出一个

1) 有关这类名词的意义及其在数学中的应用，可参看这套丛书的《概率和机率》.

红球的概率等于 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. 对于袋子 Y 来说，从中取出一个红球的概率是 $\frac{3}{4}$(因为袋子 Y 里 4 个球中间有 3 个红球). 由于选取袋子 Y 和以后从袋子中取出一个球是两个独立事件，所以从袋子 Y 中取出一个红球的概率等于

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

先取袋子 X 或 Y，然后从中取出一球，这样两种相继发生的事件是互斥事件，所以当这两个袋子可以随便取一个时，取出一个红球的概率是

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\frac{3}{8}=\frac{17}{24}.$$

取出一个袋子的概率向量是 $\mathbf{B}=\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

从两个袋子里取出红球 (R) 和白球 (W) 的概率矩阵是

$$\mathbf{M}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ W \end{array} & \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\end{array}.$$

利用概率向量 $\mathbf{B}$ 和矩阵 $\mathbf{M}$ 可以求得取出一个红球的概率

$$
\begin{array}{c}
\\ R \\ W
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\
\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}
\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}
=
\begin{array}{c} R \\ W \end{array}
\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{array}{c} R \\ W \end{array}
\begin{pmatrix} \dfrac{17}{24} \\ \dfrac{7}{24} \end{pmatrix}.
$$

这里我们看到，矩阵乘法的法则也可以用来求出独立且互斥的事件的概率。值得注意的是，先选取一个袋子，再从袋子里取出一个球，矩阵的次序应当相反，即 **MB**.

练　习　12

1.黑袋子 X 里有 2 个红球，3 个黑球。黑袋子 Y 里有 3 个红球，1 个白球。如果两个袋子很难分别，而且可以随便取一个，那么取出一个红球的概率有多大呢?

2.一颗骰子 A，两面上写的是 1，两面上是 3，一面是 4，一面是 5。一颗骰子 B，一面上是 1，一面上是 2，三面上是 3，一面上是 5。如果两个骰子都放在一个黑袋子里，从里面取出一颗骰子并且掷到桌上，得到 1、2、3、4、5 的概率分别是多少?

3.每天早晨，我都到汽车站去散步，有时是沿着公路上山到山上的汽车站，有时是沿着公路下山到山下的汽车站。上山到汽车站的概率是 $\frac{1}{3}$，在山上汽车站搭 15 路汽车或者 15 路快车进城，搭每一路汽车的概率相等。山下汽车站只能搭 15 路汽车。搭 15 路汽车进城的概率有多大?

4.在一个黑袋子里有 2 个红球，1 个白球，2 个黑球；另一个黑袋

子里有 1 个红球，3 个白球，1 个黑球；第三个黑袋子里有 2 个红球，3 个黑球. 如果这三个袋子可以随便取一个，而且当选中一个袋子以后再从这个袋子里取出一球，那么取出一个黑球的概率有多大呢？

1. 概　率　链

一个数学和物理专业的大学生，本学期第一次完成的作业是数学. 可是他发现他作物理作业的次数要比作数学作业的次数要多. 他总结出这样的规律：如果一天完成的是数学作业，第二天他一定作物理作业；反过来，如果有一天完成的是物理作业，第二天就有两种可能，或者作数学作业，或者作物理作业.

由于他第一次完成的作业是数学，所以初始向量是 $\begin{array}{c} M \\ P \end{array}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 M 表示数学，P 表示物理. 把上面得出的规律用矩阵表示就是

$$\mathbf{M} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M & P \end{array} \quad \text{今天} \\ \begin{array}{c} M \\ \text{明天}\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array},$$

其中第一列说明，今天作数学，明天一定作物理；第二列说明今天作物理，明天作数学或物理的概率都是 $\frac{1}{2}$.

本学期第一天作数学和物理作业的概率可以用 $\begin{array}{c} M \\ P \end{array}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

表示，第二天作两种作业的概率可以由下列矩阵给出

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} M \\ P \end{matrix},$$

这就是说，第二天一定是作物理作业.

第三天可以用上面的结果和矩阵M来求

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

第四天作两种作业的概率是

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

第五天作两种作业的概率是

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

第六天作两种作业的概率是

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{11}{16} \end{pmatrix}.$$

本学期最后一天这个学生作数学作业的概率将有多大

呢？如果这个学期有 101 天，我们岂不要象上面那样作 101 次！但是，上面求概率的过程，第一次是用矩阵$\mathbf{M}$去乘概率向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，以后都是用$\mathbf{M}$去乘所得前一天的概率向量．第四天的概率可以由下式求出

$$\mathbf{M}^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

因此，第 101 天的概率可以由下式求出

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

我们能不能很容易地求出$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$的值呢？我们依次求出的概率的结果，将给予我们启示．结果是

	数学	物理		数学	物理
第 1 天	1	0		1	0
第 2 天	0	1		0	1
第 3 天	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		0.5	0.5
第 4 天	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	用小数表示是：	0.25	0.75
第 5 天	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$		0.375	0.625

第 6 天	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	0.3125	0.6875
第 7 天	$\frac{11}{32}$	$\frac{21}{32}$	0.344	0.656

每一列中的值大小相间，而且下一次出现的较大的值比前一个较大的值要小，但是下一个较小的值比前一个较小的值要大．因此对于第八天来说，我们可以预料到：作数学作业的概率小于0.344，而大于0.3125，作物理的概率大于 0.656，而小于 0.6875。

实际上第八天的概率是

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.344 \\ 0.656 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.328 \\ 0.672 \end{pmatrix},$$

果然不出所料．

概率值这种不断变化的情况使我们想到，最后数学和物理的概率矩阵仍然是 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

从上面的结果我们不难看出，数学的概率应当是 1/3($\approx$ 0.33)，物理的概率是 2/3($\approx$ 0.67)．如果我们想到结果确乎正确，那么用矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 去乘这两个概率值组成的向量，

应当得到相同的值. 事实确实是这样!

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

上面我们是用矩阵来描述任何一天到第二天发生变化的概率. 这样的矩阵叫做**转移矩阵**. 这种情况下的结果, 是通过把转移矩阵同它本身多次相乘(构成一个链)而求得的. 这时也可能存在一些值,当用矩阵去乘这些值构成的向量时,得到的仍然是这些值.

对于这个数学和物理专业的学生来说,转移矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

描述的是从前一天到第二天作数学或物理作业变化情况的概率. $\mathbf{M}$ 具有不改变概率向量 $\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{array}{l} M \\ P \end{array}$ 的特性. 事实上,本学期第 101 天的概率不完全达到概率向量中的数值, 但是差别不大. 因此,本学期末的最后一天,这个学生作数学作业的概率是 1/3, 特别是这个学期有无限多天的话,那将更是如此.

列向量 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 和矩阵$\mathbf{M}$相乘时,所得的结果仍然是这个列

向量本身．具有这种性质的向量叫做矩阵M的特征向量．当一个矩阵和它的特征向量相乘时，可能得到同一个向量乘上一个数．例如

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

这时就说 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 也是一个特征向量，乘数 $-\frac{1}{2}$ 叫做特征值（或特征根）．对于特征向量 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 来说，它的特征值是 1．

一个问题如果能用矩阵形式表示，那么矩阵的特征向量给出的是这个问题的不变量．当特征值是 1 时，特征向量表示"稳定状态"下的情况．

对于那个数学和物理专业的学生的例子来说，特征向量是用观察所得的值的办法找到的．下面介绍一种直接求一个矩阵的特征向量的方法．

设 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 的特征向量，那么

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

这是由于矩阵乘以特征向量，得到的仍然是特征向量，但是前面可以乘上一个特征值 λ.

把矩阵相乘，得

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ x+\frac{1}{2}y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

因此有

$$\frac{1}{2}y=\lambda x,$$

$$x+\frac{1}{2}y=\lambda y.$$

移项并整理后得

$$-\lambda x+\frac{1}{2}y=0, \tag{1}$$

$$x+y\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=0. \tag{2}$$

我们看到，$x=0$, $y=0$ 是这两个方程的解. 但这一组解没有什么用处，因为任何一个 2×2 矩阵和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 相乘，结果都是 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 当 λ 取任意值时，

$$-\lambda+\frac{1}{2}y=0 \text{ 和 } x+y\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=0$$

的图象，都是相交于原点的两条直线. 除了它们重合成一条直线的情况以外，它们不可能有别的交点. 如果特征向量存在，两个方程就必须等价，因此，两个方程的斜率必须相等，即

$$\frac{\lambda}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}-\lambda}.$$

由此得

$$\lambda\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=-\frac{1}{2},$$

$$\lambda-2\lambda^2=-1$$

即

$$2\lambda^2-\lambda-1=0.$$

这个方程就叫做已知矩阵的特征方程.

由 $(\lambda-1)(2\lambda+1)=0$ 得出 $\lambda=1$ 或 $-\frac{1}{2}$,这两个特征值和我们前面求出的完全相同.

将 $\lambda=1$ 代入 (1),得 $-x+\frac{1}{2}y=0$,代入 (2) 得

$$x-\frac{1}{2}y=0,$$

这和

$$-x+\frac{1}{2}y=0$$

实际是同一个方程.因此,对于矩阵 $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 来说,只要 x 和 y 满足 $-x+\frac{1}{2}y=0$,$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 都是它的特征向量,所以这种特征向量有许许多多.例如,$x=1$,$y=2$ 就是它的特征向

量，因为$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

相应于特征值 $\lambda=1$ 来说，特征向量可以写成$\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$这样的一般形式，因为 $x=t$, $y=2t$（当 t 取任何值时）都满足方程 $-x+\frac{1}{2}y=0$. 但是对于那个数学和物理专业的学生的例子来说，我们需要求出的是概率特征向量$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，这里要求 $x+y=1$. 由 $x=t$, $y=2t$ 和 $x+y=1$，得到 $3t=1$，$t=\frac{1}{3}$，即 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$，因此特征向量是$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，方程 (1) 变成 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0$，即 $x+y=0$，方程(2)也变成 $x+y=0$. 使 $x+y=0$ 的任何一对 x 和 y 的值都将给出矩阵$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$的另外的特征向量. 例如，$x=2$ 和 $y=-2$ 就是它的特征向量，因为

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

我们看到，只要把特征值 $-\frac{1}{2}$ 作为一个因数提到括号外面，得到的仍然是原来那个特征向量．相应于 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 来说，特征向量的一般形式是 $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$．同样，我们要求特征向量是概率向量，即 $x+y=1$．但是这个方程和 $x+y=0$ 组成的方程组，在这种情况下无解．

练　习　13

1．求下列矩阵的特征值和特征向量

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，　　(b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，

2．一个学生的学习规律是，如果某天他学习，那么第二天不学习的概率是 $\frac{2}{3}$．如果某天他不学习，那么第二天学习的概率是 $\frac{1}{2}$．本学期第一天他学习了．

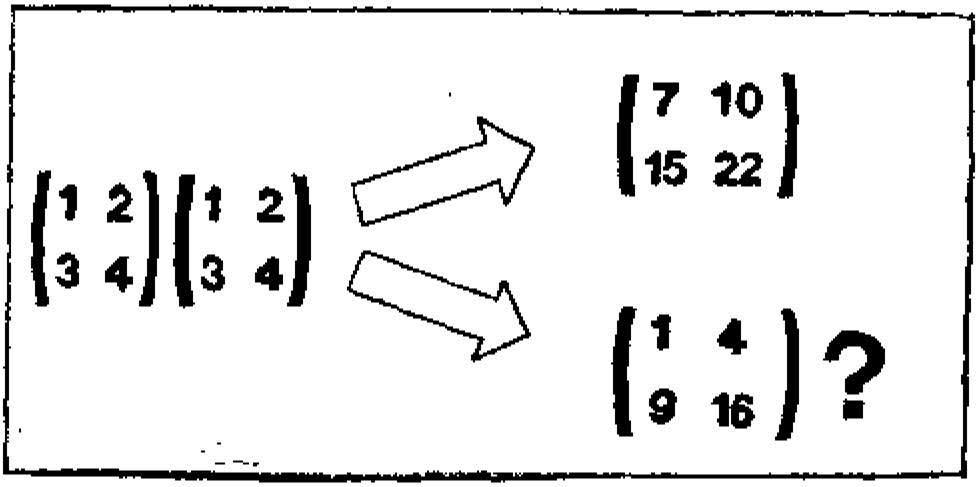
(a) 如果某天他学习了，第二天学习的概率有多大？

(b) 写出描述这个学生学习规律的转移矩阵．

(c) 这个学期第二、三、四天，这个学生学习的概率有多大？

(d) 如果把一个学期看作有无限多天，那么这个学生在学期末最后一天学习的概率有多大？

3．一位教师，一个学期的第一堂课从来也没有迟到过．但是，如果他有一堂课迟到了，那么下一堂课他准时到的概率是 $\frac{3}{4}$．另一方面，如果一堂课他是准时到的，那么下一堂课准时到的概率是 $\frac{1}{2}$．本学期末最后一天这个教师迟到的概率有多大？



九、矩阵的应用

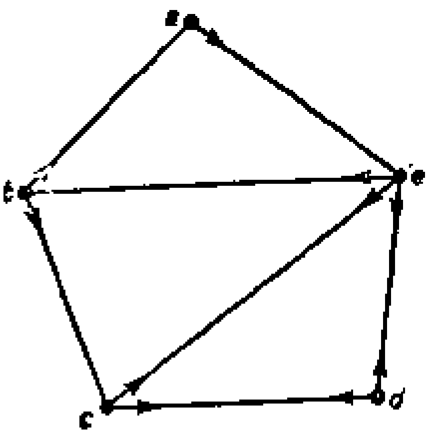
1. 小　　结

一个矩阵是一张由数据列成的表，也是一个排列得很整齐的一个数据仓库. 由于矩阵可以用简明的形式表示数据，它的应用愈益广泛. 在某些情况下，一个矩阵可以和另一个矩阵连接起来，而形成两种不同的运算. 一种是把矩阵的相应的元素相加，这种运算叫做矩阵加法；另一种是把一个矩阵各行的元素分别和另一个矩阵各列的相应元素相乘，然后相加，这种运算叫做矩阵乘法. 前面我们讲过矩阵乘法应用的几个方面，包括网络、数据、物价、几何变换、解线性方程和求概率.

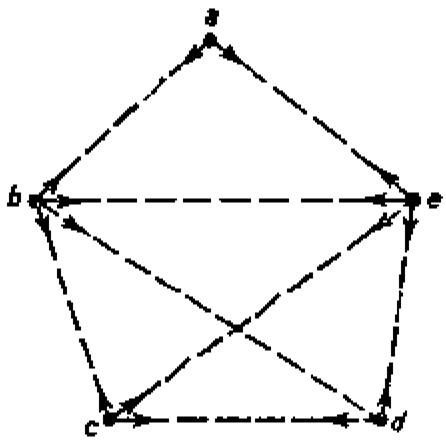
2. 有关矩阵的其他应用

前面已经简明地介绍了用矩阵如何描述一个实际问题.

从所得矩阵中可以挑出我们需要的数据，同时，如果描述一个问题的矩阵有两个，又可以用某种方法把它们连结起来，那么我们还可以获得关于这个问题的更多的数据. 前面我们看到的例子中用到了矩阵的乘法，但是这不是唯一的一种方法. 例如考察五个城市之间火车和公共汽车的线路时，得到下面的网络.



火车线路



公共汽车线路

描述火车线路的矩阵 $\mathbf{T}$ 是

$$\mathbf{T}=\begin{array}{c} \\ 从\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}\ 到 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

描述公共汽车线路的矩阵 $\mathbf{B}$ 是

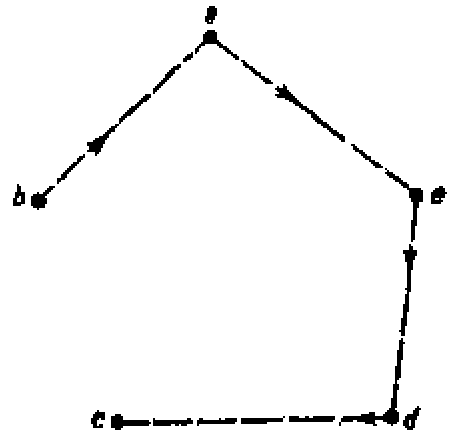
$$
\mathbf{B}=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \text{到} \\
\begin{array}{c} \text{从}\, a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

两个矩阵作加法是把对应位置上的数值分别相加，自然我们也可以把两个矩阵的对应数值分别相乘，下面我们就用这种办法求出 **TB** 的结果，得

$$
\mathbf{TB}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

所得矩阵能告诉我们什么呢？从这个矩阵可以画出五个城市之间的一张线路图



我们看到，这些线路上既可以乘火车，又可以乘公共汽车。

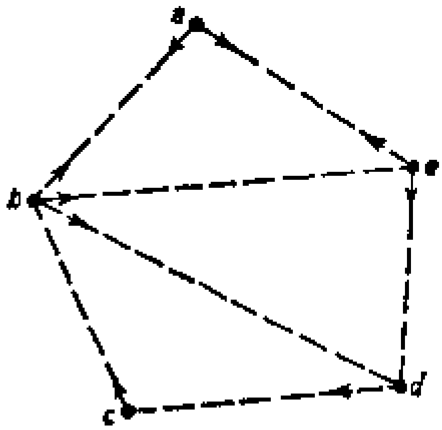
为了严格起见，我们必须在矩阵 **T** 和 **B** 之间放上一个符号，以明确两个矩阵是进行怎样的运算．不妨取符号⊗，那么 **T**⊗**B** 的意义是把 **T** 和 **B** 的对应元素相乘。

另外，我们用符号⊕表示矩阵 **T** 和 **B** 的另一种运算，即对应数值按下列法则相加：$0+0=0$，$1+0=1$，$0+1=1$，$1+1=1$．因此

$$\mathbf{T}\oplus\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}\\a\\b\\c\\d\\e\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}a&b&c&d&e\end{array}\\\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

所得矩阵能告诉我们什么呢？从这个矩阵可以画出下面的线路图

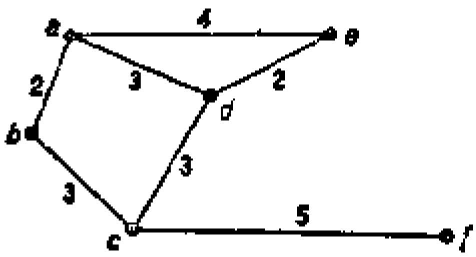


我们看到，这些线路有的是火车线路，有的是公共汽车线路，有的既是火车线路又是公共汽车线路.

两个矩阵还可以有其他运算，例如 **T**★**B** 是按下列法则把 **T** 和 **B** 的对应数值相加：$0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=0$, $1+1=0$. 求出这种运算所得的矩阵，并说明矩阵关于五个城市之间火车和公共汽车路线的意义.

然而，两个矩阵的运算应用最广的还是本书许多节中用到的行对列的乘法，它在其他方面还有许多应用. 正是由于这种乘法应用的广泛性，对它的探讨也极为深入.

六个城市 a、b、c、d、e 和 f 之间的道路和英里数如图



矩阵 **M** 可以用来描述这六个城市间道路的连结情况和距离的英里数

$$\mathbf{M}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} - & 2 & - & 3 & 4 & - \\ 2 & - & 3 & - & - & - \\ - & 3 & - & 3 & - & 5 \\ 3 & - & 3 & - & 2 & - \\ 4 & - & - & 2 & - & - \\ - & - & 5 & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

其中短线"—"表示两城之间没有道路.

现在我们对 M 和它本身作一种运算，记作⊙，法则如下：取一行和一列，将其中相应的两个数值相加(而不是相乘)，当相应的位置上至少有一个是"—"时，结果仍取作"—"；然后从各对应数值相加所得结果中选一个最小的，记到行和列的相应位置上.

$$\mathbf{M}\odot\mathbf{M}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} - & 2 & - & 3 & 4 & - \\ 2 & - & 3 & - & - & - \\ - & 3 & - & 3 & - & 5 \\ 3 & - & 3 & - & 2 & - \\ 4 & - & - & 2 & - & - \\ - & - & 5 & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\odot\quad
\begin{array}{c}
\\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array}\\
\begin{pmatrix}
- & 2 & - & 3 & 4 & - \\
2 & - & 3 & - & - & - \\
- & 3 & - & 3 & - & 5 \\
3 & - & 3 & - & 2 & - \\
4 & - & - & 2 & - & - \\
- & - & 5 & - & - & -
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

其中 a 行和 a 列的运算过程是 $-+-$，$2+2$，$-+-$，$3+3$，$4+4$，$-+-=-$，4，$-$，6，8，$-$，从中选出最小值 4 作为结果。

对于 a 行、b 列来说，

$$
(-\ 2\ -\ 3\ 4\ -)\begin{pmatrix} 2\\ -\\ 3\\ -\\ -\\ - \end{pmatrix} = -+2,\ 2+-,\ -+3,\ 3+-,\ 4+-,\ -+-
$$

$$
=-,\ -,\ -,\ -,\ -,\ -,
$$

结果是 $-$。

a 行、c 列的计算过程是

$$
(-\ 2\ -\ 3\ 4\ -)\begin{pmatrix} -\\ 3\\ -\\ 3\\ -\\ 5 \end{pmatrix} = -+-,\ 2+3,\ -+-,\ 3+3,\ 4+-,\ -+5
$$

$= -, 5, -, 6, -, -$

结果是 5.

继续同样的计算，最后得到

$$
\mathbf{M}\odot\mathbf{M} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{pmatrix}
4 & - & 5 & 6 & 5 & - \\
- & 4 & - & 5 & 6 & 8 \\
5 & - & 6 & - & 5 & - \\
6 & 5 & - & 4 & 7 & 8 \\
5 & 6 & 5 & 7 & 4 & - \\
- & 8 & - & 8 & - & 10
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

矩阵 $\mathbf{M}\odot\mathbf{M}$ 描述的是从一个城市经过另一个城市到达一个城市的最短距离，其中“—”意味着两个城市之间无道路可以通行.

矩阵获得广泛的应用，是由于它可以组织和表现大量数据，从而可以由矩阵的运算和特征向量的方法得到更进一步的数据资料.

矩阵讨论的问题，我们也可以用别的方法去解. 但是就象用胡核夹可以夹碎胡核一样，矩阵已经是我们手中的一把大锤，当有的胡核掘硬实时，用大锤还是很解决问题的呢!

练 习 答 案

第 2 页

从布赖顿到牛津是 97 英里。

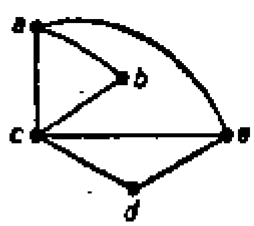
从曼彻斯特到伦敦是 184 英里。

练习 1

1.(a)
$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

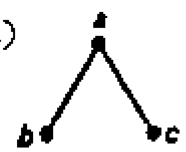
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

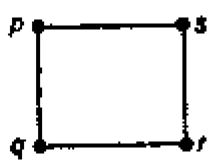
(b)
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

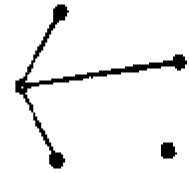
(c) 

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2.

(a) 

(b) 

(c) 

3. c 有三条路。

4. 如果从 a 到 b 有路可以通行，那么从 b 到 a 也有路其余各点之

间也是如此。

练习 2

1. 从 b 可以到 a，但是从 a 不能到 b。

一行各数的和表示从这一行左边的城市有几条道路通往其他城市。

一列各数的和表示这一列上面的城市是几条道路的终点。

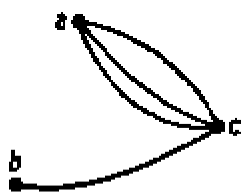
2. (a)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(b)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

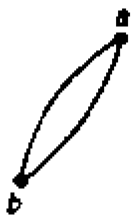
(c)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(d)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

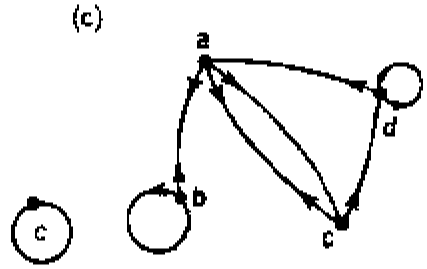
3 (a)



(b)

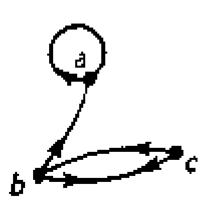


(c)

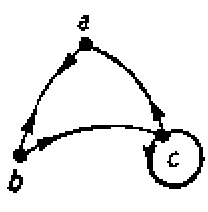


练习 3

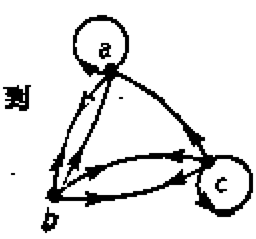
1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



同



得到



2. 四个城市中，每个城市有一条线路通往其余各个城市时，矩阵是

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{array}\quad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

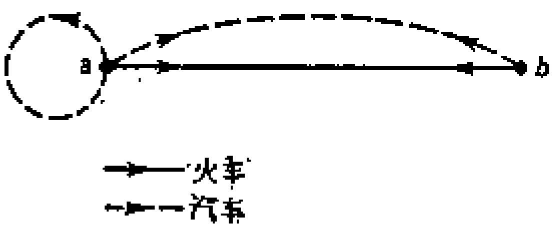
因此

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 表示需要新建的线路。

练习 4

1. (a)



(b) $\mathbf{BT} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 表示的是先坐公共汽车后坐火车的旅行.

(c) $\mathbf{T}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 两个城市间，可以先坐火车，接着再坐火车。

(d) $\mathbf{TBT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 表示两个城市间，可以先坐火车，再坐汽车，再坐火车.

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

或 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.(a)

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{W} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(b)

$$\mathbf{BW} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\mathbf{WB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\mathbf{W}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e)

$$\mathbf{WBW} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f)

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 23 页

$$\begin{array}{l} \\ \text{安德鲁} \\ \text{布伦达} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{炸面圈} & \text{巧克力} & \text{牛奶} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{物价} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

练习 5

(a)

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(c)

不可能。

(d)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 5 & 6 & 13 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(e) 14。 (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$ (g) 不可能。

(h) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 10 & 8 & 4 \\ 24 & 18 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 80 \\ 316 \\ 712 \end{pmatrix}.$

只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才可以相乘。如果第一个矩阵是 $m \times n$ 矩阵，那么第二个矩阵必须是 $n \times P$ 矩阵。相乘后，得到的矩阵是 $m \times P$ 矩阵。

练习 6

1.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{金鱼草} & \text{紫罗兰} & \text{美国石竹} & \text{菊花} & \text{水仙花} & \text{松叶菊} & \text{翠菊} \\ \left(\frac{1}{2}\text{打}\right) & \left(\frac{1}{2}\text{打}\right) & \left(\frac{1}{2}\text{打}\right) & \text{(每株)} & \text{(每枝)} & \left(\frac{1}{2}\text{打}\right) & \left(\frac{1}{2}\text{打}\right) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 12 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 12 & 12 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \text{金鱼草} \\ \text{紫罗兰} \\ \text{美国石竹} \\ \text{菊花} \\ \text{水仙花} \\ \text{松叶菊} \\ \text{翠菊} \end{array}\begin{array}{c} \text{单价} \\ \left(\begin{array}{c} 12 \\ 10 \\ 12 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \\ 12 \end{array}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} 210 \\ 168 \\ 88 \end{pmatrix}.$$

他定购了 2.10 英镑，邻居定购了 1.68 英镑和 88 便士。

2.每种零件的单价矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{零件甲} & \text{零件乙} & \text{零件丙} \end{array} \\ \text{单价} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array},$$

组件所含零件矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{组件 I} & \text{组件 II} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{零件甲} \\ \text{零件乙} \\ \text{零件丙} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array},$$

各种模型所含组件矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{模型 } A & \text{模型 } B & \text{模型 } C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{组件 I} \\ \text{组件 II} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array},$$

每天制作的模型矩阵

$$\begin{array}{cc} & \text{天} \\ \begin{array}{c} \text{模型 } A \\ \text{模型 } B \\ \text{模型 } C \end{array} & \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array},$$

每个模型所含零件矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{组件 1} & \text{组件 2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{零件甲} \\ \text{零件乙} \\ \text{零件丙} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{模型 } A & \text{模型 } B & \text{模型 } C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{组件 I} \\ \text{组件 II} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$
= \begin{array}{c} \\ \text{零件甲} \\ \text{零件乙} \\ \text{零件丙} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{模型}A & \text{模型}B & \text{模型}C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 14 & 19 \\ 21 & 20 & 27 \\ 24 & 26 & 34 \end{pmatrix} \end{array},
$$

$$
\text{价值} = (3 \quad 2 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$
= (3 \quad 2 \quad 4)\begin{pmatrix} 15 & 14 & 19 \\ 21 & 20 & 27 \\ 24 & 26 & 34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$
= (183 \quad 186 \quad 247)\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 3{,}382 \text{ 单位.}
$$

3.矩阵容量

$$
\begin{array}{r} \\ \text{“雪车”牌} \\ \text{“圣诞老人”牌} \\ \text{“铃铛”牌} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \text{维夫饼干} & \text{夹心糖} & \text{巧克力} & \text{太奶糖} & \text{冰糕} & \text{巧克力棒糖} & \text{巧克力烟斗} & \text{圆巧克力糖} & \text{圆球糖} & \text{包装} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 12 & 1 \end{pmatrix} \end{array},
$$

单价矩阵

$$
\begin{array}{r} \\ \text{维夫饼干} \\ \text{夹心糖} \\ \text{巧克力} \\ \text{太奶糖} \\ \text{冰糕} \\ \text{巧克力棒糖} \\ \text{巧克力烟斗} \\ \text{圆巧克力糖} \\ \text{圆球糖} \\ \text{包装} \end{array}
\begin{array}{c} \text{单价} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix} \end{array},
$$

定购矩阵

$$\begin{array}{ccc} \text{雪车牌} & \text{圣诞老人牌} & \text{铃铛牌} \\ (\ 10 & 15 & 10\ ), \end{array}$$

$$\text{定单价值} = (10\ 15\ 10)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$=11.35$ 英镑.

第32页

$\mathbf{Mq} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \\ 49 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$ 每一工资等级的工人人数。

$\mathbf{pMq} = 116$，工厂里的工人总数.

练习 7

1 (a) $\mathbf{nM}$，其中 $\mathbf{n} = (1\ 1\ 0\ 0\ 0)$。

(b) $\mathbf{Mm}$，其中 $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) **pMq**，其中 $\mathbf{p}=(0\ 1\ 1\ 1\ 0)$； $\mathbf{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(d) **rMs**，其中 $\mathbf{r}=(0\ 0\ 0\ 1\ 1)$； $\mathbf{s}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2.(a) $\mathbf{mN}=(0\ 5\ 4\ 0\ 1)$——有一个姐妹的学生人数。

$\mathbf{Nn}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}$——有两个兄弟的学生人数.

$\mathbf{mNn}=4$——有一个姐妹和两个兄弟的学生人数。

(b) (i) **pN** (ii) **Nq** (iii) **pNq**.

(c) $\mathbf{rN}=(10\ \ 12\ \ 6\ \ 0\ \ 1)$——有同样多个兄弟的学生的姐妹数。

$\mathbf{Ns}=\begin{pmatrix}6\\17\\4\\1\\0\end{pmatrix}$——有同样多个姐妹的学生的兄弟数。

(d) $\frac{29}{30}\approx 1$——这个班每一个同学的姐妹平均人数。

(c) $\frac{pNs}{pNq}$

练习 8

1. 只有 (b) 是对的。

2. $a=4$; $b=\frac{1}{2}$; $c=2$; $d=-2$

3. (a) $\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ 6\end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ -11\end{pmatrix}$.

第 38 页

要使 $\mathbf{I}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, 单位矩阵 $\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

练习 9

1.(a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}$,

取 $\mathbf{E}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{7}{2}\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

$\mathbf{E}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{7}{2}\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{7}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$\mathbf{E}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_3(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{7}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{7}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}1 & -\frac{7}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_4(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & -\frac{7}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{7}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

所以 $\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\mathbf{I}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1&=\begin{pmatrix}1 & -\frac{7}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}4 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

取 $\mathbf{E}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

$\mathbf{E}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$\mathbf{E}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_3(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$\mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_4(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

从上面两个例子看来，求矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆矩阵好象只须将主对角线上的两个数交换位置，而将另一对角线上的数改变符号：

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

矩阵$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵是$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$，确实有

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

假如 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，那么用上面的办法得 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. 但

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

通过 $\mathbf{E}$ 矩阵求得 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$，

而 $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

除数 10 将在下一个习题里得到解释。

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，

$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，那么 $\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ c & d \end{pmatrix}$.

$\mathbf{E}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$， $\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ c & d \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1 & -\frac{b}{a}\\ 0 & -\frac{bc}{a}+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a}\\ 0 & \frac{ad-bc}{a}\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{E}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_3=(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a}\\ 0 & \frac{ad-bc}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}1 & -\frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_4(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & -\frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

因此，$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$

$$=\begin{pmatrix}1 & -\frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \frac{-b}{ad-bc}\\ 0 & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ -\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}+\frac{bc}{a(ad-bc)} & \frac{-b}{ad-bc}\\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{bc}{a(ad-bc)}=\frac{ad-bc+bc}{a(ad-bc)}=\frac{d}{ad-bc}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3.(a) 行列式 $= 15-8=7$，

逆矩阵 $= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) 行列式 $= -4+6=2$，

逆矩阵 $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) 行列式 $= 3-0=3$，

逆矩阵 $= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

练习 10

1.(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x=5$ 和 $y=-1$。

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$, 行列式 $= -3+2=-1$，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$a=2$ 和 $b=-4$。

(c) $P=6$, $Q=-7$。

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) $x=1$，$y=-2$。 (b) $x=-7$，$y=20$。

(c) $x=-1$，$y=4$。

3. $$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

因此 $x=1$，$y=-2$ 和 $z=2$。

第 47 页

$(1, -2)$； $(-4, 3)$。

$(-1, 2)$； $(4, -3)$。

第 50 页

旋转 $90°$：$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$； $(-2, 0)$； $(-1, -1)$。

旋转 $180°$：$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$； $(0, -2)$； $(1 \quad -1)$。

旋转 $-\alpha$：$\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$。

第 51 页

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; \quad (0, 2).$$

练习 11

1. 先对 Oy 轴作反射，然后旋转 $45°$ = (旋转 $45°$ 的矩阵)(反射矩阵)

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=$ 旋转 $270°$。

3. $\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}.$$

因此，两个矩阵中比较相应的数便得出

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

4. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha-\cos^2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}.$$

例如直线 $y=x\,\mathrm{tg}\,30°$ 上的点 $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 60° & \sin 60\\ \sin 60 & -\cos 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.23\\-0.13\end{pmatrix}.$$

5. $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$,

$x''=p(ax+by)+q(cx+dy)=x(pa+qc)+y(pb+qd)$,

$y''=r(ax+by)+s(cx+dy)=x(ra+sc)+y(rb+sd)$,

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+qc & pb+qd\\ra+sc & rb+sd\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

因此有 $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+qc & pb+qd\\ra+sc & rb+sd\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+qc & pb+qd\\ra+sc & rb+sd\end{pmatrix},$$

后一个式子给出了行乘以列的矩阵乘法的法则。

6. $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

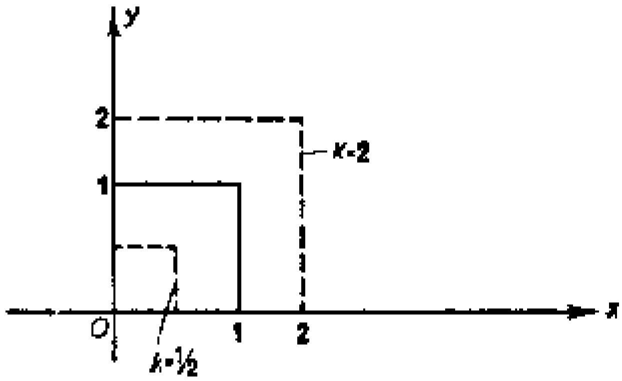
$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.71 \\ 4.95 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第 58 页

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

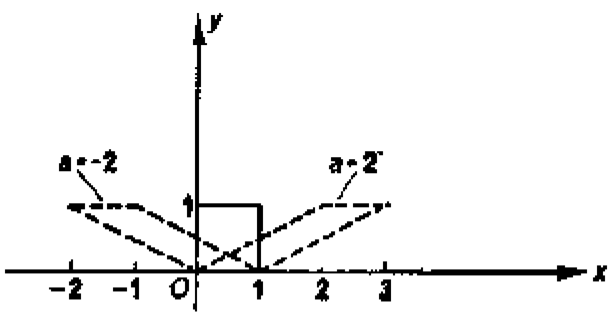


第 60 页

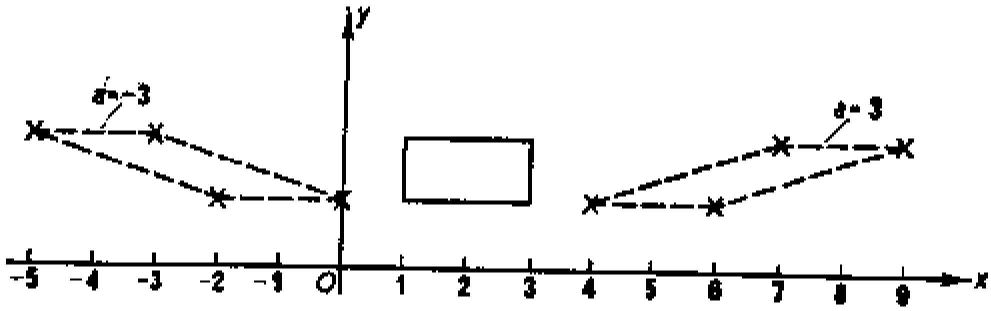
矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$的几何性质是表示平行于 Oy 轴作伸长 k 倍的线性伸缩变换.

第 61 页

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



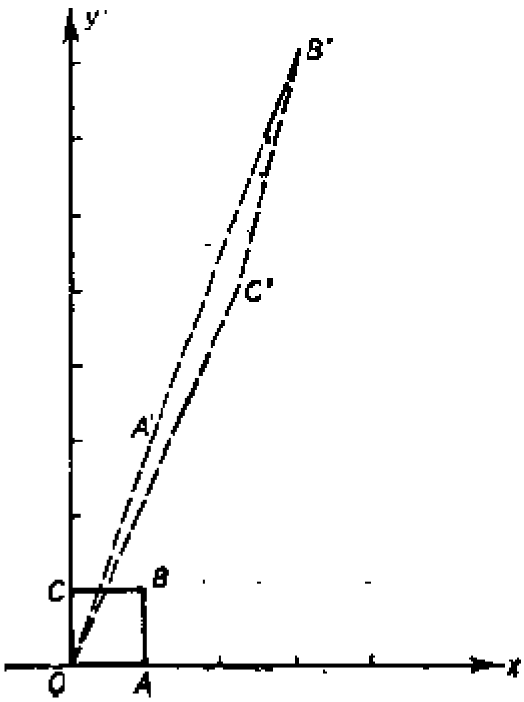
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$——平行于 Oy 轴的切变。

第 63 页

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}.$$

第 67 页

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} O & A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} O & A' & B' & C' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

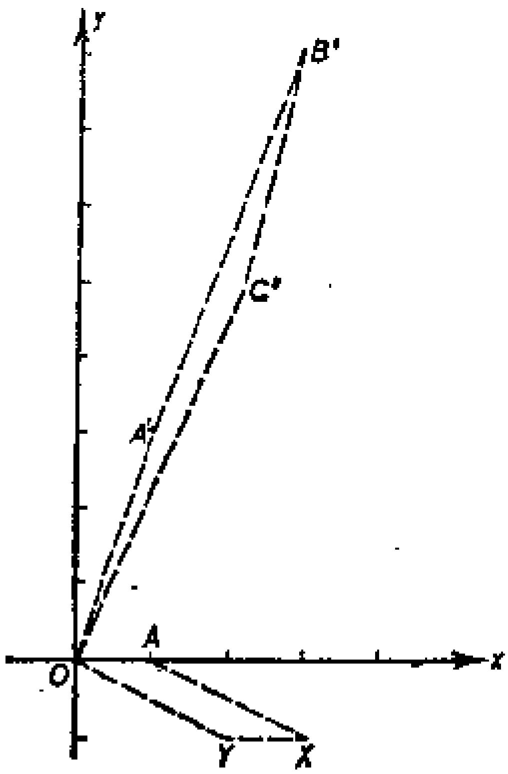


注意，A 和 C 同它们的象点 A' 和 C' 的左右位置关系发生了变化．由于矩阵 A 的行列式取负值（-1），矩阵 **A** 的变换中包含了一次反射。

$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$不改变图形的形状。

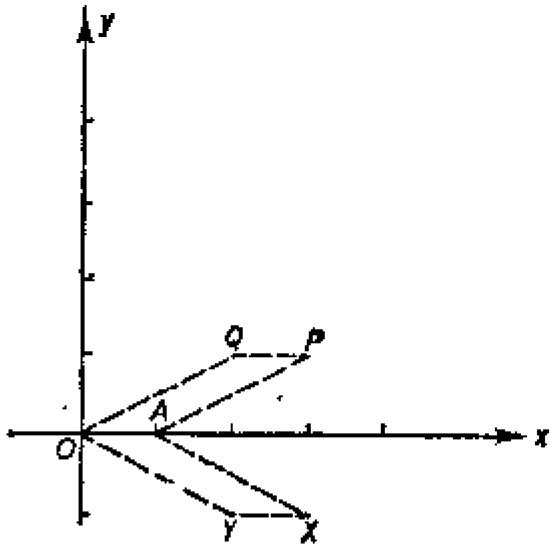
$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$把 $OA'B'C'$ 变形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{matrix} O & A' & B' & C' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} O & A & X & Y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$



取$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$表示对 Ox 轴作反射。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{matrix} O & A & X & Y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} O & A & P & Q \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$



$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$不改变图形的形状。

$\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$把 $OAPQ$ 变形

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{cccc} O & A & P & Q \\ \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right. & & & \left.\right) \end{array} \to \begin{array}{cccc} O & A & B & C \\ \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right. & & & \left.\right) \end{array}.$$

因此，$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{M}\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

练习 12

1.
$$\begin{array}{c} \\ R \\ W \end{array} \begin{array}{cc} X & Y \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} R \\ W \end{array} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} R \\ W \end{array} \begin{pmatrix} \frac{23}{40} \\ \frac{17}{40} \end{pmatrix}.$$

取出一个红球的概率是 $\frac{23}{40}$。

2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \\ 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

1 的概率是 $\frac{1}{4}$，2 的概率是 $\frac{1}{12}$，3 的概率是 $\frac{5}{12}$，4 的概率是 $\frac{1}{12}$，5 的概率是 $\frac{1}{6}$。

3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 山上 & 山下 \end{array} \\ \begin{array}{c} 15路 \\ 15快 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 山上 \\ 山下 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 15路 \\ 15快 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} 15路 \\ 15快 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

乘 15 路汽车的概率是 $\frac{5}{6}$。

4.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 红 \\ 白 \\ 黑 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{array}{c} 红 \\ 白 \\ 黑 \end{array}\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3} \\ \frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 红 \\ 白 \\ 黑 \end{array}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}
$$

取出一个黑球的概率是 $\frac{2}{5}$。

练习 13

1.(a) 设 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 的特征向量和特征值 λ，那么

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
$$

所以

$$
\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=\lambda x,
$$

$$
\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=\lambda y.
$$

得

$$
x\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)+\frac{1}{2}y=0, \tag{1}
$$

$$
\frac{2}{3}x+y\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=0. \tag{2}
$$

因为两直线的斜率相等

$$
\frac{-\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)},
$$

得
$$\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=\frac{1}{3},$$

$$\lambda^2-\frac{5}{6}\lambda-\frac{1}{6}=0,$$

$$6\lambda^2-5\lambda-1=0,$$

$$(6\lambda+1)(\lambda-1)=0,$$

$$\lambda=1\ 或\ -\frac{1}{6}.$$

将 $\lambda=1$ 分别代入(1)、(2)得

$$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=0\ 和\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=0;$$

得到的是同一个方程 $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=0$. 把这个方程化简得 $4x=3y$, 得到一般解 $x=3t, y=4t$。因此与特征值 $\lambda=1$ 相对应的特征向量是 $\begin{pmatrix}3t\\4t\end{pmatrix}$. 将 $\lambda=-\frac{1}{6}$ 代入(1)得 $x+y=0$, 所以, 与特征值 $\lambda=-\frac{1}{6}$ 相对应的特征向量是 $\begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

所以 $x(4-\lambda)+3y=0$,

$x+y(2-\lambda)=0$.

λ 的特征方程是 $\lambda^2-6\lambda+5=0$。所以

$(\lambda-5)(\lambda-1)=0$, $\lambda=1$ 或 $\lambda=5$。

与 $\lambda=1$ 相对应的特征向量是 $\begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix}$, 与 $\lambda=5$ 相对应的特征向量是 $\begin{pmatrix}3t\\t\end{pmatrix}$.

2. (a) $\frac{1}{3}$ (因为他不学习的概率是 2/3)。

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cc} \text{学习} & \text{不学习} \end{array} \quad \text{今天} \\
\text{(b)} \quad \text{明天} & \begin{array}{c} \text{学习} \\ \text{不学习} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

(c) 第二天 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 第二天学习的概率是 $\frac{1}{3}$，

第三天 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ 第三天学习的概率是 $\frac{4}{9}$，

第四天 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{54} \\ \frac{31}{54} \end{pmatrix}$ 第四天学习的概率是 $\frac{23}{54}$。

(d) 从 1(a) 中，与 $\lambda = 1$ 相对应的矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 的特征向量是 $\begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}$，因为我们要求概率特征向量满足 $x + y = 1$，因此，$7t = 1$，$t = \frac{1}{7}$，得 $x = \frac{3}{7}$，$y = \frac{4}{7}$。因此，如果把一个学期看作有无限多天，这个学生在学期末最后一天学习的概率是 $\frac{3}{7}$。当 $\lambda = \frac{1}{6}$ 时，相应的特征向量和 $x + y = 1$ 无解。

3. 转移矩阵是

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cc} \text{迟到} & \text{准时} \end{array} \quad \text{本堂课} \\
\text{下一堂课} & \begin{array}{c} \text{迟到} \\ \text{准时} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

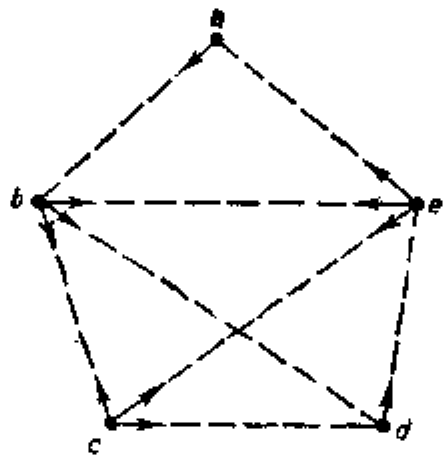
特征值是 1 和 $-\frac{1}{4}$.

与特征值 $\lambda=1$ 相对应的特征向量是 $\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix}$.

概率特征向量是 $\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$，因此本学期末最后一天这个教师迟到的概率是 $\frac{2}{5}$.

第 85 页

$$\mathbf{T}\bigstar\mathbf{B} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$



T★B 得出两个城市间只有火车或者只有公共汽车的线路，但不包括既有火车又有公共汽车的线路。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝矩阵
作者＝（英）Ｊ．Ｒ．布伦菲尔德著　刘远图译
页数＝１１４
ＳＳ号＝１０６５４６６３
出版日期＝１９８２年０５月第１版