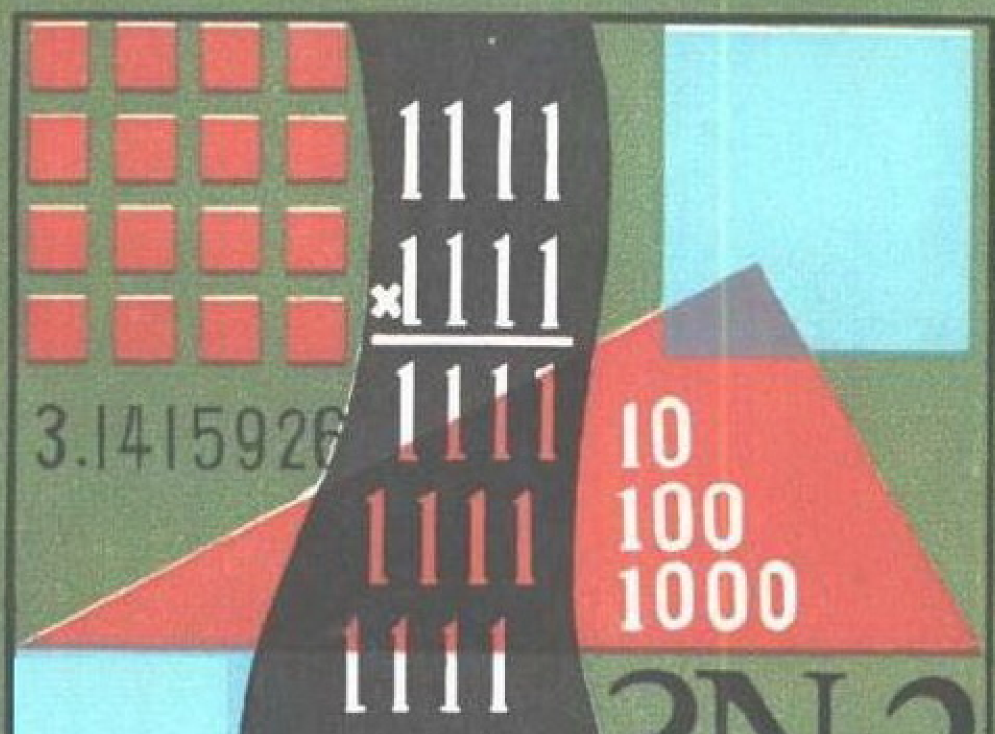
《自修数学》小丛书

数 型

〔英〕W. H. 格伦 D. A. 约翰逊 著



科学出版社

《自修数学》小丛书

数　　型

〔英〕W. H. 格伦　D. A. 约翰逊 著

戴昌钧　郑学侠 译

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 简 介

本书是《自修数学》小丛书中的一本．书中通过用运算符号指出数之间的关系来寻找规律，然后再对这些规律加以说明或证明，从而发现数型，并且简单地介绍了数型的应用．书中穿插了一些练习题，书末附有答案．

本书深入浅出、颇有趣味．可供具有中等文化程度的广大读者阅读．

William H. Glenn　Donovan A. Johnson

NUMBER PATTERNS

John Murray London, 1971

《自修数学》小丛书

数　　型

〔英〕W. H. 格伦　D. A. 约翰逊 著

戴昌钧　郑学侠 译

责任编辑　陈永锵、毕颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981 年 10 月第一版　开本：787×1092 1/32

1981 年 10 月第一次印刷　印张：2

印数：0001—15,900　字数：36,000

统一书号：13031・1752

本社书号：2389・13—1

定价： 0.20 元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书（Exploring Mathematics On Your Own）是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物。该丛书自1964年初版后，于1974年、1976年多次再版印刷。为开阔读者眼界、增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

所有的最深的数学研究的结果最终一定要表示成为整数性质的简单形式。

——利奥波德·克罗纳克

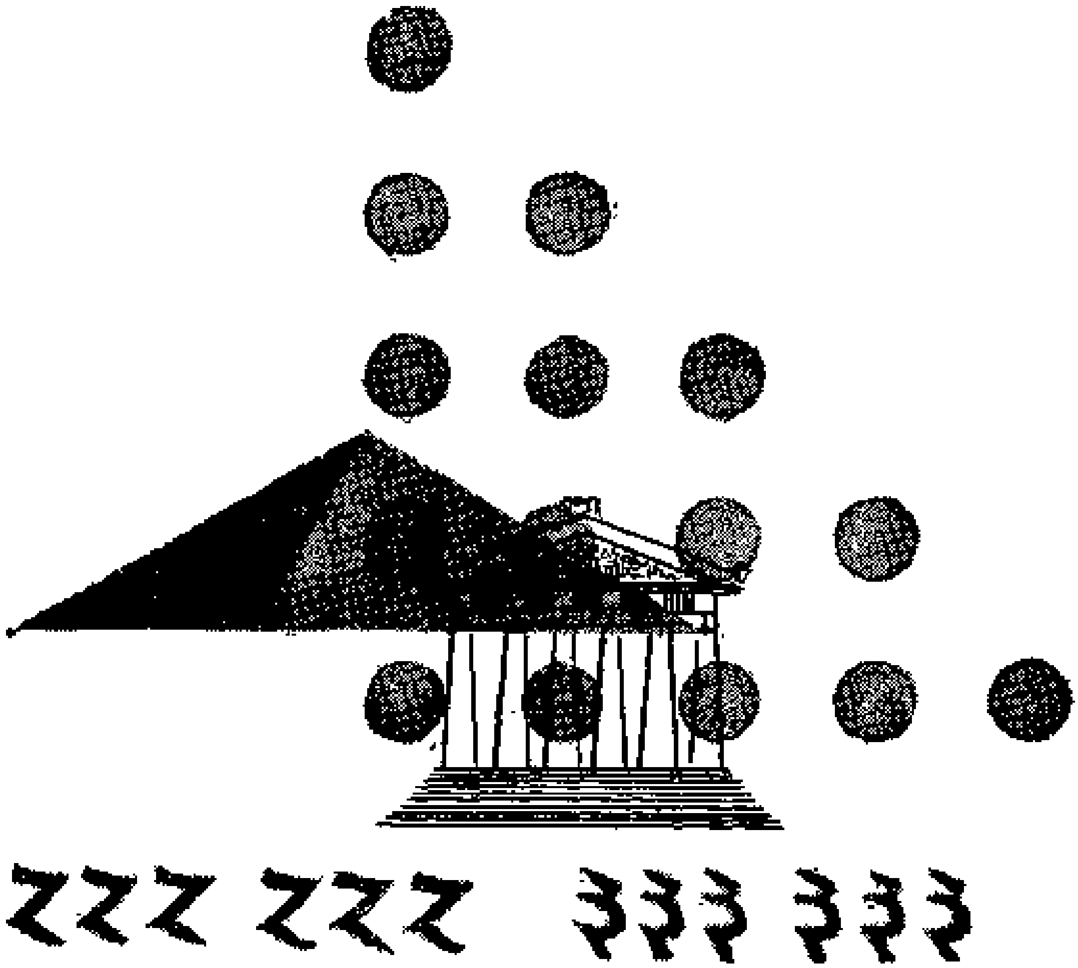
写在阅读之前

阅读数学方面的书，犹如阅读一个传奇故事或探索一个洞穴一样，能够唤起一种激情。在数学中有许多惊愕，迷惑，诀窍以及有趣的思想。如果你自己在数学方面作某种探索，你将会享受到发现新概念的愉快。一个数学家竭尽全力所作的事情之一就是试图在他所研究的课题中发现某些数字模型。这些模型的发现将能导致重要的新的数学概念。这本小书将帮助你去发展你对数型的敏感性。

阅读这本关于数型的小册子和看一本故事书在方式上或许有所不同，首先，你应该看慢些。如果你第一次读时，不完全明白它的某一句或某一节的意思，你不必焦虑，此时你要有耐心。尽可能养成边看边演算的习惯。如果你做了练习，画了图并且完成书中所提的问题，那就比较容易了解你所看的内容了。

我们希望这本小册子能使你分享别人在探索数型的过程中已经有的那种愉快。

目　　录



一、数 学 模 型

1. 通过算术发现数型

多少年来，人们一直对数学模型发生兴趣．古代埃及人和希腊人在他们的建筑艺术中广泛应用了几何图形．阿拉伯人、印度人及希腊人用数字模型进行工作，有些人甚至把神秘的力量归因于某些数的组合．当今的数学家及科学家则在实验及一些问题的数据中寻找趋势或规律，因为这种发现，常常

能导出重要的新概念.甚至有人说,数学就是模型的研究. 有一点可以肯定,通过研究一些揭示特殊模型的数之间的关系,你的确能获知数学领域中的许多内容,同时在这过程中,你还会有很大的乐趣. 下面的材料可作为一个很好的出发点.

瞧这些关系:

$$1\times 9+2=11$$

$$12\times 9+3=111$$

$$123\times 9+4=1111$$

$$1234\times 9+5=11111$$

这个模型如果正确的话,那你就不用计算而有充分的信心写出更多的等式来,比如说:

$$12345\times 9+6=111111$$

$$123456\times 9+7=1111111$$

等等.

问题是以上每一步是否都成立. 当然,你可以先作乘法后作加法这样直接来验算以上各式,但这样做太麻烦. 让我们来分析其中一个式子:

$$1234\times 9+5=11111$$

我们把它换一种写法. 把 1234 写成

$$1234=1111+111+11+1$$

这样

$$\begin{aligned}1234\times 9&=(1111+111+11+1)\times 9\\&=9999+999+99+9\end{aligned}$$

当你把5(写成 $1+1+1+1+1$)加上去,就有

$$(9999+1)+(999+1)+(99+1)+(9+1)+1$$

或

$$10,000+1,000+100+10+1$$

这就等于 11,111。

这刚好是你所希望证明的。这个方法足以说明以上各式都是正确的，因为其中任一式子都可以用同样的方法来处理。这种方法使数学家在研究问题时省去大量的工作。

如果你不能用运算符号指出数之间的这些关系，那就不可能得到如此有趣的数字排列。数字符号和运算符号一起构成了一种语言——数学语言。

练习 1　研究数型

请你在下面各个数型的基础上，按照指定的运算符号依顺序至少再往下写一步。注意这些模型如何强调以10为一位的原则以及如何起着我们数系基础的作用。

1.
$$\begin{aligned} 1&=1\\ 10+1&=11\\ 100+10+1&=111\\ 1000+100+10+1&=1111\\ &\vdots \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 10-1&=9\\ 100-1&=99\\ 1,000-1&=999\\ 10,000-1&=9999\\ &\vdots \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 10&=10\\ (10)(10)&=100\\ (10)(10)(10)&=1000\\ (10)(10)(10)(10)&=10000\\ &\vdots \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} \frac{1}{10}&=0.1\\ \frac{1}{(10)(10)}&=0.01\\ \frac{1}{(10)(10)(10)}&=0.001\\ \frac{1}{(10)(10)(10)(10)}&=0.0001\\ &\vdots \end{aligned}$$

5. $9+1=10$

$90+10=100$

$900+100=1000$

$9000+1000=10000$

$\vdots$

6. $(11)(1)=10+1$

$(11)(2)=20+2$

$(11)(3)=30+3$

$(11)(4)=40+4$

$\vdots$

7. $1\times 9=10-1$

$2\times 9=20-2$

$3\times 9=30-3$

$4\times 9=40-4$

$\vdots$

8. $1\times 8=10-2$

$2\times 8=20-4$

$3\times 8=30-6$

$4\times 8=40-8$

$\vdots$

9. $(1\times 9)+2=11$

$(12\times 9)+3=111$

$(123\times 9)+4=1111$

$(1234\times 9)+5=11111$

$\vdots$

10. $(1\times 8)+1=9$

$(12\times 8)+2=98$

$(123\times 8)+3=987$

$(1234\times 8)+4=9876$

$\vdots$

11. $(1\times 9)-1=08$

$(21\times 9)-1=188$

$(321\times 9)-1=2888$

$(4321\times 9)-1=38888$

$\vdots$

12. $(1\times 8)-1=07$

$(21\times 8)-1=167$

$(321\times 8)-1=2567$

$(4321\times 8)-1=34567$

$\vdots$

13. $9\times 6=54$

$99\times 66=6534$

$999\times 666=665334$

$9999\times 6666=66653334$

$\vdots$

14. $7\times 7=49$

$67\times 67=4489$

$667\times 667=444889$

$6667\times 6667=44448889$

$\vdots$

15. $66 \times 67 = 4422$

$666 \times 667 = 444222$

$6666 \times 6667 = 44442222$

⋮

16. $333667 \times 1113 = 371371371$

$33336667 \times 11133 = 371137113711$

$3333366667 \times 111333 = 371113711137111$

⋮

17. $333667 \times 2223 = 741741741$

$33336667 \times 22233 = 741174117411$

$3333366667 \times 222333 = 741117411174111$

⋮

18. $333667 \times 1116 = 372372372$

$33336667 \times 11166 = 372237223722$

$3333366667 \times 111666 = 372223722237222$

⋮

19. $333667 \times 2226 = 742742742$

$33336667 \times 22266 = 742274227422$

$3333366667 \times 222666 = 742227422274222$

⋮

2. 数的平方

用不同的方式把数写出来，你也能够建立有趣的数的模

型，关于这方面的一个不寻常的例子是，用一种特殊的方法把所有的数平方起来：

$1^2 = 1$

$2^2 = (1 + 1)^2 = 1 + 2 + 1$

$3^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$

$4^2 = (1 + 1 + 1 + 1)^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$

可以按照下面的方法作乘法求得4^2，从而验证上述这些结果的正确性。

$4^2 = (1 + 1 + 1 + 1)^2$

或者写成竖式：

$$
\begin{array}{r}
(1 + 1 + 1 + 1) \\
\times (1 + 1 + 1 + 1) \\
\hline
1 + 1 + 1 + 1 \\
1 + 1 + 1 + 1 \phantom{{}+1} \\
1 + 1 + 1 + 1 \phantom{{}+1+1} \\
1 + 1 + 1 + 1 \phantom{{}+1+1+1} \\
\hline
1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1
\end{array}
$$

与这有密切关系的是下述模型：

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

用如下方法计算 1111^2 你可以看到这和上面例题是多么相似：

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times\ 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

在下面练习中，不作实际的计算，而是运用上面那些模型来帮助你填空

练习2 由整数平方得到的模型

在下列习题的每一个空格填写上一个答数.

1. $\dfrac{22\times 22}{1+2+1}=$____

2. $\dfrac{333\times 333}{1+2+3+2+1}=$______

3. $\dfrac{4444\times 4444}{1+2+3+4+3+2+1}=$________

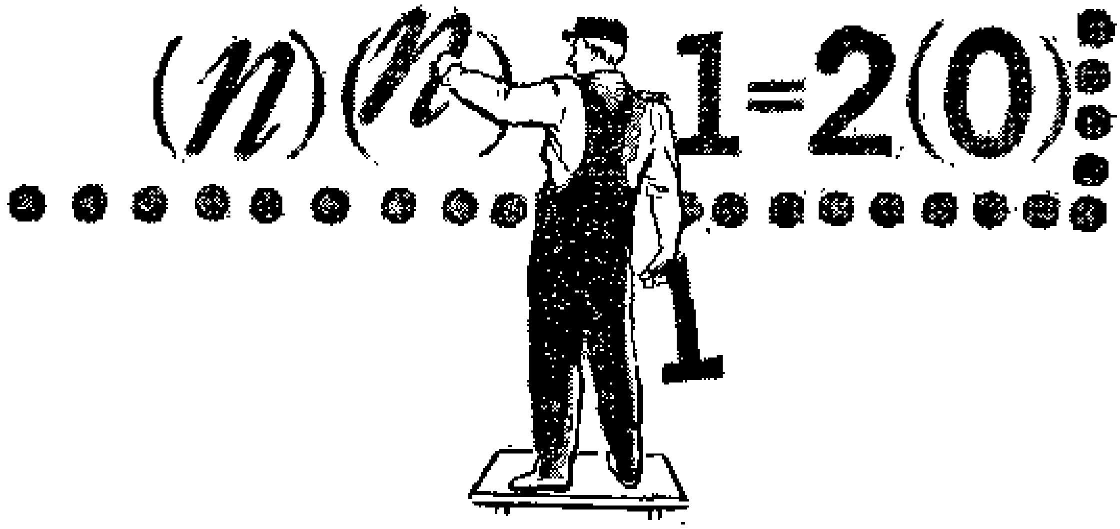
4. $\dfrac{55555\times 55555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}=$__________

5. $\dfrac{666666\times 666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}=$____________

6. $\dfrac{7777777\times 7777777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}=$______________

7. $\dfrac{88888888 \times 88888888}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}=$ ______

8. $\dfrac{999999999 \times 999999999}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}=$ ______



二、数型的代数

1. 寻找数之间关系的一个新方法

现在，再看另一种数型．先用 1 乘它自己，得到

$$(1)(1)=1$$

然后把 1 加上 1，并把 1 减去 1，再把所得两数相乘，就是：

$$(1+1)(1-1)=(2)(0)=0$$

用 2 重复上述作法，即 2 乘上 2，有

$$(2)(2)=4$$

把 2 加上1，并把 2 减去1，相乘，则有

$$(2+1)(2-1)=(3)(1)=3$$

如上法，用 3、4、5 继续作下去，一直到看出一个模型为止．

让我们并排地给出所得到的每一对答案，这样，有助于总结出模型来．

$$\begin{cases}(1)(1)=1\\(2)(0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(2)(2)=4\\(3)(1)=3\end{cases}\quad\begin{cases}(3)(3)=9\\(4)(2)=8\end{cases}\quad\begin{cases}(4)(4)=16\\(5)(3)=15\end{cases}$$

你注意到第二行的答案总比第一行的相应答案少1吗?这一关系可写成如下形式:

$$(1)(1)-1=(2)(0)$$
$$(2)(2)-1=(3)(1)$$
$$(3)(3)-1=(4)(2)$$
$$(4)(4)-1=(5)(3)$$

一个确定的模型已经显示出来了,按照上述模型,你将很容易地写出下一个表达式来.

表示一数字模型,而又不用写出一系列的算术表示式,对我们是有利的. 一个好的办法是用一个符号,例如用一个字母 n 表示一个整数. 这样上述数字模型的关系可写为:

$$(n)(n)-1=(n+1)(n-1)$$

或 $$n^2-1=(n+1)(n-1)$$

符号 n 代表任意一个正整数. 一个符号代表给定的一类数中的任意一个数,我们称这个符号为变数或者变量.

如果我们对上等式右边指出的乘法进行运算,便有

$$(n+1)(n-1)=n\times n-n+n-1=n^2-1$$

这样,我们已经证明了等式两边都能变成相同的形式,因此,它所表示的模型对任何 n 都成立. 若对一个代数式中的变量进行任何一种替换,代数式都成立,就称这样的代数式为恒等式.

采用变量来表示和建立数学关系式是代数研究中的一个

非常重要的部分。

与上述模型十分相似的另一个数的关系是：

$$(2)(1)=(1)(1)+1$$
$$(3)(2)=(2)(2)+2$$
$$(4)(3)=(3)(3)+3$$
$$(5)(4)=(4)(4)+4$$
$$\vdots$$

你能不能再写出两步来？你可以用下式来推广这一模型：

$$(n+1)n=(n)(n)+n$$

或

$$(n+1)n=n^2+n$$

如果我们对上等式左边按规定的乘法进行运算，我们得到 n^2+n，这就证明了确实存在这种数型。

练习 3　数型的证明

对下列每一个模型再写出一步来，然后用变数 n 写出它的一般形式，再证明你所得到的一般形式是正确的。

1. $(11)(1)=(10)(1)+1$
   $(11)(2)=(10)(2)+2$
   $(11)(3)=(10)(3)+3$
   $(11)(4)=(10)(4)+4$
   $\vdots$

2. $(9)(1)=(10)(1)-1$
   $(9)(2)=(10)(2)-2$
   $(9)(3)=(10)(3)-3$
   $(9)(4)=(10)(4)-4$
   $\vdots$

3. $(8)(1)=(10)(1)-(2)(1)$
   $(8)(2)=(10)(2)-(2)(2)$
   $(8)(3)=(10)(3)-(2)(3)$
   $(8)(4)=(10)(4)-(2)(4)$
   $\vdots$

4. $(1+1)^2=1^2+1+1+1$
   $(2+1)^2=2^2+2+2+1$
   $(3+1)^2=3^2+3+3+1$
   $(4+1)^2=4^2+4+4+1$
   $\vdots$

5. $1^2 + 1 = 2^2 - 2$

$2^2 + 2 = 3^2 - 3$

$3^2 + 3 = 4^2 - 4$

$4^2 + 4 = 5^2 - 5$

$\vdots$

7. $(1)(25) = \left(\frac{1}{4}\right)(100)$

$(2)(25) = \left(\frac{2}{4}\right)(100)$

$(3)(25) = \left(\frac{3}{4}\right)(100)$

$(4)(25) = \left(\frac{4}{4}\right)(100)$

$\vdots$

6. $(1)(5) = \left(\frac{1}{2}\right)(10)$

$(2)(5) = \left(\frac{2}{2}\right)(10)$

$(3)(5) = \left(\frac{3}{2}\right)(10)$

$(4)(5) = \left(\frac{4}{2}\right)(10)$

$\vdots$

8. $(15)(1) = (1)(10) + \left(\frac{1}{2}\right)(10)$

$(15)(2) = (2)(10) + \left(\frac{2}{2}\right)(10)$

$(15)(3) = (3)(10) + \left(\frac{3}{2}\right)(10)$

$(15)(4) = (4)(10) + \left(\frac{4}{2}\right)(10)$

$\vdots$

2. 来自特殊因数的特殊数型

乘法运算常常为许多有趣的数的关系提供了基础。让我们来考察具有这种性质的一些问题吧。

你随便举出一个数字，比如说，我们假设它是 7 。把 7 与 9 相乘，得到 63 ，然后再作乘积：

$$\begin{array}{r} 12{,}345{,}679 \\ \times\quad 63 \\ \hline \end{array}$$

你是否为你所得的答案而感到惊奇？试试另一个数字，比如说 5，把 5 与 9 相乘，得到 45，然后又作乘积：

$$\begin{array}{r} 12,345,679 \\ \times \quad 45 \\ \hline \end{array}$$

算出这个答案，你再一次感到惊奇吧？

总共只有 10 个数字(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)，你可以用同样的方法试试其余 8 个。选择一个数字把它乘上 9，得到一个积，把这个积又乘上：

$$12,345,679$$

这个答案的所有数字总是和你起初选择的那个数字一样。

你能解释这个现象吗？

让我们回到第一个例子，并且考察等式：

$$12,345,679 \times 63 = 777,777,777$$

这能写作

$$12,345,679 \times 63 = 7(111,111,111)$$

对上式两边同时除以 7，我们有：

$$12,345,679 \times 9 = 111,111,111$$

很容易验算：

$$\frac{111,111,111}{9} = 12,345,679$$

如果你确实亲自动手作了上面的除法，你就明白为什么不出现 8 。

对任何其它数字，可进行同样的推理，因为既然

$$12,345,679 \times 9 = 111,111,111$$

于是用 d 乘等式两边，得

$$12,345,679 \times (d \times 9) = d(111,111,111)$$

$$= ddd,ddd,ddd.$$

对 3、7、11、13和 37 取不同的结合，作出乘积，将出现另一些特殊的数的关系，例如

$3 \times 37 = 111$

$7 \times 11 \times 13 = 1001$

$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 = (111)(1001) = 111,111$

练习 4 乘法规律

依据上面所给的一些事实，你能对下面的每一种数型给出一种解释吗?

1. $143 \times 1 = 143 \longrightarrow 143 \times 7 = 1001$

$143 \times 2 = 286 \longrightarrow 286 \times 7 = 2002$

$143 \times 3 = 429 \longrightarrow 429 \times 7 = 3003$

⋮

完成这个表一直到 $143 \times 9 =$

2. $\frac{111}{3} = 37 \quad \frac{222}{6} = 37 \quad \frac{333}{9} = 37$

写出分子分别是 3 个4，3 个5，3 个 6， 3 个7，3 个8，3 个 9 而分数值相同(都等于 37)的其它分数.

3. $15873 \times 1 = 15873 \longrightarrow 15873 \times 7 = 111,111$

$15873 \times 2 = 31746 \longrightarrow 31746 \times 7 = 222,222$

$15873 \times 3 = 47619 \longrightarrow 47619 \times 7 = 333,333$

⋮

完成这个表一直到:

$$15873 \times 9 \times 7$$

3. 改 变 运 算

考察下列数字模型：

$$\left(1\frac{1}{2}\right)\times 3=1\frac{1}{2}+3=4\frac{1}{2}$$

$$\left(1\frac{1}{3}\right)\times 4=1\frac{1}{3}+4=5\frac{1}{3}$$

$$\left(1\frac{1}{4}\right)\times 5=1\frac{1}{4}+5=6\frac{1}{4}$$

$$\left(1\frac{1}{5}\right)\times 6=1\frac{1}{5}+6=7\frac{1}{5}$$

也许你从这些等式得出结论：加法与乘法是恒等运算，因为不管你作乘法还是加法，都能得到相同的答案。当然，一般说来，这并不成立，但是，你怎么解释这个数字模型呢？

这个模型暗示了下列关系对于 n 的所有的值都成立：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(n+1\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(n+1\right)=\left(n+2\right)+\frac{1}{n}$$

请你注意，依次令 $n=2,3,4$ 或 5 时，如何把这个数型表示出来。其实，用简单的代数运算就能证明上面用等号分开的三个表达式是恒等的。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left(n+1\right)=\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)\times(n+1)$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)\times(n+1)$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (n + 1) = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n^2 + n}{n}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{n}$$

$$(n + 2) + \frac{1}{n} = \frac{n^2 + 2n}{n} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{n}$$

我们已经指出，这个模型实际上表示了一个非常特殊的关系。这就是说，从形式为 $1 + \frac{1}{n}$ 这样一个带分数出发，乘上数 $n + 1$ 或加上数 $n + 1$ 将得到相同的结果。

练习 5　改变运算来得到更多的模型

下面的模型似乎是说：对于一个数进行两种不同的运算可以得到相同的结果。请对每一模型，写出为使这个模型成立而必须加在这些数上的一般条件，并证明这些条件是正确的。

1. 乘法　　减法

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2 \times \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$3 \times \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$4 \times \frac{4}{5} = 4 - \frac{4}{5} = 3\frac{1}{5}$$

提示：证明下列式子恒等，

$$n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n - \frac{n}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1}$$

2.

$$\left(1\frac{1}{3}\right) \underset{\text{除法}}{\div} \frac{2}{3} = \left(1\frac{1}{3}\right) \underset{\text{加法}}{+} \frac{2}{3} = 2$$

$$\left(2\frac{1}{4}\right) \div \frac{3}{4} = \left(2\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = 3$$

$$\left(3\frac{1}{5}\right) \div \frac{4}{5} = \left(3\frac{1}{5}\right) + \frac{4}{5} = 4$$

$$\left(4\frac{1}{6}\right) \div \frac{5}{6} = \left(4\frac{1}{6}\right) + \frac{5}{6} = 5$$

提示：令上面等式中最左边的表达式是

$$\left(n + \frac{1}{n+2}\right) \div \frac{n+1}{n+2}.$$

3.

$$\left(4\frac{1}{2}\right) \underset{\text{除法}}{\div} 3 = 4\frac{1}{2} \underset{\text{减法}}{-} 3 = 1\frac{1}{2}$$

$$\left(5\frac{1}{3}\right) \div 4 = 5\frac{1}{3} - 4 = 1\frac{1}{3}$$

$$\left(6\frac{1}{4}\right) \div 5 = 6\frac{1}{4} - 5 = 1\frac{1}{4}$$

$$\left(7\frac{1}{5}\right) \div 6 = 7\frac{1}{5} - 6 = 1\frac{1}{5}$$

不提示，自己完成。

4. 从计算到数论

进行各种计算的尝试也能发现许多很有趣的数的关系。例如把接连的三个数乘起来：

$$(1)(2)(3)$$

或者

$$(2)(3)(4)$$

或者

$$(3)(4)(5)$$

请你注意，在各种情况下，积都能被 6 整除. 当然，这是因为取出的三个相邻整数中必有一个为偶数，一个为 3 的倍数，或者有一个数可以既是偶数又是 3 的倍数，例如乘积

$$(5)(6)(7)$$

6 是偶数而同时也是 3 的倍数. 这个概念的一般提法是：对所有整数 n，

$$(n-1)n(n+1)$$

都能被 6 整除.

如果我们作这个乘法，将得到

$$(n-1)n(n+1)=n^3-n$$

因此，我们可以说，对于任意整数 n，n^3-n 能被 6 整除. 这个事实告诉我们：**对于任何整数，它的立方与它本身之差能被 6 整除.**

简单的算术推导使我们得到一般的数的关系. 一个数学的命题如果得到证明就叫做定理，这样，我们就建立了关于数

的一个定理。专门研究数之间的关系的数学分支叫做数论。我们刚建立起来的定理就是数论许多定理中的一个。有许多关于数的定理最初大概就是通过认识特殊的数的模型才被发现的。

练习 6 检验数的定理

当 $n=2, n=3, n=4, n=5$ 时，求 n^3-n 的值并检验每种情形该值都能被 6 整除。

5. 四个接连的整数相乘

让我们看另一个有趣的例子，并设法从中得到第二个数的定理。

第一步：由 1 开始的四个接连的整数相乘：

$$(1)(2)(3)(4)=24$$

加上 1 $\qquad 24+1=25$

注意，这是一个完全平方 $(5)(5)=25$。

第二步：由 2 开始的四个接连的整数相乘：

$$(2)(3)(4)(5)=120$$

加上 1 $\qquad 120+1=121$

注意，这也是一个完全平方 $(11)(11)=121$。

第三步：由 3 开始的四个接连的整数相乘：

$$(3)(4)(5)(6)=360$$

加上1， $\qquad 360+1=361$

这又是一个完全平方：$(19\times19)=361$。

你能否肯定下述定理成立：**四个接连的整数的积加上1总是某一个数的平方**．从表面上看这似乎是有点离奇．但是，让我们来看看是否能得到一个证明．

一般地从 n 开始的四个接连的整数的乘积可以表示成下列形式：

$$(n)(n+1)(n+2)(n+3)$$

这应该等于 x^2-1（比某一个数 x 的平方少 1 ）．

因为 x^2-1 能写成 $(x-1)(x+1)$，所以如果我们能推导出 $n(n+1)(n+2)(n+3)$ 可以表示成某一量减去 1 与同一量加上 1 的乘积，那末，我们的证明就完成了．

按下列形式重新组合因子：

$$[n(n+3)][(n+1)(n+2)]$$

或

$$[n^2+3n][n^2+3n+2]$$

这能写成 $$[(n^2+3n+1)-1][(n^2+3n+1)+1]$$

而这刚好是形式：

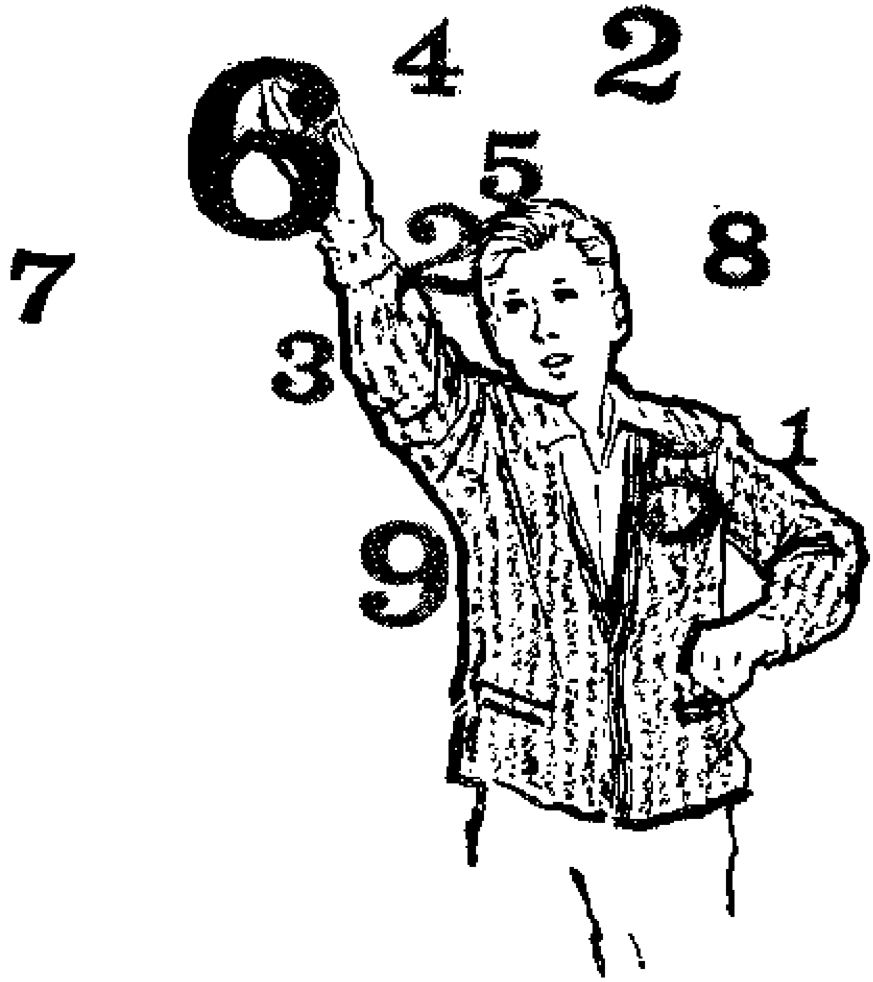
$$(x-1)(x+1)\text{ 或 }x^2-1.$$

这里 $x=n^2+3n+1$.

练习 7 检验第二个数的定理

对于下列每一乘积加上1，验证它们都是完全平方：

1. (4)(5)(6)(7)
2. (5)(6)(7)(8)
3. (9)(10)(11)(12)



三、在答案中找模型

1. 从任何一个数得到相同的答案

有一类很吸引人的数学问题，它们从任一数开始，通过一系列的算术运算，总能得到相同的答案，或者性质相似的答案。下面的问题就属于这个范围。

观察由这些问题的答案所揭示的模型虽然是件有趣的事，但真正疑难的地方在于证明问题中的“为什么”。下面给

出了前五个问题的答案和证明，你在看这些答案和证明前最好自己试着归纳出模型并给以证明。

尽管这些问题是一种游戏，然而它们突出了数字系统的某些重要性质，所以还有它们有用的一面。

2. 为什么答案总是22

任意选择小于10的三个不同的数，例如：1，6，8。

从这三个数中任取两个，作成二位数，这样，总共就得到六个不同的二位数，这些数是：16，18，61，68，81，86

把这六个数相加起来：

$$16+18+61+68+81+86=330$$

把最初的那三个一位数相加起来：

$$1+6+8=15$$

把二位数的总和除以一位数的总和：

$$\frac{330}{15}=22$$

现在，用下列每三个数为一组，重复上述描写的步骤，然后从答案中寻找一种模型：

a. 1，2，3　　　　*b*. 4，5，6

c. 7，8，9　　　　*d*. 2，4，6

如果不出错的话，你应该发现，每一个答案都是相同的数：22。让我们来证明，在一般情形下，这总是正确的。

设 a，b，c 代表任意三个不同的小于10的数，从这三个

数作出所有可能的两位数，你将得到六个二位数，它们可表为：

$10a+b$; $10a+c$; $10b+a$; $10b+c$; $10c+a$; $10c+b$

把六个数加起来：

$$(10a+b)+(10a+c)+(10b+a)+(10b+c)$$
$$+(10c+a)+(10c+b)$$
$$=22a+22b+22c$$
$$=22(a+b+c)$$

当你把这个和除以$(a+b+c)$则显然得到22，所以答案总是22。

3. 被 9 除

这是你在学校中可能已经碰到的一个很有名的问题：

任选一数，例如 582

把数字加起来：　　$5+8+2=15$

再把答案的数字加起来：$1+5=6$

把最初的数除以 9：

$$\begin{array}{r}
64\\
9\overline{)582}\\
\underline{54}\\
42\\
\underline{36}\\
6
\end{array}$$

现在，用下列给定的数重复这些步骤，每一步应把前一步所得到的答案的数字加起来，一直进行到答数是一位数为止，看看从你的结果中能发现什么数型？

$a.$ 239　　$b.$ 1053　　$c.$ 82　　$d.$ 6975

要是你没有算错的话，你应该看到一个很有趣的模型：如果你所得到的一位数小于 9，那末它将等于最初的数除以 9 所得的余数.如果所得的一位数是 9，则最初那个数能被 9 整除. 这个问题有时候叫做"抛出 9".

我们可以用代数的方法来解释这个问题，并证明这个模型永远正确.

任取一个数(我们取一个四位数)：

$$1000a + 100b + 10c + d$$

把它改写成如下形式：

$$a(999 + 1) + b(99 + 1) + c(9 + 1) + d$$

再把这些项排成：

$$(999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$$

表达式 $999a + 99b + 9c$ 包含因子 9，所以能被 9 整除，如果数字的和 $a + b + c + d$ 是 9，那末最初的那个数以 9 作为它的因子，因此它能被 9 整除. 如果 $a + b + c + d$ 小于 9，那末，它就是当初那个数被 9 除所得的余数. 如果这四个数字的和大于 9，则我们可以用 $10x + y$ 来表示它，然后重复上面所说的过程得到：

$$x(9 + 1) + y = 9x + x + y$$

现在，如果 $x + y$ 是 9，那末，当初那个数能被 9 整除，如果 $x + y$ 小于 9，那末，这就是当初那个数除以 9 所得的余数了. 如果当初那个数多于六位，则要作更多的加法才能得到一个一位数.

4. 和 是 3

这个问题和上面问题有密切关系。从任一数开始，比如32。

用 3 乘它：　$3(32) = 96$

加 1：　$96 + 1 = 97$

再加 1：　$97 + 1 = 98$

把这三个数加起来：　$96 + 97 + 98 = 291$

把此答案的数字相加：　$2 + 9 + 1 = 12$

再把数字加起来：　$1 + 2 = 3$

用下列的数重复这些步骤。作数字相加，一直到和为一位数为止，你看这些答案是否有规律？

a. 2　　*c*. 6

b. 4　　*d*. 25

你应该发现，所有答案都是 3。而且你很容易地证明它总是成立的。

这一问题的后两步与“被 9 除”问题中的步骤是一样的。

因此，前面问题解释了这一问题的后两步，因为一个数的数字的和将给出这个数被9除所得的余数。我们现在证明头三个数的和除以9，其余数为3，这可按照下面方法来作：

以任一数开始： N

用3乘它： $3N$

加上1： $3N+1$

再加上1： $3N+2$

三个数加起来： $3N+3N+1+3N+2$

$$=9N+3$$

这个和数表示如果它被9除，则所得的余数为3。当我们把这样的数的所有数字相加起来，我们最终将得到数3。

5. 三位数与其逆排相减

任取一个没有两位相同的三位数，例如532。

把这些数字逆排得： 235

用这两个数中大的减小的：

$$532-235=297$$

对下列三位数重复上述步骤，然后看你能否从答案中发现什么规律？

a. 123 *c*. 489

b. 956 *d*. 246

如果需要的话，你可以再作几例。

你是否已经注意到，在每个答案中，中间那一位数总是9，

并且其它两位数的和也是9？

下面用代数方法证明这一结论。

取一个没有两位相同的三位数。我们用 a 代表百位数，用 b 代表十位数，c 代表个位数。这样，我们开始的数能表示为：

$$100a + 10b + c$$

逆排它的位数，所得新的三位数可表示为：

$$100c + 10b + a$$

假定 a 大于 c，我们用大的减去小的：

$$\begin{aligned}(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) \\ = 100a - 100c + c - a \\ = 100(a - c) + (c - a) \\ = 100(a - c) - (a - c)\end{aligned}$$

看起来 $a - c$ 似乎是新三位数的百位数，而 $-(a - c)$ 是新三位数的个位数。但是，$-(a - c)$ 是一个负数（因为已经假定 a 大于 c）。而用负数来表示一个正数的个位是不能令人满意的。为了改变这一状况，我们对上面所得到的式子加上100后又减去100，即：

$$\begin{aligned}&100(a - c) - (a - c) \\ &= 100(a - c) - 100 + 100 - (a - c).\end{aligned}$$

这可以重排从而得到它的百位、十位、个位，其排法是：

$$100(a - c - 1) + 9(10) + [10 - (a - c)].$$

现在我们得到了具有所需要的形式的结果。我们看到这个数的十位数是9，而百位数和个位数的和也是9：

$$(a-c-1)+[10-(a-c)]=10-1=9$$

6. 1089 问 题

取一个三位数，这个三位数的百位数与个位数相差不小于 2，例如 825。

逆排它的位数得：528

上面两数中大的减去小的： $825-528=297$

逆排此答案的位数得： 792

相加： $792+297=1089$

现在，用下列三位数重复以上作法，看这些答案是否表明一种规律？

a. 123　　*b*. 956　　*c*. 489　　*d*. 246

所有的答案都是1089。证明对于所有三位数都是如此。下面是一个很好的证明方法。

任取一个三位数： $100a+10b+c$

假定： $a>c$　　（a 比 c 大）

逆排这个数的位数： $100c+10b+a$

大的数减去小的数：

$$(100a+10b+c)-(100c+10b+a)$$
$$=100(a-c)-(a-c)$$

首先，必须把它表示成一个三位数。这已经由加上100然后又减去100这个方法所完成，并且重排为所要求的形式。就是： $100(a-c)-(a-c)$

能改写为： $100(a-c)-100+100-(a-c)$

或： $100(a-c-1)+9(10)+[10-(a-c)]$. (1)

这就表示成了一个三位数的形式.

现在，逆排这个三位数，得到

$$100[10-(a-c)]+10(9)+(a-c-1) \qquad (2)$$

将(1)式和(2)式相加：

$$\begin{aligned}&100(a-c-1)+10(9)+[10-(a-c)]\\&\quad+100[10-(a-c)]+10(9)+(a-c-1)\\&=100[(a-c-1)+(10-a+c)]+10(18)\\&\quad+(10-a+c)+(a-c-1)\\&=100(9)+10(18)+9=100(9)+10(10+8)+9\\&=100(9)+100(1)+8(10)+9\\&=1(1000)+0(100)+8(10)+9\\&=1089\end{aligned}$$

有趣的是应该注意上述证明是如何处理一种特殊情形的。所说的特殊情形发生在 a 比 c 恰好大 1 的时候。此时 $a-c-1=0$ 而 $100(a-c)-(a-c)$ 总等于 99，这是一个二位数。这时可把 99 写作 099 当作一个三位数，再来逆排它的位数，得到990，于是，099 + 990的和仍然是1089。

练习 8 其 它 数 型

这里再提出两个和以前相似的问题，但证明从略。

1. 从任一数开始，例如： 32

用 3 乘它： $3(32)=96$

减去 1： $96 - 1 = 95$

再减 1： $95 - 1 = 94$

把这三个数加起来： $96 + 95 + 94 = 285$

把答案中的数字加起来： $2 + 8 + 5 = 15$

再把数字加起来： $1 + 5 = 6$

一直加到出现一位数为止，在此，加到 6 就算达到了目的。

现在，用下面这些数再试试：

a. 2 *c*. 6

b. 4 *d*. 25

正确计算，其答案应该都是 6. 请证明这个结论永远正确.

2. 取任意的二位数，如 43

颠倒位数： 34

把两数加起来： $43 + 34 = 77$

用下列的数重复以上作法，然后寻找答案的模型：

a. 12 *c*. 78

b. 45 *d*. 24

你注意到在各种情形下，和都能被11整除吗？请证明：无论你最初挑选什么样的二位数，上述结论总成立.

四、连加的规律——奇数级数

假如你把接连不断的奇数加起来：

$$1+3+5+\cdots$$

加一项： $1=1$

加两项： $1+3=4$

加三项： $1+3+5=9$

加四项： $1+3+5+7=16$

加五项： $1+3+5+7+9=25$

$$\vdots$$

像这样连续不断的相加可作为无穷级数的一个例子，你猜猜，所加的项数与这些项的和之间存在着什么关系？

上述五种情形，其和好象等于所加的项数的平方，用数学的语言来说，就是：

$$\overbrace{1+3+5+\cdots+(\quad)}^{n\ 项}=n^2$$

现在的问题变成："你怎么写出第 n 项？"或许你能发现这个规律．当你相加五项时，应该是：

$$\overbrace{1+3+5+7+9}^{5\ 项}$$

注意，$9=(2\times5)-1$ 你可能会猜到，在一般的情形，

当相加 n 项时，你的最后一项应该为：

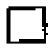
$$(2n-1)$$

这样，下式似乎是合理的：

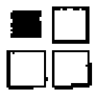
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

由上面论述可以看到，当 $n=1,2,3,4,5$ 时，这个公式成立。对于任意的 n，这个公式似乎应该仍然成立，但是，你如何确信这一点呢？

如果应用几何来描述，那末会使你感到更加相信这个公式是正确的。

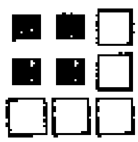
只有一项：用一个方块表示它 

两项相加：三小块加到上面列阵上 $1+3$



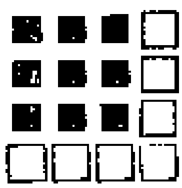
注意新的方阵 $2\times 2=4$

三项相加：五小块加到上面列阵上 $1+3+5$



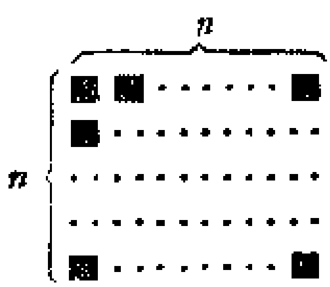
注意新的方阵 $3\times 3=9$

四项相加：七小块加到上面列阵上 $1+3+5+7$



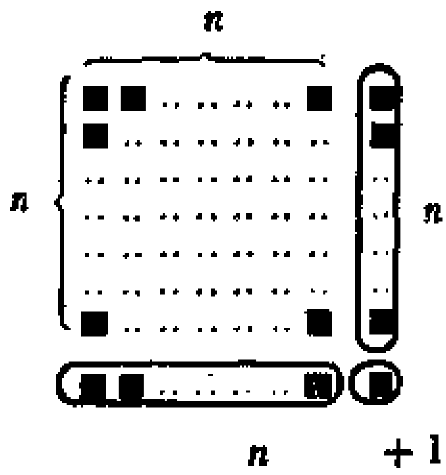
注意新的方阵 $4\times 4=16$

一般情况，n 项相加：$1+3+\cdots+(2n-1)$



$$n\times n=n^2$$

$n+1$ 项相加：把 $(2n+1)$ 个小块加到上面 n^2 个小块的方阵上去：



此图形表明小块总数是 $n^2+n+n+1$ 或者 n^2+2n+1，这正好是我们想得到的数 $(n+1)^2$.

也可用别的方法来考虑这个和. 你将几个接连的奇数相加，并采用下面的方法减少加法运算的个数，例如，把头 10 个奇数加起来：

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19.$$

你可能注意到这些数可以配对，从而给出五个和为 20 的对.

$(1+19)=20$	(第一项与最后一项的和)
$(3+17)=20$	(第二项与倒数第二项的和)
$(5+15)=20$	(第三项与倒数第三项的和)
$(7+13)=20$	(第四项与倒数第四项的和)
$(9+11)=20$	(第五项与倒数第五项的和)

这 10 个数的总和为 (5×20) 或写作100，这与前面用被加项数的平方的方法所得的答案是相符的 $10^2=100$.

你还可以这样来处理：

把这个级数写两次，第二次的顺序与第一次的顺序相反，

即

$$
\begin{array}{r}
1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\
\underline{19+17+15+13+11+9+7+5+3+1}
\end{array}
$$

其和是：$20+20+20+20+20+20+20+20+20+20$

它的总数为 (10×20) 或写作 200，但这是所求的和的二倍，因此，所求的和为 200 的一半或写作 100，这又一次得到了正确的答案。

另外一种考虑方法是：把这看作是有相等间隔的数的和，第一项与最后一项的平均数是：

$$\frac{1+19}{2}=\frac{20}{2}=10$$

它可以当作这些数的平均数．大小都等于10的10个数的和为(10×10)或写作100．这再一次与其它的方法相符．

如果你能把这些方法推广到一般的情形，得到n项的和为

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

这将是一件有价值的工作．

这个级数的另一个有趣的特色是，借助计算机它能求出一个数的平方根．为了求出一个数的平方根，只需把这个数减去从 1 开始的奇数列，并记住所能作的减法次数．这个次数就是这个数的平方根．

例如，求$\sqrt{25}$ 的值，从 25 依次减去从 1 开始的奇数

$$
\left.\begin{array}{l}
25-1=24 \\
24-3=21 \\
21-5=16 \\
16-7=9 \\
9-9=0
\end{array}\right\} \text{5次减法}
$$

减去 5 次使 25 变为零，所以：

$$\sqrt{25}=5$$

可对 100，225 这样的完全平方数检验这一方法.

耐人寻味的是，与数的平方一样，奇数列与数的立方也有密切的联系，表明这一性质的规律是：

$$1^3=1$$
$$2^3=8=3+5$$
$$3^3=27=7+9+11$$
$$4^3=64=13+15+17+19$$
$$\vdots$$

数的立方与数的平方的关系有如下规律：

$$1^3=1^2$$
$$2^3=(1+2)^2-1^2$$
$$3^3=(1+2+3)^2-(1+2)^2$$
$$4^3=(1+2+3+4)^2-(1+2+3)^2$$

现在，请注意这个规律与下面规律的相似性：

$$1^2=1$$
$$2^2=(1+2)+1$$
$$3^2=(1+2+3)+(1+2)$$
$$4^2=(1+2+3+4)+(1+2+3)$$

这些不平常的关系似乎没有止境，还有一部份在下面练习中给出.

练习 9　连　　加

求出下列各题中 a—d 的和并验证在 e 所给的公式中当 $n=1, 2, 3,$

4时，和它们答案相同：

1. a. $1=$

b. $1+2=$

c. $1+2+3=$

d. $1+2+3+4=$

e. $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2. a. $2=$

b. $2+4=$

c. $2+4+6=$

d. $2+4+6+8=$

e. $2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)$

3. a. $1=$

b. $1+2+1=$

c. $1+2+3+2+1=$

d. $1+2+3+4+3+2+1=$

e. $1+2+3+4+\cdots+n+\cdots+3+2+1=n^2$

4. a. $1^2=$

b. $1^2+2^2=$

c. $1^2+2^2+3^2=$

d. $1^2+2^2+3^2+4^2=$

e. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. a. $1^3=$

b. $1^3+2^3=$

c. $1^3 + 2^3 + 3^3 =$

d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 =$

e. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4}$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

6. *a.* $1^3 =$

b. $1^3 + 3^3 =$

c. $1^3 + 3^3 + 5^3 =$

d. $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 =$

e. $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

7. *a.* $1(2) =$

b. $1(2) + 2(3) =$

c. $1(2) + 2(3) + 3(4)$

d. $1(2) + 2(3) + 3(4) + 4(5) =$

e. $1(2) + 2(3) + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$

8. *a.* $\dfrac{1}{1(2)} =$

b. $\dfrac{1}{1(2)} + \dfrac{1}{2(3)} =$

c. $\dfrac{1}{1(2)} + \dfrac{1}{2(3)} + \dfrac{1}{3(4)} =$

d. $\dfrac{1}{1(2)} + \dfrac{1}{2(3)} + \dfrac{1}{3(4)} + \dfrac{1}{4(5)} =$

e. $\dfrac{1}{1(2)} + \dfrac{1}{2(3)} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

五、数型的应用

1. 利息问题

上节讲的数项级数是很有意思的，因为在一个级数中，不断地往上加，而对于 n 项的和仍能给出公式，这似乎很奇特。但是，当你对此加以思考时，就会理解到，这并不是太高的期望，因为在累加的每个阶段中你应加多少是有一种规律的。因此，这个和也应显示出某种规律，虽然它可能太复杂以致不能立即加以辨认。

许多我们今天所知道的科学原理，都可以追溯到这样一个阶段，即数据暗示一种可以用数学表达的模型的阶段。

重要的金融概念，例如象单利、复利也显示出一个数学模型。例如你按 6 %的单利投资 1 英镑（只计算这原来的 1 英镑所得的利钱），连续几年后，这 1 英镑的价值可由下式加以计算：

（用 £ 1 表示 1 英镑）

$A_1 = £1 + 0.06\,(£1) = £1\,(1 + 0.06)$

$A_2 = £1 + 0.06\,(£1) + 0.06(£1) = £1\,[1 + 0.06\,(2)]$

$A_3 = £1 + 0.06\,(£1) + 0.06\,(£1) + 0.06\,(£1)$

$\quad = £1\,[1 + 0.06\,(3)]$

…

$$A_n = £1 + £1\,(0.06)n = £1\,(1 + 0.06n)$$

这些下标表示一个确定的年限，如 A_1 表示第一年年终钱的总数；A_2 表示第二年年终钱的总数；A_n 表示第 n 年年终钱的总数。

上述规律可推广到任意一笔 m 元的钱以 $r\%$ 的利率投资的情形，这只要用 $r\%$ 代替 0.06 用 m 代替 £1 得到：

$$A_n = m\left(1 + \frac{r}{100}n\right)$$

或者，设 $i = \frac{r}{100}$，则公式变成：

$$A_n = m(1 + i \times n)$$

许多银行对投资支付复利，如果你按 6% 的复利投资 1 英镑（利钱用来再投资，这样应付已挣的利钱的利钱），那末，连续几年后 1 英镑的总价值依下式计算：

$$A_1 = £1 + 0.06(£1) = £1(1 + 0.06)$$

$$A_2 = A_1 + 0.06A_1 = A_1(1 + 0.06) = £1(1 + 0.06)^2$$

$$A_3 = A_2 + 0.06A_2 = A_2(1 + 0.06) = £1(1 + 0.06)^3$$

$$\cdots$$

$$A_n = £1\,(1 + 0.06)^n$$

一般地，如果以 $r\%$ 复利投资 m 英镑则：

$$A_n = m\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

或者，设 $i = \frac{r}{100}$，

则 $A_n = m(1 + i)^n$

看一下这些规律，你就知道单利和复利有多么大的差别！年限 n 在两个式子中的用法完全不同。

一些从事银行工作或投资的人总有一张算好了的表格，在表格中给出按不同利率投资 1 英镑所得总数。对于其它的数，例如 500 英镑，则先找表中 1 英镑所得总数再乘上 500 倍，这就是 500 英镑所得总数。下表给出不同利率的单利和复利的一些选定的值。从表中可以看到，按照不同条件投资，1 英镑的价值是如何递增的。

分别以单利和复利投资一英镑（£1）在第 n 年年终时本利总值的比较

年	2%($i=0.02$)		4%($i=0.04$)		6%($i=0.06$)	
	单　利	复　利	单　利	复　利	单　利	复　利
1	1.02	1.0200	1.04	1.0400	1.06	1.0600
2	1.04	1.0404	1.08	1.0816	1.12	1.1236
3	1.06	1.0612	1.12	1.1249	1.18	1.1910
4	1.08	1.0824	1.16	1.1699	1.24	1.2625
5	1.10	1.1041	1.20	1.2167	1.30	1.3382
⋮						
10	1.20	1.2190	1.40	1.4802	1.60	1.7908
⋮						
16	1.32	1.3728	1.64	1.8730	1.96	2.5404
17	1.34	1.4002	1.68	1.9479	2.02	2.6928
18	1.36	1.4282	1.72	2.0258	2.08	2.8543
19	1.38	1.4568	1.76	2.1068	2.14	3.0256
20	1.40	1.4859	1.80	2.1911	2.20	3.2071
⋮						
30	1.60	1.8114	2.20	3.2434	2.80	5.7435
⋮						
40	1.80	2.2080	2.60	4.8010	3.40	10.2857
⋮						
50	2.00	2.6916	3.00	7.1067	4.00	18.4202
⋮						
n	$(1+0.02n)$	$(1+0.02)^n$	$(1+0.04n)$	$(1+0.04)^n$	$(1+0.06n)$	$(1+0.06)^n$

习题 10 单利和复利

用利息表回答下列问题:

1. 当 $n=6$ 时,填写表上的值.

2. 当 $n=21$时,填写表上的值.

3. 当 $n=60$时, 填写表上的值.

4.作出单利、复利都为8%的新的一列,填写这一列中$n=1$,$n=2$的值.

5.单利为4%,投资1英镑,多少年后才能得到两英镑?

6.复利为4%,投资1英镑,多少年后才能得到两英镑?

2. 幻 方

如果我们能回到古代的中国或印度去, 我们或许会注意到一些人佩戴着刻有下列数字图案的石头或金属的装饰品,这类装饰品被认为具有神秘的力量.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

图 1

我们至少可以认为这种类型的数字图案有些特别, 因为如果我们对每一行,每一列,每一对角线上的数进行相加, 总

能得到相同的和. 在一个正方形中数的排列使得每行、每列、每条对角线上的数的和都相同，这种正方形称为幻方.

由于这种发现，幻方曾经成为许多有关数学的娱乐和游戏的源泉. 由于对幻方理论的研究，一些有趣而且有用的数学概念也被发现了，虽然我们不再把神秘力量归因于幻方. 但我们不能否认它们的价值.

幻方的行数或列数叫做幻方的阶数，这样，一个包含三行和三列的幻方叫做三阶幻方. 幻方的行、列或对角线元素的和称为幻方的常数.

通常要求幻方由 1—n^2这 n^2 个接连的数所构成，其中 n 表示幻方的阶. 我们将只讨论这种幻方的性质.

让我们通过研究三阶幻方来探索其它幻方的规律. 这样一个幻方将由1—9，9 个整数所构成. 我们可以用如下格式表示三阶幻方的元素(数).

a	d	g
b	e	h
c	f	i

图 2

我们能够证明只有一个数可做这样的幻方的常数. 幻方所有元素的和是正整数1—9的和.

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i$$
$$=1+2+3+\cdots+9$$

从关于连加的研究知道，象$1+2+3+\cdots+9$这种级数的和可以由第一项与最后一项的平均数乘上项数来求得，即：

$$1+2+3+\cdots+9=9\frac{(1+9)}{2}=45$$

因为 $a+b+c=d+e+f=g+h+i$

所以 $3(a+b+c)=45$

即 $a+b+c=15$

因此，三阶幻方的常数是15。同样的推理，可以确定任意阶幻方的常数。

现在，来证明三阶幻方的中心那个数必为5，这是因为：

$$(g+e+c)+(d+e+f)+(a+e+i)+(b+e+h)=60$$

重排后得到：

$$3e+(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i)=60$$

$$3e+45=60 \qquad e=5$$

于是，我们知道：$a+i, b+h, c+g, d+f$中每一个都等于10，而其可能的组合是：1和9，2和8，3和7以及4和6。但1和9这一对不能占有角的位置，因为不可能出现包含1而且和为15的三种数组，另外，1必须和8与6在同一行或同一列，因为除去9和5外，只有这一组既包含1而和又是15，有了这些条件供参考，我们就有可能来构造由1—9九个数字所形成的三阶幻方了。

练习11 幻方运算

1．42页给出了由1—9所构成的三阶幻方，再写出其它7个由这

些整数构成的三阶幻方。

2.证明由 1—16 所构成的四阶幻方的常数为34。

3. 关 于 数 π

最有名的数学常数之一是 π，这一常数有助于表达许多著名的数学公式，如：

$C=2\pi r$　　（C：半径为 r 的圆的周长）

$A=\pi r^2$　　（A：半径为 r 的圆的面积）

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$　　（V：半径为 r 的球体的体积）

π 的基本定义是圆的周长与它的直径的比．这一定义很简单，然而，π 本身比它的定义要复杂得多．计算出 π 的值是很困难的事，因为不可能把圆的周长与它的直径都用整数或分数表示出来．因此，π 不可能是整数，也不可能是分数．具有这种性质的数称为无理数．

埃及人在公元前 1700 年在纸草纸[1]上最早写下的记录中给出如下直接求圆的面积的公式：

$$A=\left(d-\frac{1}{9}d\right)^2$$

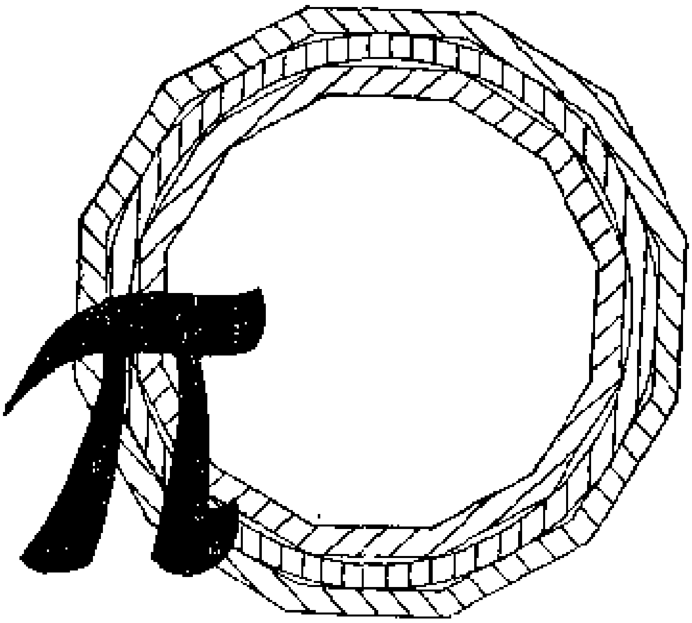
这里，A 是圆的面积，d 是圆的直径．如果用 $2r$（圆的半径的二倍）代替 d，则得到下述公式：

1）纸草纸是古埃及人、希腊人及罗马人用水草制成用以记载文字．
——译者

$$A = \frac{256}{81}r^2$$

这样我们看到，古埃及人提出 π 是比值 $\frac{256}{81}$，用小数的形式写出即 3.16050…，这和我们今天所用的值（3.14159…）大约有 2% 的误差。

古希腊伟大的数学家及科学家阿基米德（公元前287—212年）应用几何图形估计 π 大于 $3\frac{10}{71}$ 但小于 $3\frac{1}{7}$，或者表示成小数，他估计 π 在3.140845…与3.142857…之间。



在古代中国，张衡（公元 78 —139 年）把 π 表示为：

$$\pi = \sqrt{10} = 3.162$$

后来，王蕃（公元228—266年）估计 π 为：

$$\pi = \frac{142}{45} = 3.1555\cdots$$

再往后，祖冲之（429—500年）给出了一个不同的分数：

$$\pi = \frac{355}{113} = 3.1415929,$$

这已经准确到小数点后 6 位.

这些寻求 π 的值的尝试，说明对 π 还缺乏完全的了解.

第一次把 π 推导成一个正规的数学公式是在 1592 年，法国数学家法兰西斯 · 维爱塔证明:

$$\pi = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} + \cdots}\right)$$

1655年，英国数学家约翰 · 沃利斯给出一个比较简单的形式:

$$\pi = 4\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdots}\right)$$

注意，这里偶数在分子上，奇数在分母上.

1658年，爱尔兰数学家威廉 · 布龙克尔证明 π 的值为:

$$\pi = 4 \times \left[\cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cdots}}}}}}\right]$$

π 的最简单的表达式是一个以伟大的德国数学家哥德弗立特 · 莱布尼兹(1646—1716年)命名的级数:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots\right)$$

但是，为了求得 π 的值，上面这些表示式没有一个是真正有用的，因为它们或者太繁杂，或者收敛一个准确结果的速度

太慢．一个便于计算的较好的级数为：

$$\pi=2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9}+\cdots\right)$$

1717 年，英国数学家亚伯拉罕·夏普用下面级数计算 π 到小数点后 72 位．

$$\pi=6\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\frac{1}{3^4\cdot 9}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3^5\cdot 11}+\cdots\right)$$

1873 年，英国数学家威廉·香克斯发表了 π 到小数点后 707 位的值．1948 年美国人约翰·弗兰西和曼彻斯特的弗格森共同发表了计算到小数点后 808 位的经过校对的 π 的准确值．他们发现香克斯的结果从小数点后 582 位开始有几个地方出错．

在 1950 年 1 月份的数学用表及计算方面的其它辅助用表中曾出现了超过 2000 位的 π 的值．正如你们所猜想到的，这是借助于现代高速电子计算机来完成的．下面是精确到小数点后 22 位的 π 的值：

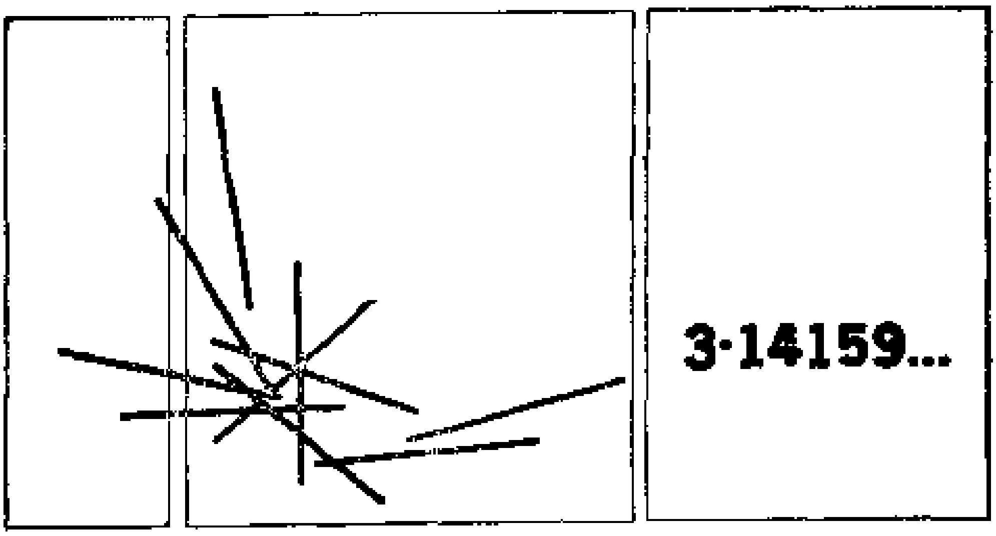
3.1415926535897932384626…

练习 12 关于 π

1．你可能喜欢用上节所给的公式之一，自己来计算 π（到小数点后几位）值．你会很快地了解到用哪个公式较好一些．

2. 在掷硬币中，出现正面的次数与出现反面的次数是很相近的，但是，掷 100 次硬币，不见得准是 50 次正面 50 次反面，然而，当掷的次数越来越多时，你可以期望正面与反面出现的次数的分布情况相当一致。

下面的实验与掷硬币十分相象，但掷的不是硬币而是小棍，这一实验的目的是使你明了你所得到的数多么接近于 π 的值。



在一张比较大的纸上作平行线，两条平行线之间的距离为 2 英寸，准备10根小棍，每根长 1 英寸(用牙签即可)。现在，把这10根小棍举到纸上方大约一尺高处，然后投下来，数出与平行线接触或相交的棍的数目。如果你重复作 100 次，那就是投了 1000 根棍，把所投的棍的总数，除以与平行线接触或相交的棍的总数，则在理论上——按照"概率论"的法则，这个比将给出 π 的值。正象投硬币的问题中不能准确地得到正面与反面的分布一样，在这里，也得不到 π 的精确值，但有趣的是，你所得到的数与 π 是多么接近！

如果有朋友帮忙，你可以增加投掷次数，然后把你们的结果联合起来。对于任意投掷数的一般公式为：

$$\frac{\text{掷棍的总数}}{\text{与平行线接触或相交的小棍总数}}\text{接近等于}\ \pi$$

回顾与展望

在本书的开头，你接触到一些有趣的数字模型，从这里开始，你发觉考察一些数字模型能引导人们发现一些数的重要关系. 下一步就是要证明这些关系对于任何数或数的集合都成立. 最后，你被引导到这样一个题材，即无穷级数，这些级数只不过是许多特殊的数字关系中的一个简单例子. 也许其中最奇怪的也最令人注目的是有关 π 的值的那些级数. 一个数，一开始作为一个圆的周长与该圆的半径的比，但竟然与这么多的包含数字模型的表达式联系在一起，这似乎令人难以置信.

这里介绍的这种进展往往是所有数学及其它科学发展的特点. 多少年来，人们曾经注意到许多吸引人的、有用的事实，然后利用这些信息来进一步发展一些概念和关系，但人们并不以此为满足，他们还要继续证明这些概念的一般性质. 这种努力经常导致发现一些非常重要的新原理.

这种方法并没有过时，因为今天和明天的数学家及科学家仍然会继续考察，并从这些考察中归纳出一般性的结论，证明他们的新的概念，然后寻求这些理论的令人惊异的新应用.

练 习 答 案

练习 1

1. $10,000+1000+100+10+1=11111$
2. $100,000-1=99,999$
3. $(10)(10)(10)(10)(10)=100,000$
4. $\frac{1}{(10)(10)(10)(10)(10)}=0.00001$
5. $90,000+10,000=100,000$
6. $(11)(5)=50+5$
7. $5\times 9=50-5$
8. $5\times 8=50-10$
9. $(12345\times 9)+6=111111$
10. $(12345\times 8)+5=98765$
11. $(54321\times 9)-1=488888$
12. $(54321\times 8)-1=434567$
13. $99999\times 66666=6666533334$
14. $66667\times 66667=4444488889$
15. $66666\times 66667=4444422222$
16. $333333666667\times 1113333=371111371111371111$
17. $333333666667\times 2223333=741111741111741111$
18. $333333666667\times 1116666=372222372222372222$
19. $333333666667\times 2226666=742222742222742222$

练习 2

1. 121

2. 12321

3. 1234321

4. 123454321

5. 12345654321

6. 1234567654321

7. 123456787654321

8. 12345678987654321

练习 3

1. $11(5) = 10(5) + 5$ 并且一般的 $11(n) = 10(n) + n$
2. $9(5) = 10(5) - 5$ 并且一般的 $9(n) = 10(n) - n$
3. $8(5) = 10(5) - 2(5)$ 并且一般的 $8(n) = 10(n) - 2(n)$
4. $(5+1)^2 = 5^2+5+5+1$ 并且一般的 $(n+1)^2 = n^2 + n+n+1$
5. $5^2 + 5 = 6^2 - 6$ 并且一般的 $n^2 + n = (n + 1)^2 - (n + 1)$
6. $5(5) = \frac{5}{2}(10)$ 并且一般的 $n(5) = \frac{n}{2}(10)$
7. $5(25) = \frac{5}{4}(100)$ 并且一般的 $n(25) = \frac{n}{4}100$
8. $15(5) = 5(10)+\frac{5}{2}(10)$ 并且一般的 $15(n)=n(10)+\frac{n}{2}(10)$

练习 4

1. 右边一列是 143×7 或 $11 \times 13 \times 7$ 即 1001，所以，两列结合起来给出：

$(143 \times 1) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 1 = 1001$

$(143 \times 2) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 2 = 2002$

$(143 \times 3) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 3 = 3003$

$(143 \times 4) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 4 = 4004$

$(143 \times 5) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 5 = 5005$

$(143 \times 6) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 6 = 6006$

$(143 \times 7) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 7 = 7007$

$(143 \times 8) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 8 = 8008$

$(143 \times 9) \times 7 = (11 \times 13 \times 7) \times 9 = 9009$

2．所有其它的分数:

$$\frac{444}{12}, \frac{555}{15}, \frac{666}{18}, \frac{777}{21}, \frac{888}{24}, \frac{999}{27}$$

它们都等于37，这是因为其中每一个都能改写为:

$$\frac{n(111)}{n(3)} = \frac{111}{3} = \frac{3 \times 37}{3} = 37$$

3．二列合并起来看实际上是 15873 × 7 即 111,111 的倍数，因此 n 倍 111,111 必然是每位数字都是 n:

$(15873 \times 1) \times 7 = (15873 \times 7) \times 1 = 111,111$

$(15873 \times 2) \times 7 = (15873 \times 7) \times 2 = 222,222$

$(15873 \times 3) \times 7 = (15873 \times 7) \times 3 = 333,333$

$(15873 \times 4) \times 7 = (15873 \times 7) \times 4 = 444,444$

$(15873 \times 5) \times 7 = (15873 \times 7) \times 5 = 555,555$

$(15873 \times 6) \times 7 = (15873 \times 7) \times 6 = 666,666$

$(15873 \times 7) \times 7 = (15873 \times 7) \times 7 = 777,777$

$(15873 \times 8) \times 7 = (15873 \times 7) \times 8 = 888,888$

$(15873 \times 9) \times 7 = (15873 \times 7) \times 9 = 999,999$

练习 5

1．三个表示式对于所有的 n 都是恒等的:

$$n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + n - n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n^2 - 1 + 1}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}$$

2. 三个表示式对于所有的 n 都是恒等的:

$$\left(n+\frac{1}{n+2}\right)\div\frac{n+1}{n+2}=\frac{n^2+2n+1}{n+2}\times\frac{n+2}{n+1}=\frac{(n+1)^2}{n+1}$$

$$=n+1$$

$$\left(n+\frac{1}{n+2}\right)+\frac{n+1}{n+2}=\frac{n^2+2n+1}{n+2}+\frac{n+1}{n+2}$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{n+2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{n+2}=n+1$$

$n+1=n+1$

3. 三个式子是:

$$\left(n+2+\frac{1}{n}\right)\div(n+1)=\frac{n^2+2n+1}{n}\times\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n}$$

$$\left(n+2+\frac{1}{n}\right)-(n+1)=\frac{n^2+2n+1}{n}-\frac{n^2+n}{n}=\frac{n+1}{n}$$

$$1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$$

练习 6

n	n^3	n^3-n
2	8	$8-2=6$
3	27	$27-3=24$
4	64	$64-4=60$
5	125	$125-5=120$

6,24,60,120都能被 6 整除。

练习 7

1. $(4)(5)(6)(7) = [(4)(7)][(5)(6)]$
$= (28)(30)$
$= (29-1)(29+1)$
$= 29^2 - 1$

2. $(5)(6)(7)(8) = [(5)(8)][(6)(7)]$
$= (40)(42)$
$= (41-1)(41+1)$
$= 41^2 - 1$

3. $(9)(10)(11)(12) = [(9)(12)][(10)(11)]$
$= (108)(110)$
$= (109-1)(109+1)$
$= 109^2 - 1$

练习 8

1. 由任何数开始: N
用 3 乘它: $3N$
减去 1: $3N-1$
减去 1: $3N-2$
三个数加起来: $3N+(3N-1)+(3N-2)=9N-3$

把数字加起来等价于"抛出 9", 这样,让我们来找 $9N-3$被 9 除所得的余数. 当两个正数相除时,不可能有一个负的余数,因此,我们写 $9N-3$为$9N-9+6$.

这一式子表示被 9 除余数为 6.

2. 任取一个二位数: $10a+b$
逆排它的数字: $10b+a$
两数相加: $(10a+b)+(10b+a)=11a+11b$

对于任意 a、b，都能被11整除。

练习 9

1. a. 如果 $n=1$，则 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1(2)}{2}=1$。

   这与第一项 1 相符.

   b. 如果 $n=2$，则 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2(2+1)}{2}=\frac{2(3)}{2}=3$。

   这与头两项的和相符：$1+2=3$。

   c. 如果 $n=3$，则 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3(3+1)}{2}=\frac{3(4)}{2}=6$。

   这与头三项的和相符：$1+2+3=6$。

   d. 如果 $n=4$，则 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{4(4+1)}{2}=\frac{4(5)}{2}=10$。

   这与头四项的和相符：$1+2+3+4=10$。

2. a. 当 $n=1$，则 $n(n+1)=1(1+1)=1(2)=2$。

   这符合第一项：2

   b. 当 $n=2$，则 $n(n+1)=2(2+1)=2(3)=6$。

   这符合头两项的和：$2+4=6$。

   c. 当 $n=3$，则 $n(n+1)=3(3+1)=3(4)=12$。

   这符合头三项的和：$2+4+6=12$。

   d. 当 $n=4$，则 $n(n+1)=4(4+1)=4(5)=20$。

   这符合头四项的和：$2+4+6+8=20$。

3. a. 当 $n=1$，则 $n^2=1^2=1$.

   这符合头一项：1。

   b. 当 $n=2$，则 $n^2=2^2=4$。

   这符合于和：$1+2+1=4$。

   c. 当 $n=3$，则 $n^2=3^2=9$.

   这符合于和：$1+2+3+2+1=9$。

d. 当 $n=4$，则 $n^2=4^2=16$。

这符合于和：$1+2+3+4+3+2+1=16$。

（从问题 4 到 8 仅验证一个值，其它的值你可以用类似的方法证实）。

4. b. 当 $n=2$，则 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2(2+1)(2\times 2+1)}{6}$

$$=\frac{2(3)(5)}{6}=5.$$

这符合于头两项的和：$1^2+2^2=1+4=5$。

5. b. 当 $n=2$，则 $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{2^2(2+1)^2}{4}=\frac{4(3)^2}{4}=9$.

这符合于头两项的和：$1^3+2^3=1+8=9$。

6. b. 当 $n=2$，则 $n^2(2n^2-1)=2^2[2(2)^2-1]=4(8-1)$

$$=4(7)$$

$$=28.$$

这符合于头两项的和：$1^3+3^3=1+27=28$。

7. b. 当 $n=2$，则 $\frac{n}{3}(n+1)(n+2)=\frac{2}{3}(2+1)(2+2)$

$$=\frac{2}{3}(3)(4)$$

$$=8.$$

这符合于头两项的和：$1(2)+2(3)=2+6=8$。

8. b. 当 $n=2$，则 $\frac{n}{n+1}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$。

这符合于头两项的和：

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

练习 10

1. $n=6$

2%单利：$1.10+0.02=1.12$

2%复利：$(1.1041)(1.02)=1.1262$ （舍入）

4%单利：$1.20+0.04=1.24$

4%复利：$(1.2167)(1.04)=1.2654$ （舍入）

6%单利：$1.30+0.06=1.36$

6%复利：$(1.3382)(1.06)=1.4185$ （舍入）

2. $n=21$

2%单利：$1.40+0.02=1.42$

2%复利：$(1.4859)(1.02)=1.5156$ （舍入）

4%单利：$1.80+0.04=1.84$

4%复利：$(2.1911)(1.04)=2.2787$ （舍入）

6%单利：$2.20+0.06=2.26$

6%复利：$(3.2071)(1.06)=3.3995$ （舍入）

3. $n=60$（采用表上$n=50$和$n=10$的值）

2%单利：$2.00+0.20=2.20$

2%复利：$(2.6916)(1.2190)=3.2811$ （舍入）

4%单利：$3.00+0.40=3.40$

4%复利：$(7.1067)(1.4802)=10.5193$ （舍入）

6%单利：$4.00+0.60=4.60$

6%复利：$(18.4202)(1.7908)=32.9869$ （舍入）

4. 8%利润：

	单 利	复 利
$n=1$	1.08	1.0800
$n=2$	1.16	1.1664

5. 25年

6. 18年(最接近的一年)

练习 11

1.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2.

$$4(a+b+c+d)=1+2+\cdots+16$$

$$=\frac{1+16}{2}\times 16$$

$$=17\times 8$$

所以：$(a+b+c+d)=\dfrac{17\times 8}{4}=17\times 2=34$

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数型
作者＝（英）Ｗ．Ｈ．格伦　Ｄ．Ａ．约翰逊著　戴昌钧　郑学侠译
页数＝５８
ＳＳ号＝１０６５２９１９
出版日期＝１９８１年１０月第１版