《自修数学》小丛书

拓扑学

——橡皮膜上的几何学

〔英〕 D. A. 约翰逊 W. H. 格伦 著

科学出版社

《自修数学》小丛书

拓　扑　学

——橡皮膜上的几何学

〔英〕D. A. 约翰逊
W. H. 格　伦　著

刘远图　译

科　学　出　版　社

1 9 8 0

内 容 简 介

本书是英国《自修数学》小丛书中的一本，它用通俗浅显的语言、形象生动的举例，介绍了数学中比较抽象的一个分支——拓扑学的基本概念及其用场，是给具有中等文化程度的读者课外(或业余)阅读的一本通俗读物，对开阔读者眼界、增长数学知识颇有益。

该书可供中学师生、家长及知识青年阅读。

Donovan A. Johnson
William H. Glenn

TOPOLOGY

The Rubber-Sheet Geometry

John Murray London, 1964

拓 扑 学

——橡皮膜上的几何学

〔英〕D. A. 约翰逊 W. H. 格 伦 著

刘远图 译

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年10月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1980年10月第一次印刷 印张：2

印数：0001—27,150 字数：35,000

统一书号：13031：1347

本社书号：1870·13—1

定价： 0.20 元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书（*Exploring Mathematics On Your Own*）是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物．该丛书自 1964 年初版后，于 1974 年、1976 年多次再版印刷．为开阔读者眼界、增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学
测量世界
数型
毕达哥拉斯定理
统计世界
集合、命题与运算
数学逻辑与推理
曲线
拓扑学——橡皮膜上的几何学
概率与机率
向量基本概念
有限数学系统
无限数
矩阵

大家都来学点拓扑学

学习数学，就象读一本侦探小说，象在一个山洞中探险一样，也是一个猎险．数学里面有许许多多令人惊奇不已的东西，费人思索的难题和技巧，还有许多有趣的思想．如果你打算在数学上自己作出一些探索，那么当你发现新的概念时，一定会兴高采烈．数学研究最不平凡的一个分支是拓扑学．当今许多数学家还在拓扑学方面发现了新的成果．

这本关于拓扑学的小册子，你不能象看小说那样来读．你必须慢慢钻研．当你第一次读到一句话或者读完一节但又感到并不完全理解时，你不必为此沮丧．应当有耐心，坚持下去．读数学书籍应当养成一种习惯，就是旁边一定要放一支铅笔和一张纸．该用就用，毫不犹豫．一定要做练习，画图，回答提出的问题，这样才能使你容易理解你读的内容．我们希望，这本小册子能使你同别人一起，分享研究数学的欢乐．

目　　录

一、奇异的拓扑学世界

1. 什么是拓扑学？

你可曾听说过一张纸只有一面？为什么数学家认为环形的炸面圈和花瓶相比，要比炸面圈和栗子相比更相似一些呢？在什么情况下三角形和圆是一样的呢？左脚穿的鞋子能不能在空间掉换位置以后把它变成右脚穿的鞋子呢？这就是拓扑学要回答的一些问题。听起来这一点也不象是数学，是不是？但是这却是数学中最新和最令人感兴趣的分支之一。既然拓扑学讨论的是手套的里面或者左右脚穿的鞋子的差别这样一些你挺熟悉的东西，所以你并不会感到很生疏。加上拓扑学里面还有许许多多不可能做到的事情、技巧和难题，学习起来一定会是挺有趣味的。

拓扑学是数学的一个分支，它判定什么是可能做到的。它将告诉我们能不能把一个内胎里面朝外翻转过来。你可能会想，这是一个简单的问题。研究拓扑学的专家说这是可能的，但是真的要拿来一个内胎，谁也没有办法把它翻转过来。

在拓扑学里，我们从来就不提这样的问题："有多长？""有多远？"或"有多大？"而是问："在哪儿？""在什么的中间？""在里面还是在外面？"当一个旅行者到达他从来没有到过的

生疏的道路交叉口，而且又不知道应当朝哪个方向前进时，他决不会问："这里离巴尔希斯特还有多远？"而"从这里还要走三英里"这样的回答，对他也无济于事，因为他面前有好几条路！他最好是问："到巴尔希斯特怎么走？""沿这条路走到一个路口，然后向左转弯"，这个回答将告诉他怎样走才能到达巴尔希斯特．听起来这个回答里面没有什么数学，因为它既没有涉及距离，也没有说明道路是直的还是弯曲的．但是拓扑学却正好是这样来回答问题的．

2. 拓扑学和几何学

拓扑学有点象几何学，这是因为它研究的也是线、点和图形．但是拓扑学里讲的图形同几何学中的图形不一样，它可以改变大小和形状．因此，有的人把拓扑学叫做"橡皮膜上的几何学"（或"橡皮几何学"）．拓扑学最感兴趣的是图形的

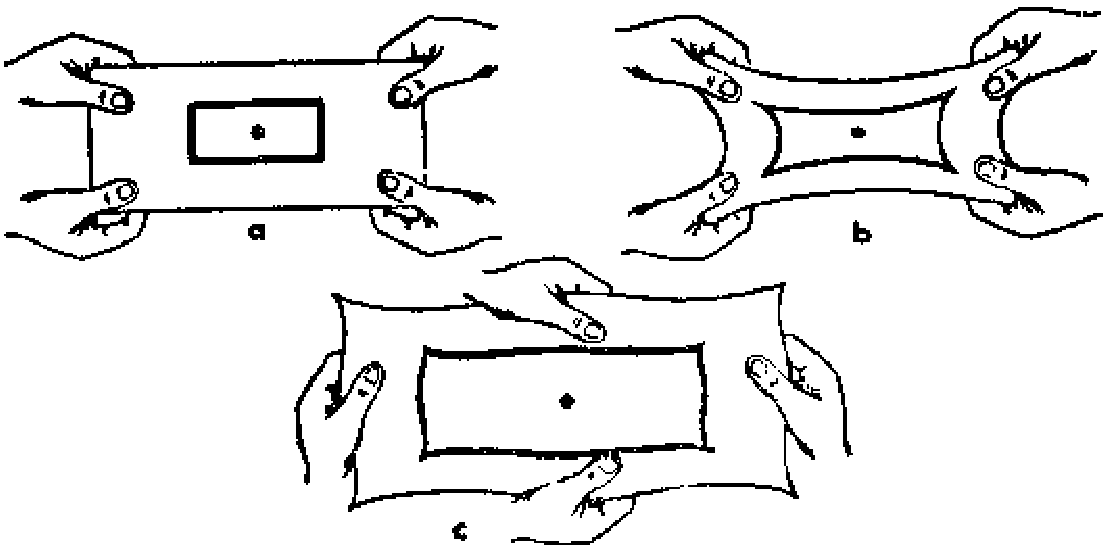


图 1

位置，而不是它的大小或者形状．它所研究的图形位置的性质，不因图形大小和形状的改变而改变．例如，你在一块橡皮膜上画一个正方形，再在正方形内部点一点．不管你怎样拉橡皮膜，点总是在正方形的内部．这就是说，拓扑学是研究图形不因拉伸或者弯曲而改变的几何性质的学科．

在拓扑学里，距离是没有什么意义的．相隔一英寸的两点，只要一拉伸就很容易变成相距两英寸．同样，角的大小也没有意义，因为你可以紧拉橡皮膜，使 15° 的角变成 35° 的角．甚至直线在拓扑学里也没有意义，因为只要一拉橡皮膜，直线 AB

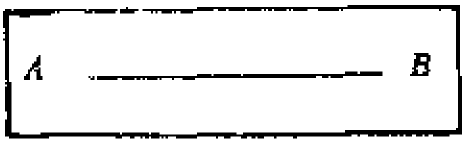


图 2

就会变成曲线：

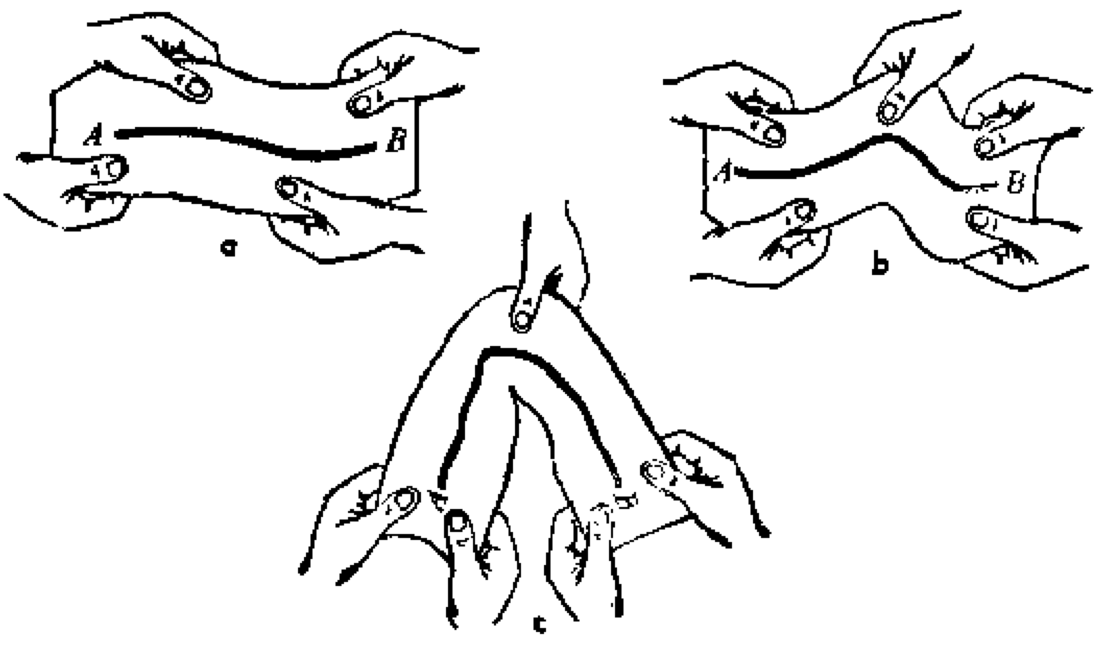


图 3

这里，直线不仅仅变成了曲线，而且长度也变了.

通常我们总是把钥匙这样一类东西，看成是坚硬而又不能弯曲的. 它保持一定的形状，而且年复一年总是能开开锁，尽管这把钥匙实际已经发生了变化. 当一架飞机腾空而起飞向远方，看起来它变得愈来愈小了. 但是我们知道，不管飞机飞到哪里，它的大小还是原来那样. 欧几里得几何是研究大小不变的物体的学科. 而拓扑学是研究运动中大小和形状都发生变化的物体的学科. 没有不能弯曲的物体，每一件东西的大小、形状和位置都可以改变，这就是拓扑学思考问题的出发点.

我们不妨把一条线想象成一段细绳子. 线上的一个点就好象细绳上一个结，不管你怎样把这条线扭绞、拉伸或且弯曲，这个点还是在那条线上. 我们还说线是连续的，线上没有洞眼. 当一条线穿过另一条线时，这条线穿过后一条线的一个点. 这就是说，如果象下图那样，画一条线 CD 经过线 XY，线 CD 一定经过线 XY 上的一个点

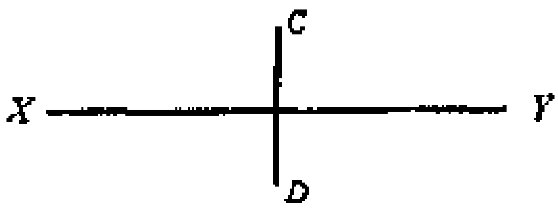


图 4

看来，在橡皮几何里，线和图形的许许多多性质都变了，你可能连想也想不出还有什么性质是保持不变的. 这种看法却是不对的. 我们再来看看图 2 里的线 AB 吧！不管我们怎样拉伸橡皮膜或者弯曲它，从 A 到 B 的道路只有一条，即从 A

到 B 本身不相交的道路．这条线或者道路可以比图 3 里弯曲得很厉害，变得更长，但是从 A 到 B，仍然只有一条线或者道路．拓扑学里，象 AB 这样的道路或者线，叫做“弧 AB”．

3. 拓扑学里几何图形是怎样变化的？

前面我们讲的象 AB 那样简单的线的问题，同样适用于研究形成象圆或三角形这样的几何图形的线．

让我们来看看，一块橡皮膜上的圆会发生什么变化．拉紧橡皮膜，圆就会变成下图中的形状．我们看到，圆的形状和

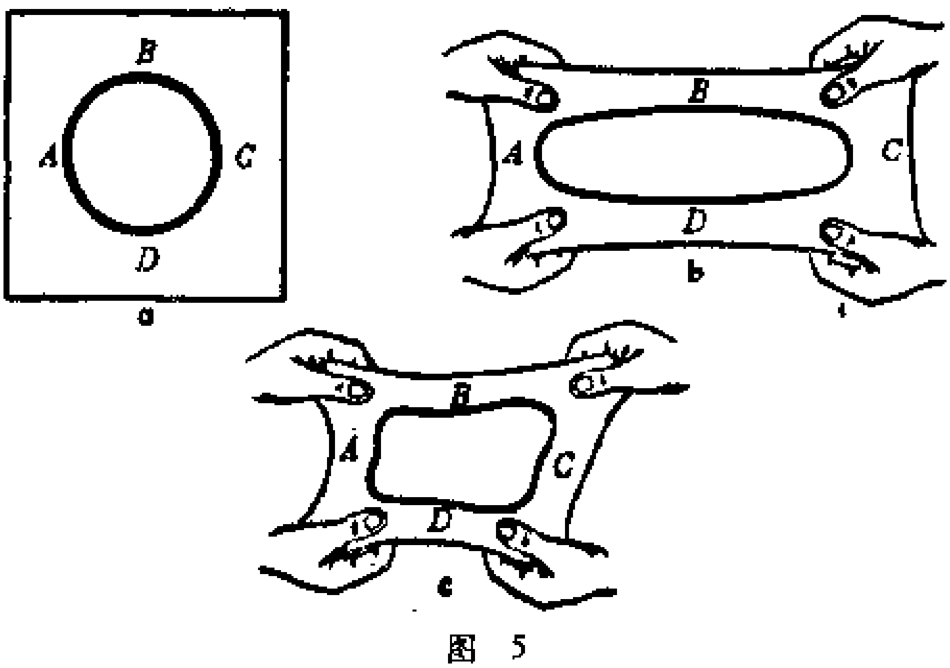


图 5

大小发生了明显的变化．但是，不管我们怎么去拉紧橡皮膜，图形仍然只有一条道路，$ABCDA$．我们还看到，从道路上任何一个地方出发，我们都会回到出发点，而且中间不和这条道路交叉．如果我们从 C 出发，经过 B、A、D，就可以回到 C．

在拓扑学里，所有这些图形有相同的名称．其中每一个都叫做简单闭曲线或者闭合道路．它们都是由两条弧 ABC 和 ADC 组成的，而这两条弧只有 A 和 C 是公共点．

让我们来看看下面的几何图形：

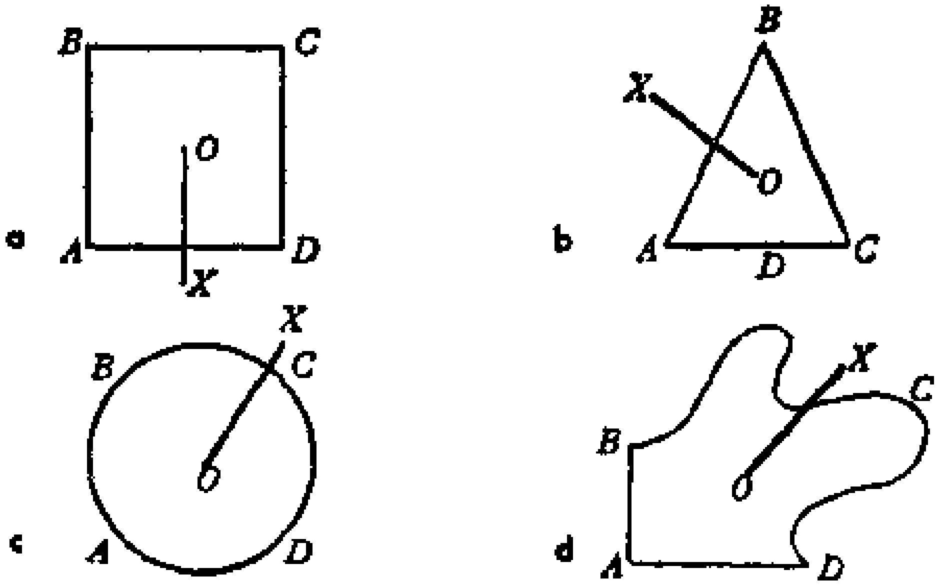


图 6

拓扑学认为这些图形都是简单的闭曲线．每一个图形都是由两条弧 ABC 和 ADC 组成的．尽管其中有的弧是直的，有的弧是弯的，但这些图形没有任何差别．

上面各个图形中，闭曲线内部有一点 O，闭曲线外面有一点 X．线 OX 通过闭曲线的一条弧．不管由于拉伸而引起图形发生多大变化，OX 总是经过曲线的一条弧．闭的弧 $ABCDA$ 没有洞眼，OX 不能偷偷地钻出来．

“一条线没有洞”，这种说法听起来好象很简单，但是这却是一个非常重要的概念．我们已经看到，线上没有洞这个概念被称为连续．实际上，没有人知道一条线有洞，还是没有

洞．但是假定一条线没有洞，看来是比较合理的．

我们说，上面那些闭曲线把橡皮膜分成两个部分，一个是内部，一个是外部．你要从内部走到外部，不可能不通过闭曲线．不管你怎样改变形状，上面讲的总是对的．当你从外部到内部时，不管你怎样改变图形的形状，你总要通过这条线，所以我们把通过这条线这个事实，叫做一种不变的性质．在图形变形的条件下仍然保持不变的性质，拓扑学里叫做不变的性质．当我们改变一个图形的形状，例如把一条直线展成一条曲线，或者把一个正方形展成一个圆，我们就完成了一次变形．这种变形叫做拓扑变换．这种变形改变图形的大小和形状，但是并不形成一个新的拓扑图形．如果我们把一条线或者一个面切去一部分，撕裂它，或者把它折叠起来，这样的改变就会使线或者面获得新的性质．因此，拓扑变换不允许切割、撕裂、折叠或者穿孔．

对于圆 $ABCD$ 来说，它还有另外一个不变的性质，这就是点 A、B、C、D 的次序是不变的．线 AB 有什么不变的性质呢？不管你怎么拉伸，从 A 到 B 自身不相交的道路只有一条．前面我们已经看到，拓扑学里圆可以变成椭圆或者正方形，直线可以变成曲线．但是，如果我们象图 7 那样，把线 AB 上的点 A 和 B 合在一处，我们得到的是一个新图形，即闭曲线．

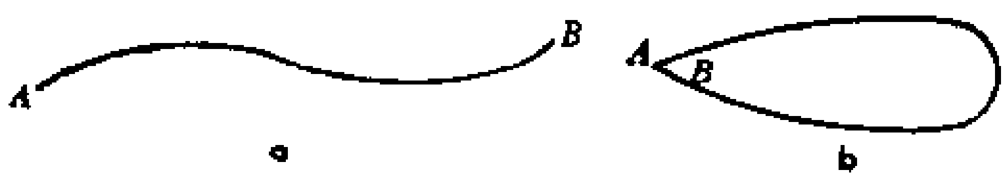


图 7

同样，如果我们象图 8 那样，从圆上切去一段弧，闭曲线就会变成线.

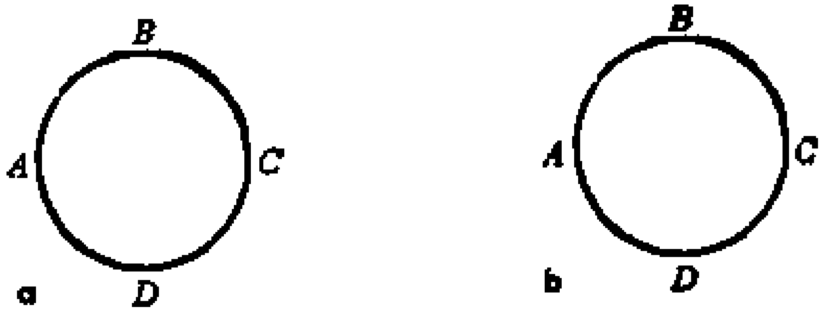


图 8

这两种变形都不是变换，因为已经形成了新的拓扑图形.

我们在几何里学习的是有关图形的大小、形状、面积和角度的许多性质. 当我们能够把一个图形叠合到另一个对应部分大小和形状完全相同的图形上时，我们说这两个图形全等. 而由拓扑变换得到的图形，叫做等价图形. 拓扑学里，尽管圆和正方形的大小很不一样，圆和正方形却是等价图形. 这两种图形都有一个内部和一个外部. 从内部走到外部，我们都得通过一条线. 如果象下图那样把内部划上阴影线，我们很容易看到图形是怎样把图面分成两个区域的.

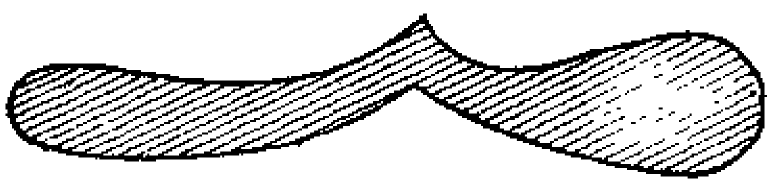


图 9

4. 波斯的哈里发和他的女儿的求婚者

关于内部和外部的概念，可以用来解决许多有趣的问题，象古老的故事里讲的那样，波斯哈里发就曾经用一个拓扑学问题去为他的漂亮的女儿选择一个丈夫．他的女儿有许许多多的求婚者，因此他决定挑选最善于解答问题的求婚者作他的女婿．向求婚者提出的第一个问题可以用图 10 来说明．问题是要求用线把写有相同数字的小圆圈连结起来，但是不准连结线彼此相交，而且不和图中已有的线相交．谁要是能正确地解答这个问题，那他就能同哈里发的女儿面谈．

这是一个简单的问题，它吸引着所有求婚者的兴趣．你试试看能不能解答这个问题．

但是谁想同哈里发的女儿结婚，还必须解出第二个问题．第二个问题也是要求用线把写有相同数字的小圆圈连结起来，但是不准连结线彼此相交，而且不和图中已有的线相交．

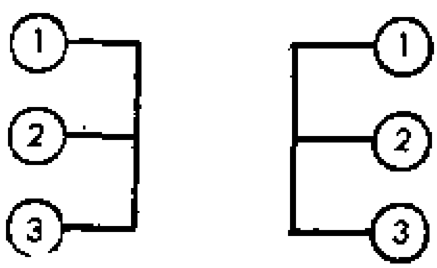


图 10

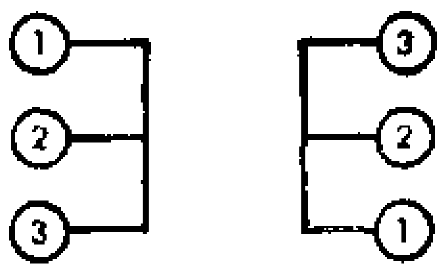


图 11

但是要注意，这个问题的图同第一题不同．（图 11）你能解答这个问题吗？

有人说，哈里发的女儿至死未嫁．关于这种说法，你是怎么想的呢？

第一个问题可以象下面这样来解．

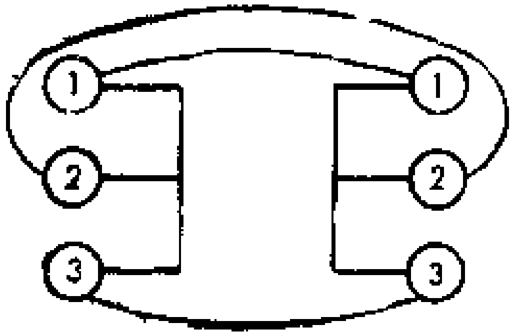


图 12

这多容易啊！

对于第二个问题，我们从 1 到 1、从 2 到 2 分别画线．现在我们得到一条简单的闭曲线．它的内部用阴影线表示．一个 3 在闭曲线的内部，而另一个 3 在外部．我们知道，从闭曲线的内部走到它的外部，又不允许和线相交，那是做不到的．这就是说，拓扑学告诉我们，要画这样一条不相交的线是不可能的．

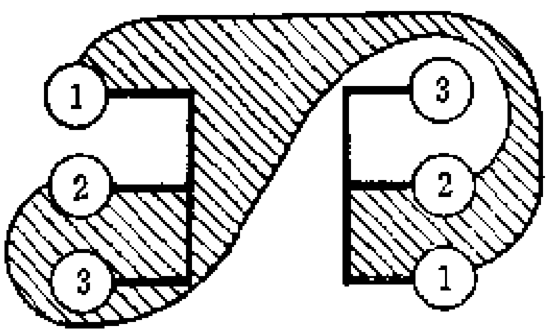


图 13

在哈里发的问题中，我们讨论的是只有一个内部和一个外部的简单闭曲线．拓扑学还要研究另外一些不是简单闭曲

线的曲线，图14中的闭曲线的内部就不止一个．从这个图上你能看出有五个区域(四个内部区域)吗？

图 14

现在再来看图 15．每一个图里面，橡皮膜被分成几个区域呢？每个图有多少个内部区域呢？

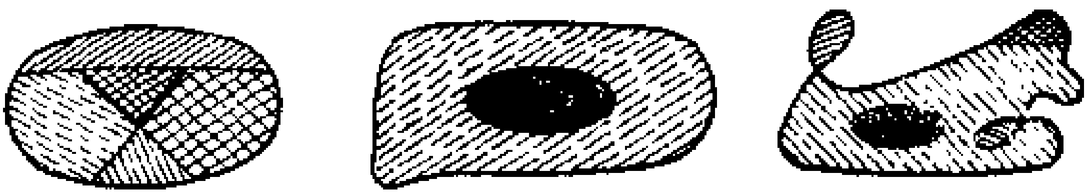
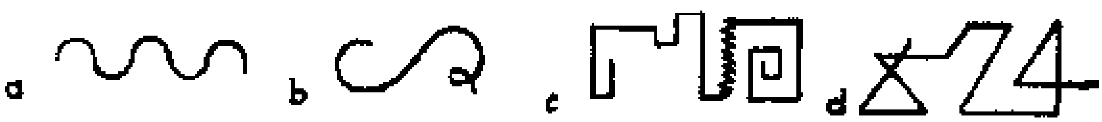


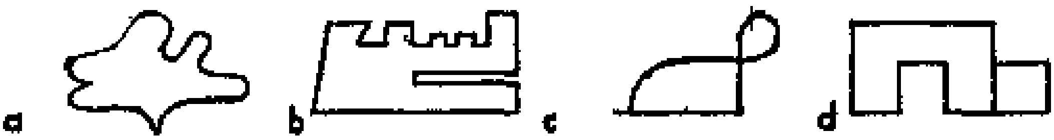
图 15

练习1　拓扑曲线和区域

(1) 下图中哪些是拓扑线？



(2) 下图中哪些是简单闭曲线？



(3) 下面每一个图有几个内部区域？

5. 有趣的莫比乌斯带

我们在前面谈到的闭曲面，都是指橡皮表面上的．我们见过的橡皮膜，和一张纸一样，都有两面：正面和反面．你可曾见到过一张纸只有一面？确实有这样的纸，这就是莫比乌斯带．魔术师用它表演给观众看．自从1858年德国数学家阿格斯特·费尔蒂兰德·莫比乌斯发现它以后，许多数学家看来，它不过只是一种玩具。一只苍蝇从莫比乌斯带上任何一点出发，可以走到其他任何一个点上去；而且不必翻越带的边缘．莫比乌斯带和一张纸或者一张桌面不同，它没有上面和下面或者正面和反面．

你可以随便用一张纸条做成一个莫比乌斯带。纸条的大小不限，但是用一或二英寸宽、一或二英尺长、一面涂有胶水的电报纸带比较容易做好．我们把纸带做成一个环，然后将一头扭转半圈，再把两个头粘合起来．如果你使用涂有胶水的

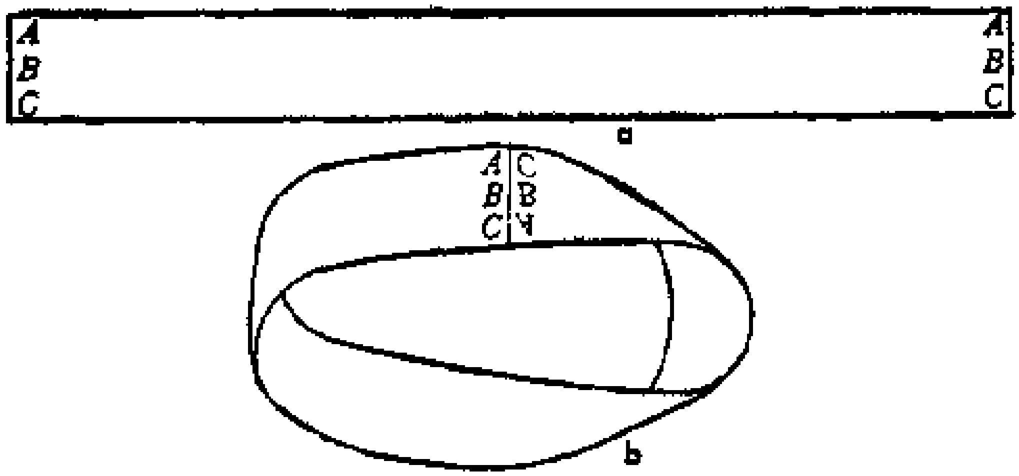


图 16

电报纸带，只要将一头扭转半圈使这一头涂有树胶的一面同另一头涂有树胶的一面粘合起来就行了. 做好的带如图 16.

如果你在做好的莫比乌斯带的曲面上画一条线，你就会发现，你可以走遍整个曲面，而且不必和边缘相交. 不越过边缘，依次把一面涂上颜色. 还会不会有一面没有涂上颜色呢?

还要提一下另外一个奇怪的结果. 沿着纸带的中心线（顺着长的方向）剪开莫比乌斯带，你会得到什么意想不到的结果呢? 如果你再做一个莫比乌斯带，然后沿着离一边三分之一宽处（顺着长的方向）剪开纸带，你会得到不同的结果吗?

如果你把第 9 页讨论的哈里发的问题放到莫比乌斯带上，你就能"成功地解答哈里发的第二个问题". 试一试看. 在解答这个问题时，画线都要顺着带的一个方向，按照你涂颜色的方法进行.

莫比乌斯带使我们对于有左右分别的物体（如鞋子和手套）获得一种新的看法. 当你比较一双手套的两只手套时，你一定会发现，你能够度量的地方，两只手套的大小都一样. 但是你很清楚，这两只手套是很不一样的. 左手的手套不适合右手戴.

怎样才能把一只右手的手套变成左手的手套呢? 对于二维的情况来说，在莫比乌斯带上看来是可以解决的. 如果你顺着莫比乌斯带的曲面移动手套的图形，直至移到原来出发点时，手套就会上下颠倒，左右正好相反.

练习 2　莫比乌斯带

你一定高兴给你的朋友表演一下，用不同的方法剪开莫比乌斯带会得到怎样奇妙的结果。画一张同样的表，然后将扭转的半圈数不同的纸带和用不同方法剪开纸带时所得到的结果填入表内。

半圈数	面和棱数	剪开方法	剪开后的结果(面和棱数,长和宽,圈数,扭转半圈数,结数)
0		中心线	
1		中心线	
1		1/3 处	
2		中心线	
2		1/3 处	
3		中心线	
3		1/3 处	

下面是一篇关于传奇人物保罗·奔念的故事，它说明莫比乌斯带有某些"实际"应用。

保罗·奔念和运输机上的传送带

威廉哈·兹勒特·尔普逊

保罗·奔念取得的一项最卓越的成就，不是由于他具有优异的思想，而是出于他的谨慎和细致。这就是闻名于世的传送带事件。

保罗和他的机械师福特·福特逊，曾经在科罗拉多开办一座铀矿。矿砂用一根环形传送带从矿井中运出来，传送带有半英里长在矿井里面运行，另外有半英里长在外面运行——全长是一英里。宽是四英尺。传送带在一组滚轮上运行，由安装在保罗的蓝色大货车"Babe"的传动装置上的轮子驱动。传送带制造厂制造的传送带是一个整体，既没有接头，

也不用接头卡子，同时传送带空行部分扭转半圈，这样就可以使传送带两面的磨损均匀.

经过几个月运转以后，矿井巷道变成原来两倍那样长了，但是挖出的矿砂总量减少了. 保罗决定用一条传送带，比原来的长一倍，宽却只需原来的一半. 他叫福特·福特逊把他的链锯拿来，把传送带顺着长的方向锯开，一边一半.

"这样会锯成两条"，福特·福特逊说. "我们还得横着锯断这两条，再把它们接起来. 这就是说，我还要到城里去买两副接头卡子."

"不"，保罗说. "这根传送带扭了半圈——这就成了几何学中著名的莫比乌斯带."

"那会有什么差别呢?" 福特·福特逊问道.

"莫比乌斯带"，保罗·奔念说，"它只有一面，一条棱. 如果顺着长的方向切开，一边一半，那么切开以后仍然是一根. 所以我们得到的是一根传送带，只是长了一倍，却窄了一半."

"把一个东西切成两半，怎么会还是一根呢?"福特·福特逊问道.

保罗很谦逊，他从不自以为是. "那我们就试一试吧!"他说道.

他们走进保罗的办公室. 保罗拿出一条涂有胶水的纸带，宽约两英寸，长约一码. 他把纸带放到办公桌上，胶水面朝上. 他拿起纸带两头，在他面前凑到一起，胶水面朝下. 然后他把一个头翻过来，用舌头舐了舐，把这一头平放到另一头下面，再把有胶水的两面贴牢. 这样也就做好了一条扭转了半

圈的环形纸带，挺象运输机上的大传送带.

“这就是一条莫比乌斯带，”保罗说.“我希望用它能表演我刚才说的那些.”

保罗拿出一把剪刀，在纸带的中间戳了一个小孔，然后顺着纸带长的方向剪开成两半. 当他一剪完，果然还是一条纸带，长了一倍，却窄了一半，扭转了两个“半圈”.

福特·福特逊信服了. 他走出去准备动手把大传送带锯成两半. 恰好在这时候，一个名叫罗德·莫斯·约翰逊的人来了，他想看看保罗的事业进展如何，也想提出他能想到的任何不同的批评意见.罗德·莫斯·约翰逊是有名的牛皮大王，也最喜欢找别人的岔子.

“如果你顺着长的方向锯成两半，最后得到的一定是两条传送带，每一条的长度和原来的一样，只是窄了一半.”

“不”，福特·福特逊说，“这是一种很特别的带，叫做莫比乌斯带. 如果我顺着长的方向锯成两半，最后得到的是一条带，比原来长一倍，但是却窄了一半.”

“愿意打赌吗?”罗德·莫斯·约翰逊说.

“当然”，福特·福特逊说.

他们赌了一千美元. 当然是福特·福特逊赢了. 罗德·莫斯·约翰逊大吃一惊，只好偷偷地溜走了，半年也没有到矿上来过. 当他终于回到矿上时，保罗·奔念正准备第二次顺着长的方向把那条传送带锯成两半.

“你打算怎么办呢?”罗德·莫斯·约翰逊问道.

保罗·奔念说：“巷道已经伸进去很远了，矿砂生产已经

不象过去那么多了. 所以我要把传送带加长，同时可以使它窄一些."

"福特·福特逊在哪里?"

保罗·奔念说: "我叫他到城里去买一些皮带卡子来接传送带. 当我顺着长的方向把传送带锯成两半以后，得到的是两条带，每条的长度和原来一样，但是宽只有原来的一半. 所以我准备用卡子把它们接起来."

罗德·莫斯·约翰逊很难相信自己的耳朵. 这真是一个好机会，既可以把他输掉的一千美元弄回来，又可以让保罗·奔念这个笨蛋丢丢丑. "听着"，罗德·莫斯·约翰逊说，"当你锯完，只可能有一条带，长是原来的两倍，宽只有原来的一半."

"愿意打赌吗?"

"当然!"

他们赌了一千美元，当然又是罗德·莫斯·约翰逊输了. 这并不是由于保罗·奔念的才智过人，而且由于他的工作方法正确. 在此以前，他已经用上次剪过的那条胶水纸带作过试验，因此他知道第二次剪开莫比乌斯带时，得到的是两条，象老式表链那样，一环套着一环.

二、拓扑学会解答一些有趣的问题

1. 七桥问题和拓扑学

十八世纪，在那沉寂的哥尼斯堡(现在是苏联的加里宁格勒)的大学城里，沿着流经这个城市的普雷格尔河弯曲的河岸，星期天有许多游人喜欢在这里散步．河上有七座桥，其中六座桥从河的两岸通向河中间的两个小岛，另一座桥连接两个小岛(见图)．

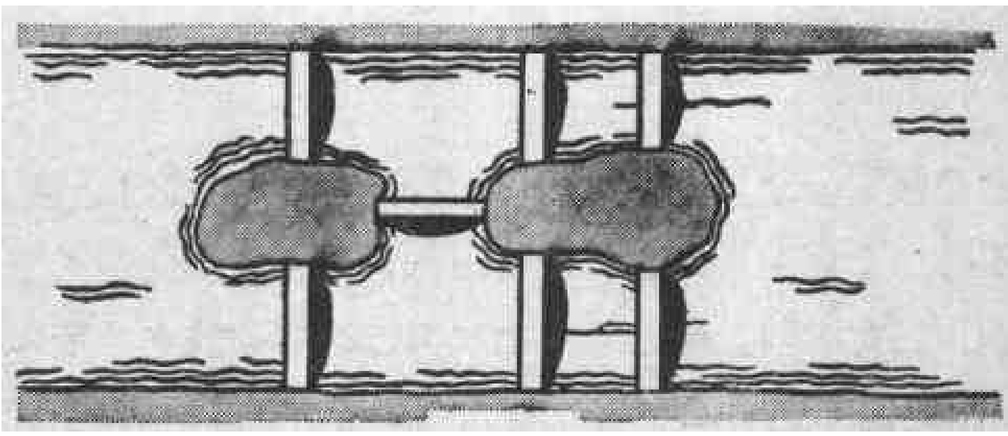


图 17

一天，当地一个人向他的邻居提出一个问题："星期天散步的时候，怎样走法才能每座桥都走过一次，而且恰好只走一次?"这个问题使邻居很感兴趣，而且很快也引起哥尼斯堡许多人的兴趣．他们认真地思考着这个问题，但是谁也没有能够找出一个答案．

这个问题不知道怎么引起了瑞士数学家列昂纳德·欧拉的注意，他当时正在彼得堡的俄国女皇卡捷琳娜的宫庭里工作．欧拉运用他那熟练的数学技巧来研究这个问题，终于得到解答：象问题里提出的方式经过七座桥是不可能的．也许第一个提出问题的人曾经感到失望，但是如果他知道欧拉在探讨这个问题的过程中，创立了一个新的数学分支，即我们现在正在讨论的拓扑学，他决不会感到不愉快了吧！

2. 什么样的网络才可以通过？

欧拉在解决哥尼斯堡七座桥的问题过程中，他并不认为有必要去哥尼斯堡一趟．他仍然留在彼得堡，按照数学家通常的方法工作：画出了这个问题的图形表示．在这张图上，小岛和河岸变成了点，桥变成了连结这些点的线，如图18．现在，你可以象欧拉那样，用一支铅笔就能研究这个问题了．如果你照图 18b 的样子，从某一点开始，最后回到同一点，中间

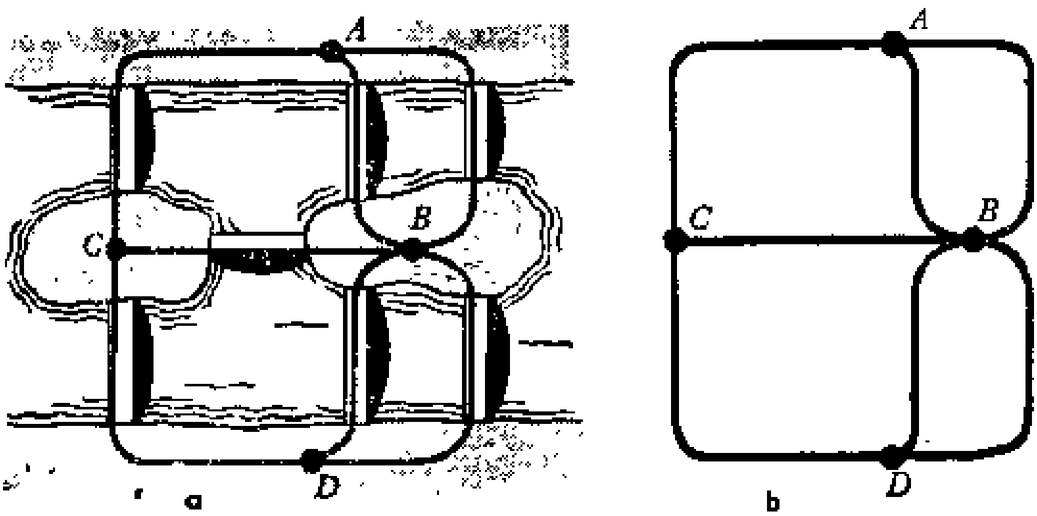


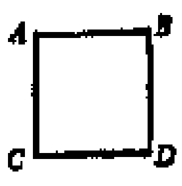
图 18

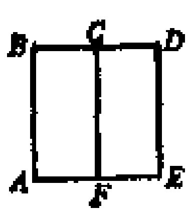
任何一条线不准画两遍，铅笔也不准离开纸，你能不能一笔画出图呢？欧拉就是从这张图发明了网络，并且发现了拓扑学里非常有价值的关系式。

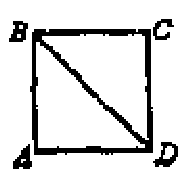
哥尼斯堡七座桥问题的图形，叫做*网络*。线的交点叫做*顶点*，表示桥的线叫做*弧*。一个网络，如果一次能把所有的弧都走一遍而且都只通过一次，就说这个网络可以*一次走遍*或者*一笔画成*。但是顶点可以经过任意次。哥尼斯堡七座桥的网络有四个顶点 A、B、C 和 D。通向顶点 A 的弧有 3 条，所以顶点 A 叫做*奇顶点*。同样，因为有 5 条弧通向顶点 B，所以 B 也是奇顶点。欧拉发现，要一次走遍一个网络又不重复经过其中任何一条弧，奇顶点的数目必须是一定的。欧拉还发现了一次走遍的网络另外一些重要定理。但是，如果你做做下面的习题，你也可以发现其中的一些定理。画出各个几何图形，然后研究各个顶点并且顺着网络走一遍，看看你能不能象欧拉那样，发现闭合网络顶点间的关系。

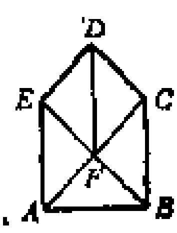
练习 3　网络通行试验

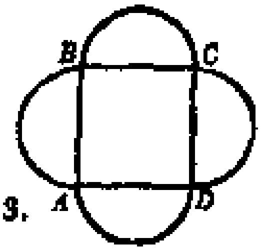
将下图各个网络的偶顶点个数和奇顶点个数填入表中，然后看看网络是不是可以一次走遍。画出图下面的表并且填表：

I. 

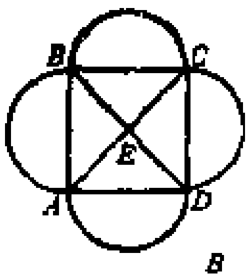
II. 

1. 

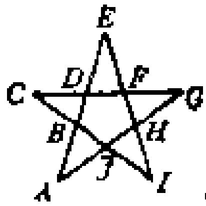
2. 



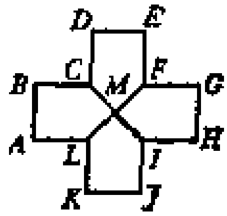
3.



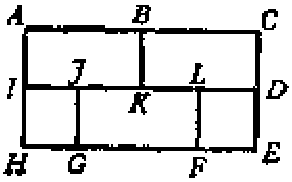
4.



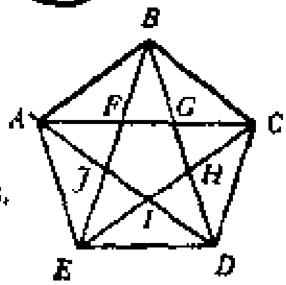
5.



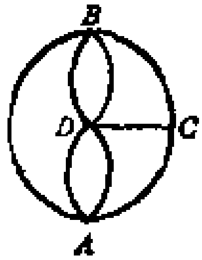
6.



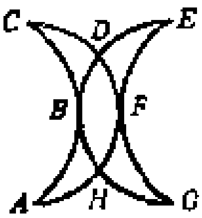
7.



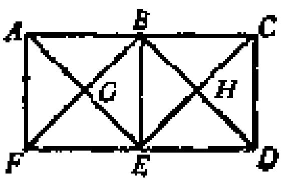
8.



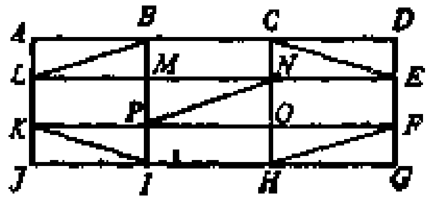
9.



10.



11.



12.

网络	偶顶点	奇顶点	能否一次走遍?	网络	偶顶点	奇顶点	能否一次走遍?
I	4	0	能	6			
II	4	2	能	7			
1				8			
2				9			
3				10			
4				11			
5				12			

3. 欧拉关于网络的发现

拓扑学中许多问题是和网络有关的．研究习题 3 里的网络，就可以回答下面有关顶点和弧的关系的一些问题：

（1）一条弧是从哪里开始和到哪里终止的？

(2) 如果两条弧相连结，它们的顶点有什么关系？

(3) 网络的各个部分都是用弧连结起来的吗？

(4) 一个网络只有两个奇顶点，它能一次走遍吗？

(5) 一个网络的奇顶点多于两个，它能一次走遍吗？

(6) 一个网络只有奇顶点，它能一次走遍吗？

(7) 一个网络只有两个偶顶点，它能一次走遍吗？

(8) 一个网络的偶顶点多于两个，它能一次走遍吗？

(9) 一个网络只有偶顶点，它能一次走遍吗？

欧拉想出了这一类问题的答案，从而得到了四项关于网络的有普遍意义的发现．首先，他指出：一个网络要一次走遍，它的奇顶点个数一定是偶数．试一试看，奇数个奇顶点的网络能不能一次走遍．如果你成功了，你就将创造数学的历史！

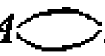
其次，欧拉发现全是偶顶点的网络可以一次走遍．换句话说，我们可以从任何一个顶点出发，走过整个网络，最后回到原来出发的顶点，中间任何一条弧都不用走两遍．

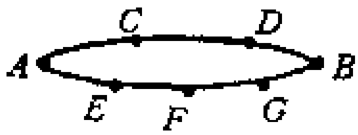
欧拉的第三个发现是，如果一个网络有两个而且只有两个奇顶点，它就可以一次走遍，但是最后不可能回到出发点．这种情况下，必须从一个奇顶点出发，而最后到达另一个奇顶点．

欧拉最后一个发现是，如果一个网络有 2、4、6、8 或者更大的偶数个奇顶点，这个网络就不可能一次走遍．这种情况下要走遍整个网络所需要的旅行次数，等于奇顶点个数的一半．

让我们来看看怎样把这些发现应用于哥尼斯堡七座桥的问题．这个网络有四个奇顶点，就是说，这个网络不可能一次旅行就走遍．事实上，欧拉第四个发现已经指明，要两次旅行才能走遍．

当欧拉研究哥尼斯堡七座桥的问题时，他意识到他研究的是一种新的几何学．他看到所研究的图形和它的大小或者形状是没有关系的．从这种思想出发产生了数学的一个分支，现在叫做拓扑学．前面我们讨论过的网络，都没有涉及长度、面积、角和形状．相反，最重要的是位置以及这些位置是怎样用弧连结起来的．在几何里，我们研究的图形性质，不会由于你移动这个图形（不改变图形的形状）而发生改变．例如，一个圆有一定的半径、直径、圆周和面积，这些都不会由于圆从一个位置移到另一个位置而发生改变．当我们在几何里移动一个图形时，运动是刚体的；也就是说，我们不允许形状有任何改变．在拓扑学里，我们可以移动图形，同时可以通过扭曲或者拉伸改变图形的形状，而不管长度或距离、角和弧．在拓扑学里，我们研究图形在上述变形下仍然不变的性质．

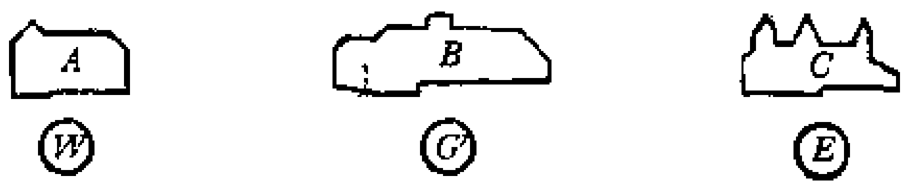
现在让我们来看看怎样将网络应用于前面讨论过的曲线．最简单的网络是简单弧，如 AB： A——B．A 和 B 叫做这条简单弧的顶点．另一个简单的网络是 AB，这个闭曲线有两个顶点和两条弧．但是，我们可以在 AB 上再画另外几个点，使得它上面有许多顶点，如图：



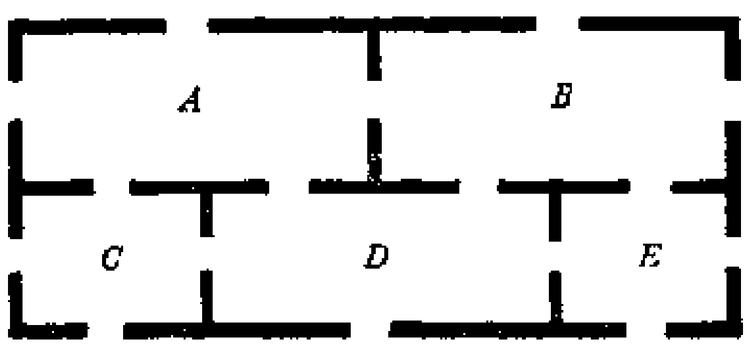
篮球场上画的线，或者交通图上的城市和道路，都是复杂的网络的例子．

练习 4　网络的问题和难题

（1）如图，三栋房子A、B、C，每一栋房子都要和自来水干线W、煤气干线G、配电站E用管道或者电线连接起来．能不能使这些管道和电线不交叉穿行呢？画一张网络图帮助你分析能不能做到．象我们讲哈里发问题时做的那样，在图上画上阴影线，也许能帮助你找出这个难题的答案．



（2）下面是一所房子的平面图．能不能一次走遍这所房子，同时每个门都通过一次而且只通过一次？根据平面图画一个网络（把房间作为顶点，门作为弧）．



4. 网络，区域，一个重要的公式

关于网络的一个问题是：一个网络将平面分成多少块，或者说多少区域呢？例如，下面图 19a 只有一个区域。你可以从平面上任何一点走到平面上任何另外一点，而无须和网络交叉。

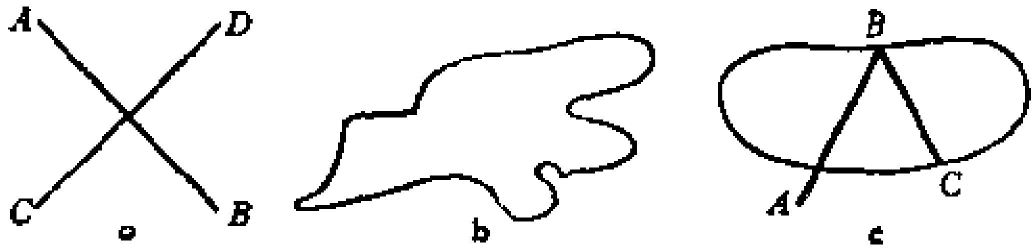


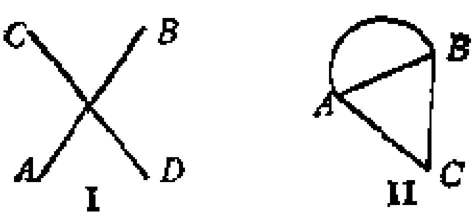
图 19

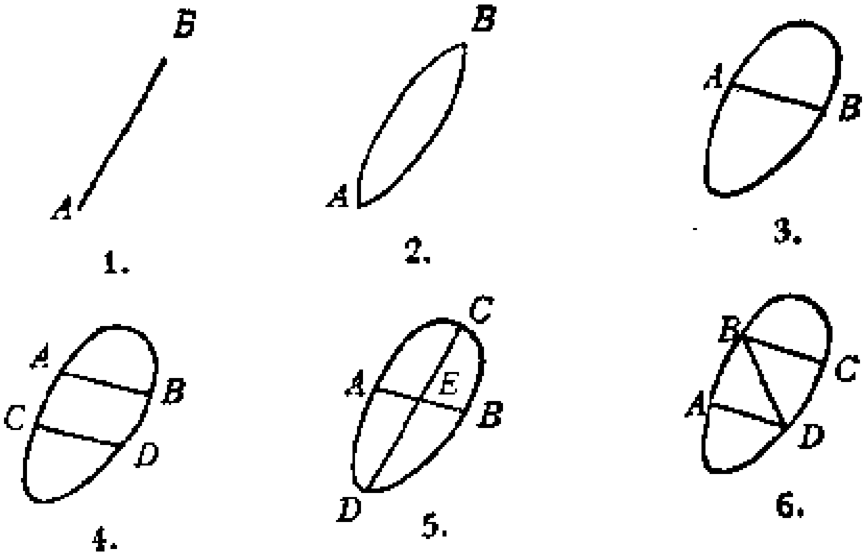
象图 19b 那样的闭曲线有几个区域呢？你能数出图 19c 的网络是四个区域吗？

区域、弧和顶点之间存在什么关系呢？如果你仔细研究一下习题 5 中的网络，你一定能发现一个网络的顶点数 V、弧数 A 和区域数 R 之间的关系。

练习 5　网络和区域的试验

下面的表是用来说明每个网络的。画出表并且填空，然后看看你能不能说出关于 V、A 和 R 三个变量的一个公式。





网　　络	V=顶点数	A=弧数	R=区域数
I	5	4	1
II	3	4	3
1			
2			
3			
4			
5			
6			

5. 关于网络的欧拉定理

如果你有非凡的数学才能,你一定会发现:

$$V - A + R = 2.$$

这就是欧拉的网络公式，它描述了网络的一个最重要的性质．自己试一试,看这个公式是否适用于图 20 中的网络．

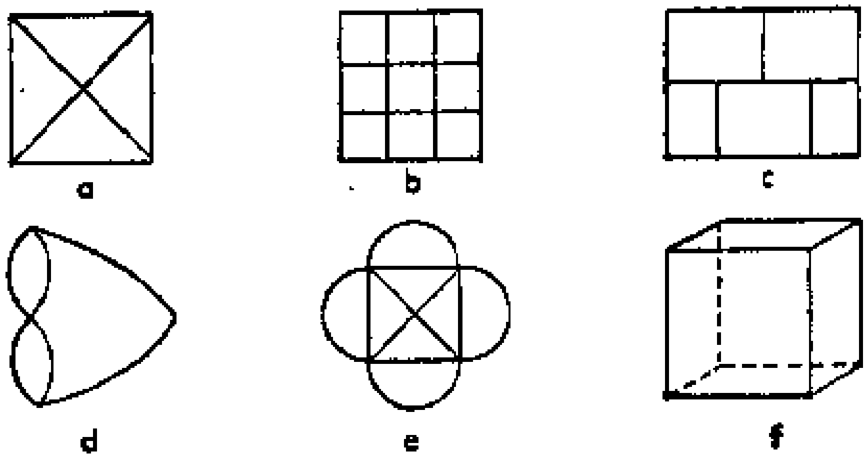


图 20

6. 地图四色问题

地图四色问题同网络和区域有关，是最著名的没有解决的数学问题之一*．假定我们要画一张地图，使有共同边界线的国家染的颜色不同．要画这样一张地图需要几种颜色呢？

下面的图表示的是地图的几种可能情况．画出这些地图，然后染上颜色，使有共同边界线的国家染的颜色不同．

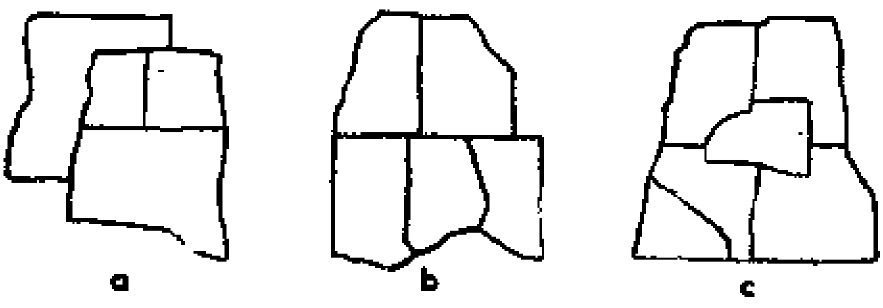


图 21

* 四色问题是1840年由数学家莫比乌斯提出的． 1976年，美国伊利诺斯州立大学的数学家利用超高速大型计算机，根据数学归纳法原理，彻底证明了"四色定理"．——译者注

从上面几个图可以猜想到，用四种不同的颜色去染所有的地图都可以符合上面的要求. 然而，用四色就足够染任何一张地图这一事实，到本书(指原版)出版时止，还没有得到数学的证明. 但是已经证明了如下两点：染任何一幅地图至多只需五种颜色*，而染某几种地图至少需要四种颜色. 但是数学家还在力图证明：染地图只须而且必须要用四种颜色. 因此，如果你想一举成名，不妨去找出一张必须要用五种颜色才能染色的地图，或者想办法证明四种颜色已经够用了.

练习6 地图和颜色

(1) 用一张英国的地图作如下的练习：

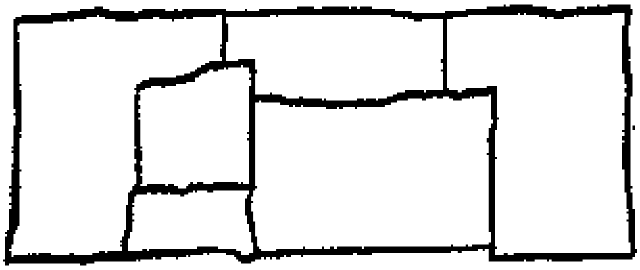
a. 在你住地附近选六个郡（郡是英国的行政区划）并画成一个网络图.

b. 从康沃尔到诺森伯兰旅行时中间至少要经过几个郡?

c. 如果a题网络图中六个郡要用不同的颜色表示出来，那么需要用几种不同的颜色?

d. 英国哪一个郡有最多的郡和它有公共边界线(公共边界线指多于一点的公共边界)?

(2) 画出下面的地图，然后用四种颜色染色，使有公共边界线的两个区域的颜色不同.



* 关于这一点的证明，可参看江泽涵著：《多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类》，人民教育出版社 1964 年 6 月第一版. ——译者注

(3) 画一张地图，使它有十个区域，而且可以用三种颜色染色，任何两个相邻的区域的颜色不同。

(4) 用线(其中任何三条都不相交于一点)将圆分成许多区域。当线的条数一定时，形成的区域数最多是多少？画表并且把这个问题的结果填入表内。

线的条数	区域数
1	
2	
3	
4	
5	

每画一条线时增加的区域数有什么不同？你能预先说出六条线会分出多少个区域吗？

三、拓扑学怎样看待我们所在的三维空间?

1. 拓扑图形分类

在我们生活着的空间里,有着许许多多三维的图形,例如球、立方体、环面等图形. 我们当然会想到,怎样用拓扑学来研究这些三维的图形呢!

拓扑学里面的球,有些方面很象圆. 球把空间分成一个内部和一个外部. 立方体和柱体也是这样. 从这些图形内部一点到它的外部所走的道路或者所作的线,和这些图形的表面一定交于一点. 另外,我们假定物体的表面没有洞,就象我们说过的一条线没有洞一样. 这就是说,曲面是连续的. 任何一个闭曲面,如果它把空间分成两个区域,一个叫做内部,一个叫做外部,这种闭曲面就叫做**简单闭曲面**. 上面提到的球、立方体和柱体都是简单的闭曲面. 任何简单闭曲面(如立方体和柱体)都可以通过变形成为球.

简单闭曲线和环或者球面和环面之间有什么区别呢? 这正是拓扑学要研究的问题: 线或者面是怎样连通的.

另外,拓扑学还告诉我们,怎样将一个图形或者物体变换

成为不同的图形或物体．例如，考虑平面上的一个环(图 22)．

环的图形不是简单闭曲线． 它将平面分成 A、B 和 C 三个区域．但是，如果我们象图 23 那样把环切去一段，得到的却是一条简单闭曲线．A 和 C 两个区域都在外部．

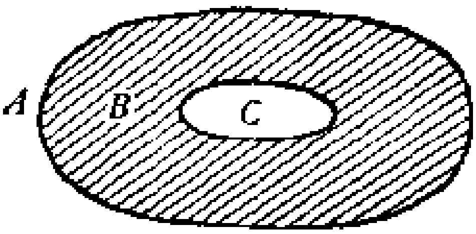


图 22

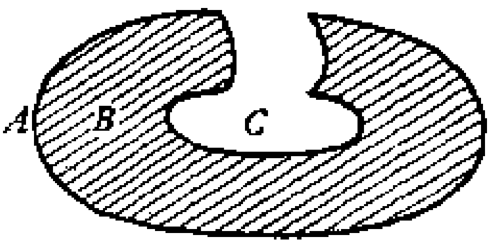


图 23

立体的或者平面的图形，拓扑学根据需要切几次才能把它变成简单图形或者简单曲面来进行分类．上图中的环被分类为单连通曲面，因为只要切一次就可以把环变换成一条简单的闭曲线．要特别注意的是，单连通曲线（或曲面）和简单闭曲线(或曲面)，在图形分类里是根本不同的两种图形．

拓扑学对三维图形分类的根据是：需要切几次就可以把图形变换成象球一样的简单闭曲面． 例如，环面和以前讲过的环就有些相似．如果我们横着切环面一次（如图 24)，环面就变成简单曲面了，也就是说可以变形成为球面了． 应当注意，简单闭曲面横切一次以后总是分成两块．因此，切一次所产生的结果是拓扑学里环面和球面的主要差别．这时我们说，环面和球面的“连通性”不同．

环面上的洞有什么性质呢？环面上的洞是环面的内部还是外部呢？在拓扑学里，我们说这个洞是外部，而不是内部．实际上，环面上的洞对于拓扑学分类的定义来说，只占有很次

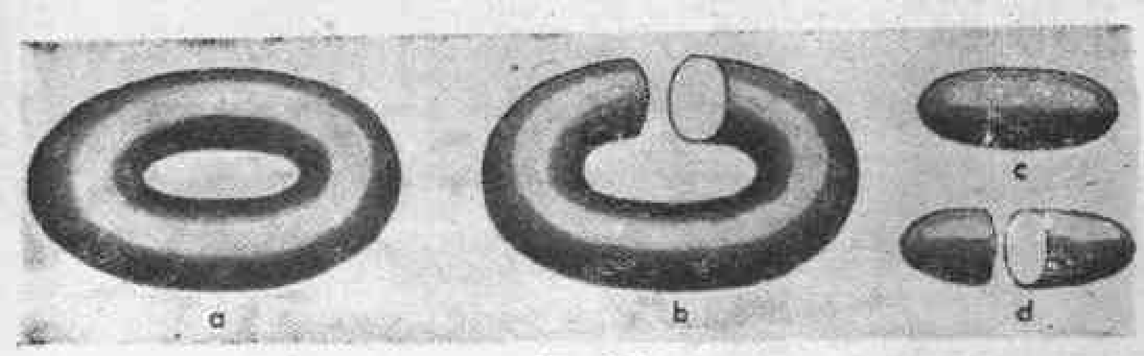


图 24

要的地位.

其次，我们来看看拓扑图形的棱. 一张纸或者一张圆的卡片，人们都说它们有两面和一条棱. 自行车的内胎有两面，但没有棱. 一个两头无盖的圆柱有两条棱和两个面. 立体图形分类的一种方法是计算对表面可以横切几次，而又不至于把表面分成两块或两块以上. 一次横切可以想象成用一把剪刀剪一次，开始和结束都是在一条棱上.

如果我们沿着正方形纸的一条棱剪到另一条棱，我们看到纸被剪成两个不同的部分. 如果我们同样剪一个纸板做的管子，结果得到和正方形等价的一个曲面. 当然，如果我们顺着平行于圆柱两条棱的线去切圆柱，得到的是两个圆柱. 正

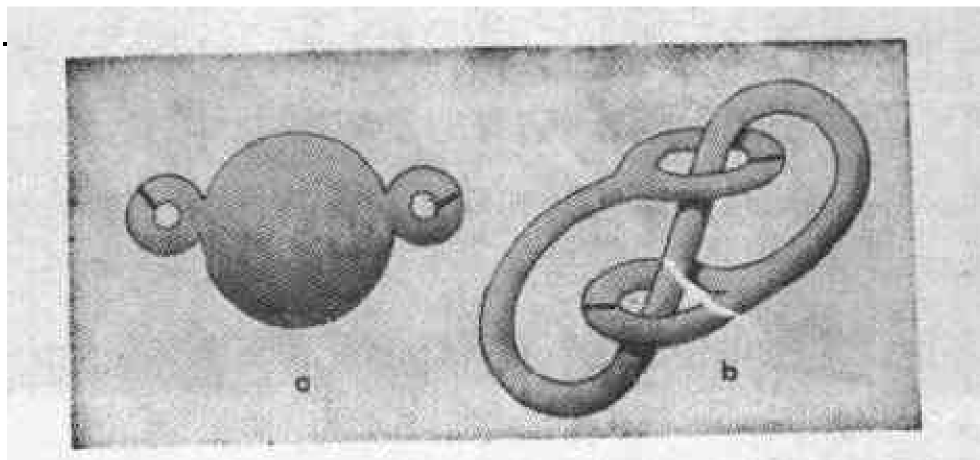


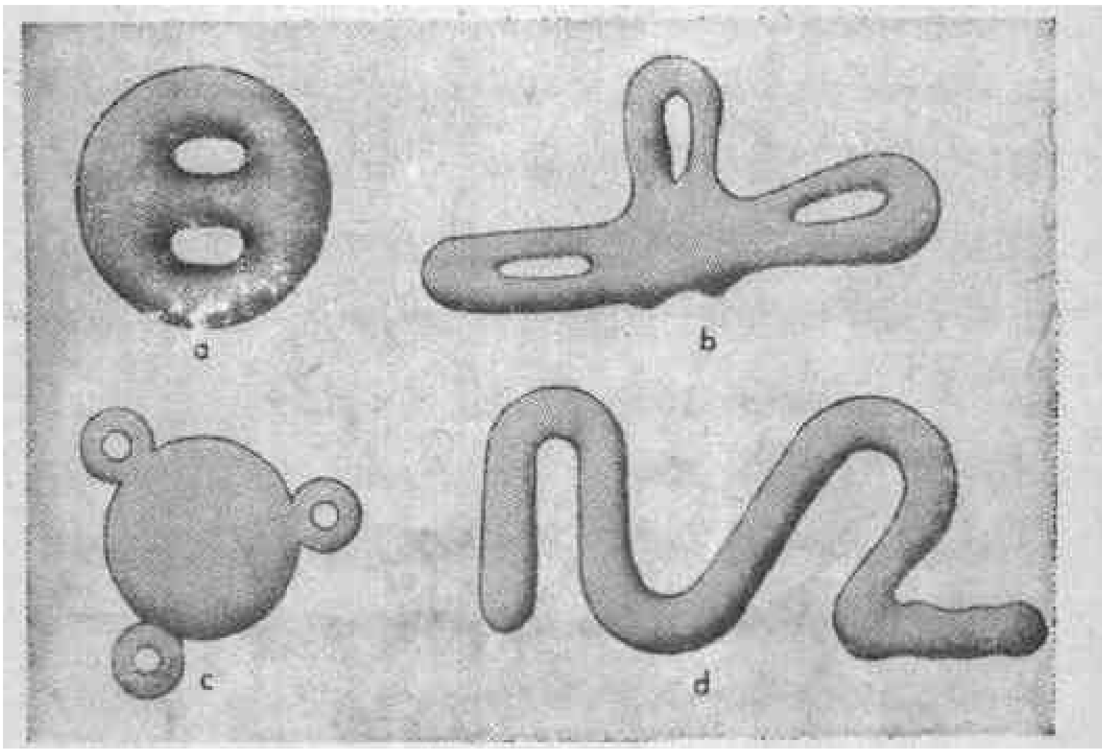
图 25

方形叫做简单曲面，而圆柱叫做单连通曲面。一个有孔的球面（气球），只要把孔撑得足够大，然后把它压平，球面就变成一张薄片了。所以球面也是单连通曲面。

图25上的三维图形，叫做三连通曲面，因为其中每一个都需要切两次才能变成简单闭曲面，然后再切一次（或者穿一个孔）就可以把这个简单闭曲面变成简单平面曲线。

练习7　三维曲面

（1）要切几次才可以把下面的立体图形变成简单闭曲面？



（2）把下列曲面分成如下四类：单连通曲面，双连通曲面，三连通曲面或者简单曲面：

a. 足球

b. 花园里浇水的橡皮管

c. 外套

d. 长袖羊毛衫

e. 内胎

f. 纸板

g. 无柄纸杯

(3) 由于连通性不同,有一些在简单闭曲面(如平面或球面)上不能解的难题,在更复杂的曲面(如环面)上却是可以解的。

你已经知道,习题 4 的第 1 题在平面上是不可能解的。试试看你能不能把这个问题放到一个环面上来解呢!

2. 数学家创造的一种怪瓶子

和单面的莫比乌斯带相似的一种三维图形是克来因瓶,它是由德国的大数学家费里克斯·克来因于 1882 年发现的。设想这种瓶子的最简单的思路是想到把一个内胎切断和拉直以后就是一个圆柱. 再把其中一头撑开作成一个底,另一头拧细象个瓶子的颈部. 然后把拧细的一头弯过来,插入管子

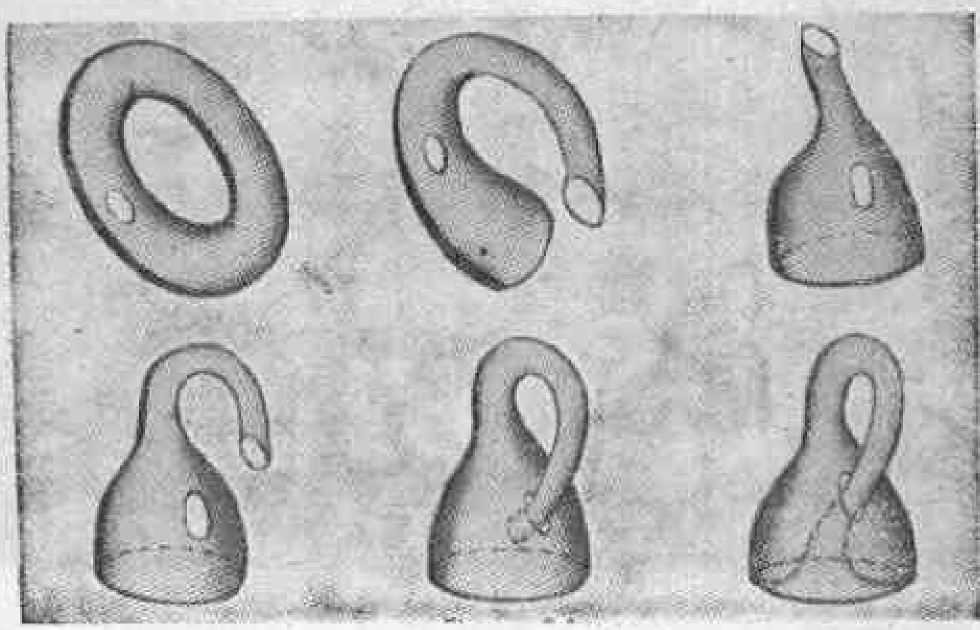


图 26

旁边的流水孔．最后把这一头撑开同底部开着的那一头连结起来．管子上的洞变成了瓶子上的孔，所以这样做成的瓶子叫做“有孔的”克来因瓶．拓扑学里通常假定，能让单面曲面从洞里穿过去的洞实际上是不存在的．当然，用一个内胎这样作实际上是不可能的，但是拓扑学里我们可以自由地运用这样古怪的不可能性．一个克来因瓶可以看作是一对莫比乌斯带将边沿粘合在一起而成的．

莫比乌斯带和克来因瓶具有的这些性质，下面两首打油诗作了很好的总结和说明：

莫比乌斯带真叫怪，
沿着中线裁剪开，
结果还是莫氏带，
你说怪不怪．

拿来两条莫氏带，
边对边地粘起来．
得到一只克来因瓶，
分不出里来辨不出外．

3. 用欧拉公式考察三维图形

欧拉网络公式 $V-A+R=2$，可以应用于某些三维图形，即**多面体**．多面体是由几个平面部分（叫做多面体的面）围成的立体图形．砖就是一种多面体．对于**正多面体**（立方体是一种正多面体）来说，它的每个面都是各边相等而且各

角相等的几何图形，各个面的形状和大小完全相同（可以重合），同时几个面相交所成的角也可以重合。

正多面体只有五种。我们已经提到过，立方体是正多面体的一种。有六个面的多面体叫做六面体。因为立方体是有六个面的正多面体，所以立方体也叫做正六面体。其余的正多面体只有下面几种：四面体，八面体，十二面体，二十面体。图 27 上画出的就是这几种正多面体。你找一找看，有哪些实

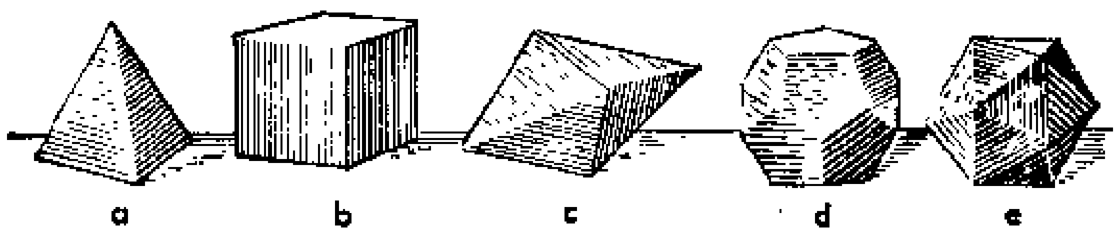


图 27

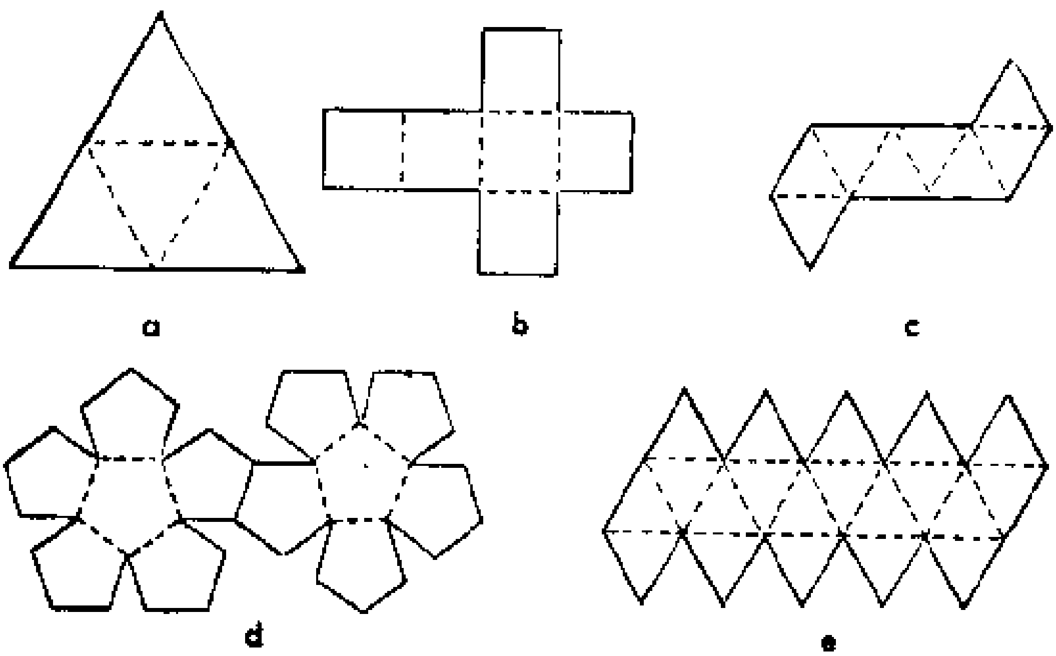


图 28

物是正多面体．按照图 28 画的样子，用硬纸板可以自己做几个模型．

当我们把欧拉公式应用于多面体时，我们常常把符号 A 改为 E，用 E 表示多面体的棱数，把符号 R 改为 F，用 F 表示面数．你能不能看出多面体确确实实是三维网络呢？

练习 8　多面体和欧拉公式

画出下表并填空：

名　称	面数 (F)	棱数 (E)	顶点数 (V)	$V+F$　$E+2$
1. 四面体				
2. 六面体				
3. 八面体				
4. 十二面体				
5. 二十面体				

四、利用拓扑学变戏法

拓扑学是一种数学，但是却有些稀奇古怪，因此很容易用拓扑学来迷惑那些不熟悉它的人．我们已经看到的一个例子是莫比乌斯带．用不同的方法应用拓扑学，可以得到许许多多令人惊奇的、出乎意料的效果，因此你可以到晚会或者其他聚会上去表演，让你的朋友们欣赏和惊奇．另外，拓扑学里面有许多有趣的问题和难题，很适于在聚会时让大家试试能不能解出来．这些正是下面要讲的内容．为什么不试一试呢？如果你需要帮助，你可以在这本小册子最后找到答案．

1. 结绳和拓扑学

研究一条绳子上打的结，是拓扑学的一种应用．如果一个结打得很松，那么就可以顺着绳子逐渐向绳子一头松开这个结．假设我们在一条绳子上打了两个结，如图 29．

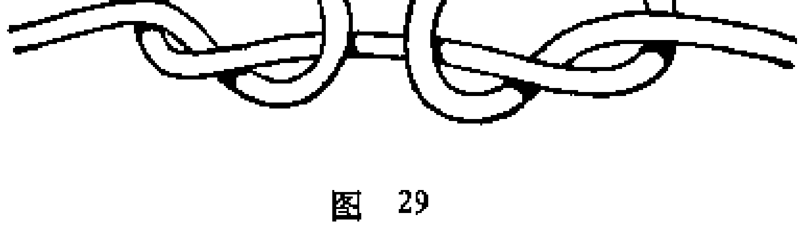


图 29

这种情况，我们可以把两个结各向绳子的一头松开.

这两个结的方向是相反的．但是把两个结放在一起是不可能解开的．事实上，把一个结从另一个结里面穿过到另一边去，剩下来仍然是原样的两个结．试验表明，对于两个结来说，确实是这种情况，但是没有一个人能够证明这一事实.

一种有名的假结叫做切法洛结，它是魔术师常用的一种结．这种结的打法是：先打成方形结（图 30a)，然后把一个头按照图 30b 箭头指的方向绕到方形结上．抓着两头一拉，结就被解开了.

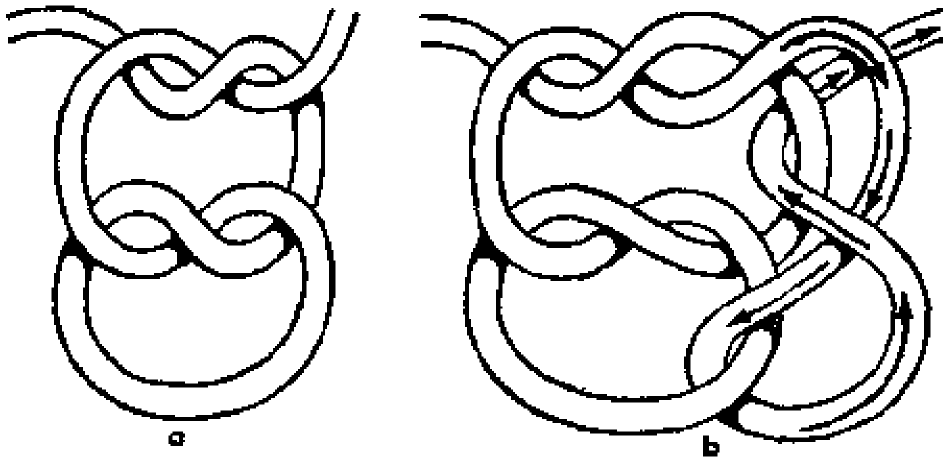


图 30

2. 纽孔挂物

在一支铅笔或者一根小棒子上用细绳子拴一个套（图 31a)．当然要使套比铅笔短一些．将铅笔穿过你朋友穿的上衣纽孔和绳子套(图 31b)，再将绳子套拉紧（图 31c)．然后请你的朋友把铅笔取下来，但是不能解开或剪断绳子套（当然更

不准剪开纽孔）．如果他没有看见你是怎样套上去的，要解下来还得费一番周折呢！

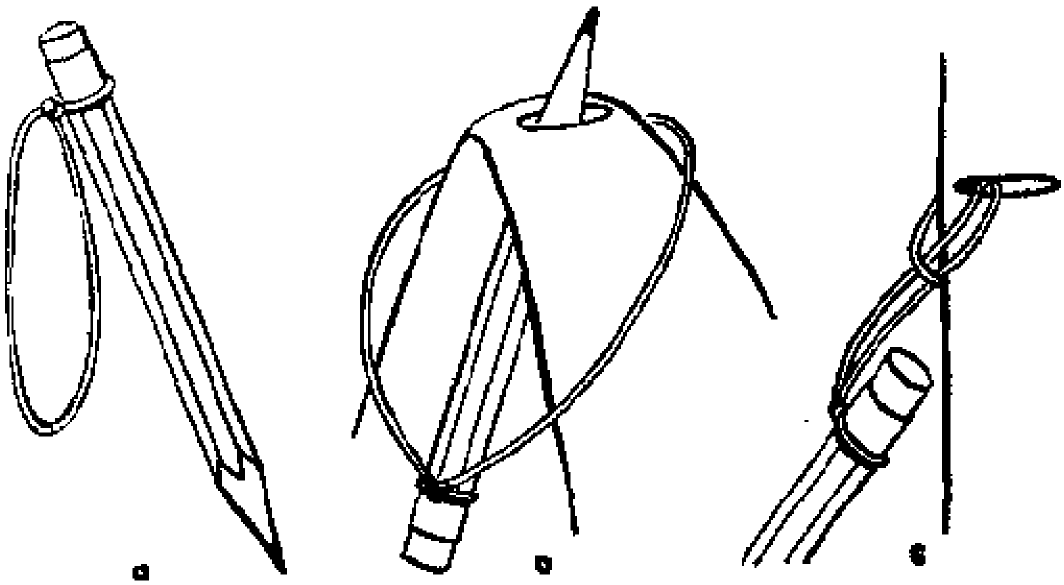


图 31

图 32 上的问题是这个难题的变种：用细绳子套到一把剪刀上，绳子两个头系上一粒大扣子．扣子比剪刀把开的孔还要大．问题是把扣子和细绳子一起从剪刀上解下来，既不准解开系扣子的结，也不准剪断绳子．

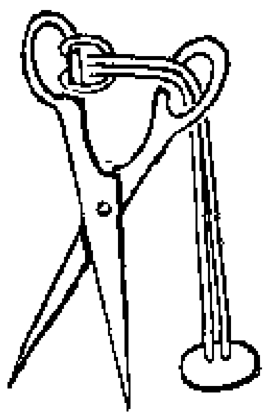


图 32

3. 海 滨 脱 衣

变这个戏法的目的是穿着上衣怎么脱掉里面的背心．穿一件背心和一件上衣．背心要大一些的，以便于表演． 上衣可以不扣扣子，但是不允许把手臂从袖子里拿出来．

4. 怎样把三个环连结在一起

下图中画了三个环，它们有一种很奇怪的拓扑关系． 取下任何一个环，其余两个马上也分开了．因此，每两个环彼此都没有连结起来，但是三个环却被连结在一起．

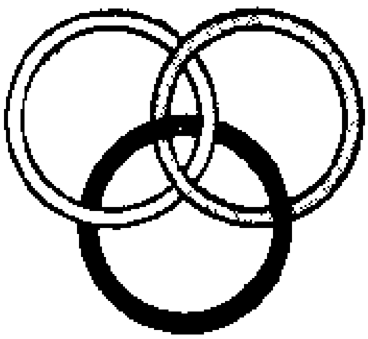


图 33

5. 两个人能分得开吗？

先在你两个手腕上系一根绳子，然后在你伙伴手腕上也系一根绳子，而且这根绳子要套在你手腕上的绳子里面（图34）．变这个戏法的目的是把你和你的伙伴分开，但是既不准

剪断绳子和解开结头，也不准把绳子从手腕上脱下来．能作得到吗？

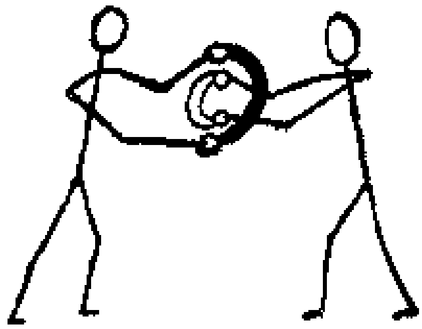


图 34

6. 纽扣和珠子

变这个戏法需要一张硬纸板，一根细绳子，两粒扣子，两个有孔的小珠．剪一块长方形硬纸板，宽约 1 英寸，长约 6 英寸．剪三个小孔，使它们的距离相等，如图 35．

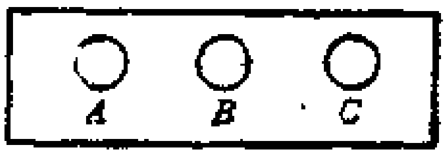


图 35

绳子上穿两个大的珠子．把绳子的一头穿过小孔 *A*，再在头上系一个比孔还大的纽扣．同样，把另一头穿过小孔 *C*，在头上也系一个纽扣，如图 36a．

然后将绳子中间抽个头穿过 *B*，如图 36b．象图 36c 那样，中间要结成一个套，只要将中间抽头由下往上穿过小孔 *A*，套过纽扣，用同样的方法穿过小孔 *C*．现在戏法已经准备

就绪，请一个人来试一试，看他能不能解开中间的套，使两个珠子碰到一起.

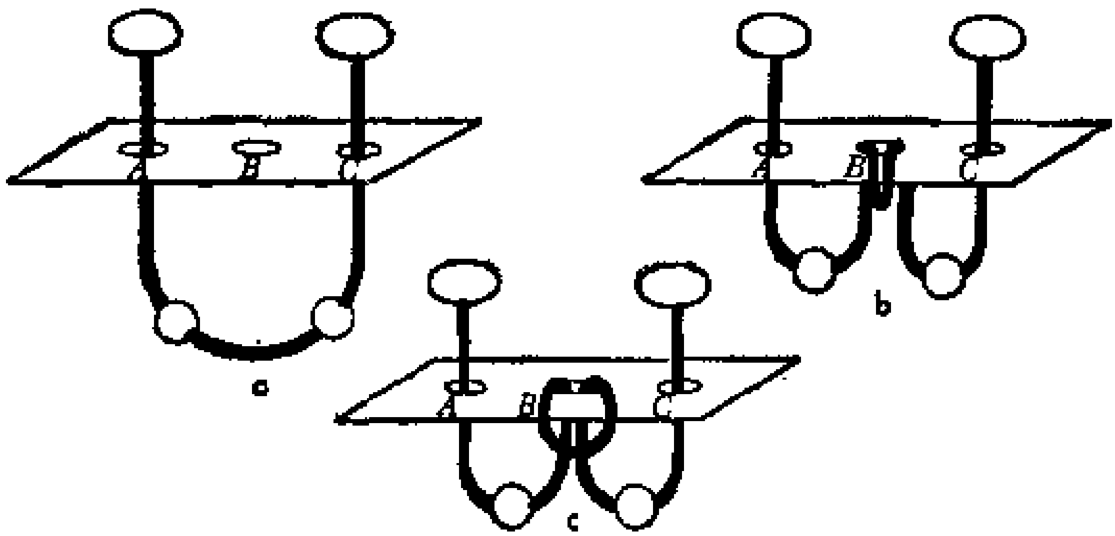


图 36

7. 瑞士学校问题

瑞士有四个学生，住在 A、B、C、D 四所房子里．他们都到一个学校上学，而且必须经过大门 A、B、C、D 才能进入学校．学生 A 住在房子 A 里面，从大门 A 进校；学生 B 从房子 B 出发经过大门 B，其余类推．如果四个学生都滑雪到学校去，怎样才能使他们滑雪的路线不相交？

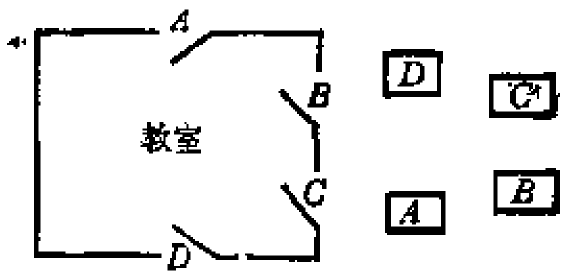


图 37

8. 怎样分农场?

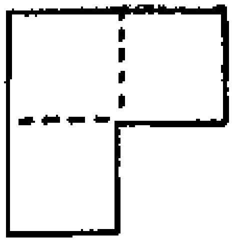


图 38

一个富有的农场主有四个儿子，它的农场有一块由三个正方形连成的地，如图38. 农场主临终时的遗嘱要求把农场分成四等份，每个儿子得到一份，还要求每一等份的形状和原来农场的形状一样. 怎样分这个农场呢?

9. 怎样摆硬币?

画一个 6×6 的方棋盘. 在棋盘上摆六个硬币，横行、直行、斜行都不多于一个. 每一个方格内也不能多于一个.

10. 马路清扫工的路线

一个清扫工要清扫图 39 中画出的每一条街道. 要把每一条街都扫到，有的地段就得经过二次. 要使走两次的地段

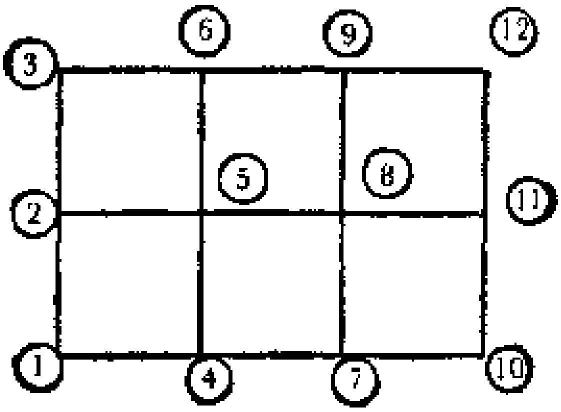


图 39

的数目最少，应当怎样规划清扫工作的路线呢？ 他可以从任何一个角上开始工作。

11. 怎样从硬纸片上解下带纽扣的绳子？

拿一张硬纸片，剪下一块长6英寸、宽3英寸。纸中心线左右半英寸处剪两条平行的缝，如图40。每条缝的长是3英寸。 在两条缝的上面半英寸处剪一个直径为3/4英寸的圆孔。

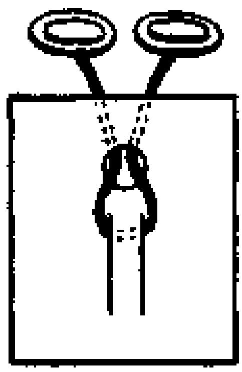


图 40

把一段长12英寸的细绳子从缝的背面穿过去，再从圆孔下面穿出去（图40），然后在绳子两头各系一个大纽扣。纽扣一定要相当大，不能从纸上3/4英寸直径的圆孔里穿过去。

现在你可以请你的一位朋友把绳子和纽扣从纸上解下来，既不准撕破纸，也不准取下任何一粒纽扣。如果你不告诉他怎么解，他很可能解不下来。

12. 怎样取下纸的长统靴？

做长统靴的游戏先要用硬纸片剪出三个图形。其中一个象一双长统靴，顶上是连着的，如图41a。另外两个的形状见图41b和c。

把剪好的三个图形装配的方法是：先把大的长方形纸片

对折(图 41b),再把小方块穿到一条边上(图 41d). 然后把长统靴挂到这条边上(图 41e). 将小方块向右移,一直越过这边的端点 A. 最后,把大长方形拉直,就装配成图 41f 的样子了.

要求你把长统靴拿下来,但是不准撕破任何一片纸.

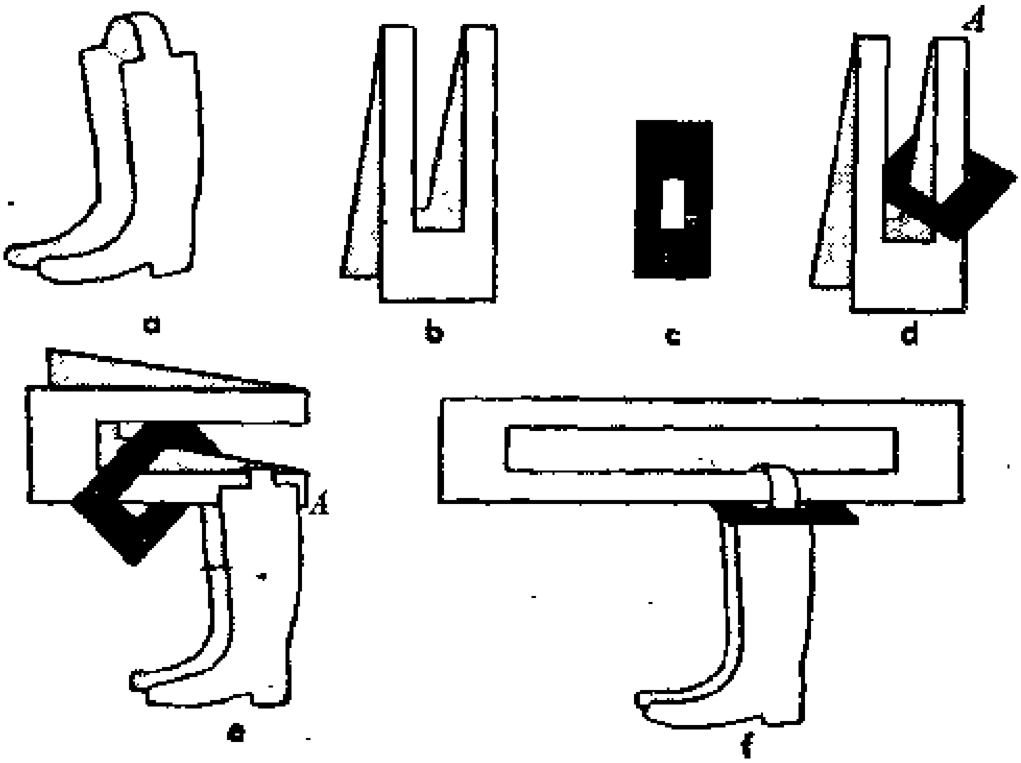
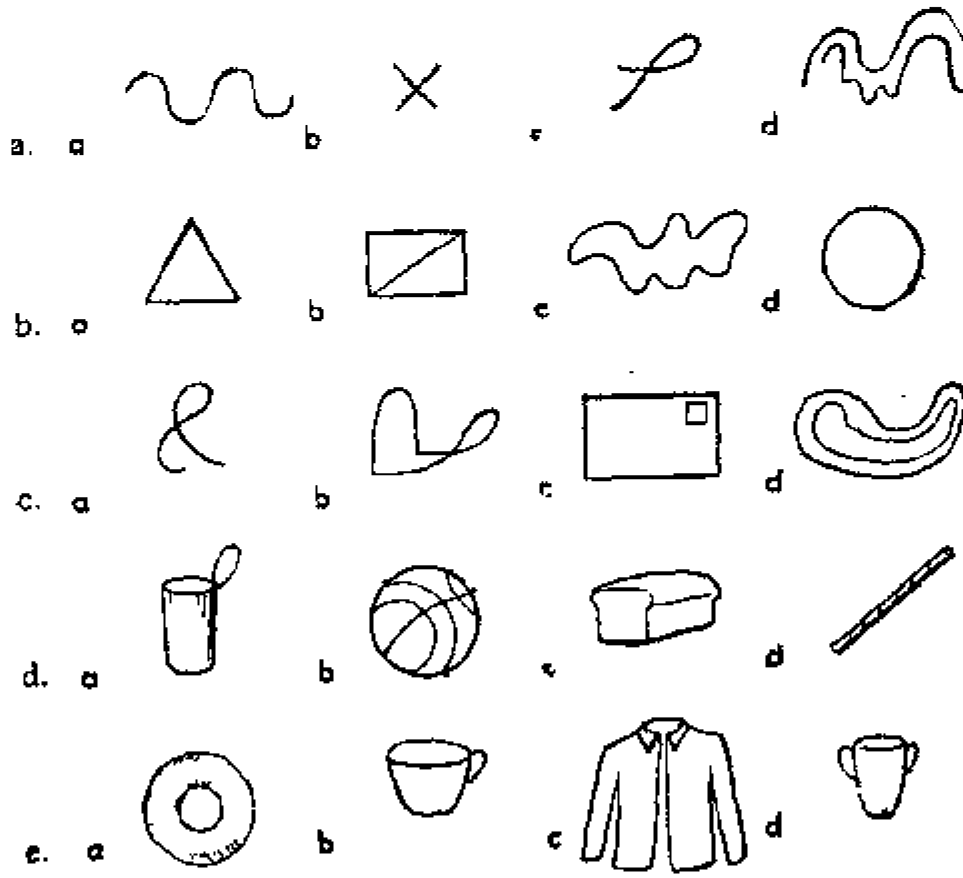


图 41

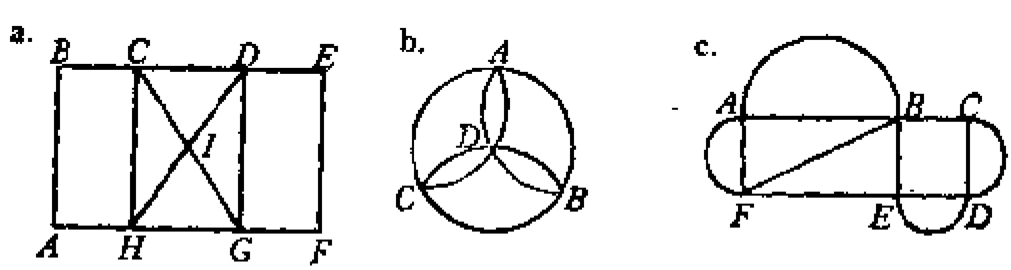
练习 9 拓扑学检查测验题

做这些测验题,可以检查一下你在本书中学过的概念还能记住哪些.

(1) 下面每一组有四个图形,其中哪一个和其余三个不属于同一类?



(2) 下面给出的几个网络，哪些能够一次走遍？



(3) 下面列出的几个量，哪些经过拓扑变换以后仍然不变？

a. 图形的区域数。

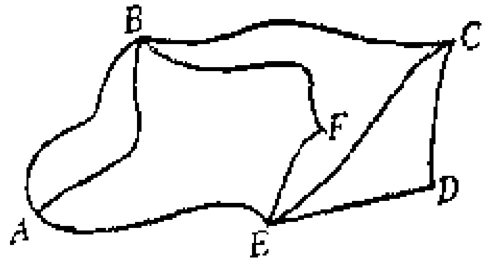
b. 一个网络中$(V+R-A)$的值。

c. 一条线的长度。

d. 连续性。

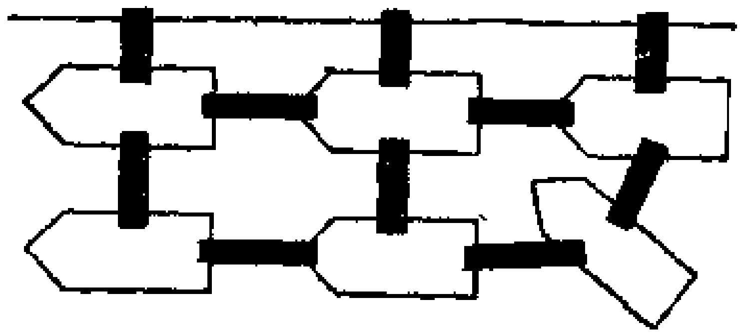
e. 图形的形状。

(4) 至少需要旅行几次才能走遍这个网络?

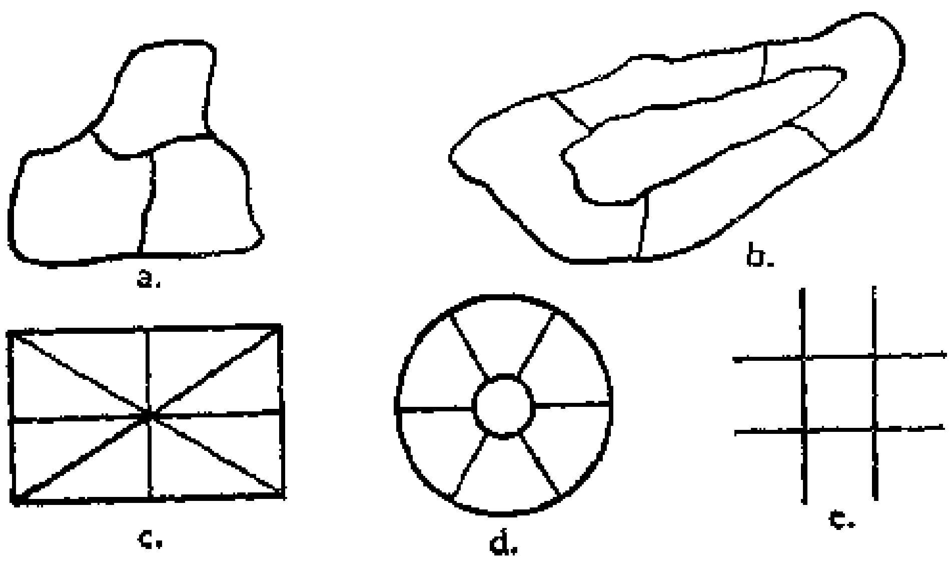


(5) 就上面的网络说出从哪些顶点出发可以使旅行次数最小。

(6) 下图表示的是船坞里几只船停放的情况。船和船之间搭了跳板。利用网络说明能不能一次走遍所有的跳板，但每一块跳板只能走一次。如果不能一次走遍，那么至少要几次呢?



(7) 就下列图形说明关于顶点、弧和区域的欧拉公式的正确性。



五、拓扑学的模型演示

除了这本小册子里讲到的模型、图画和变戏法以外，还有许多其他的模型演示拓扑学的概念．这些模型将使科学展览会增添不少兴致．下面就是几种值得介绍的模型．

（1）在几块橡皮膜上画同一个几何图形．用不同的方法绷紧橡皮，演示这个图形的变化情况．

（2）剪 12 根麦秸管（类似用来喝汽水的一种管子），每根长约 2 英寸．用塑料绳子穿过这些麦秸管，做成一个立方体．用这个立方体演示经过怎样变形和压平，就可以变成一个网络．

（3）在几个气球上画同样的网络或地图．把气球吹成不同的大小，演示这个网络或地图仍然是等价图形．

（4）把一块橡皮膜或者气球绷在一个几何体上面．演示几何体和球有相同的特性．

（5）用做模型的粘土制作不同物体的模型，演示拓扑曲面的不同类型．

（6）用橡皮做一个克来因瓶或者用纱线编一个．

（7）用加法器的纸带做一个大的莫比乌斯带．用不同的方法剪开纸带，演示可能得到的各种结果．

（8）画复杂地图的示意图，演示四色问题．

我们已经介绍了拓扑学的一些基本概念和有趣的应用．但是这门学科并不是仅仅讨论变戏法、测验人们智力的问题和使人着迷的难题．拓扑学的专门研究工作，通常是数学里最新成果的一部分，它包含的许多概念远远超出本书的范围．这些概念逐步扩充的方式，同中学几何里逐步扩充定理的方式是很相似的．今天，数学家正在将拓扑学的概念应用于许多实际问题，因此在我们这个复杂的空间时代，拓扑学已经成为一种很宝贵的工具．

练 习 答 案

练习 1

(1) a, c (2) a, b (3) a——2; b——3; c——0; d——5

练习 2

半圈数	面和棱数	剪开后的结果
0	2	2 个分开的环形带
1	1	1 个环形带，扭了 2 个半圈
1	1	2 个套着的环形带
2	2	2 个套着的环形带
2	2	2 个套着的环形带
3	1	1 个环形带，1 个结
3	1	2 个套着的环形带，1 个结

练习 3

图 形	偶顶点	奇顶点	能否一次走遍
1.	2	2	能
2.	0	6	不能
3.	4	0	能
4.	1	4	不能
5.	10	0	能
6.	9	4	不能
7.	4	8	不能

8.	10	0	能
9.	2	2	能
10.	8	0	能
11.	2	6	不能
12.	14	2	能

练习 4

(1) 不能　　(2) 不能

练习 5

	V	A	R
1.	2	1	1
2.	2	2	2
3.	2	3	3
4.	4	6	4
5.	5	8	5
6.	4	7	5

练习 6

(1) b.8　c.4　d. 北安普敦群

(2) 可以有许多不同的染色办法。

(4) 区域数：2，4，7，11，16

增加的区域数：2，3，4，5

六条线可分出：22 个区域

练习 7

(1) a——2；　b——3；　c——3；　d——0

(2) a. 单连通；b. 单连通；c. 双连通；d. 三连通；e. 双连通；

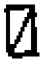
f. 简单曲面; g. 简单曲面

练习 8

	F	E	V	$V+F$	$E+2$
1.	4	6	4	8	8
2.	6	12	8	14	14
3.	8	12	6	14	14
4.	12	30	20	32	32
5.	20	30	12	32	32

练习 9

(1) a.  d. 

b.  e. 

c. 

(2) a, b, c

(3) a, b, c

(4) 一次

(5) 任何奇顶点

(6) 二次

(7)	V	A	R
	4	6	4
	8	12	6
	9	16	9
	12	18	8
	12	12	2

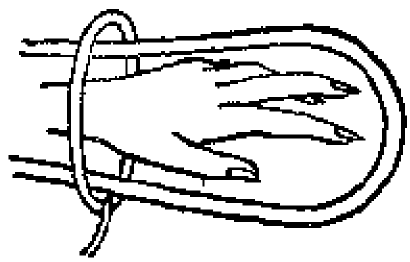
智力测验题解

41 页,海滨脱衣

你可以把左手和左臂穿进背心左臂孔内，然后移动背心左臂孔，依次套过上衣的左前襟、后襟、右前襟和右袖。最后顺着上衣右袖脱下背心，就把背心整个脱下来了。

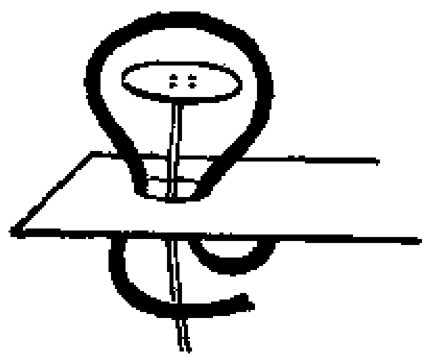
41 页，两个人能分得开吗?

把你手上的绳子折成圈从你的伙伴手腕上绳套下面穿过去，再套过他的手，两个人就分开了。



42 页，纽扣和珠子

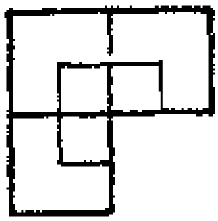
和上题解答一样，把中间的结套先后通过两边的孔，再套过纽扣。



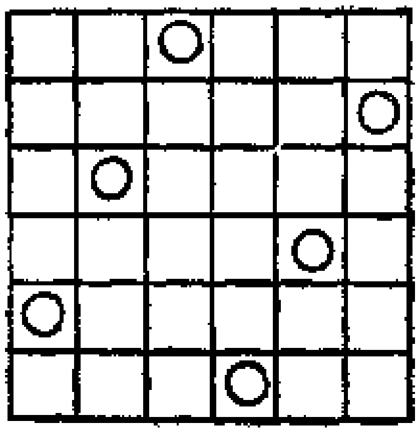
43 页，瑞士学校问题

按一个方向绕着四所房子走。

44 页，怎样分农场?



44 页，怎样摆硬币？

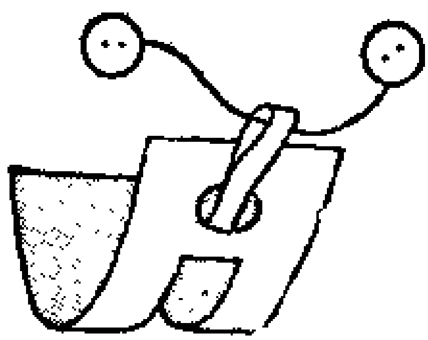


44 页，马路清扫工的路线

从任何一个奇顶点开始清扫，需要重复走三个地段。

45 页，怎样从硬纸片上解下带纽扣的绳子？

把硬纸片弯成下图的样子，把两缝中间的纸带从孔内由后向前穿过去。从纸带形成的套中间就可以穿过一粒纽扣，这样就把绳子和纽扣都拿下来了。



45 页，怎样取下纸的长统靴？

取下长统靴的步骤和装配的步骤相反。首先把大的长方形纸片对折，然后把小方块绕过点 A 移到图 41d 所示的位置。这样就可以把长统靴从大纸片挂着它的那边上取下来了。

[General Information]
书名=拓扑学——橡皮膜上的几何学
作者=（英）D．A．约翰逊　W．H．格伦著　刘远图译
页数=56
SS号=10653851
出版日期=1980年10月第1版