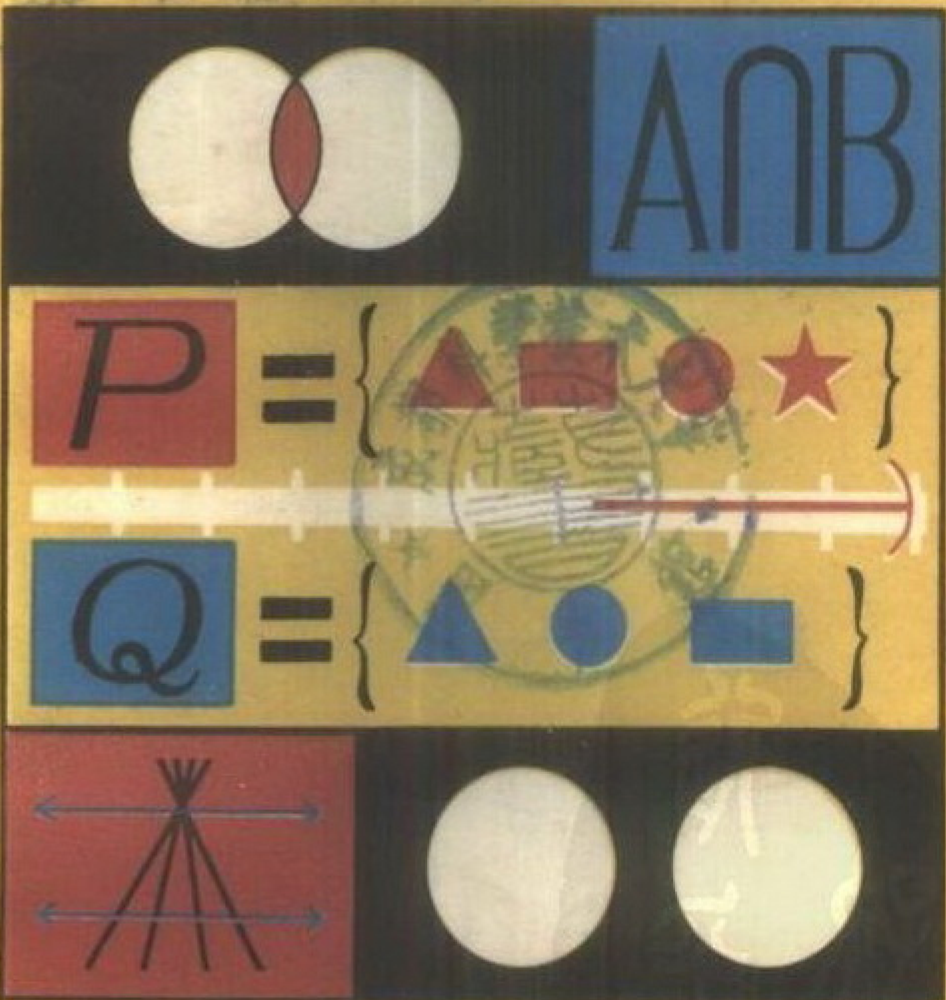
《自修数学》小丛书

集合、命题与运算

〔英〕D.A.约翰逊　W.H.格　伦著



科 学 出 版 社

《自修数学》小丛书

集合、命题与运算

〔英〕 D. A. 约翰逊
W. H. 格 伦 著

王善民 译

科 学 出 版 社

1 9 8 3

内 容 简 介

这本小册子是《自修数学》小丛书中的一本．书中以通俗易懂的语言和生动有趣的实例，介绍了有关集合论的基本概念、性质、运算法则及其应用．为便于自学，每节之后还穿插了有趣味的练习题（书末附有答案）．

本书可供中学生课外阅读，亦可供具有中等文化程度的青年、教师、干部等阅读．

Donovan A. Johnson William H. Glenn

SETS, SENTENCES, AND OPERATIONS

John Murray London, 1971

集合、命题与运算

〔英〕D. A. 约翰逊 W. H. 格 伦 著

王善民 译

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年4月第一版 开本：787×1092 1/32

1983年4月第一次印刷 印张：2 3/4

印数：0001—24,500 字数：49,000

统一书号：13031 2223

本社书号：3037·13—1

定价 0.32 元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书(Exploring Mathematics On Your Own)是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物．该丛书自1964年初版后，于1970年、1974年、1976年多次再版印刷．为开阔读者眼界、增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学

测量世界

数型

毕达哥拉斯定理

统计世界

集合、命题与运算

数学逻辑与推理

曲线

拓扑学——橡皮膜上的几何学

概率与机率

向量基本概念

有限数学系统

无限数

矩阵

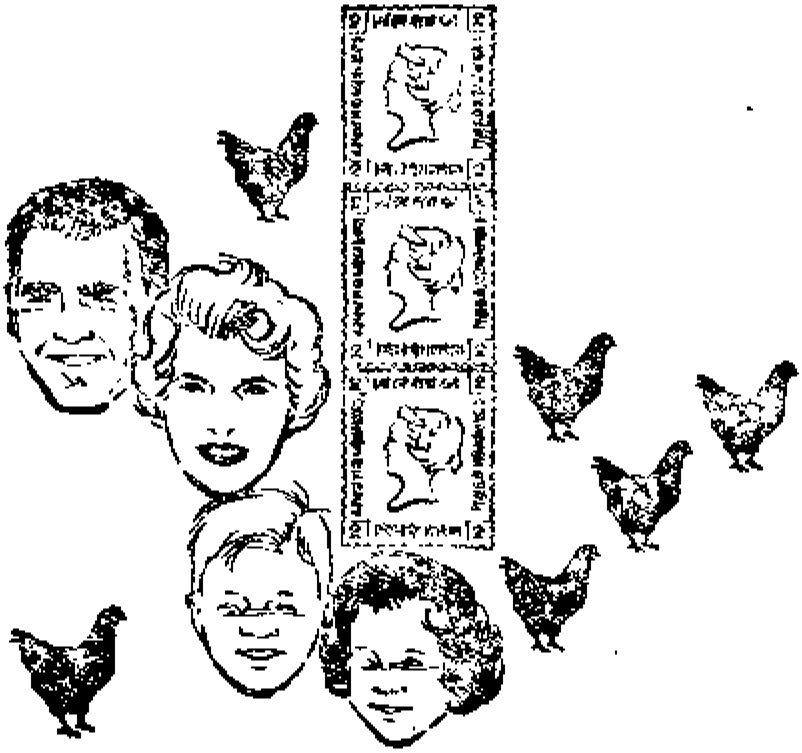
01

写在阅读之前

我们写这本介绍集合论的小册子，是为了让读者分享其他人在探索这个引人入胜的数学概念时所获得的乐趣．阅读数学可能像读一本惊险小说或侦探一个洞穴一样，也是一种猎奇．数学里面有很多出人意料的内容、令人困惑的问题、机智的诀窍和有趣的设想．希望读者能利用这本小册子进行一番数学探索．这样，你就会发现一些从来不知道的新概念，并将从中得到无穷的乐趣．

读这本小册子不同于读一般小说，开始时应读得慢一些，要养成手边经常预备纸和笔的习惯，在阅读中应当毫不迟疑地借助于纸和笔来澄清一些概念．初读时，如果对某个句子和某个段落不太理解，不要着急，要有耐心．只要你勤做习题，多画画图，并且完成作业，那么，你就会较容易地理解本书中的思路了．

目　　录



一、数 学 新 貌

1. 集合和新的数学

数学是一门古老的科学. 很可能在几千年以前，古代人为了知道家畜有多少，学会了计数的方法. 从那时起，便开始有了数学. 过了若干世纪，数学的各种有助于人们的概念也有了发展，如度量衡的使用，对各种几何图形的了解、数的逻辑的知识获得等等. 数学中所有这些概念，以及许多其它概念，都是由于人们生活需要才不断产生和发展起来的. 随着时间的推移，很多新生的数学思想又不断丰富着数学的宝藏，其中最新颖、最激动人心的一个概念，就是对集合论的研究.

集是怎么回事呢？ 简单说来，一个集就是一群(或一类)事物．把事物分类，对任何人来说，都不是一件新鲜的事情．我们常说“一套书”、“一套邮票”、“一组习题”等等．由于事物本身总是有共同的特点，因此往往可以进行分类． 例如：一套书，可能是百科全书；一套邮票，可能是指一个国家发行的邮票；一组习题，可能是同一种方程的问题等等．我们在生活中，有时也用到其它的词汇来表明集的概念，如：群、套、队、部、类、班、组、族等等，甚至你自己就是这样一些集内的一个成员，如：你的家庭，你上学的那个班，你参加的校内活动小组等等．

数学家常把这些集体称为集合，或者简称为集． 集合可以是一类事物、一组数字、一群人、一些图形、或是一类概念．构成一个集的事情或数字，均属于这个集合． 属于集的各个个体(事物)称做集合的*元素*．

集的数学理论是在 19 世纪末期才开始的． 当时一个名叫格奥尔格·康托（Georg Cantor）的德国数学家试图解一个涉及到无限量研究的数学难题．其中包括这样一些问题：“整数究竟有多少？”“在一个圆周上包含有多少个点？”“一小时里有多少刹那的时光度过？”“在 1—2 之间的数，比一根线上的点还多吗？”康托解决了以上的问题．他的工作标志着“集合”这个概念已在数学中诞生了．

正如一个新的概念在诞生时常常会碰到的情况一样，康托最初提出集合概念时，大家都认为难以接受，因此他曾多年受到人们的嘲笑．直到 1920 年，他的这种新想法才得到一

些数学家的承认．现在，他的有关集的理论已应用到从代数到概率的很多数学分支学科中来了．

集合论这门科学告诉我们：怎样合并一些集，怎样比较各个集，从而确定它们之间的关系．在有些数学运算中，如解方程、绘图象、研究概率、描绘几何图形等等，用集的语言和概念来处理，就会变得简单得多．特别令人兴奋的是：集的理论不但常被用来解决问题、难题，而且还能揭示电子计算机的秘密．

在研究集合时，首先要学会识别一个集的各个元素，下面的练习会帮助读者来识别集的元素．

练习1 集的探索

1．写出下列各集所有的元素：

a．英文元音字母的集；

b．小于10的奇数的集；

c．英语月份名称中用字母M开始的集；

d．欧洲的国家的名称中（指英语）用字母S开始的集．

2．在自然数中小于20的质数（或素数）集由哪些元素组成（只能被它本身和1整除的自然数称做质数）？

3．下面的哪些牌号的汽车属于英国汽车制造公司产品的集？福特，奥斯汀，M．G．牌跑车，沃尔斯利，希尔曼，莫里斯．

4．a．组成英文字母的集有多少元素？

b．英文字母中元音字母的集有多少元素？

5．a．写出小于99而能被9整除的自然数集的元素，如9、18、27等；

b．写出小于99而数字的和是9的自然数集的元素；

c. 上面 a 和 b 的集有相同的元素吗?

2. 集的符号和语言

请看 1 至 9 的奇数集，这个集是由元素 1、3、5、7、9 组成的，数学家们通常把这样的说法用符号来表示，记作：$\{1, 3, 5, 7, 9\}$，这是"从 1 至 9 的奇数集"的另一种说法．我们通常用方括号[ ]或花括号{ }来表示集的元素的组成，在本书中我们采用花括号{ }．我们一般都用英文大写字母来表示一个集，如 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$，这样的记法叫做集的元素列表法．

应该记住：我们不仅能把一个普通的说法记为列表法，也能把一个列表法写成普通的说法，例如：列表法 $\{a, e, i, o, u\}$ 用文字来表示，就是"英文元音字母组成的集．"当我们用英文大写字母表示集时，如 $X = \{a, e, i, o, u,\}$，我们就把它读为："X 是以 a, e, i, o, u 为元素的集"，或"X 是英文元音字母的集"．当我们用这种方法来描述集的时候，就能明显看出：哪些元素属于这个集，哪些元素不属于这个集．

练习2 集的元素

1. 写出以下各集的元素的表达式：

a. 英国本土各郡的名称中，有哪些郡是用 S 字母开始的?

b. 写出罗马数码的集；

c. 写出自 1900 年来英国首相姓氏第一字用 B 开始的集；

d. 0至10之间所有整数的平方数的集。

2. 用语言说明下面的集：

a. $K = \{5, 10, 15, 20, 25\}$；

b. $M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$；

c. $R = \{a, b, c, d, e\}$；

d. $Y =$ {Tuesday（星期二），Thursday（星期四）}。

3. 回答下面的问题：

a. "便士"是英国币制的集的元素吗？

b. 鲸鱼是鱼类的集的元素吗？

c. 肉是含有蛋白质食品的集的元素吗？

d. 64是整数平方数的集的元素吗？

3. 集 的 比 较

在算术中我们常比较一些数，找出其中哪一个数较大，以及大多少. 当我们写数学式子 $2+5=7$ 或 $2x+7=9$ 时，我们注意到的是，这些式子两边的数量是相等的. 同样，我们在解决集的问题时，也对两个集进行比较. 在研究概率时，我们需要弄清楚在什么条件下几个集相等，或一个集有多少个元素. 用推理法来解决一些问题时，我们也需要知道某个集的元素是否也是另一个集的元素. 在科学研究中，科学家也需要知道在一些数据中，一个集的元素与另一个集的元素存在着怎样的关系.

把集进行比较的方法之一，就是把一个集的元素与另一个集的元素进行比较. 集 $\{a, b, c\}$ 与集 $\{x, y, z\}$ 不同，因

为这两个集的元素不同．又如：$P=\{a,b,c\}$ 与 $Q=\{c,a,b\}$ 是相等的，这是因为这两个集有着相同的元素，这时我们就记作 $P=Q$．至于元素排列的次序是否一样，那倒是没有关系的．只要两个集具有相同元素，那么，这两个集就是相等的．

用列表法来鉴定两个集是否相等，这是容易作的．但是要用语言来叙述集并判断两集是否相等，就并不总是那么容易的事了．

练习3　找出等集

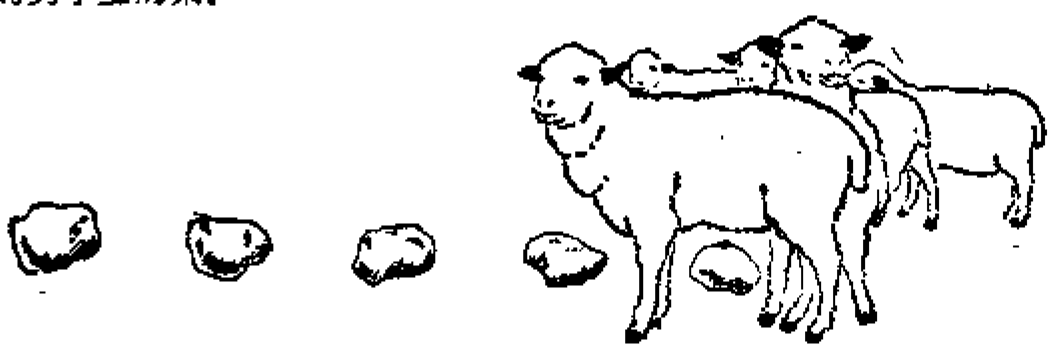
比较下列各题的两个集，判断它们是否相等：

1．$\{5, 10, 15, 20, 25\}$ 与 $\{5, 15, 25, 10, 20\}$．

2．$R=\{a, h, m, t\}$ 与 $T=\{m, a, t, h\}$．

3．$\{1, 5, 7, 9\}$ 与小于 10 的奇数集．

4．一个班里像你这样高大而又具蓝眼珠学生的集与像你这样高大的男学生的集．



4．“一对一”匹配

在很早以前，牧童就会用一个小石子来代表一只羊：小

石子有多少，羊就有多少．用一个小石子代表一只羊，这就表现出羊与小石子之间有一个对一个的关系．这实际上，就是两个集之间的比较：即羊的集与小石子的集所进行的比较．

要对任何两个集进行比较，只要用一个集的元素与另一个集的元素相匹配就行了．例如：$A=\{a,b,c\}$和$B=\{x,y,z\}$不相等，这是因为A的元素与B的元素不一样．但是A与B却有着相等个数的元素，所以A与B能照下列的方式相匹配：

$$\begin{array}{ccc}\{a, & b, & c\}\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\ \{x, & y, & z\}\end{array}$$

两集的元素这样地一个对一个地匹配或配对，就给我们提出了一个数学上的常见词汇，那就是"一一对应"．

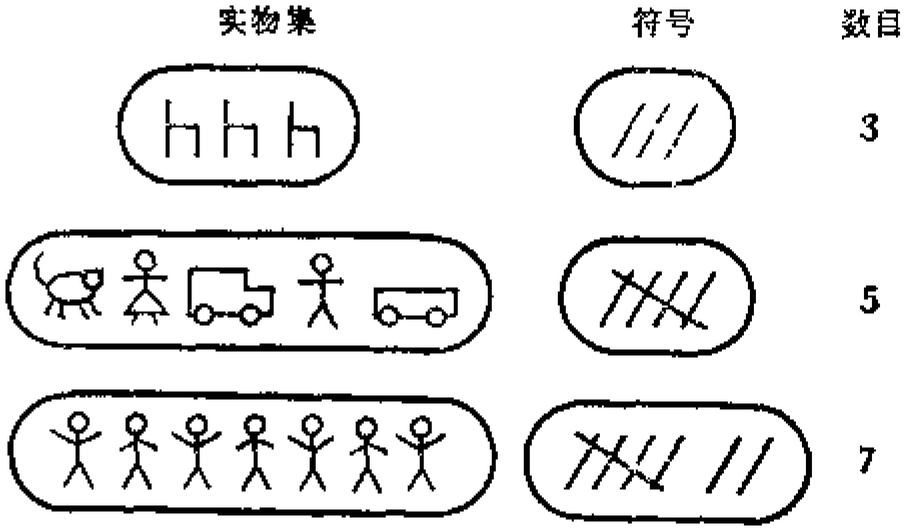


图 1

从图1我们可以看到实物的集和表示实物的符号是怎样

通过数目的联系来建立了一一对应的.

数字是数的一种符号，也是“数的名称”. 有时我们用一个数目来描述一个集，例如： 所有具有 5 的记号(或 5 的单位)一一对应的集合，都可以用数目“ 5 ”来描述. 在通常情况下，“数”表示数量，同时也表示这个数量的名称.

每当两个集之间有一一对应的关系，就说这两个集是等势或者等价的. 例如：$A=\{$汤姆，比尔，马克$\}$ 与 $B=\{$自行车，冰鞋，足球$\}$ 是等势的，但不是相等的，因为这两个集的元素不同. 这两个集的元素相匹配或配对时，就会得到如下的一一对应：

$A=\{$	汤姆	比尔	马克 $\}$
$B=\{$	自行车	冰鞋	足球 $\}$

我们把这一等势记做 $A \longleftrightarrow B$，读做“集 A 与集 B 等势(或等价)”. 但是要记住：等势和相等的意义不同，不可混淆.

有时，我们也说到一对二的对应关系. 例如：我们说一间屋子里的人的集与这些人各有两只手的集，这就是一对二的对应关系.

判断若干个集是否等势，最简单的办法就是看每个集内元素的个数是否相等. 集 A 的元素个数称做集 A 的基数(或称做势)，记做 $n(A)$. 例如：英文元音字母的集 $A=\{a, e, i, o, u\}$ 的基数是 5，记做 $n(A)=5$. 另有一个集 $B=\{$汤姆，约翰，比尔，戴维，马克$\}$的基数也是5，记做 $n(B)=5$. 既

然 $n(A)=5$，$n(B)=5$，那么，A 与 B 两个集的元素之间就存在着一一对应，所以我们记做 $A\longleftrightarrow B$， 或者说 A 与 B 等势.那么，我们也可以这样提出： B 与 A 等势吗？ 同样地 B 与 A 的元素之间也有一一对应，所以也可以反过来记做 $B\longleftrightarrow A$. 现在你就会明白为什么等势符号“$\longleftrightarrow$”的箭头总是指向两个相反的方向的.

集合的问题常常涉及自然数，自然数就是大于零的正整数，如 1，7，95，368.

练习 4　把集进行比较

1.下面哪些集是相等的?

a. $\{a, p, r, t\}$ 与 $\{r, a, p, t\}$；

b. $\{1, 2, 3, 4\}$ 与 $\{2, 4, 6, 8\}$；

c. 小于 10 的质数集与 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$；

d. {肯特 (Kent)[1]，苏塞克斯 (Sussex)，汉普郡 (Hampshire)，多塞特郡 (Dorset)，德文 (Devon)，康沃尔 (Cornwall)} 与英国南部沿海各郡的集.

2.下面的哪几对集有一一对应的关系?

a. $\{a, b, c, d, e\}$ 与 $\{3, 7, 4, 8, 5\}$；

b. 小于 20 的奇数集与小于 20 的质数集；

c. {吉姆，戴夫，迈克}与{玛丽，简，珍妮特，莫丽}；

d. 小于20的偶自然数集与小于 20 的奇自然数集.

3.下面各集的势是多少?

---

1) 肯特，…… 等都是英国南部沿海省份的名称；

a. $A=$ {一只布鞋、一只袜子、一只靴子、一只套鞋、一只拖鞋};

b. 美国所属各州的集;

c. 英国所属各郡的集;

d. 能整除 24 的自然数的集.

4.下面哪些集是等势的?

a. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 与 $\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$;

b. {5, a, ∞, △, ⊔⊓, ⋸} 与 $\{T, R, P, B, C, M\}$;

c. 美国所属各州的集与英国所属各郡的集;

d. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$ 与 $\left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}\right\}$.

5.求下面各集的势:

a. n{英语字母的集};

b. n{小于 50 的偶自然数的集};

c. n{30 至 40 之间的质数的集};

d. n{10 进位制的阿拉伯数字符号的集}.

5. 有限集、无限集和空集

有些集的元素很多，要把这些元素都列举出来，往往是一件非常麻烦的事．例如：要你列举你所在的城市的居民的集，或者小于 1000 的自然数的集． 这时，我们用这样一个“…”省略符号来表示一些省略掉的但本应当列举出来的元素，如下式:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 998, 999\}.$$

还有些集的元素数不完，例如： 自然数集的元素就是数

不完的．这时，我们说这个集有无限多个元素，并记为 $N=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$．上面的例子如用语言来表示，那便是：自然数集是无限集．如果一个集合不是无限的，我们就能数完它的元素，这样的集称为有限集．无限集的势大于任何有限集的势．这里可以举出无限集的几个例子：一根线上的点的集，以分钟为单位表示未来时间的集，质数的集，偶数的集等等，这些集的元素都是数不完的．

我们试来比较两个无限集的元素．设 $N=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$ 为一切自然数的集，$E=\{2,4,6,8,10,\cdots\}$ 为一切偶自然数的集．在比较这两个集的时候，会出现什么情况呢？请看下面的一一对应关系：

$$\begin{array}{rcccccc}
N=\{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\}, \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
E=\{ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & \cdots\}.
\end{array}$$

我们看到了任何一个自然数都能与一个偶自然数对应．这表明偶自然数竟然会与自然数同样的多！这是惊人的，但也是容易理解的，因为自然数集的每个元素用 2 乘后，便成了偶数集．

有人曾经提出这样的问题：偶自然数既然包含在自然数之中，那末，偶自然数集的元素怎么会与自然数集的元素一样多呢？多年以来，这个问题曾使世界上的大数学家们大伤脑筋，但是，就是前面提到过的德国大数学家格奥尔格·康托却解决了这一难题．康托在他写的书里提出的无限集的概念成为他的集合理论的基础．康托证明无限集的一个显著特征是：

无限集自身可与它的一部分成为一一对应关系．康托认为偶数集与自然数集的元素的个数是同样的多，尽管他的这个结论起初是难于接受的，但是它的集的概念证明是符合逻辑的．

另外，还有一种集与无限集恰好相反，这叫做空集(或称做零集)．因为这种集不包含任何元素．例如：什么偶数可以整除 13 呢？没有！所以能整除 13 的偶数集是一个空集．

空集与数系中的“0”相似，一般用希腊字母 ϕ (读做“斐”)来表示，也可以用花括弧{ }来表示．还可以举出一些空集的例子，如：活到 300 岁以上的人的集，有 5 条边的长方形的集，20 至 30 之间偶、质数的集．

练习 5　无限集与空集

1. 下面哪些是无限集？

a. 全世界的沙粒的集；

b. 全世界人口数的集；

c. 全世界原子的集；

d. 能被 13 整除的自然数的集．

2. 下面哪些集一一对应？

a. $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ 与 $\{5, 10, 15, 20, \cdots\}$；

b. 自然数的集与自然数的平方数的集；

c. 英语单词的集与 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$；

d. 5 的倍数的集与 1,000,000 的倍数的集．

3. 下面哪些是空集？

a. 非英国人出任英国首相的集；

b. 身高 15 英尺的人的集；

c. 偶质数的集；

d. 奇数的平方为偶数的集.

4. 试举出一些空集的例子.

6. 集 内 的 集

上星期五高二年级举办了一个晚会，吉尔在会上说："简和鲁思穿上了美丽的蓝色时装；詹姆斯和约翰迟到；四个人名前面有 D 字开始的——唐 (Don)，丹 (Dan)， 迪克 (Dick) 和戴夫 (Dave) 获得了四重唱的优胜奖".

吉尔所说的各类不同的学生，就是高二年级学生组成的不同的集，在这些集中，如简和鲁思，就是高二年级学生集的一个子集. 这个子集的元素，既是高二年级学生集的元素，又是穿着美丽的蓝色时装的这个子集的元素。与此相似，詹姆斯和约翰都是姗姗来迟的学生子集的元素；唐、丹、迪克和戴夫都是获得四重唱优胜奖的学生子集的元素，但他们同时也都是高二年级学生集的元素.

再举一个例子：在集 $K=\{a, b, c, d, e\}$ 中，如果我们只考虑两个元素 a 和 e，那末，把 a 和 e 两个元素组成一个集，

我们就可叫这个集为K的一个子集． 这时我们可以这样说，a和e不仅是K的元素，也是这个子集的元素，这样每个子集的元素也是全集的元素．

我们再看另一个例子：参加数学小组学生的集是{约翰，苏珊，卡罗尔，拉尔夫，戴维}，其中男学生的集是{约翰，拉尔夫，戴维}，而这个集却是数学小组学生的集的一个子集；当然，还可以按照其它条件组成不同的子集．如：{苏姗，卡罗尔}与{约翰，苏姗，戴维}等．

有时我们要知道一个给定的集能组成多少个子集．例如：集{约翰，拉尔夫，戴维}能组成多少个子集呢？

答案如下：

A ＝{约翰，拉尔夫，戴维}，　　E ＝{约翰}，

B ＝{约翰，拉尔夫}，　　F ＝{拉尔夫}，

C ＝{约翰，戴维}，　　G ＝{戴维}，

D ＝{拉尔夫，戴维}，　　H ＝{　　}．

读者也许会因上面出现了只有一个元素或者没有元素的子集而感到奇怪吧！其实，在集合论里，对于每个子集有多少个元素，当我们又不加以限定的时候，上面的情况都可能存在．还必须注意：原集本身也是它的一个子集．每个子集的每个元素都是原集的元素． 所以，当我们问原集能有多少个子集的时候，空集和原集也必须计算在内．

由一个原集的所有的子集组成的集，叫做原集的幂集[1]．

---

1) 例如：若原集 A＝{约翰，拉尔夫，戴维}，则A的幂集就是 {A, B, C, D, E, F, G, H}．——校者注

幂集的概念在概率中常常应用，因为往往能从子集的个数，知道各种可能发生的情况会有多少.

练习6 关于子集

1. 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$，试回答下列问题：

a. 集 A 中质数的子集是什么？

b. 集 A 中能被 3 整除的数的子集是什么？

c. 集 A 中能被 1 整除的数的子集是什么？

d. 集 A 中能被 2 整除的数的子集是什么？

2. 写出下面的集的任意一个子集：

a. $\{w, x, y, z\}$；

b. {福特，沃克斯霍尔，沃尔斯利，赖利}（其中均是汽车牌名）；

c. 一年内假日的集；

d. 四边几何图形的集.

3. 写出下面各集的所有子集：

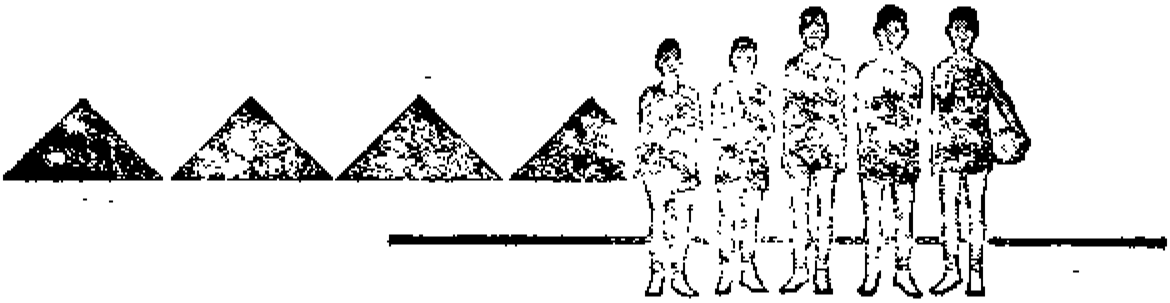
a. $\{a, b, c\}$； b. $\{7, 11\}$； c. {保吉，苏娜，凯}； d. $\{p, q, r, s\}$.

4. 把子集的数目填入下表的空白之内：

集	原集元素的数目	子集的数目
$\{a\}$	1	
$\{a, b\}$	2	
$\{a, b, c\}$	3	
$\{a, b, c, d\}$	4	

5. a. 假如在上述第四题中一个集有 5 个元素，那末，这个集有多少个子集？

b. 如果一个集有 n 个元素，你能写出计算子集数目 P 的公式吗？



7. 全　　集

当我们谈论集的时候，总是指那些具有共同特征的事物的集合．例如，我们说：(a) 偶数集，(b) 两米高的蓝球运动员的集，(c) 三角形的集． 显然，这些集合的特征是很清楚的：(a) 能被 2 整除的数，(b) 身高 2 米的篮球运动员，(c) 用三条边做成的几何图形．

以上各个集又都可以看作是某些更大的集的子集，这些更大的集就叫做全集．例如，把自然数看作是全集，则偶数集便是这个全集的一个子集，把篮球运动员的集看作是全集，则 2 米高的篮球运动员的集，就是这个全集的一个子集；把几何图形的集看作是全集，那么，三角形的集就是这个全集的一个子集．

除了特别指明以哪一个集合为全集的情况以外，一般说来，全集不是完全确定的．譬如我们说，汽车的集的元素是所有小型的莫里斯牌的汽车，那末，它的全集可能是指英国汽车公司生产的所有的各种牌号的汽车，也可能是指所有的英国汽车，也可能是指所有的廉价汽车，也可能是指世界上

所有的汽车。

我们一般用大写字母 U 来表示全集。对于数的集来说，如果没有指明它的全集是什么，一般都认为它的全集就是所有实数的集，记做 $U=\{$全部实数$\}$，这个集包括了所有的正整数和负整数、分数和无理数(无理数是指不能用分数表示的数，如 $\sqrt{2}$)。

练习 7　全集的问题

1. 下面各集的全集是什么？

a. 英国剑桥大学读物理学科的学生的集；

b. 福特牌汽车的集；

c. 开士米毛线衣的集；

d. 10 到 20 的整数的集。

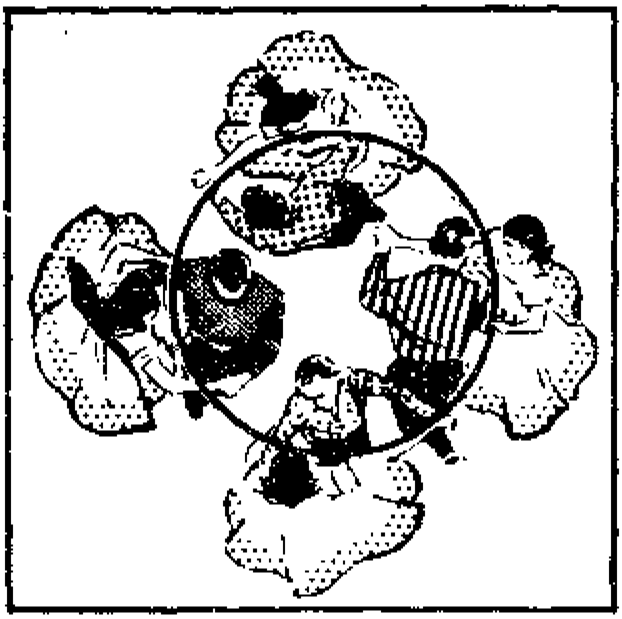
2. 举出下面各个全集的一个子集：

a. $U=$ 学校里学生的集；

b. $U=$ 大于 3 而小于 30 的整数集；

c. $U=$ 四边形图形的集；

d. $U=$ 图书馆里的书的集。



二、怎样用集和图来解决问题

1. 集的图解法

有句古话说："一图抵千字"，这句话是很有道理的. 在解决数学问题时，我们常常需要求出由数值、物体、或事件构成的集之间的关系. 要正确做到这一点，最好的一个办法就是利用图解法.

数学家们常用矩形来表示全集. 全集的所有的元素，都可以看作是这个矩形线上和矩形内的点. 例如：U表示克劳峡谷中所有居民的集，如图 2 所示.

全集中的一个子集常常用一个圆来表示，如图 3. 圆 A 表

图 2

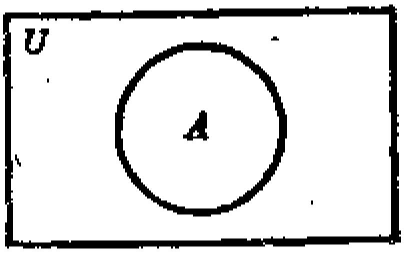


图 3

示克劳峡谷所有男人的集.

在图 3 中，子集 A 里还能用虚线画出另一个圆表示子集的子集 B，用来表示五十岁以上的男人的集，那么集 A 与集 B 的关系为图 4 所示.

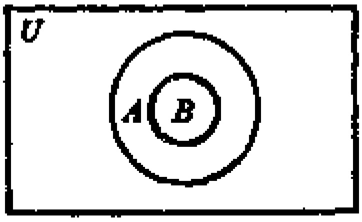


图 4

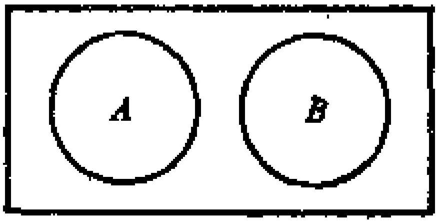


图 5

以上用来说明各个集之间的关系的图叫做文氏(Venn)图(也有译作费恩图的——译注).

下面举出两个图之间可能有的关系，这也就是两集之间可能有的关系.

(1) 两圆彼此分离，如图 5.

在图 5 里，A 和 B 不相交，即集 A 与集 B 彼此独立分离，没有共同的元素．这时，我们说集 A 与集 B 分离，或者说是不相交的.

分离的集的一个例子如：

X — 班里男孩子的集， Y — 班里女孩子的集.

另一个例子是：

A = 奇数的集，　　　　B = 偶数的集.

(2) 两圆相交，如图 6.

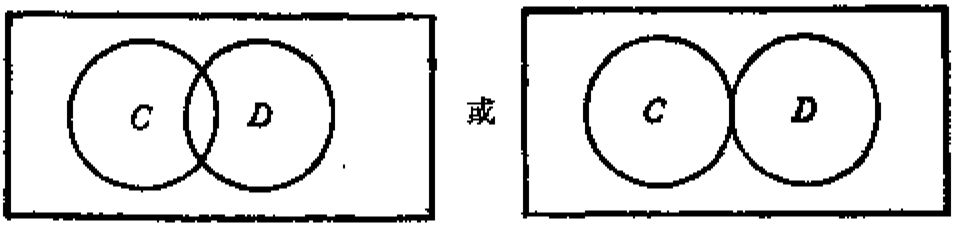


图 6

在图 6 里，我们称集 C 与集 D 相交. 两个集相交说明这两个集具有某些共同的元素.

交集的例子，如：

C = 某校六年级学生的集，

D = 某校科技小组的集.

在 C 和 D 相交的时候，我们就可以知道，该校六年级至少有一个学生是科技小组的成员. 我们也知道：该科技小组的成员还包括其它年级的学生.

(3) 两个圆完全重合，如图 7.

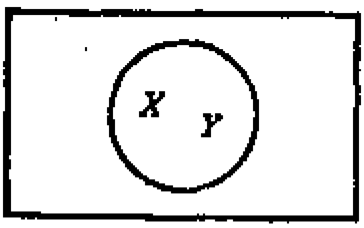


图 7

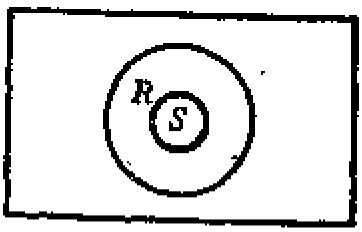


图 8

图 7 说明这两个圆所表示的两个集具有完全相同的元素. 我们已经知道，具有相同元素的集是全等的，或相等的，

这样的两集关系记为 $X=Y$.

如果 X = 小于 20 的偶自然数的集，

Y = 小于 20 的并能用 2 整除的自然数的集.

即 $X=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,\}$,

$Y=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,\}$.

那么，　$X=Y$.

(4) 一圆在另一圆之内，如图 8.

图 8 说明集 S 所有的元素同时也是集 R 的元素. 换句话说，S 是 R 的子集[1]. 如果 R 表示英文字母的集，S 表示英文字母中元音字母的集，那么，R 和 S 的关系就如图 8 所示的那样. 当 S 的元素比 R 的元素为少时，我们就说 S 是 R 的真子集，表示这种关系的式子是：$S\subset R$，读做"S 包含于 R 之中"，或"S 是 R 的子集"[1].

两个以上的集的关系仍然能用图来表示. 请看下面是怎样用图来表示三个集之间的关系的：

设 A = 城里所有孩子的集，

B = 你校所有孩子的集，

C = 你们数学小组里所有孩子的集.

那么，这三个集的关系就如图 9 所示.

我们还可以举出三个集的另一种关系.

设 X = 某校女学生的集，

Y = 某校名叫玛丽的女学生的集，

---

1) S 是 R 的子集通常记为 $S\subseteq R$ ——校者注

Z = 某校 15 岁的女学生的集.

那么这三个集的关系可以用图 10 来表示.

图 10 说明,某校有些女学生名叫玛丽,有些女学生是 15 岁;有些女学生名叫玛丽,年龄又是 15 岁,图 10 中的阴影部分就是属于这一类.

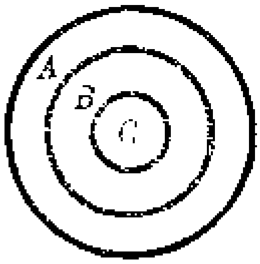


图 9

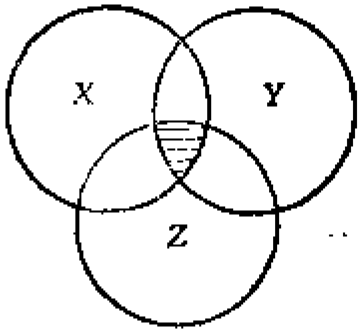


图 10

练习 8 集的图解

1. 用文氏图表示下列两个集的关系:

a. 英国汽车公司的集;奥斯汀牌汽车(英国产品)的集;

b. 奥斯汀牌汽车的集;福特牌汽车(英国产品)的集;

c. 福特牌汽车的集; 1960 年制造的汽车的集;

d. 学校里足球队队员的集;学校里游泳队队员的集.

2. 用文氏图表示下列各对集的关系:

a. $\{2, 4, 6, 8\}$ 与 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$;

b. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 与 $\{4, 5, 6, 7, 8\}$;

c. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 与 $\{2, 3\}$;

d. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 与 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. 下页的四个图中,哪一个图能说明左边各项两个集的关系?

a. 正方形的集与矩形的集;

b. 圆的集与正方形的集；

c. 直角的集和平角的集；

d. 矩形的集和梯形的集.

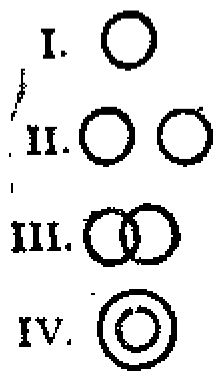
4. 作文氏图表示下列两个集的关系：

a. 奇数集 N 和质数集 P；

b. 偶数集 E 和奇数平方数的集 S；

c. 小于 100 的数集 H 和小于 10 的整数的平方数的集 D；

d. 能被 2 整除的数集 T 和能被 3 整除的数集 C.



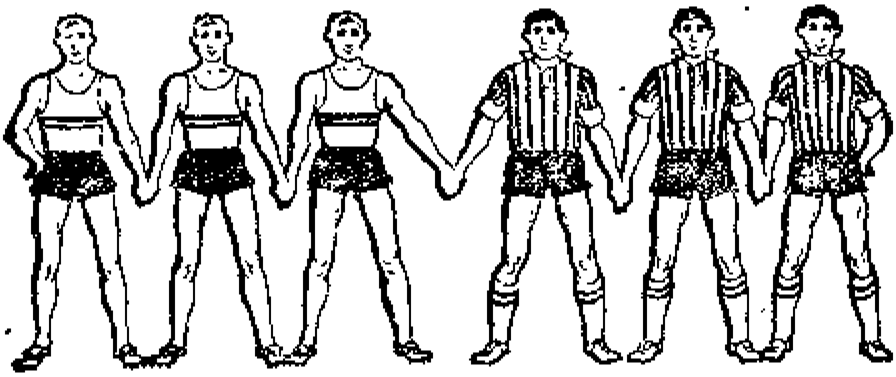
2. 集 的 运 算

在算术中，我们用加、减、乘、除的运算来解答问题．同样，我们也可以用集合运算来解答集的问题．集的运算主要有两种：一种是并运算，一种是交运算．

在讲集运算之前，我们需要先复习一下算术中的加法和乘法的运算方法．在加法和乘法中，一次只用两个数进行运算，比如在 $2+3+4$ 的运算中，我们先算出 $2+3=5$，再算出 $5+4=9$，乘法也是这样．同样，在集的运算中，至少要有两个集才能进行运算；在三个集的运算中，我们也是首先只运算其中的两个集，然后再把所得的集与另一个集进行运算．换句话说：每次只能运算两个集．

现在我们再复习关于数的另一个重要法则：两个自然数的和，或者积，仍是一个自然数．例如：$3+4=7$，$5\times8=40$，7 和 40 也都是自然数．数的这种运算性质，称做“闭合性”．加法和乘法对于自然数是闭合的．同样，集运算的结

果得到另一个集，因此，集的运算也是闭合的.



3. 集　的　并

请看下面的两个集：

A = {哈里，戴维，鲍勃，皮特}，

B = {查尔斯，迈克，鲍勃，皮特}.

现在我们要求一个这样的集：它既包含了A的元素，又包含了B的元素. 这个集就是：

{哈里，戴维，鲍勃，皮特，查尔斯，迈克}.

注意：在上面的集里，不必把鲍勃和皮特写两次，因为只要写下一次，就足以表明他们是所求的集的元素了.

以上是求两个集的并集的例子. 这种运算方法教我们学会求出参加运算的集的全部元素.

正如数相加时用"+"号表示，集相并时则用"∪"号表示. "∪"这个符号很容易记，因为它很象英文字母U字，也很象一只杯子，因此，有人就干脆把这个符号叫做"杯子". 我们把"∪"叫做"并"，这样，上面的例子就可以记为如下式子：

$A \cup B$ = {哈里，戴维，鲍勃，皮特，查尔斯，迈克}。

$A \cup B$ 表示 A，B 所有各元素组成的集。集 A 与集 B 相并就组成了另一个集，这正如两个自然数相加成为另一个自然数一样。$2+3$ 表示数字 5，同样，$A \cup B$ 也可以作为表示另一个集的符号。

现在我们要说明上述的情况，可以提出这样的一些问题：集 A 有多少个元素？集 B 有多少个元素？集 $A \cup B$ 又有多少个元素？是不是把两个集里面的元素的个数相加，就等于并集里面元素的个数？

要理解两个集的并集的情况，一个较好的方法就是利用文氏图。我们可以画出图中的阴影部分来表示并集。

请看下面三个例子：

a. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，那么，

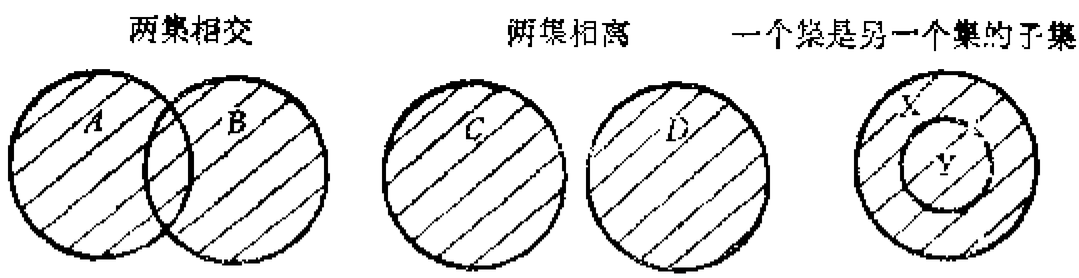
$A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，如图 11a 所示；

b. 设 $C=\{1, 2, 3\}$，$D=\{4, 5, 6\}$，那么，

$C \cup D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，如图 11b 所示；

c. 设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$，$Y=\{1, 2\}$，那么

$X \cup Y=\{1, 2, 3, 4\}$，如图 11c 所示。



(a) $A \cup B$；　(b) $C \cup D$；　(c) $X \cup Y$

图 11

练习9 并 集 演 算

1 写出下面的并集:

a. $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{b, d, f, h\}$;

b. $X=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Y=\{3, 6, 9, 12\}$;

c. $R=\{$玛丽,海伦,简$\}$, $T=\{$格雷斯,安妮,苏珊$\}$;

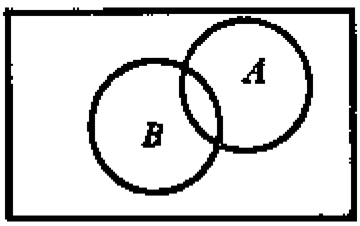
d. $P=\{\triangle, \square, \bigcirc, \bigstar\}$, $Q=\{\triangle, \bigcirc, \square\}$,

2.在题1中各个并集里有多少个元素?

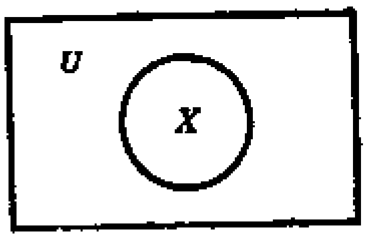
a. $n(A\cup B)=?$ c. $n(R\cup T)=?$

b. $n(X\cup Y)=?$ d. $n(P\cup Q)=?$

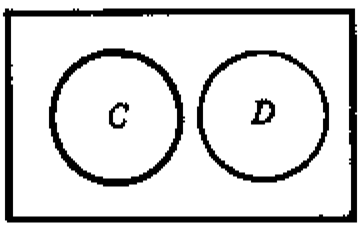
3.在下面图中画上阴影表示各图的并集:



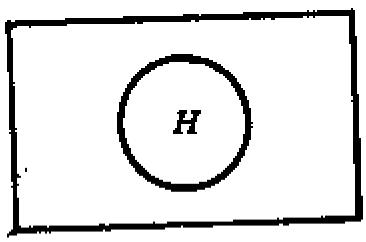
a. $A\cup B$



b. $X\cup U$



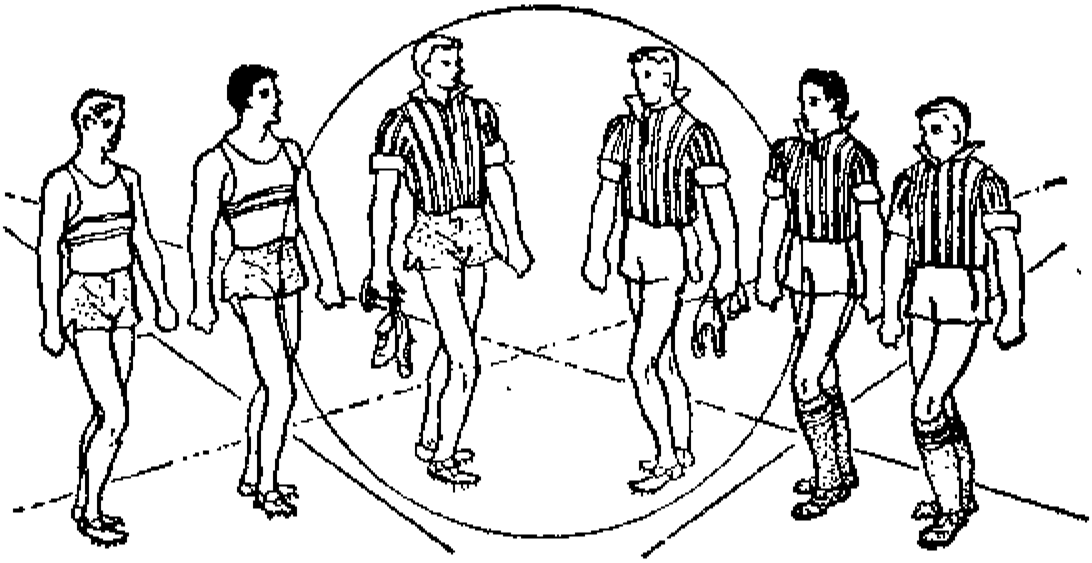
c. $C\cup D$



d. $H\cup H$

4.写出代表下列并集的集:

a. $A\cup A$; b. $A\cup\phi$; c. $A\cup U$.



4. 集 的 交

请看下面的集:

A ═{哈里，戴维，鲍勃，皮特}，

B ═{查里斯，迈克，鲍勃，皮特}.

我们现在求 A、B 两集中公有的学生组成的集，这个集就是:

{鲍勃，皮特}.

我们把这种集的运算称做是集 A 与集 B 的交，这种运算要求我们求出参加运算的集的公有元素的集．集相交的符号是“$\cap$”，这个符号有时称做“帽子”，我们则读做交．$A\cap B$ 表示这样一个集：它的元素既是集 A 的元素，又是集 B 的元素．上面举出的例子可以记为:

$A\cap B$ ═{鲍勃，皮特}.

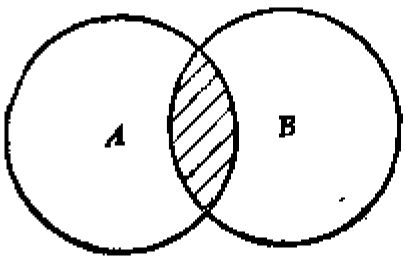
我们还要注意："相交的集"与两集的交是有所不同的，"相交的集"是指具有公共元素的若干个集，而两集的交是指由两个集的公共元素所组成的另一个集.正如 3 × 4 得 12 一样，$A\cap B$ 也可以作为另一个集的符号.

交集 $A\cap B$ 能用文氏图中的阴影部分来表示，请看下面的例子：

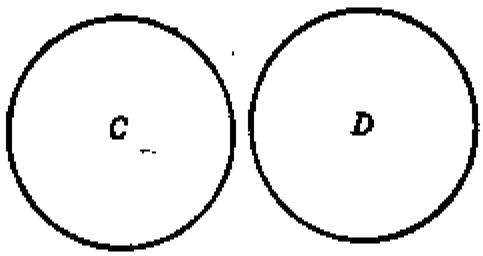
(a) 设 $A=\{1, 2, 3\}$， $B=\{3, 4, 5\}$，那么 $A\cap B=\{3\}$,这个交集便如图 12a 中的阴影部分所示.

(b) 设 $C=\{1, 2, 3\}$, $D=\{4, 5, 6\}$, 那么，$C\cap D=\phi$, 如图 12b 所示.

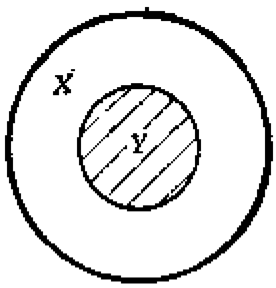
(c) 设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$， $Y=\{1, 2\}$， 那么 $X\cap Y=\{1, 2\}$, 如图 12c 所示.



(a) $A\cap B$



(b) $C\cap D$



(c) $X\cap Y$

图 12

练习10 关 于 集

1. 写出下列各对集的交集:

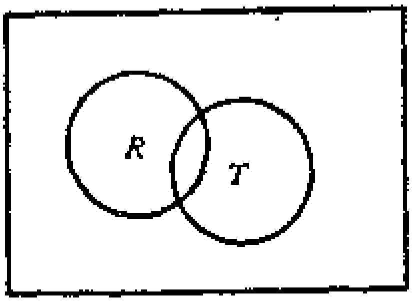
a. $\{a, b, c, d, e\}$, $\{a, e, i, o, u\}$;

b. {福特,奥斯汀,沃尔斯利,贺拾尔},{沃尔斯利,沃克斯霍夫,希尔曼,M. G. 牌跑车},(以上均是汽车的牌名);

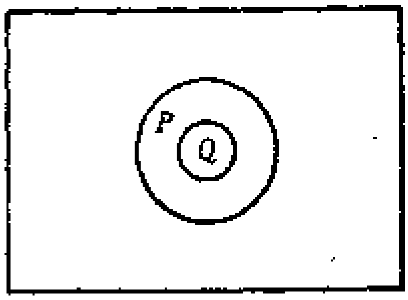
c. {乔治,比尔,詹姆斯,赫伯特},{查里斯,鲍勃,马克,约翰};

d. 小于10的质数集,小于10的奇数集.

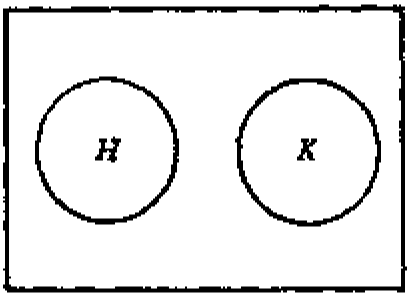
2. 把下列图中的交集部分画上阴影:



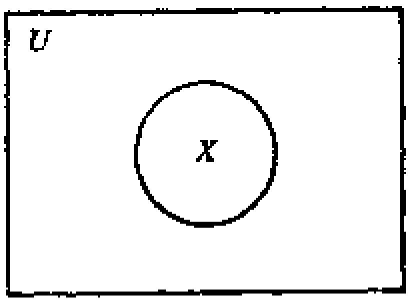
a. $R \cap T$



b. $P \cap Q$



c. $H \cap K$



d. $X \cap U$

3. a. $A \cap A$; b. $A \cap \phi$; c. $A \cap U$.

4. 某校的学生有如下的情况:

X = 二年级学生参加数学小组的集,

Y = 五年级学生参加足球队的集.

$n(X) = 12$,

$n(Y) = 5$,

$n(X \cap Y) = 3$.

求出 $n(X \cup Y)$. 问数学小组里有多少足球队员?

5.已知 $n(X)$, $n(Y)$, $n(X \cap Y)$, 求出 $n(X \cup Y)$ 的公式.

5. 余　　集

我们已经讲了两个特殊的集：空集(ϕ)和全集(U). 现在再讲另一个经常用到的重要的集,叫做余集.

设全集是所有英文字母的集, A 是英文字母中元音字母的集,那么,除 A 以外,由非元音字母组成的集就是 A 的余集. A 的余集记做 A', A' 读做"A 的余集",或读做"非 A".

在下面的文氏图中, 我们用阴影部分表示余集 A', 如图 13 所示.

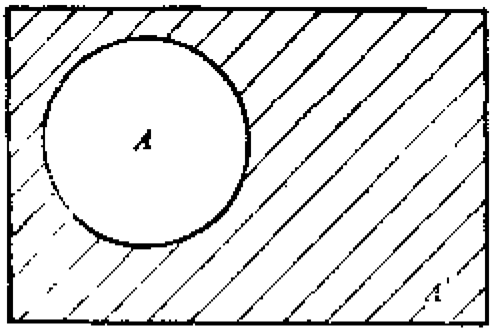


图　13

必须记住: 全集 U 包括 A 和 A', 换句话说: $A \cup A' = U$.

余集的例子还有:设全集是自然数集, E 是偶数集,那么, E' 就是非偶数的自然数集,即奇数集.

练习11　余集的演算

1. 设全集是小于10的自然数集，即 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，如果 $X=\{1,2,3,4,5\}$，那么，$X'=?$

2. 设全集是所有各种牌汽车的集，A 是福特牌汽车的集，那么，A' 是什么呢？

3. 设全集是所有三角形的集，R 是直角三角形的集，那么，R' 是什么呢？

4. 设全集是这四种牌号（福特，奥斯汀，贾格尔，沃尔斯利）汽车的集，F 是福特汽车的集，S 是1960年制造的汽车的集，请用文字表达以下各式的意义，并说明哪些式子是相等的？

a. $F\cap S$;	d. $F'\cap S$;	g. $F'\cup S'$
b. $F\cup S$;	e. $F\cap S'$;	h. $(F\cup S)'$;
c. F';	f. $F'\cap S'$;	i. $(F\cap S)'$.

6. 用集来解题

我们用集的运算和集的关系图，可以解答很多问题。例如，我们可以这样提问："某校篮球队里有多少学生参加了高级数学小组？"为解答这个问题，我们可以根据已知条件，再运用文氏图，把集的每个元素列举出来就行了。

高级数学小组的集 A ＝{比尔，菲利普，吉姆，迈克，彼得，格雷厄姆，鲍勃，克里斯，戈弗雷}，

篮球队员的集 B ＝{汤姆，马克，比尔，西蒙，约翰，查尔斯，托尼，鲍勃，戈弗雷}.

由于篮球队中也有高级数学小组的学生，因此这两个集是相交的，我们所要求解答的问题是 $A\cap B$，这只要列出在图14中阴影部分中的学生就能达到此目的.

$A\cap B$

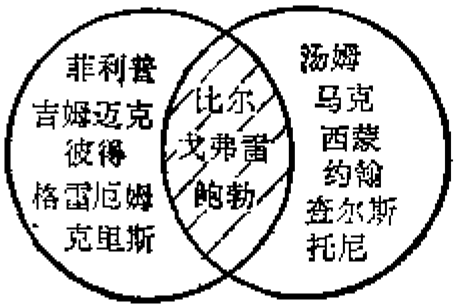


图 14

比尔、鲍勃和戈弗雷既是集 A 的元素，又是集 B 的元素. 这三个学生既是高级数学小组的组员，又是篮球队员. 通过图14，便可以清楚地看出：哪些是高级数学小组的组员，哪些是篮球队员.

如果有三个集，虽然问题会更麻烦一些，但也能用这种分析的方法来解答. 设 A、B、C 是三个小组，问“有多少学生只参加了其中的一个小组？”“有多少学生同时参加了这三个小组？

设 A ＝{卡罗尔，安，苏姗，巴巴拉}，

B ＝{简，卡罗尔，朱迪，巴巴拉}，

C ＝{玛丽，苏姗，卡罗尔，朱迪}.

图15说明卡罗尔同时参加了这三个小组．安，简，玛丽只参加了其中的一个小组．朱迪，苏姗，巴巴拉参加了其中的两个小组．

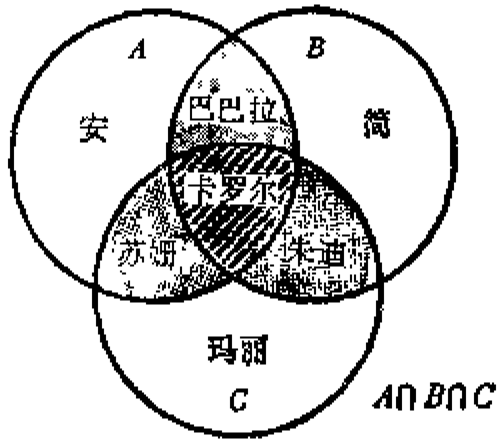


图 15

现在我们再看一个更为复杂的问题．在某个学校里，21个学生参加了数学小组，17个学生参加了物理小组，10个学生参加了历史小组，他们之中同时参加数学和物理小组的学生有12人，同时参加数学和历史小组的学生有6人，同时参加物理和历史小组的学生有5人，还有2个学生同时参加了这三个小组．问现在这三个小组的学生都要去郊游，需要预定多少座位？

现在设数学小组学生的集为 X，物理小组的为 Y，历史小组的为 Z，因为有的学生同时参加了这三个小组，所以代表这三个小组的集是相交的，$X\cap Y$ 表示同时参加数学和物理小组的学生的集，$X\cap Z$ 表示同时参加数学和历史小组的学生的集，$Y\cap Z$ 表示同时参加物理和历史小组的学生的集，$X\cap Y\cap Z$ 表示同时参加这三个小组的学生的集，$X\cup Y\cup Z$ 表示这三个小组全体学生的集．

现在我们来看表示这种关系的文氏图(图16)．

区域 G 表示同时参加这三个小组的学生的集：

$$n(G)=n(X\cap Y\cap Z)=2$$

区域 F 表示同时参加历史和物理小组学生的集：

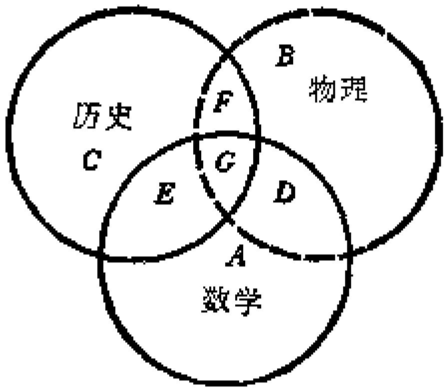


图 16

$$n(F)=n(Y\cap Z)-n(G)$$
$$=5-2=3.$$

区域 E 表示同时参加历史和数学小组学生的集：

$$n(E)=n(X\cap Z)-n(G)$$
$$=6-2=4.$$

区域 D 表示同时参加数学和物理小组学生的集：

$$n(D)=n(X\cap Y)-n(G)=12-2=10.$$

区域 C 表示只参加历史小组学生的集：

$$n(C)=n(Z)-[n(F)+n(G)+n(E)]$$
$$=10-(3+2+4)=1$$

区域 B 表示只参加物理小组学生的集：

$$n(B)=n(Y)-[n(F)+n(G)+n(D)]$$
$$=17-(10+2+3)=2$$

区域 A 表示只参加数学小组学生的集：

$$n(A)=n(X)-[n(D)+n(G)+n(E)]$$
$$=21-(10+2+4)=5$$

因此，这些学生的总数是 $n(X\cup Y\cup Z)=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)+n(E)+n(F)+n(G)=5+2++1+10+4+3+2=27$. 那么，这三个小组的学生都去郊游，需要预定 27 个座位。

图 17 说明每个区域里学生的人数，由此可以知道这些学生在各个小组里分布的情况。

上面的例子说明，用集的运算方法，可以解答关于人或事物组合的许多问题.

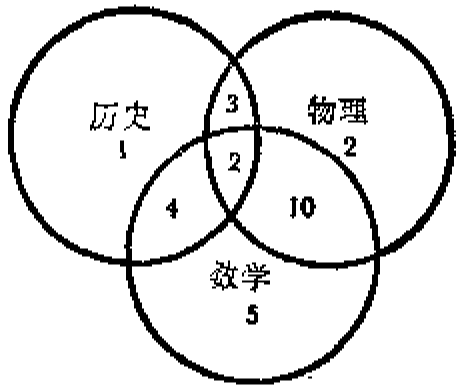


图 17

我们已经多次提到过关于概率的一些问题. 现在我们来看看求解概率的一个典型问题.

已知在一顶帽子里藏有 50 张蓝票、25 张绿票，75 张红票，求抽出一张红票的概率 $P(R)$ 是多少？（概率可以简单地理解为在给定条件下，所有可能发生的诸事件中某一特定事件发生的百分率.——译注）

这样的问题也可用集的运算来解决. 设蓝票的集为 B，绿票的集为 G，红票的集为 R，那么 $n(B)=50$，$n(G)=25$，$n(R)=75$. 在图 18 的文氏图中说明这三个集是相互分离的.

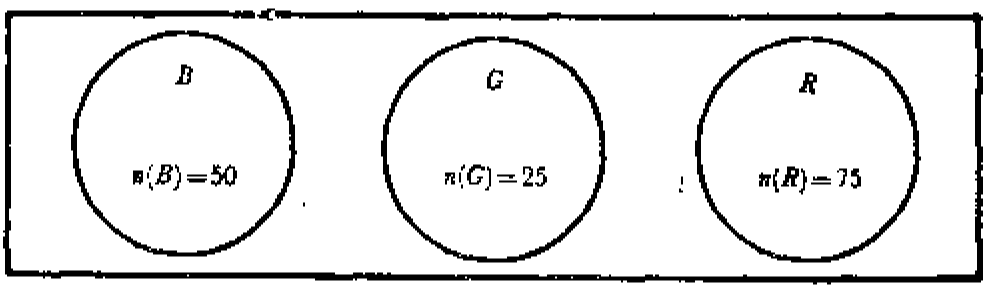


图 18

现在，怎样求抽出一张红票的概率呢？

$P(R)=$ 红票的总数/各种票的总数

$\quad = n(R)/n(B\cup G\cup R)$

$= 75/(50+25+75)$

$= 75/150 = 1/2$.

因此抽出一张红票的概率 $P(R) = 1/2$.

练习 12　用集解题

1. 用文氏图表示下列每对集的关系，并写出图中各区域内的元素：

a. $\{a, b, c, d, e\}$, $\{a, e, i, o, u\}$;

b. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8\}$;

c. {佩吉，简，苏珊}，{马杰里，凯，苏珊}；

d. {约翰，鲍勃，查尔斯，唐}，{约翰，鲍勃，查尔斯}.

2. 用文氏图表示下列每三个集的关系，并写出图中各区域内的元素：

a. $\{a, b, c, d\}$, $\{b, d, e, f\}$, $\{a, b, c, g\}$;

b. 小于 10 的偶数的集，小于 10 的质数的集，小于 10 且能被 2 或 3 整除的自然数集；

c. S = 参加郊外活动的学生

= {汤姆，迪克，亨利，迈克尔}，

R = 参加高级数学小组的学生

= {吉姆，哈里，迈克尔，利林，罗伯特}，

T = 参加分发报纸的学生

= {迪克，哈里，罗伯特，比尔}.

3. 高三年级中看各频道电视节目的同学分布如下：

60% 看节目 A，

50% 看节目 B，

50% 看节目 C，

30% 看节目 A 和 B，

20% 看节目 B 和 C，

30% 看节目 A 和 C，

10% 看节目 A、B 和 C。

a. 看节目 A 和 B 而没看节目 C 的同学占百分之多少？

b. 只看两个节目的同学占百分之多少？

c. 没看节目的同学占百分之多少？

4. 研究下面关于全集以及其他一些数集：

$$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$X=\{2, 4, 6, 8\},$$

$$Y=\{1, 3, 5, 7\},$$

$$Z\cap Y=\{1, 3\},$$

$$Z\cup Y=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}.$$

用文氏图来求：

a. 集 Z 内的各数；

b. $n(X)-n(Z\cap X)$；

c. $n(Z\cup X)-n(Z\cup Y)'$。

5. 有三位体育记者分别挑选了下列各组球队参加比赛，夺取锦标：

{伯恩利，托特纳姆，曼彻斯特，切尔西}，

{伯恩利，伊普斯威奇，谢斐尔德，曼彻斯特}，

{切尔西，伯恩利，阿塞纳尔，谢斐尔德}。

用文氏图来确定在比赛中哪队对哪队？

6. 在一个盒里装有 15 张蓝色卡片，5 张红色卡片，1 张白色卡片：

a. 如果你首先抽的话，那么抽出一张红色卡片的概率是多少？

b. 如果你首先抽的话，那你抽出一张白色卡片或一张蓝色卡片的概率又是多少？

7. 集的运算律

当你进行算术或代数运算时，你一定学过一些应该遵守的运算规律．或者，你已经熟悉了这些定律，在运算时，也无须予以考虑．在算术和代数里，有下面三种运算定律：

1. 交换律(也称次序律)：二数相加或相乘的次序不影响所得的和或积．

算术 $2+3=3+2$，　　代数 $a+b=b+a$，

$5\times 4=4\times 5$，　　$ab=ba$．

2. 结合律(也称分组律)：参加相加或相乘各量的分组的方式不影响所得的和或积．

算术 $(2+3)+4=2+(3+4)$，

$(4\times 5)\times 6=4\times(5\times 6)$，

代数　$(a+b)+c=a+(b+c)$,

$$(ab)c=a(bc).$$

3. 分配律：一个量与其它两个量的和相乘等于这个量分别乘以其它两个量所得积之和

算术　$2(3+4)=(2\times3)+(2\times4)$,

代数　$a(b+c)=ab+bc$.

这些定律在代数中能帮助我们校验计算和简化许多公式.

既然在算术和代数中有这些基本运算定律，这些定律是否也能在集的运算中得到应用呢？

设有以下三个集：

列　表　法

$A=\{r, s, t, u\}$,

$B=\{r, t, v, x\}$,

$C=\{r, s, x, y\}$.

文氏图

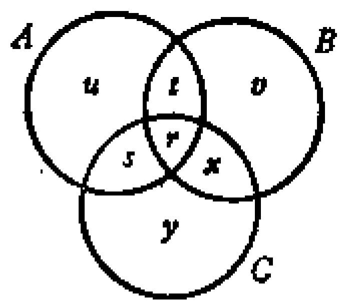


图　19

现在我们来看看结合律是否适用于集的并运算，也就是说 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ 成立吗？

(1) 求 $A\cup B$

列　表　法

$A\cup B=\{r,s,t,u\}\cup\{r,t,v,x\}$,

$A\cup B=\{r, s, t, u, v, x\}$.

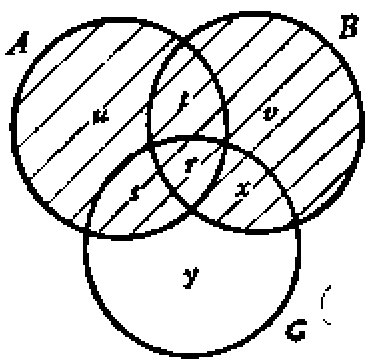


图　20

绘出阴影法

$A\cup B=\{r,s,t,u,v,x\}$.

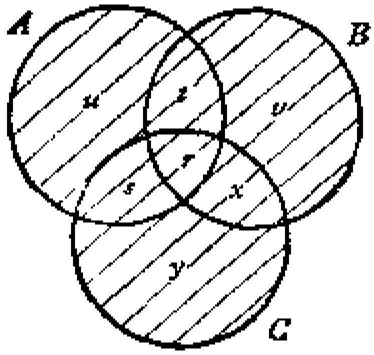


图 21

绘出阴影法

$(A\cup B)\cup C=$
$\{r, s, t, u, v, x, y\}$.

(2) 求 $(A\cup B)\cup C$

列 表 法

$(A\cup B)\cup C=\{r, s, t, u, v, x\}\cup\{r, s, x, y\}$,

$(A\cup B)\cup C=$
$\{r, s, t, u, v, x, y\}$.

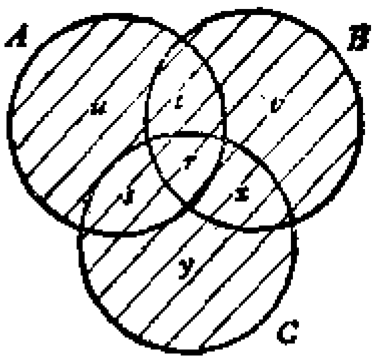


图 22

绘出阴影法

$A\cup(B\cup C)=$
$\{r, s, t, u, v, x, y\}$.

(3) 求 $A\cup(B\cup C)$

列 表 法

$B\cup C=\{r, s, t, u, x, y\}$,

$A\cup(B\cup C)=$
$\{r, s, t, u, v, x, y\}$.

从上面的列表法和文氏图可知:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

现在我们再来看看结合律是否适用于集的交的运算，也就是说 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ 成立吗?

(1) 求 $A\cap B$

列 表 法

$A\cap B=\{r, s, t, u\}\cap\{r, t, v, x\}$,

$A\cap B=\{r, t\}$.

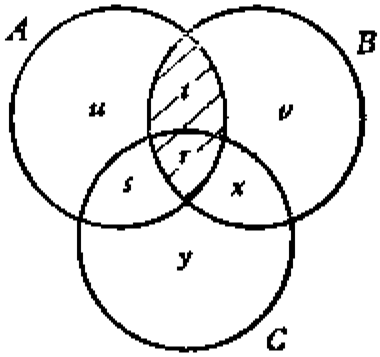


图 23

绘出阴影法

$A\cap B=\{r, t\}$.

(2) 求 $(A\cap B)\cap C$

列 表 法

$(A\cap B)\cap C=\{r, t\}\cap\{r, s, x, y\}$,

$(A\cap B)\cap C=\{r\}$.

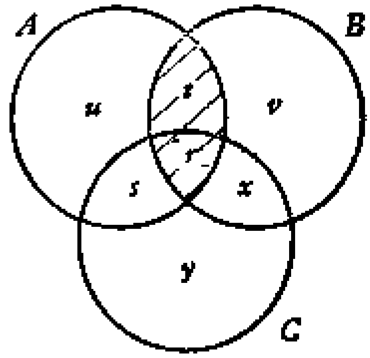


图. 24

绘出阴影法

$(A\cap B)\cap C=\{r\}$.

(3) 求 $A\cap(B\cap C)$

列 表 法

$B\cap C=\{r, x\}$,

$A\cap(B\cap C)=\{r\}$.

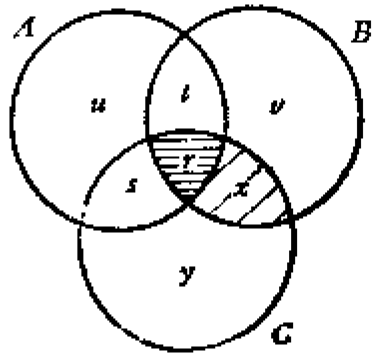


图 25

绘出阴影法

$A\cap(B\cap C)=\{r\}$.

从上面的列表法和文氏图可知:

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

从本节所得的结果可以看出：结合律对集的交和集的并的运算都是成立的，即

(1) 并: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(2) 交: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

练习 13 试求集的运算律

用本节的集 A, B 和 C，画出文氏图，并指出各区域内的元素，从而证明:

1. $A\cup B=B\cup A$.
2. $A\cap B=B\cap A$.
3. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
4. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

8. 集的运算律与计算机

从上节和习题 13 所得的结果，可以说明以下的运算律对下面的集的运算也是成立的.

(1) 交换律(或次序律):

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$$

(2) 结合律(或分组律):

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$

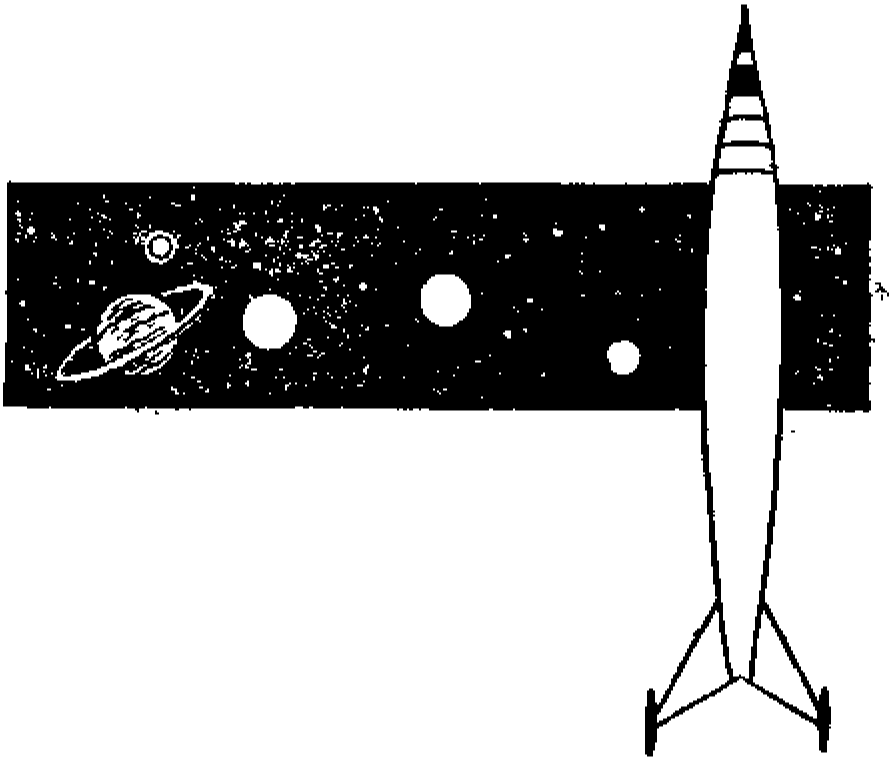
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

(3) 分配律:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

我们知道这些定律在算术和代数中应用是很广的.那么,这些集运算的定律用于什么地方呢? 一个突出的例子是: 在用电子计算机来解答某些问题时,就需要用到这些集运算的定律. 譬如说,我们要找出赢得篮球赛名次的有关因素,就须收集以下一些数据的集: 运动员的身高和重量、饮食的习惯、休息的状况、跑步的速度、传球的配合等等. 这些数据的集之间的关系可用并集和交集来表示. 把这些关系在电子计算机的计算程序上进行合理安排,就可以得出我们所需要的答案。



三、在几何、代数、逻辑学中的集合概念

1. 空间里的点集

我们能把宇宙飞船送到月球上去吗？你愿意作一次宇宙航行吗？要实现这一理想，就需要懂得几何学的知识。对空间几何学的研究必须涉及到许多关于集的概念。

你要作宇宙航行，就要首先懂得什么是点、线、面和三维

物体．现在先从点谈起：那么，什么是点呢？我们可以把点设想为空间中的一个位置．我们通常用一个象句点(·)一样的点来表示它．但是，在实际上，点没有形状、大小、重量．点不过是一种概念．任何人也没有见过真正的点．数学家们从未给点下过定义，因此，我们说“点”是一个**未定义名词**．

在空间几何学里，我们要谈到点的集．认真说来，空间就是点的一个无限集．同样，线也是点的无限集，这条线上的任何一点，都是这个点集的一个元素．在几何学里，有各种各样的线，诸如直线、曲线、折线，而我们通常应用线这个名词的时候，指的是直线．直线的一部分，象A———B，称为**线段**．一条线段上的点集也是无限集．每条线不论长短曲直，都是点的无限集．

我们取线m上任意一点A，如图 26．

图 26

这样，点A就把线m分成了三个点集：

点A左边的点集；

点A右边的点集；

点A本身的集．

设另一条线n与线m交于A点，如图 27．

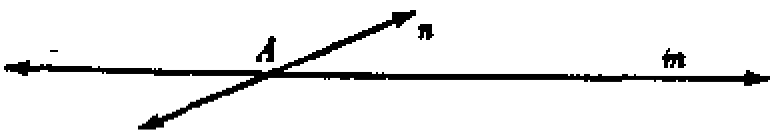


图 27

这时，点A就是线m和线n的交点，即点A是线m上的一

个元素，又是线 n 上的一个元素. 这和我们以前讲过的集的交（∩）的内容是一致的.

我们谈了在一条线上点的集，同样，我们也可以说交在一点的线的集（通过一点的若干条线），如图 28 中的点 A 就是这样的一个点.

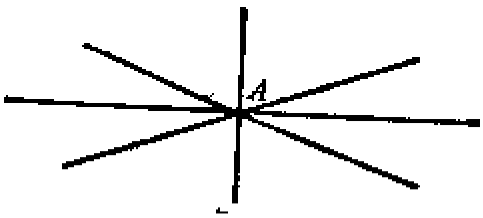


图 28

一个点上的线集是无限集吗？当然是无限集.

从图 29 我们还可以看出怎样表明无限集（如点 A 上的线集，线 m 和线 n 上的点集）. 点 A 与线 m 上的任何一点都能连成直线，而这些直线都要经过线 n 上的某一点，因此，线 m 上的每个点都能在线 n 上找出它的对应点，并且，也一定有对应的直线通过点 A.

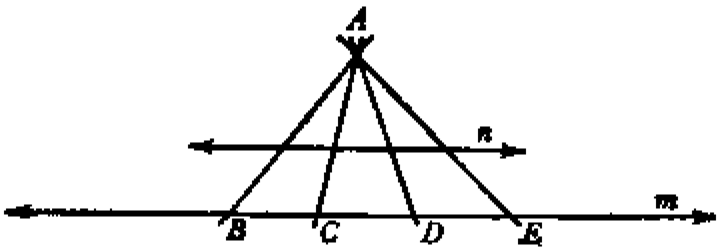


图 29

一个象桌面那样的平面也是点的集，这也就是表示一个水平面的点的集. 平面有二维，即有长度和宽度，但没有厚度. 平面也与点和线一样，都是看不见的. 平面上的点集、线集、还有通过一条直线的平面的集（指线上的平面），都是无限集.

数学家认为，平面上的一条线能把这个平面分成两个半平面．如图 30 所示，平面上的线 m 把这个平面分成三个点集：线 m 以上的半平面内的点集 A，线 m 以下的半平面内的点集 B，线 m 上的点集，这些点集都是无限集．

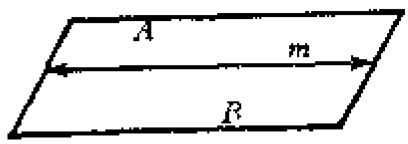


图 30

下面的图 31 说明一条封闭的曲线也能把平面分成若干个点集．象圆和三角形这样的曲线把平面分成三个点集：曲线内点的集、曲线外点的集、曲线上点的集．从曲线内的任何一点到曲线外的任何一点都必须经过这条曲线．

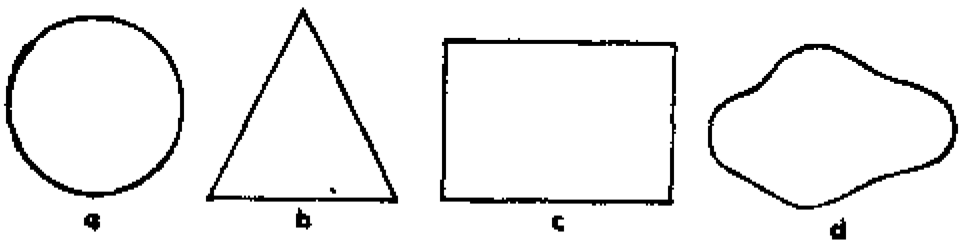


图 31

图 32 中的曲线也是封闭曲线，这些曲线把平面分成了三个以上的点集．但是这些曲线不是简单的封闭曲线．

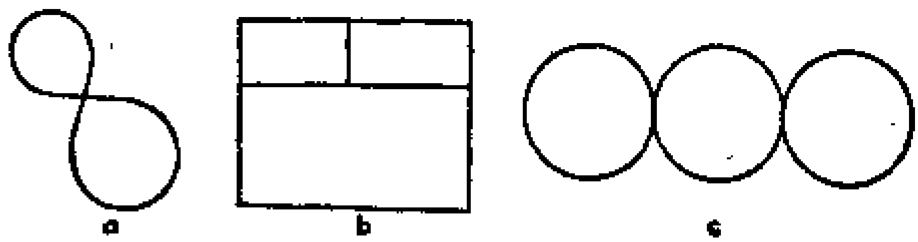


图 32

在平面上一条直线 m 和一条封闭曲线相交，交点就是这

两个集（直线上的点集，和封闭曲线上的点集）的交集的元素，如图 33。

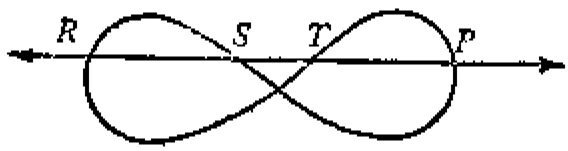
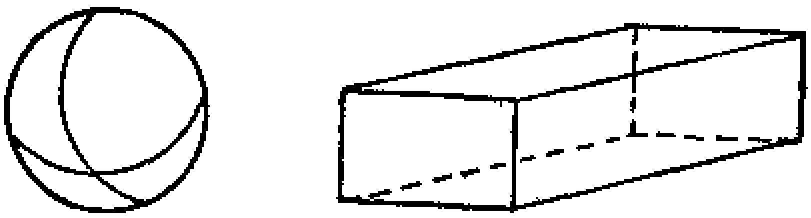


图 33

在图 33 中，封闭曲线和直线相交于点 R，S，T，P，因此，这条直线和曲线的交集 $I=\{R, S, T, P\}$。

在三维空间里，一个平面把空间也分成三个点集：平面以上半空间点的集，平面以下半空间点的集，和平面本身点的集。象气球或者方块表面这样的封闭曲面，也把空间分成三个点集：曲面内点的集，曲面外点的集，和曲面本身点的集。从曲面内任何一点到曲面外任何一点，都必须经过曲面。图 34 中的物体就是简单的封闭曲面的例子。



a　　　　b

图 34

图 35

当两个平面相交的时候，它们的交集是一条直线。当一个平面和一个封闭曲面相交的时候，它们的交集或是一个点，或是一条线的点集，如图 35 所示。

练习 14　集和几何图形

1. 在可能时，画出一条直线与一个圆，使二者的交集如下：

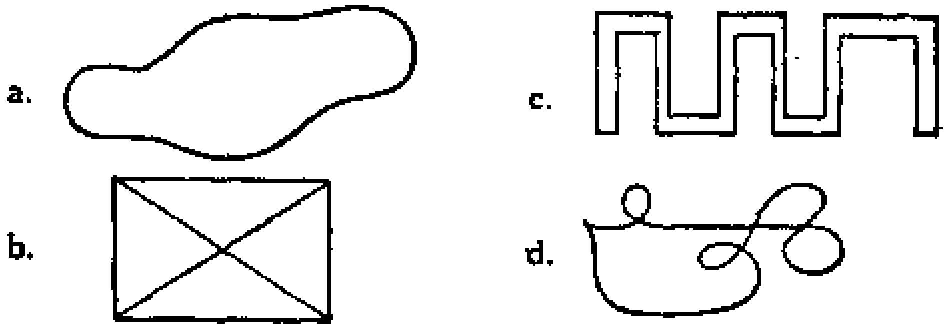
a. 空集；

b. 一个元素的集；

c. 两个元素的集；

d. 三个元素的集。

2. 下面的图形把平面分成了多少个点集？



3. 画一个圆和一个四边形，使二者的交集是：

a. 两个点的集；

b. 四个点的集；

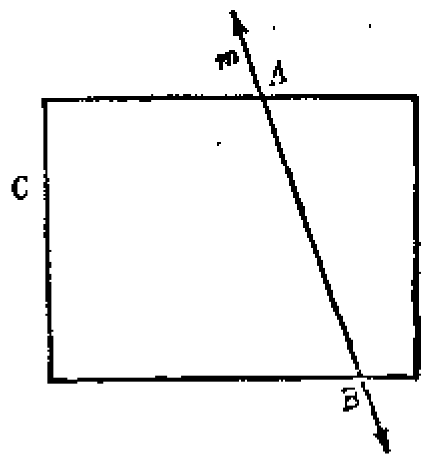
c. 六个点的集；

d. 八个点的集。

4. 参照右图作下面的习题：

a. 矩形 C（指其周界）与直线 m 的交集是什么？

b. 把线 m 左边包含 C 的半平面上的点集和矩形内各点集的交集用阴影画出。



5. 考虑一球和一平面，下面交集中哪些可能存在？

a. 空集；　　　　　　c. 两个元素的集；

b. 一个元素的集；　　　　d. 一个简单的封闭曲线上点的集。

2. 集与命题

前面我们讲了集的概念在几何学里是怎样应用的，现在我们再来看看集在代数中的应用。我们从一个简单的问题谈起：

> 从法国购来的一件装饰品共付去 7 元，其中付关税与营业税用去了 3 元，问这件装饰品的成本是多少钱？

我们能用代数解决这个十分简单的问题。这样一个命题用语言来表示，就是“某数加 3 等于 7”，这个命题用符号来表示，就是 $x + 3 = 7$.

在上述的那样的命题中，符号 x 叫做变量，它是某数的保留位置，而这个数是一个给定数集中一个数的值。我们称这个给定的数集为代换集、或者为变量域，它一般被认为是一切实数的集。通常我们要在代换集中求出某些数，使得经代换后命题就确能成立。代换集中的这些数组成的集就叫做命题的解集。在 $x + 3 = 7$ 这个命题中，它的解集只有一个元素：$x = 4$. 当 $x = 4$ 时，$4 + 3 = 7$ 当然正确。

有些命题的解集有两个元素。例如，命题 $x^2 = 9$ 的解集的元素既可以是 $+3$，也可以是 -3.

再看这样一个问题：x 是什么数时，命题 $x + 5 = x$ 成

立呢？很明显，没有任何一个数能使这个命题正确，因此，这个命题的解集是空集。

再看命题 $3x+x=2x+2x$，当 x 是什么数时，这个命题成立呢？很明显，这个命题的解集是所有的数组成的无限集；这个命题永远是正确的，因此也叫做恒等式。

同样，我们也经常需要不等式的解集。我们把命题“某数大于3”写成 $x>3$，用7代换 x，当然 $7>3$。很明显，命题“$x>3$”的解集也是无限集。如果设 $x=5$，或 $x=7$，或 $x=9$，或 $x=325\ 1/2$，则命题 $x>3$ 正确，于是 5，7，9，325 1/2 都是命题 $x>3$ 的解集的元素。

如果我们说命题“$x>3$”的全集是小于10的自然数的集，那末，它的解集就是$\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。这样，无论方程或不等式都可称为选集命题：这是从数的全集内选取某些数，使得用来代换 x 时，命题恰好成立。

我们说过：在代数中常用 x 这样的字母，作为数的保留位置，同样，我们也能用 x 这样一个字母作为集的元素的保留位置。这样一个命题：“使得 x 为质数的一切数 x 的集合”，可以简单地用符号来表示，写成为 $\{x|x$ 是一个质数$\}$，符号“|”读做“使得”。再如这样一个命题：使得 x 小于5的一切数 x 的集合，也可以用符号来表示，写成为$\{x|x<5\}$。在这里，符号 $\{x|\quad\}$ 称为构集命题。

练习15 求解集

求以下选集命题的整数解集：

1. $\{x|3x+7=22\}$.

2. $\{x|x^2=25\}$.

3. $\{x|x>5\}$，其中 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

4. $\{x|x+2=x\}$.

5. $\{x|3x+5=2x+5+x\}$.

3. 解集的图形

我们再来考虑命题 $x>3$，由于这个不等式的解集是一个无限集，因此，不能把这个解集的元素都列出来．但是，我们能用一根直线来很形象地表示 $x>3$ 的解集．一根直线上有无限个点，这些点能与 $x>3$ 的解集的每个元素建立一一对应．集 $\{x|x>3\}$ 的元素都大于 3，而不包含 3．我们可以用图 36 中的粗线来表示 $x>3$ 的解集，这样的图叫做解集的图形．图 36 中的圆箭头表示 3 不包含在这个图形之中.

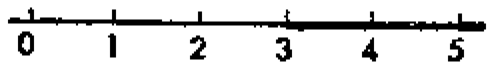


图 36

如果命题写做 $x \geqslant 3$，则表示这个命题的解集包含 3．符号$\geqslant$读做“大于或等于”，命题“$x \geqslant 3$”读做“求一切 x，使得 x 大于或等于 3”.

有时，我们会遇到有分成两个部分的不等式问题．例如，我们要求：“找出所有大于 5 或小于 2 的数”，这是一种“复合命题”，用 $x>5$ 或 $x<2$ 来表示（符号$<$表示“小于”）．因为 $x>5$ 的解集或 $x<2$ 的解集，都能满足这个复合命题的条

件，那么，这两个解集的并集就是这个复合命题的解集.

设 $A=\{x|x<2\}$， $B=\{x|x>5\}$， $C=\{x|x<2,$ $x>5\}$，那么 $C=A\cup B$.

图 37 是 $x<2$ 的图形.

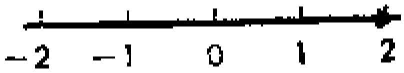


图 37

图 38 是 $x>5$ 的图形.

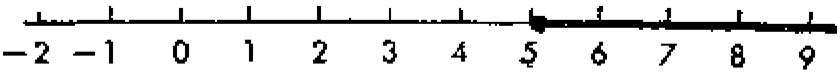


图 38

图 39 则是 $(x<2)\cup(x>5)$ 的图形：

图 39

如果限定讨论的范围为 $U=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,$ $7,8,9\}$，那么， $C=\{x|x<2,\ x>9\}=A\cup B=\{-1,$ $0,1,6,7,8,9\}$

如果构集命题是 $\{x|x>2, x<5\}$，那么，解集就是满足条件 $x>2$ 和 $x<5$ 的数集的交集，如图 40 所示：

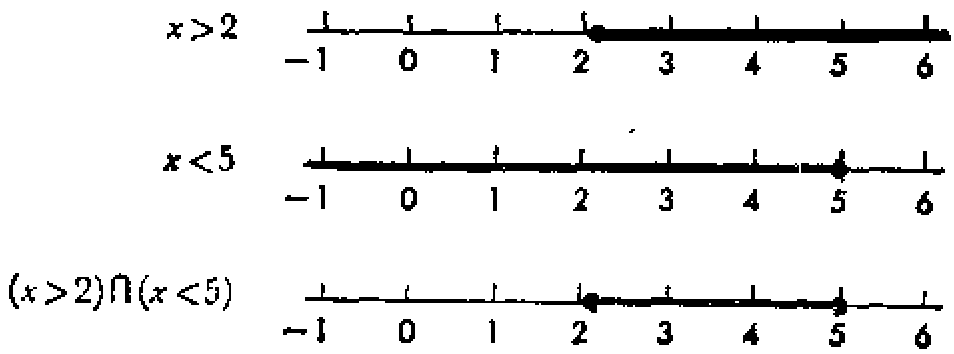


图 40

练习 16　解集的图示

1. 画出下面命题解集的图：

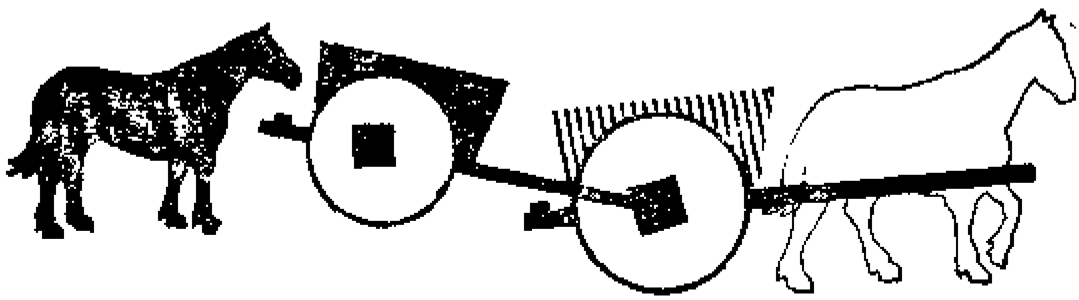
a. $x+5=9$；　　　　c. $x>1/2$；

b. $x<-3$；　　　　d. $x+2x=3x$。

2. 画出下面复合命题的解集的图：

a. $\{x \mid x=3$，或 $x>3\}$；　　c. $\{(x<2)\cup(x>6)\}$；

b. $\{x \mid x\geqslant 3$，且 $x<7\}$；　　d. $\{(x>5)\cap(x<9)\}$。



4. 有序对的集

请读者解答这个问题："哈里存款的两倍与乔存款的和是 7 元钱，求哈里与乔各存款多少钱？"

如果我们用 x 表示哈里存款的钱数，用 y 表示乔存款的钱数，那么这个问题就能用命题 $2x+y=7$ 表示。在这个命题里，有 x，y 这两个变量，那么，x 和 y 各取何值，才能使命题 $2x+y=7$ 真确呢？ 容易看出，其中的一对值是 $x=2$，$y=3$。 那么，是否还有 x 和 y 的其它值能使这个命题真确呢？

当一个命题有两个变量的时候(为了方便,这两个变量通常分别设为 x,y),这个命题解集的元素则是许多数对. 命题 $2x+y=7$ 可以看作是使这个命题真确时,所有数对的集合的构集命题. 如果 x 和 y 的代换集是全部实数的集,那么,$2x+y=7$ 的解集,可以表示为 $\{(x,y)|2x+y=7\}$,它是一个数对的无限集. $\{(x,y)|2x+y=7\}$ 读做"使 $2x+y=7$ 成立的有序对 (x,y) 的集".

怎样用简单的记法表示数对呢? 我们把 $x=2$, $y=3$ 这对数记做 $(2,3)$, x 值在先, y 值在后, 由于这个次序是有重要涵义的,所以我们把 $(2,3)$ 叫做*有序对*. 有序对 $(3,2)$ 与 $(2,3)$ 不同,不能用 $(3,2)$ 代替 $(2,3)$. 要特别注意: $(3,2)$ 不使 $2x+y=7$ 成立,因为 $2\times3+2\neq7$.

练习 17 有序对演算

1. 求出有序对集合中的 3 个元素,使得下列各命题成立. 设 x 和 y 的代换集是全部实数的集.

a. $x+y=5$;

b. $2x+y=12$;

c. $3x-y=7$.

2. 设 x 和 y 的代换集是 $U=\{-2,2,4,6\}$, 求出能使下面命题成立的一个有序对:

a. $x-y=6$;

b. $3x-2y=10$.

5. 有序对集与运算

有时,有序对集可以用来表示两个数集之间的确定关系.

例如，有序对集$\{(1, 6), (3, 8), (0, 5)\cdots\}$表示每个有序对的第一个元素加 5 等于第二个元素. 同样，$\{(2, 10), (3, 15), (4, 20), (0, 0)\cdots\}$表示每个有序对的第一个元素乘以 5 等于第二个元素.

数学家称任何一个有序对的集为一个*关系*. 如果一个关系满足条件: 对于 x 的每个值仅有 y 的唯一值与它对应，就叫做函数. 上面的两个有序对的集都是函数[1]，而有序对集$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \cdots\}$就不是函数，因为与 x 的每个值对应的 y 的值，是多于一个的.

练习 18 关系、函数、有序对

1. 对于下列各有序对的集合，确定是否存在某种运算，可以用来由第一个元素求得第二个元素:

a. $\{(9, 4), (7, 2), (21, 16), \cdots\}$;

b. $\{(9, 3), (6, 2), (2, 2/3), \cdots\}$;

c. $\{(0, 0), (3, 3), (7, 7), \cdots\}$;

d. $\{(5, 6), (9, 10), (84, 85), \cdots\}$;

e. $\{(1, 3), (2, 5), (1, -1), (2, -4)\}$.

2. 在上题中哪些关系是函数?

6. 有序对与笛卡尔平面

在前面的几个问题中，我们曾用一个数对应地勘定直线

---

1) 事实上，第一与第二例中的有序对集各是函数 $y = x + 5$ 及 $y = 5x$.
——校者注

上的一个点.如果我们用两条垂直相交的直线确定一个平面,那么,就可以用数对来对应地勘定平面上的一个点了.

设全集 $U=\{1, 2, 3\}$,那么,所能构成的所有的有序对的集是 $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$,这个集可以记做 $U\times U$,读做 U 叉 U.

从 $U=\{1, 2, 3\}$ 得到的数对的集,可以用图 41 中的

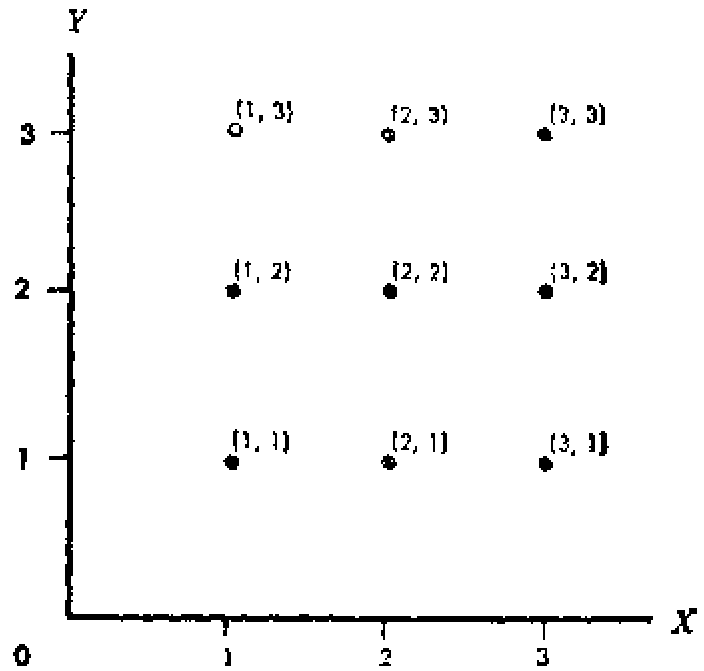


图 41

那些点格来表示,这些点格叫做 $U\times U$ 的图. 图 41 中的那个白点表示数对 $x=1$, $y=3$,同时我们也说它具有坐标 $(1, 3)$. 请注意,这个图上的每一点与集 $U\times U$ 中的每一有序对都有着一一对应的关系.

有序对集 $U\times U$ 也叫做笛卡尔集. 之所以这样命名,那是为了纪念法国著名的数学家笛卡尔. 因为他把数对和平面上的点联系起来,从而揭示了代数学和几何学的密切关系.

设 U 是全部实数的集，那么 $U \times U$ 的图则是一个无限的平面，这个平面叫做笛卡尔平面。

我们可以在笛卡尔平面上作出有两个变量命题的图，使命题真确的有序数对，作为构成图形的各点的坐标。

我们再来考虑命题 $2x + y = 7$，如果 x 和 y 的代换集是 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，那么，这个命题的解集就得要从集 $U \times U$ 中求得的，即 $\{(x, y) | 2x + y = 7\} = \{(1, 5), (2, 3), (3, 1)\}$[1]，图 42a 就是这个解集的图形。

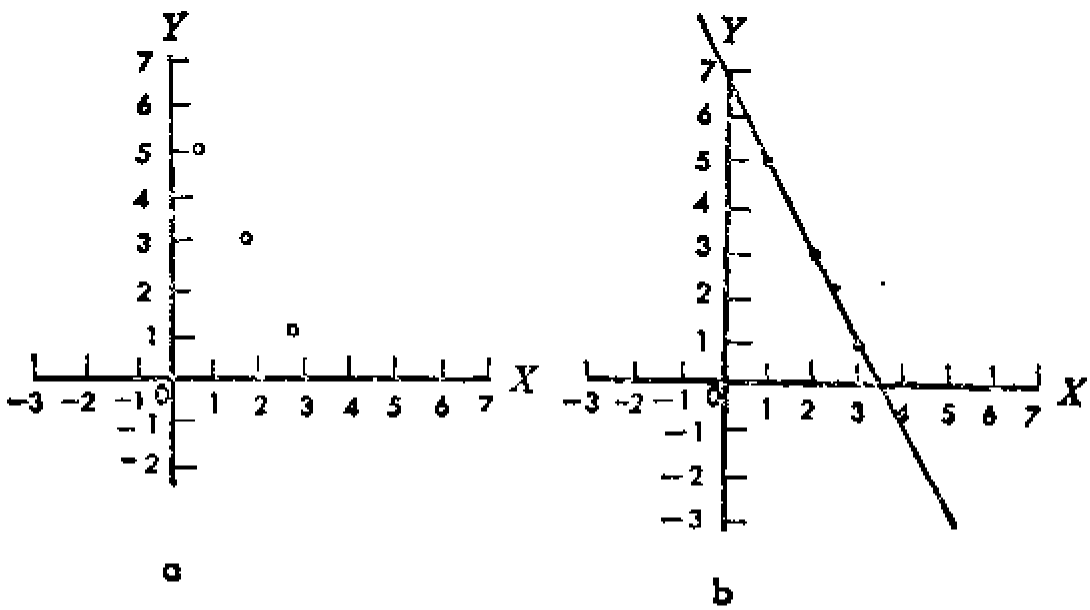


图 42

如果 U 是全部实数的集，那么 $2x + y = 7$ 的解集的图

1) 读者可能会问："有没有什么方法可以求得 x，y 的取值范围？"答案是肯定的。现简述如下：$\because 1 \leqslant x \leqslant 7$①，又 $1 \leqslant y = 7 - 2x \leqslant 7$②，解得 $0 \leqslant x \leqslant 3$③。由①与③得 $1 \leqslant x \leqslant 3 (A)$；从而还可求得 $1 \leqslant y = 7 - 2x \leqslant 5$④。由②与④得 $1 \leqslant y \leqslant 5 (B)$。由于 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，可知 x 只可取 1, 2, 3 三值依次代入 $y = 7 - 2x$ 得对应的 y 值 5、3、1；这三个值确恰符合 (B)——校者注

形就成为连续的点集(一条直线),如图 42b 所示。

我们也可以在笛卡尔平面上作出象"$x>y$"这样有两个变量的不等式命题的图形。如果"$x>y$"的解集必须从集 $U\times U$ 中求得,设 $U=\{1,2,3\}$,那么,由观察可知 $\{(x,y)|x>y\}=\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$。图 43a 说明这个解集的图形是三个点。

如果 U 是全部实数的集,那么 $x>y$ 的解集的图形,可以通过画出一条直线 $x=y$ 来表示命题的解集的图形。由此可以看出:在这条直线下方各点的 y 坐标的值小于该点的 x 坐标的值,这条直线上方各点的 y 坐标的值大于该点的 x 坐标的值。图 43b 中的阴影部分表示 $x>y$ 的无限解集的图形。

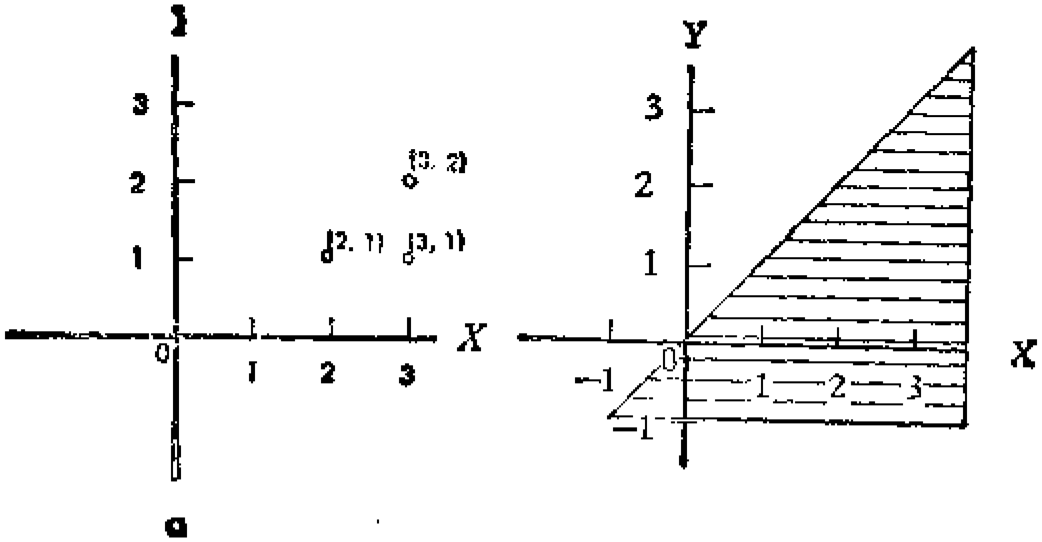


图 43

练习 19 在笛卡尔平面内作图

1. 绘出 $U\times U$ 的图形,集 U 给定如下:

a. $U=\{1,3,5\}$;　　　　b. $U=\{-2,0,2\}$。

2. 绘出 $x+y=3$ 的解集的图形，给定 x 和 y 的代换集如下：

a. $U=\{1, 2, 3\}$；　　　　b. 全部实数的集。

3. 绘出 $y>x$ 的解集的图形，给定 x 和 y 的代换集如下：

a. $U=\{1, 2, 3\}$；　　　　b. 全部实数的集。

4. 如果 x 和 y 的代换集是全部实数的集，绘出 $y<2x+3$ 的解集图形。

5. 某公司要用 x 和 y 这两种物质合成洗涤剂。当这两种物质每次拌合的时候，x 的容量必须比 y 的容量多 3 加仑，而 x 和 y 的总容量要小于 7 加仑，用图示法求每次最多可用 y 物质多少加仑？

7. 集合与逻辑

中学生是否都是没有礼貌的？有些漂亮的姑娘是否特别聪明？一些青少年是否常犯错误？要正确回答这些问题，我们可用集的方法来处理。

集的最好应用之一，就是用于逻辑演绎。逻辑演绎是借助于推理的方法从某些假设导出结论。利用集作为逻辑演绎的一个方法，正象以上几节讲过的集运算那样，能把各种关系清楚地描画出来。

在数学里，绝大多数待证明的命题，都写成"如果…那么"这种方式，例如："如果三角形的各边相等，那么各角也相等"。

对于非数学问题，我们也能用同样的方法来讲述，例如："如果我年满 18 岁，那么我可以领到司机执照"，这个问题的另一种讲法是："凡年满 18 岁的人都可以领到司机执照，因为

我已 18 岁，所以我也可以领到司机执照”．现在用集来讲述这个问题．设 A 是所有领到司机执照的人的集，B 是年满 18 岁的人的集，那么 A 与 B 的关系能用图 44 来表示．大圆表示

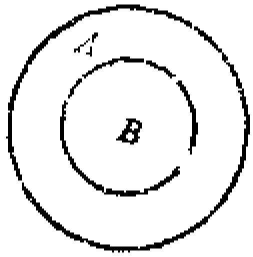


图 44

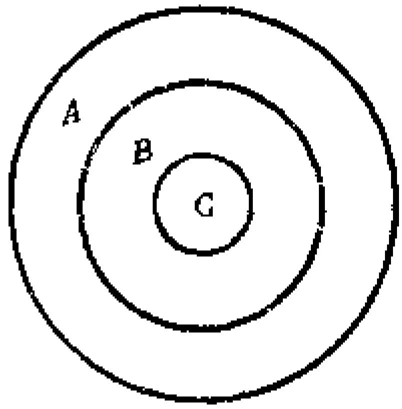


图 45

集 A，小圆表示集 B，通过图 44，我们能看到集 B 的每个元素也是集 A 的元素，因此，年满 18 岁的人都能领到司机执照．

再看另一个叙述：“假定所有的姑娘都很漂亮，作妻子的都是姑娘，那么，所有作妻子的都是漂亮的人”．这个叙述我们能用下面的三句话来表示：

(a) 所有的姑娘都是漂亮的人；

(b) 作妻子的都是姑娘；

(c) 因此，所有的妻子都是漂亮的人．

这一叙述我们也能用下面的集来表示：

A = 所有漂亮的人的集，

B = 所有姑娘的集，

C = 所有作妻子的集．

图 45 展示了这些集之间的关系．

现在我们用集的记法来分析上面的叙述：

$A \cap B = B$ 所有的姑娘(集 B)包含在集 A 中，因此所有的姑娘都是漂亮的人。

$B \cap C = C$ 所有作妻子的(集 C)包含在集 B 中，因此都是姑娘。

$A \cap C = C$ 所有作妻子的(集 C)包含在集 A 中，因此都是漂亮的人。

现在我们就能从上面的图和分析得出这样的论断："所有作妻子的都是漂亮的人。"这是一个符合逻辑的论断。

上面这种方式的推理论述，叫做**三段论法**。这个名词是从古希腊哲学家那里传下来的。古希腊哲学家们把三段论法分析为三个部分：

(a) **大前提** (所有的姑娘都是漂亮的人)；

(b) **小前提** (所有的妻子都是姑娘)；

(c) **论断** (所有的妻子都是漂亮的人)。

每个三段论法都有三项，在上面的例子里，三个项是"漂亮的人"，"姑娘"，"作妻子的"，每个项在三段论法里都出现两次。

在三段论法里，又可以分为**全称断语**和**特称断语**。

全称断语包括说明这个断语所涉及的集合中的所有元素，这种断语可以是肯定的断语，例如："所有的姑娘都是漂亮的人"所包含的集合间的关系如图 46 所示：B 是 A 的子集(或者这两个集相同)。请记住：在这里和下面，我们都以 A 表示所有漂亮的人的集，以 B 表示所有的姑娘的集。

全称断语也可以是否定的断语，例如："没有一个姑娘是

漂亮的人”，与这个全称否定断语对称的两个集是相离的，如图 47 所示.

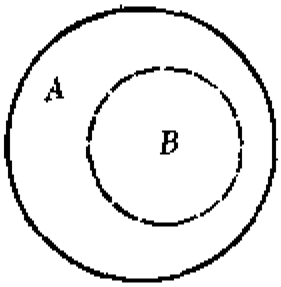


图 46

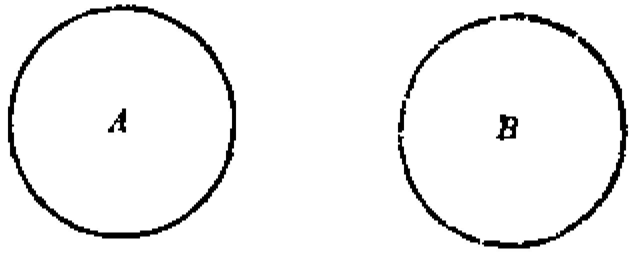


图 47

只涉及一个集的部分元素的断语叫做特称断语. “有些姑娘是漂亮的人”，就是肯定特称断语的一个例子. 图 48 表

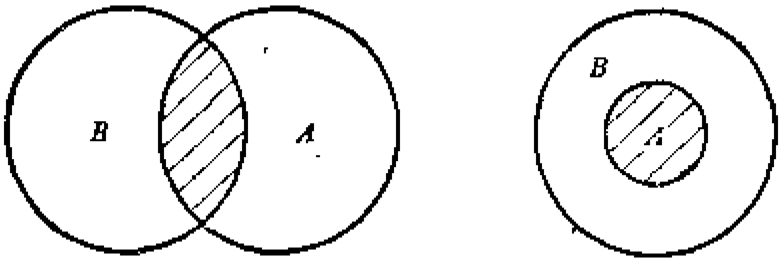


图 48

明对应于这种论断的集的关系可以用下述两种方法之一来描绘：(1) 两个集可能相交，表示有些姑娘是不漂亮的人，而有些漂亮的人不是姑娘. (2) 或者有些漂亮的人的集(A)可能恰巧是姑娘的集(B)的子集.

“有些姑娘不漂亮”，就是一个否定的特称断语. 图 49 说

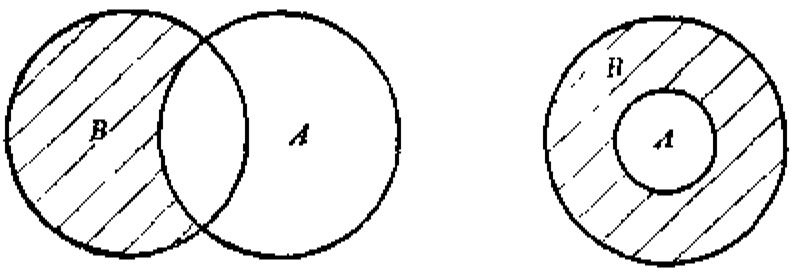


图 49

明了对应于这种论断的两个集的关系．应注意的是，图 49 与图 48 一样，只是判断的问题不同，从而画出的阴影部分也不同。

由于从一个特称断语能导致两种可能的集合关系，所以根据一个特称断语作出的逻辑论断，要比根据一个全称断语作出的逻辑论断更加困难。

很多三段论法既有全称断语，又有特征断语．例如："如果所有的优质录音机都有几个喇叭，而有些收音机同时也是优质录音机，那么，这些收音机也有几个喇叭。"这个三段论法可以论述如下：

(a) 所有的优质录音机都有几个喇叭；

(b) 有些收音机同时也是优质的录音机；

(c) 有些收音机装有几个喇叭．

现在设 A = 所有有几个喇叭的收音机和录音机的集；

B = 优质录音机的集；

C = 收音机的集．

那么，这三个集的关系能用图 50 来说明：

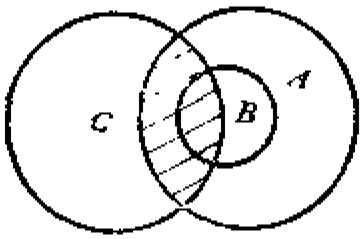


图 50

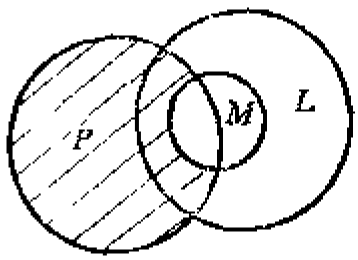


图 51

图 50 表明是根据上面的两个前提作出的论断．因为要实现 C 与 B 相交，而又不与 A 相交是不可能的．以上这个问题可以用集作如下的分析（符号 $\neq$ 表示不等于）：

$A \cap B = B$，B 的全部元素都是 A 的元素；

$B \cap C \neq \phi$，C 的部分元素是 B 的元素；

$A \cap C \neq \phi$，C 的部分元素是 A 的元素.

现在，我们再举出一个三段论法否定式的例子：

(a) 所有的数学家都留有长发；

(b) 有些政治家留有短发；

(c) 有些政治家不是数学家.

图 51 中的阴影部分，表示这个三段论法否定式的论断是符合逻辑的.

L = 所有留长发人的集，

M = 数学家的集，

P = 政治家的集.

在上述所有关于三段论法的例子中，我们由大前提和小前提得出的论断，全都是符合逻辑的，但未必是真实的，因为有些前提本身就不能够成立. 我们必须明确这一情况：借助于推理而得到的论断，并不比作为我们推理出发点的前提(或者假设)更为妥当，只有我们从真确的前提出发进行推理，才能肯定所得到的逻辑论断真实可靠. 尽管如此，在现代社会中，逻辑学仍然是进行推理一种重要而有用的工具，而集合概念很容易应用于逻辑，这使得集的研究更能切合实际.

练习 20　三段论法、集与解

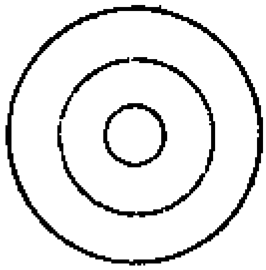
1. 作图说明下面关于集的断语，并标出图中各部分所表示的集：

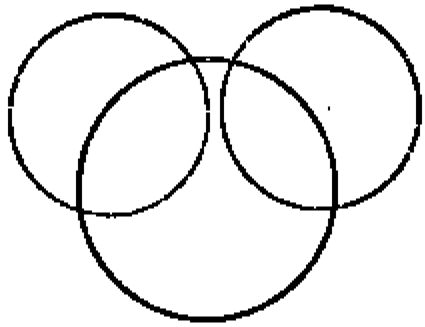
a. 所有的偶数都是整数，E = {偶数} W = {整数}；

b. 没有一个奇数是偶数，$O=\{$奇数$\}$ $E=\{$偶数$\}$；

c. 有些孩子是聪明的；$B=\{$孩子们$\}$ $I=\{$聪明人$\}$。

2.分别把下面各题中的三个圆加上标记，使之能以表示下列三段论法所涉及各集之间的恰当关系：


a.


b.

a. (i) 所有的男孩都对数学感兴趣，

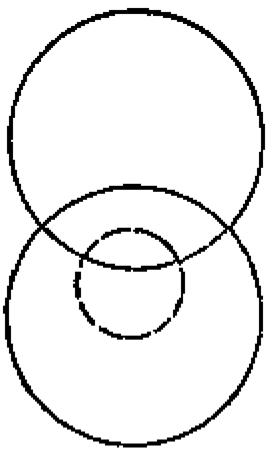
(ii) 所有数学成绩好的学生都是男孩，

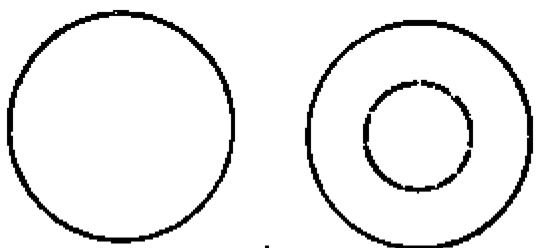
(iii) 所有数学成绩好的学生都对数学感兴趣。

b. (i) 所有骑车的学生都达不到学习要求，

(ii) 有些女学生达到学习要求，

(iii) 有些女学生不骑车。


c.


d.

c. (i) 马克中学的学生都是男孩，

(ii) 有些有礼貌的孩子是马克中学的学生，

(iii) 有些男孩是懂礼貌的。

d. (i) 所有的女孩都是诚实的，

(ii) 没有一个政治家是诚实的，

(iii) 没有一个女孩是政治家。

3. 作出略图来表示下面的三段论法，判断每个论断是否符合逻辑。

a. (i) 所有的金属都是(化学)元素，

(ii) 铁是一种金属，

(iii) 铁也是一种元素。

b. (i) 所有的大学新生都是 18 岁，

(ii) 没有 18 岁的人是聪明的，

(iii) 没有一个大学新生是聪明的。

4. 用图形来判断下面给的大前提、小前提、断语的每种搭配是否符合逻辑。

大前提：所有的小偷都是违法分子。

小前提：
- 有些小偷是什么都不怕的。
- 有些醉汉是小偷。

论　断：
- 有些违法分子是什么都不怕的。
- 有些醉汉是违法分子。
- 有些醉汉是什么都不怕的违法分子。

回 顾 和 展 望

写到这里，我们已经看到了关于集或者事物的集合的简单概念是怎样终于成为数学中一个很重要的部分的，我们又看到了怎样用集的概念来简化、澄清和解决种种问题，以及怎样把集用于几何学，代数学，和逻辑学方面的．尽管如此，我们还不过是仅仅考察了集的数学研究的很小一部分．很多数学家相信：由于集论是那么简单而又具有基础的性质，将来很有可能用它来统一各种数学学科的研究．

今后在学习数学的时候，我们应当寻求各种各样的方法把集合概念应用到各种新问题上来．在我们课本里可能没有用上集合的符号，但是集合的概念比它的符号或记法更为重要．只要我们掌握了各种集合的概念，就会在研究数学的道路上迈出一大步．

练 习 21

A. 下面哪些论断是正确的?

1. 每个集至少有一个元素．

2. 空集是所有整数集的一个子集．

3. 如果两集有相同个数的元素，则两集相等．

4. 地球上的原子与自然数之间存在有一一对应．

5. 自然数集与能被 17 整除的数集等势(即有同样多的元素)．

6. A 是英文元音字母的集，B 是所有英文字母的集，则 $A\subset B$。

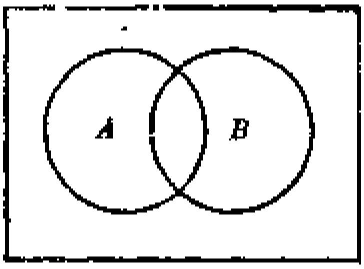
7. 男孩子的集和女孩子的集是分离的(不相交的)。

8. 如果 $P\subset Q$，那么 $Q'\subset P'$。

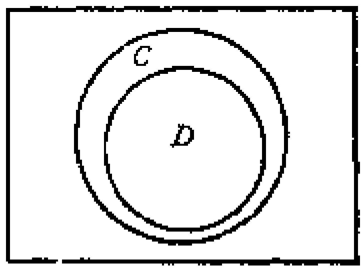
9. 如果 $n(A)=n(B)$，那么 A 与 B 等势。

10. 线段 x____y 上的点与线段 R____T 上的点之间有一一对应。

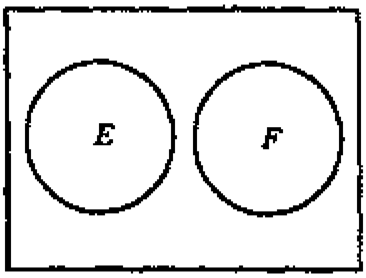
B. 根据图下注明的关系在图中绘上阴影。

11.


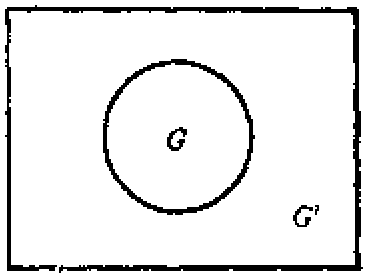
$A\cup B$

12.


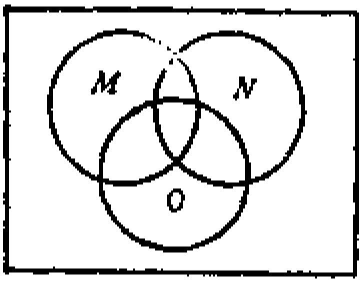
$C\cap D$

13.


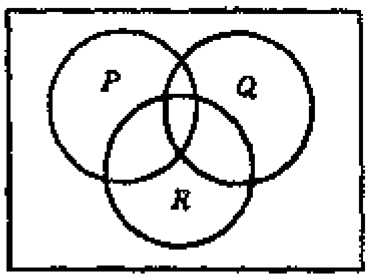
$E\cap F$

14.


$G\cup G'$

15.


$M\cap(N\cup O)$

16.


$(P\cap Q)\cup(P\cap R)$

C. 画出略图用来表示下面各集之间的关系：

17. 能被 3 整除的数的集 (A) 与能被 7 整除的数的集 (B)。

18. 奇数集 (C) 与奇数的平方数的集 (D)。

19. $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$Y=\{2, 4, 6, 8\}$，$Z=\{3, 4\}$。

20. 根据第 19 题，求出 $X \cap (Y \cup Z)$。

D. 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8\}$, 求:

21. $A \cap B =$

22. $B' =$

23. $A' \cap B =$

24. $A \cup B =$

25. $A \cap \varphi =$

练 习 答 案

练习 1

1. a. $\{a, e, i, o, u\}$; b. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$;

   c. {March (三月), May (五月)};

   d. {Spain (西班牙), Sweden (瑞典), Switgerland (瑞士)}.

2. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

3. 奥斯汀，莫里斯，M. G. 牌跑车，沃尔斯利.

4. a. 26; b. 5.

5. a. 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90;

   b. 同 a; c. 有.

练习 2

1. a. {Somerset (萨默塞特), Sussex (苏塞克斯), Surrey (萨里), Suffolk (萨福克), Staffordshire (斯塔福特郡), Shropshire (希罗普郡)};

   b. $\{I, V, X, L, C, D, M\}$;

   c. {Balfour (巴尔丹), Baldwin (鲍德温), Bonar Law (博纳劳)},

   d. $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$.

2. a. 能被 5 整除的小于 30 的自然数的集;

b. 能被 3 整除的小于 20 的自然数的集；

c. 英文前 5 个字母的集；

d. 星期的(英文)名字用 T 字母开始的集。

3. a. 是；　　b. 不是；　　c. 是；　　d. 是。

练习 3

1. 是。　　2. 是。　　3. 不是。

练习 4

1. a.; d.　　2. a.　　3. a. 5; b. 51; c. 40; d. 8。

4. a.; b.; d.　　5. a. 26; b. 24; c. 2; d. 10。

练习 5

1. d.　　2. a.; b.; d.　　3. a.; b.; d.

练习 6

1. a. $\{3, 5, 7\}$；　b. $\{3, 9\}$，　c. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$；

   d. $\{\quad\}$。

2. a. $\{x, y\}$；　b. {福特}；　c. {圣诞节}；

   d. {方形}（也可以举出其它的例子）。

3. a. $\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{\quad\}$，$\{a, b, c\}$；

   b. $\{7, 11\}$，$\{7\}$，$\{11\}$，$\{\quad\}$；

   c. 可照 3a 举例；

   d. 共有 16 个集，如 $\{p, q\}$，$\{q, r\}$，等等。

4. 2，4，8，16

5. a. 32；　b. $P = 2^n$。

练习 7

1. a. 所有剑桥大学学生的集；

   b. 所有英国汽车的集；

   c. 所有各种毛线衣的集；

   d. 10 至 20 之间全部实数的集（也可以作出其它类似的回答）。

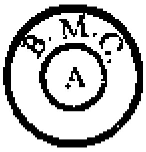
2. a. 学校里任何一个学习小组的集；

   b. {4, 5, ……, 29}；

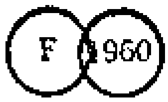
   c. 正方形的集；

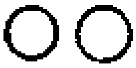
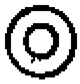
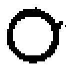
   d. 图书馆里的数学书的集（也可以作出其它类似的回答）。

练习 8

1. a. 

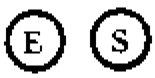
   b. 

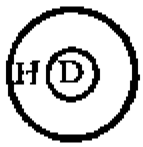
   c. 

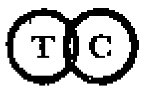
2. a. 
   b. 
   c. 
   d. 

3. a. IV　　b. II　　c. II　　d. II

4. a. 

   b. 

   c. 

   d. 

练习 9

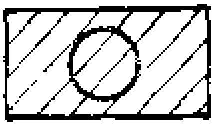
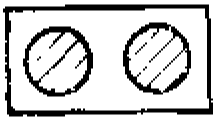
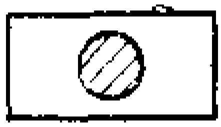
1. a. $\{a, b, c, d, f, h\}$；　　b. {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12}；

   c. {玛丽，海伦，简、格雷斯，安妮，苏珊}；

   d. {△, □, ○, ★}。

2. a. 6；　　b. 8；　　c. 6；　　d. 4。

3.

a.  b.  c.  d. 

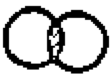
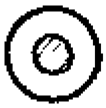
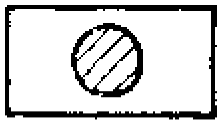
4. a. A;　　b. A;　　c. U。

练习 10

1. a. $\{a, c\}$;　　b. {沃尔斯利};　　c. {　　　　};

   d. $\{3, 5, 7\}$。

2.

a.  b.  c.  d. 

3. a. A;　　b. ϕ;　　c. A。

4. $n(X \cup Y) = 14,3$。

5. $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$。

练习 11

1. $\{6, 7, 8, 9\}$。　　2. 非福特汽车的集。

3. 非直角三角形的集。

4. a. 1960 年制的福特汽车的集;

   b. 福特汽车与 1960 年制的汽车的集;

   c. 非福特汽车的集;

   d. 1960 制奥斯汀、贾格尔、沃尔斯利汽车的集;

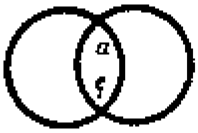
   e. 福特汽车(除去 1960 年制的)的集。

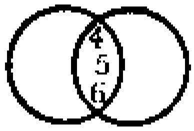
   f. 非 1960 年制的奥斯汀、贾格尔、沃尔斯利汽车的集。

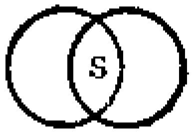
   g. 非 1960 年制造福特汽车的集;

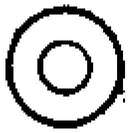
   h. 同 f;　　i. 同 g。

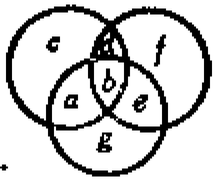
练习 12

1. a. 

b. 

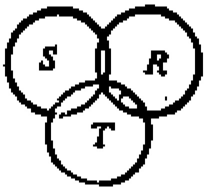
c. 

d. 

2. a. 

b. 

$a=\{2, 4, 6, 8\}$
$b=\{2, 3, 5, 7\}$
$c=\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

c. 

3. a. 20%;　　b. 50%;　　c. 10%。

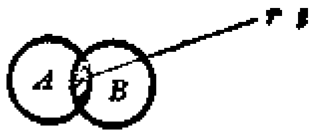
4. a. {1, 2, 3, 9};　　b. 3;　　c. 3。

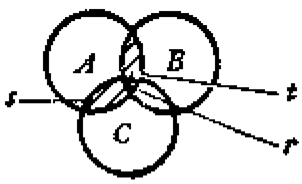
5. 伯恩利对富勒姆；曼彻斯特对兵工队；托特纳姆对谢斐尔德；伊普斯威奇对切尔西。

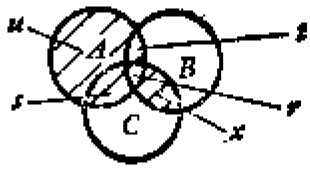
6. a. 5/21;　　b. 16/21。

练习 13

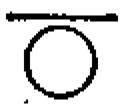
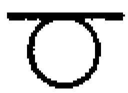
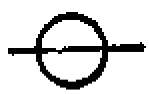
1. 

2. 

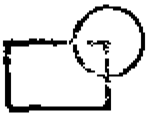
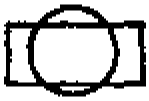
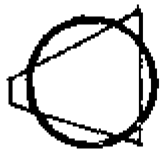
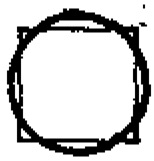
3. 

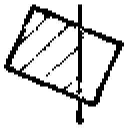
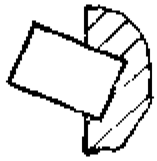
4. 

练习 14

1. a. 　　b. 　　c. 　　d. { }

2. a. 3　b. 6　c. 3　d. 7

3. a. 　b. 　c. 　d. 

4. a. $\{A, B\}$　b. 　c. 

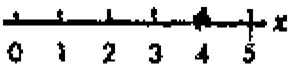
5. a. b. d.

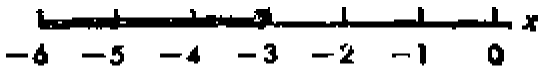
练习 15

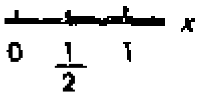
1. $\{5\}$.　2. $\{+5, -5\}$.　3. $\{6, 7, 8\}$.

4. $\{\quad\}$.　5. {所有的数}.

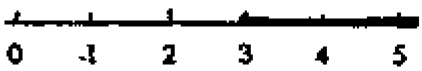
练习 16

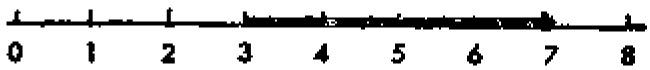
1. a. 

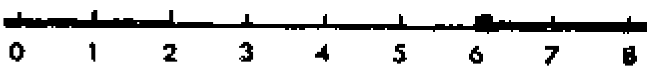
b. 

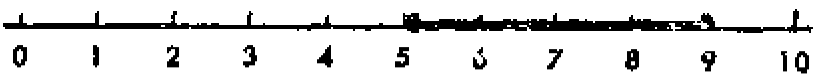
c. 

d. 所有的数

2. a. 

b. 

c. 

d. 

练习 17

1. a. $\{(2, 3), (1, 4), (0, 5)\}$;　b. $\{(1, 10), (3, 6), (6, 0)\}$;

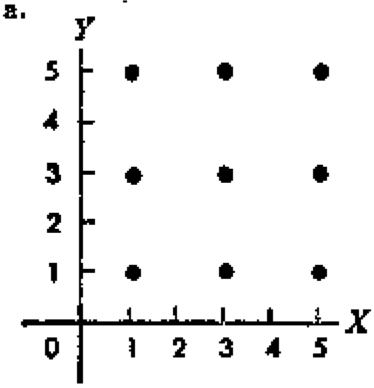
c. $\{(3, 2), (5, 8), (0, -7)\}$.

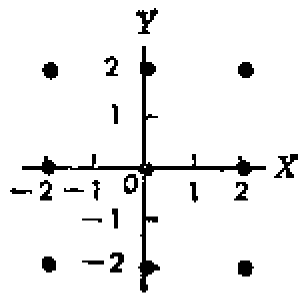
2. a. (4, −2);　　　　b. (6, 4)。

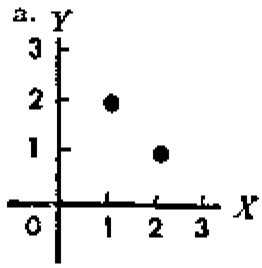
练习 18

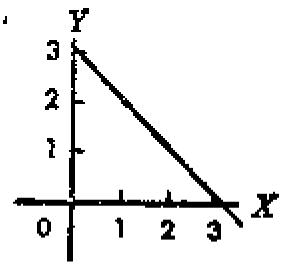
1. a. 减 5;　　b. 用 3 除;　　c. 乘 1 或加 0;　　d. 加 1;
   e. 无。
2. a, b, c, d,

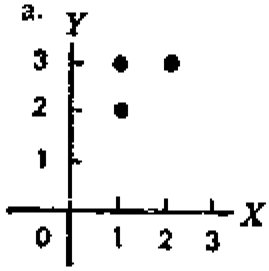
练习 19

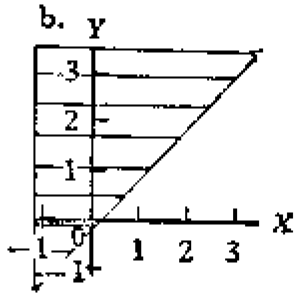
1. a.


b.


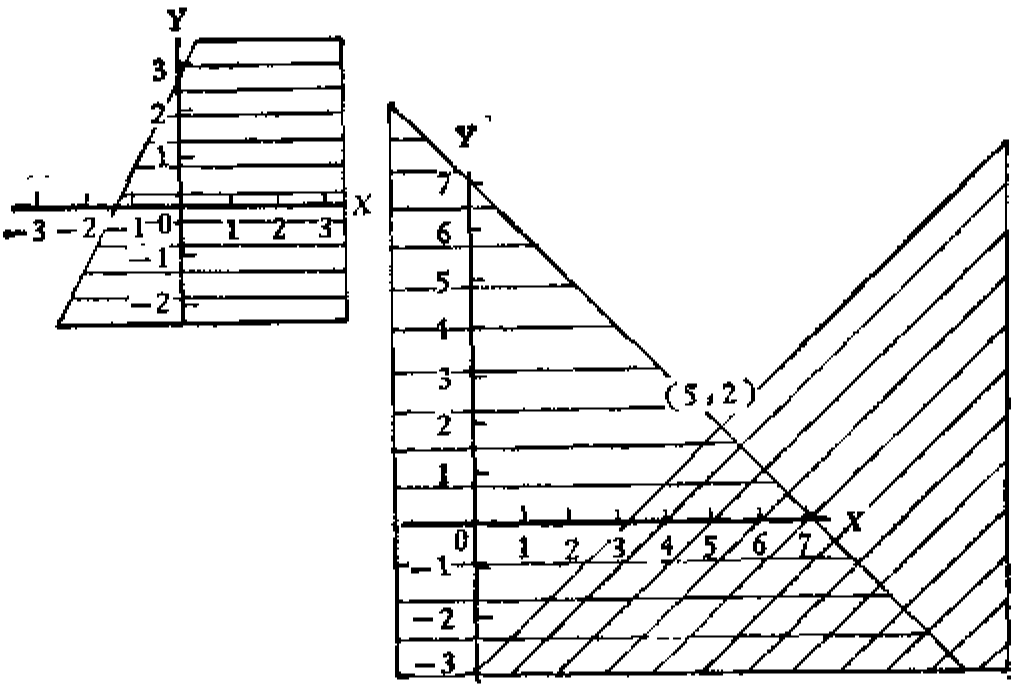
2. a.


b.


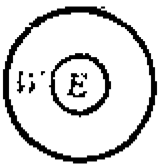
3. a.


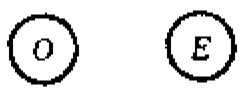
b.


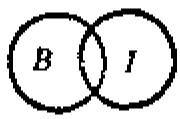
4.

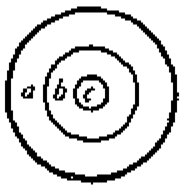


练习 20

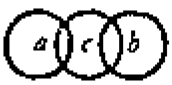
1. a. 

b. 

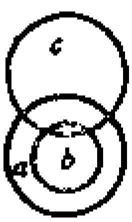
c. 

2. a. 

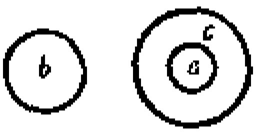
a = 所有对数学感兴趣的人，
b = 所有的男孩子，
c = 所有数学成绩优良的学生.

b. 

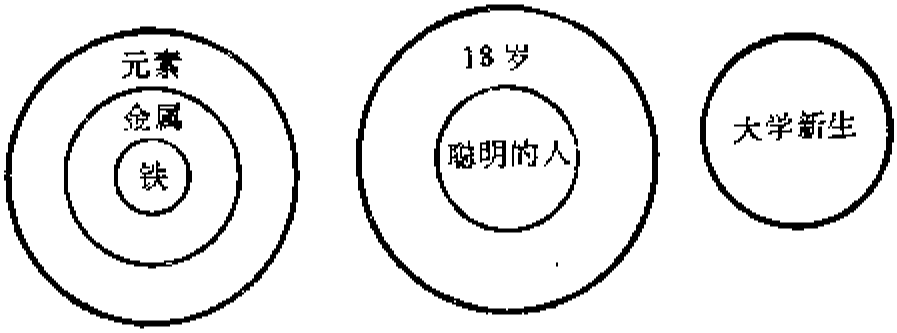
a = 骑车的学生的集，
b = 成绩优良的学生的集，
c = 女学生的集.

c. 

a = 所有的男孩子的集，
b = 所有的马克中学的学生的集，
c = 所有的有礼貌的学生的集.

d. 

a = 所有女孩子的集，
b = 政治家的集，
c = 所有的诚实人的集.

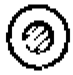
3. a. 

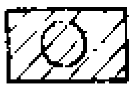
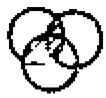
符合逻辑　　　　　　符合逻辑

4. "有些醉汉是什么都不怕的违法分子"是不符合逻辑的。

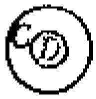
练习 21

1. 不正确。 2. 正确。 3. 不正确。 4. 不正确。 5. 正确。
6. 正确。 7. 正确。 8. 正确。 9. 正确。 10. 正确。

11.  12. 

13.  14.  15.  16. 

17. 

18. 

19. 

20. {2, 3, 4}

21. {2, 4}　22. {1, 3, 5, 7, 9}　23. {6, 8}

24. {1, 2, . . . 6, 8}　25. ϕ

[General Information]
书名=集合、命题与运算
作者=（英）D．A．约翰逊　W．H．格伦著　王善民译
页数=79
SS号=11020262
出版日期=1983年04月第1版