《自修数学》小丛书

大家学数学

〔英〕 D. A. 约翰斯
W. H. 格伦 著

科学出版社

《自修数学》小丛书

大家学数学

〔英〕 D. A. 约翰逊
W. H. 格 伦 著

周焕山 恽蔺馨 译

科 学 出 版 社

1 9 8 0

内 容 简 介

这本小册子是《自修数学》小丛书中的第一本．书中介绍了主要数学分支的内容和著名数学家的生平．本书力求以活泼明快的语言说明数学的意义和用途．书中穿插了不少富有趣味性的练习题，书末附有答案．由于内容浅显，可供中学生课外阅读，也可供具有中等文化程度的读者参考．

Donovan A. Johnson
William H. Glenn
INVITATION TO MATHEMATICS
John Murray London, 1964

大家学数学

〔英〕 D. A. 约翰逊 W. H. 格 伦 著

周焕山 恽简馨 译

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年10月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1980年10月第一次印刷 印张：2 5/8
印数：0001—105,200 字数：48,000

统一书号：13031·1367
本社书号：1892·13—1

定价： 0.25 元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书（Exploring Mathematics on Your Own）是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物. 该丛书自 1964 年初版后，于 1974 年、1976 年多次再版印刷. 为开阔读者眼界、增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学

测量世界

数型

毕达哥拉斯定理

统计世界

集合、命题与运算

数学逻辑与推理

曲线

拓扑学——橡皮膜上的几何学

概率与机率

向量基本概念

有限数学系统

无限数

矩阵

写在前面

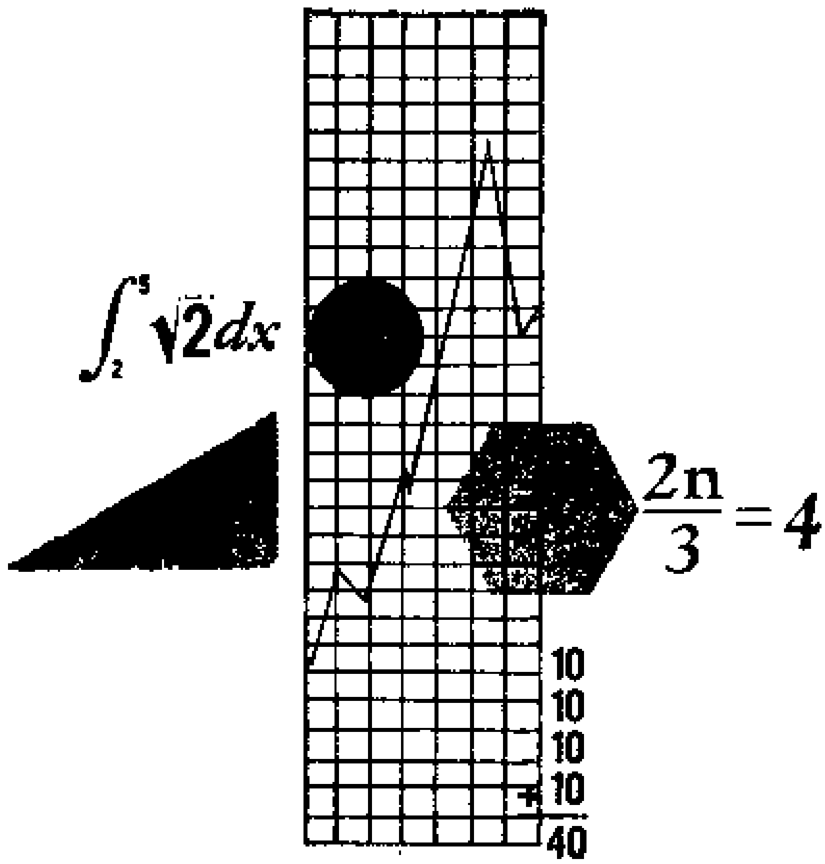
我们写这本小册子，是为了向你提供一幅数学全貌的鸟瞰图．希望你能够对于什么是数学，数学家怎样工作，以及主要数学分支的内容，有一个粗略的了解．此外，也希望你能够看到，在数学中永远发展着新的概念．

学习数学，只要你肯下功夫，都可能象阅读一本惊险小说或侦探一个神秘洞穴那样趣味无穷．数学中有许多意想不到的趣闻、难题、计谋，和许多引人入胜的思想．如果你在自修数学时能独立思考，你将能体会到发现新概念的快乐．

你在阅读本书时，需要比阅读故事之类书籍更为认真．从一开始就要慢慢地读．如果你对一个句子或一段话不太明瞭，不要着急，而要有耐心．读数学书时要养成在面前放张纸、手中握支笔的习惯．如果你能勤练习，勤画图，完成书中的作业，你将容易理解所读的内容．

我们希望你在阅读本书时，将能象其他数学爱好者一样，饱尝钻研数学的乐趣．

目　　录



一、数 学 世 界

1. 什 么 是 数 学

为什么数学在现代变得如此重要？为什么一些产业家和政界人士也如此关心数学人材的不足？新的电子计算机能否在解决所有数学问题方面都比人脑更迅速、更准确，以致使数学家无用武之地？

为了回答这些问题，我们首先得弄清楚什么是数学，数学有什么用处．就研究的内容和范围来说，数学比算术广泛得多，算术是研究数与数的计算的科学；数学比代数广泛得多，

代数是用符号表达的语言，主要研究运算与关系；数学比几何广泛得多，几何主要研究形状、大小与空间；数学比统计广泛得多，统计主要研究数据的整理与图示，并分析其意义；数学比微积分广泛得多，微积分主要研究变量的变化规律、极限与无限．数学包括所有这一切，但又比这一切更为广泛．

数学是一种思维的方法，一种推理的方法．能用数学方法去判断一个想法是否正确，或者至少是否大概正确．数学是探索和发明的乐土，在这里每天都有新思想被发现．数学是用来解决科学中、行政管理中、工业中提出的各种问题的一种思维方法．它是用各种符号表达的语言，这种语言能为世界上所有文明民族所理解．有人甚至认为，数学将是其它星球上的居民（如果有居民的话）也能理解的语言！它是一种象音乐那样具有对称性、模型和令人喜悦的节奏的艺术．

也有人把数学说成是研究模型的学问，这里的“模型”一词，泛指空间形式、数量关系或逻辑思维中的任意一种规律性．因为在自然界中广泛存在模型、规律性和对称性，所以，研究模型对于科学发展有着重要的意义．例如光、声、磁、电流、海水的波浪、飞机的翱翔、雪片的形状、原子的结构等等，所有这一切都具有能用数学来进行分类的模型．

2. 我们世界的数学

如果回顾一下文明史，我们将发现数学对于世界文明总

是起着重要的作用.

自古以来，数学是人类从事下述各种活动的必要工具:

确定地产疆界；预报四季变化；驾驶船舶；建造房屋和桥梁；测绘地图；研制武器，制订作战计划；了解天体运行；促进商业贸易.

在现代，数学广泛地应用于:

发现新的科学原理；发明新机器；研制电子计算机；研究比赛策略；指挥交通运输；制造新的疫苗和药品；驾驭原子能；发展宇宙航行；探测新的矿藏；预报天气变化；预报人口增长.

数学的应用每天都在扩大，数学的各个分支每天都在发展. 运用实验、想象和推理，数学家们不断地发现新的规律和理论，以此促进科学技术和工商业的发展. 如果你想一想世界上的最新进展，例如人造卫星、核潜艇、自动化工厂、抗菌素，等等，你就会看到数学和其它科学正在如何改变着我们的世界.

并非每个人都能成为数学家和科学家，但是为了了解现代世界，每个人都必须懂得一些数学. 这些数学知识将使你在学校里学习得更好，在家庭生活方面安排得更合理，在将来的工作岗位上工作得更加出色. 在科学技术迅速发展、工农业生产日益自动化的今天，没有相当的数学知识就难以适应社会的需要. 我们的政府工作人员，如果要在我们这个复杂的充满新观念的世界中作出明智决定的话，那就必须要有一

定的数学知识.

自然，如果你有志于以科学、统计学或各种工程技术作为未来的职业，你就更必须努力精通数学，因为这些学科都是以数学为基础的. 今天还需要大量的职业数学家去研究、去教学.去寻找数学的新应用，职业数学家在建设我们的文明社会中经常起着重要的作用. 世界上大数学家所用的推理方法以及他们逻辑的成果，在我们现代文化中甚至更为重要.

3. 数学家的工作

虽然数学是地图测绘员、建筑师、宇宙航行员、机械师、会计等各种人必须应用的工具，但是，无论是处理财经问题的会计，还是测算地球到火星距离的天文学家，无论是设计桥梁的工程师，还是发明新型塑料的科学家，通常都不是严格意义上的数学家. 不错，他们确实应用了数学家已经发现的许多数学知识，但是数学家的任务在于去发现新的数学，去证明新的数学理论，或者应用已有数学知识去解决新的问题. 数学家们经常关心的是这样一些有趣的问题:

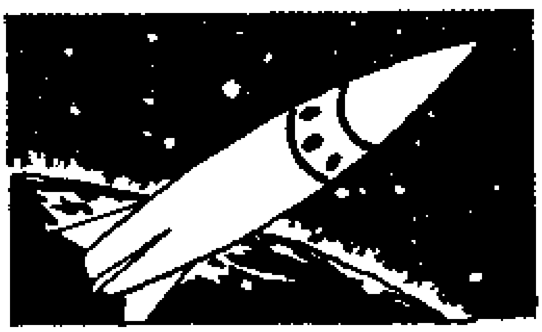


图 1

假设一个五岁的儿童乘坐火箭以光的速度作宇宙航行，十年后回到地球. 那么当他返回地球时，这个儿童多大年

纪？

按照爱因斯坦的相对论，这个儿童返回地球时还是五岁！这就是说，当这个儿童以光速旅行时，他的年龄并没有增大.

数学家解决问题的能力，在很大的程度上依赖于他对数学模型的敏感．如果他发现某种值得注意的模型或规律性现象，他就对它进行仔细研究，并力图从中发现某种意义，某种法则，某种公式，以便解释或者描述这种模型．因此，要成为一个优秀的数学家，你必须善于发现数学模型．巴斯加三角形就是数学家发现模型的一个很好的例子．法国数学家布莱斯·巴斯加(1623—1662)研究了在下列数学关系式中的系数：

$$(a+b)^0 = 1$$

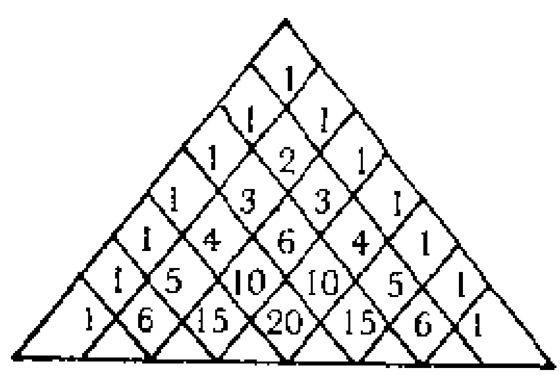
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

如果你注意一下这等式右边的各项的系数，就能得到排成三角形的下列模型：



注意每行的两端是1，每行中其它各数都等于它的肩上的两数之和．这种数的模型被称为巴斯加三角形[1]，应用它能解决代数与统计中的许多问题．

据说、凡是能成为数学家的人多少总有一点诗人气质．他们喜欢一个劲儿地动脑筋，他们的大部分工作是进行思维和推理．数学家为了解决一个数学难题，往往成年累月地一直在想着这个问题．不仅坐在办公桌边或实验室的时候在想着这个问题，在等公共汽车时也可能在想，在登山或洗澡时也可能在想．数学家的工作是一种令人兴奋的工作，是对我们国家和全世界都很重要的工作．

练习1　关于模型的问题

先找出有规律地重复的一种模型，然后解题．

1．约翰·史密斯和他的女朋友朱莉，两人都有工作．约翰每工作八天后休息一天；朱莉每工作五天后休息一天．约翰今天休息；朱莉明天休息．问他们哪一天（如果有这一天的话）一同休息？

2．将6枚硬币摆成一排，3枚正面向上（用Ⓗ表示）为一组，3枚背面向上（用Ⓣ表示）为另外一组，两组之间隔一空位，如图：

ⒽⒽⒽ - ⓉⓉⓉ

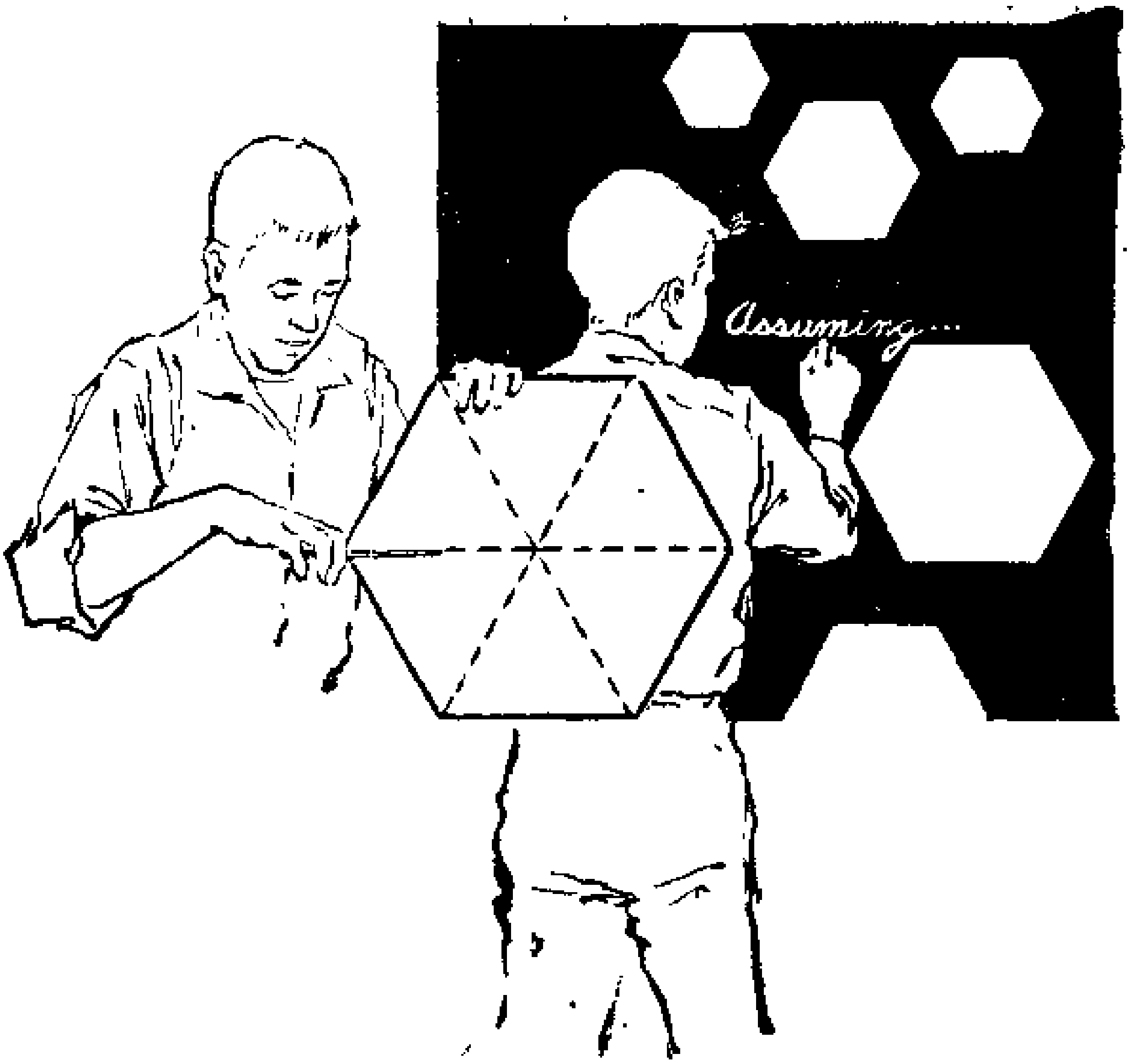
现在要把六枚硬币的位置变换为：

ⓉⓉⓉ - ⒽⒽⒽ

1）这种数的模型我国数学家杨辉于1261年所著的“详解九章算术”一书里就已经出现．杨辉指出这方法出于“释锁算书”，并说我国古代数学家贾宪已经用过它．所以我国发现这个表不迟于11世纪，要比巴斯加早500年左右．

——译者

规定两组硬币只向对方移动，每次只移动一枚硬币，可以走一步移进空位，也可跳过一颗硬币进入空位。如果你先用两枚硬币进行试验，然后用四枚试验，你就会很快发现本题的模型。



二、数学中的推理方法

1. 实验法与归纳推理

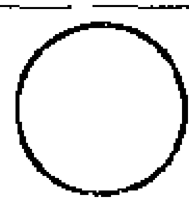
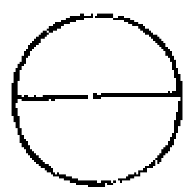
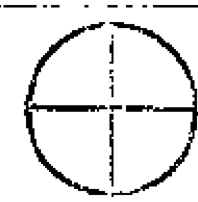
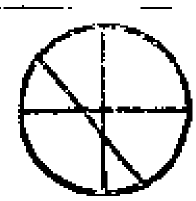
我们常看到包括硬币、生日、假日之类的数学问题，但是数学家主要不是关心这类日常生活问题．他们更关心的是用想象、直觉和推理去发现新的概念，解决疑难问题．他们乐于探索新的思想，尝试用各种解题方法，并以清晰简明的语言叙

述新的思想.

数学家用以发现新思想的方法之一是进行实验. 这种方法类似于科学家在实验室里所用的方法，它叫做实验法或归纳推理. 让我们来看怎样应用实验法解决下述问题:

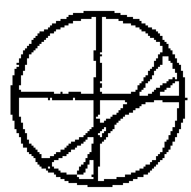
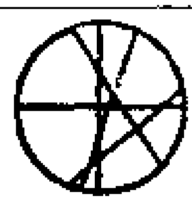
如果你用任意方法去切一块圆饼，只要通过同一点不超过两刀,那么最多能得到几块?

我们可用实验法解决这个问题. 自然，我们用不着特地去买一块饼来，只要在纸上画一些圆就行了. 我们对各圆进行不同次数的切割(实际上就是画圆的弦)，并在表中记录结果,得到:

切割次数	图形	块数	块数增加数
0		1	
1		2	1
2		4	2
3		7	3

我们仔细考察一下这张表,看看我们能否找到所体现的模型.

从记录上看，块数增加的模型是自然数 1，2，3．切割次数所成的数列也是这个数列．这种增加的模型是否继续有效呢？让我们再多试几次，并记录数据，得到：

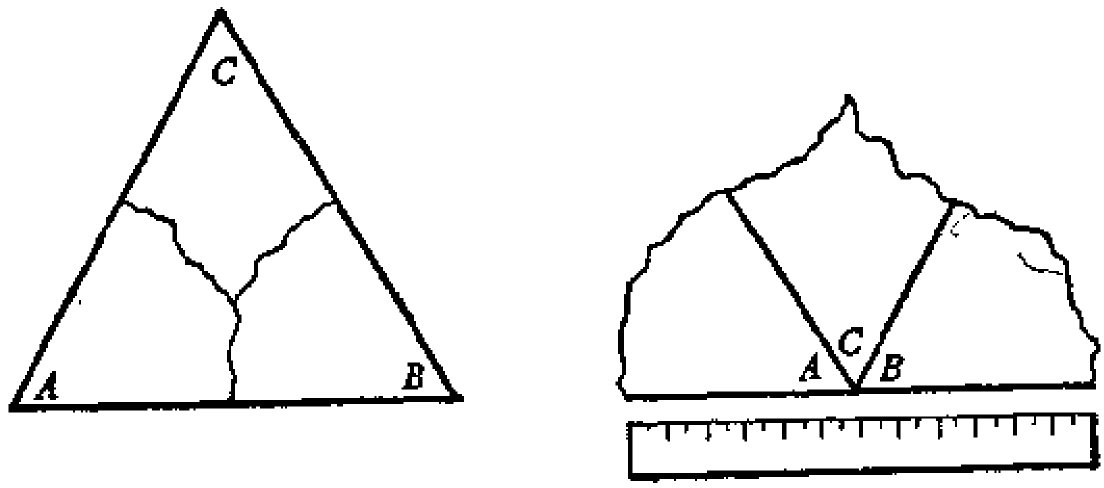
切割次数	图形	块数	块数增加数
4		11	4
5		16	5

现在的增加数分别是 1，2，3，4，5，可见模型继续有效．这种模型能使我们预报：切割 6 次得 22 块，切割 7 次得 29 块．并进一步能使我们预报切割任意次所得的块数．想一想：切割 8 次、9 次将得到多少块？

这种类型的推理是由考虑特殊事例而推得一般结论的，叫做**归纳推理**．

还有另外一个简单的实验，它说明一个著名的数学事实．用纸剪 n 个大小不同的三角形，按图 2a 的方式撕下每个三角形的三个角，然后把每个三角形的三个角按图 2b 的方式拼拢．

每个三角形的三个角拼拢后是否组成一条直线呢？如果你用一根直尺如图 2b 所示的那样靠上去，你会看到三个角拼拢后正好组成一条直线．



a　　b

图 2

这个实验说明，一个三角形的三个内角之和等于一平角，即等于180°. 但是无论我们做多少次试验，我们永远不能由此确定每一个三角形的内角和都毫不例外地等于180°. 也许有某一个形状古怪的三角形竟然不符合这个结论. 所以，我们象这样由实验法得到的结论只能说是大概正确的. 实践说明，由实验得到的结论常常是正确的，但并非总是正确的或必然正确的.

考察下面的算术计算:

$$2\times 2=4 \qquad 2+2=4$$

$$\frac{3}{2}\times 3=4\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2}+3=4\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{3}\times 4=5\frac{1}{3} \qquad \frac{4}{3}+4=5\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{4}\times 5=6\frac{1}{4} \qquad \frac{5}{4}+5=6\frac{1}{4}$$

由这些例子，我们可能归纳出这样一个结论：两数之积等于这两数之和．不必说，你这个结论是错误的，你只要举一个简单的例子就能推翻这个结论．这说明归纳推理存在严重的缺点．只考虑几个特殊事例可能导致错误的结论．为了推翻错误的结论，我们只要举出一个实例说明结论不成立就行了．

练习 2　应用归纳推理

进行下述实验，并写出一个大概的结论．

1．以 9 乘 n 个自然数，然后求所得积的数字和．例如：

$$9\times2=18 \qquad 1+8=9;$$

$$9\times43=387 \qquad 3+8+7=18.$$

关于 9 的任意倍数的数字和，你能由此得出什么结论？ 根据你所得的结论，预报下面的自然数中哪几个能被 9 整除？

477，648，8766．

2．写出 1 到 20 的整数的平方．观察这些平方数，你能对于(1)奇数的平方；(2)偶数的平方；(3)能被 5 整除的自然数的平方，作出怎样的结论？由此你对 22 的平方作怎样的预报？

3．测量咖啡筒、盘子、灯罩、字纸篓、唱片、自行车轮子等圆形物体的周长和直径，并把周长除以直径．比较所得各商并说出由此得到的结论．

4．用一段线和一个重物做成一个摆长为 10 英寸的摆．数出这个摆在 10 秒钟内来回摆动的次数．然后把摆长调整为 20、30 和 40 英寸，并分别数出这些摆在 10 秒钟内摆动的次数．关于摆动次数与摆的长度之间的关系，你能得出什么结论？

2. 演 绎 推 理

让我们来做另一个关于几何图形的实验。画几个边数不同的多边形，如图 3 所示：

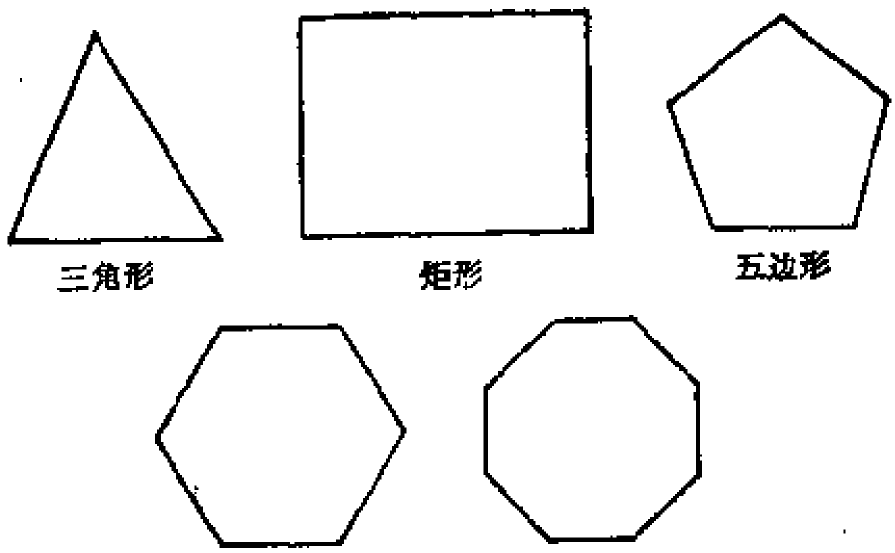


图 3

量出这些多边形的各内角的度数，你将得到下述结果：

图形	边数 (n)	各内角的度数和 (S)	内角和表示为平角的数目
三角形	3	180°	1
矩　形	4	360°	2
五边形	5	540°	3
六边形	6	720°	4
八边形	8	1080°	6

各多边形的边数与内角和表示为平角(180°)的数目之间有什么关系呢？由上表可得到下述结论："多边形的内角和

等于边数减 2 再乘以 180° 所得的积."这句话用公式来表示，即 $S=(n-2)\cdot 180°$.

这个实验是归纳法的另一个例子. 在应用归纳法时必须反复度量多次，以判断是否总能得到同样的模型. 但由于要试验所有可能的多边形是不可能的，而且我们的度量有时也是不准确的. 因此，我们不能断定所得结论将适用于任何一个多边形. 所以归纳法给予我们的答案仅是大概正确的.

但是，归纳法并不是求得结论的唯一的方法，我们也可以用另外的方法求得结论. 让我们把每个多边形分成若干个三角形，如图 4 所示.

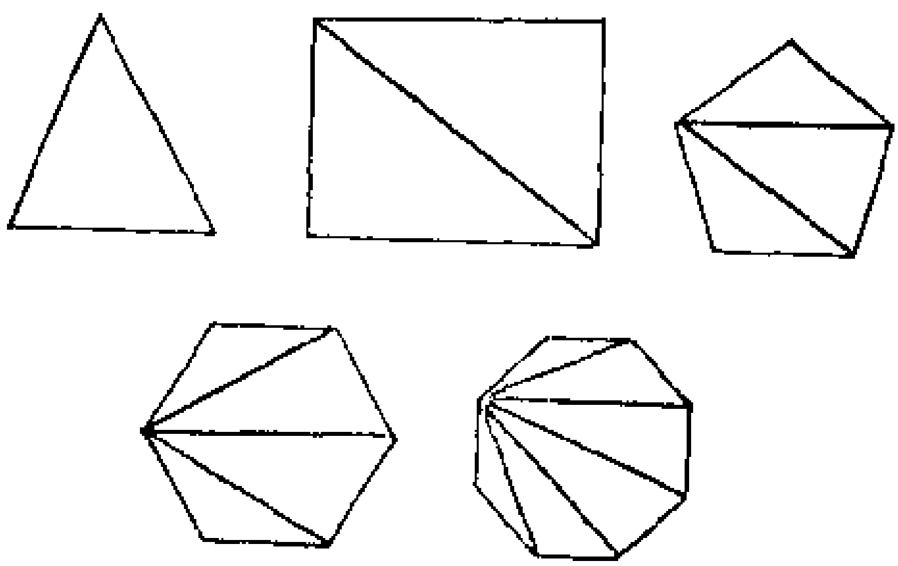


图 4

由图 4 所示的图形，我们作出这样的假定：任意一个 n 边形都能分成 $(n-2)$ 个三角形，即分成的三角形的个数比边数少 2. 又根据前节中关于三角形的实验，我们假定每一个三角形的内角和等于 180°. 再假定任意多边形的内角和是由它所分成的各三角形的内角和拼成的. 那么，我们由此得

到结论：任意多边形的内角和是 $(n-2)\cdot180°$.

考察一下刚才应用的推理．我们一开始就提出几个假定是成立的或者已证实是成立的概念，然后我们根据这些概念，靠推理的力量得到结论．和实验法不同，没有进行实际度量．从关于任意一个多边形分成三角形的个数的假定出发，得到一个关于任意多边形的内角和的具体结论．这样一种逻辑推理方法，叫做*演绎推理*．通过演绎推理从其他概念或假设出发，我们得到一个特殊的结论．

自然，我们的结论是否正确依赖于开始的假设和概念是否正确，这里再举一个十分简单的演绎推理的例子．假定每个四年级学生都学数学，如果已知比尔·琼斯是四年级学生，那么我们推得比尔·琼斯学数学．这个特殊的结论依赖于开始推理时的假定．自然，仅当原有假定——四年级学生都学数学是成立的条件下，才能肯定结论——比尔学数学是成立的．

练习3　测验你的推理能力

应用实验或推理回答下列问题．

1．如果3只猫在3分钟内捉到3只老鼠，那么100只猫捉100只老鼠要多少时间？

2．一个瓶子和一个瓶塞子共值1先令2便士．瓶子的价格比塞子贵1先令．塞子的价格是多少？

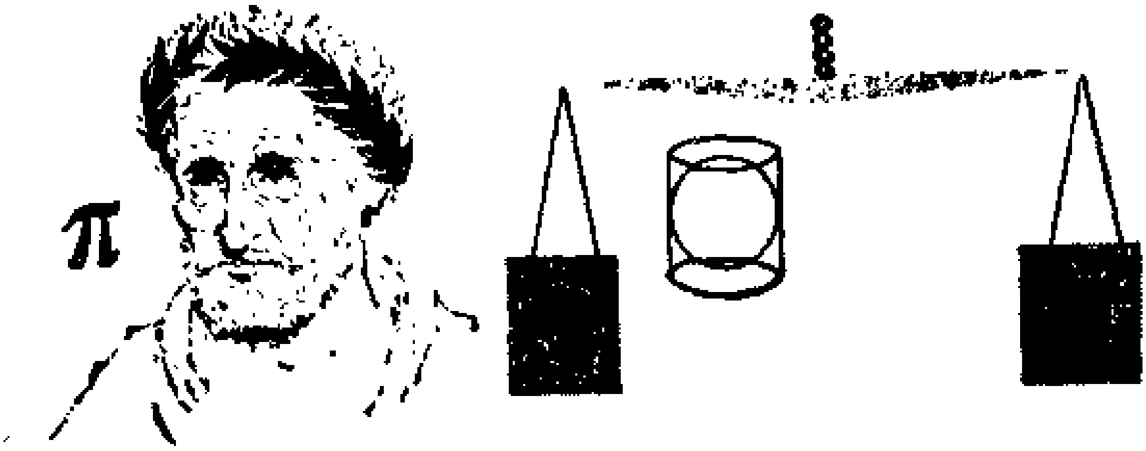
3．一只猴子在一个30英尺深的井底．每天他跳上3英尺，又掉下2英尺．如果天天这样，这猴子要多少天才能跳到井的顶部？

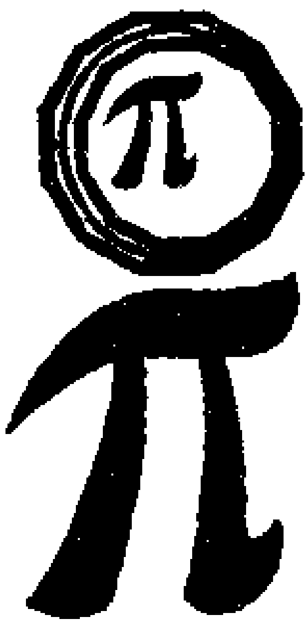
3. 数学中的推理、逻辑与证明

我们已经考察过数学中用的两种推理方法．我们看到这两种方法都有用处，但是各有缺点．归纳推理能用以发现新的东西，但如果所考虑的事例并不具有代表性，或者被误解了，那么就可能推得错误的结论．演绎推理能用以产生正确的结论，但必须从正确的假定出发．在数学中经常一起使用这两种方法：用归纳法去导出可接受的假设，用演绎法从假设去推导正确的结论．

人类最初的数学知识是由归纳法得到的．远古的埃及人和巴比伦人，通过观察和实验获得了许多数学知识，并把这些数学知识应用于他们的日常生活之中．古希腊人对哲学和逻辑很有兴趣，十分强调推理．他们接受了一些基本的数学假设，然后从这些假设出发，用演绎法证明了大部分我们今天知道的几何定理．所以，演绎证明是数学的一个重要部分．

从古希腊的时代起，演绎法就成为数学中最重要的一种推理方法．但是，数学家们象其他科学家一样，仍然通过预感、想象、类比、推测、实验等各种方法继续发现新的思想，然后他们为了验证新的思想确实成立，苦心作成严格的证明．这种严格的形式证明完全不同于想象．他们应用假设、定义和先前已证明过的命题去证明新的命题．通常他们决不说："如此这般是正确的"，而是说："如果 A 成立，那么 B 成立"．他们了解，结论 B 依赖于作为出发点的假设 A，而且可能只在数





阿基米德（公元前 287—212）

阿基米德是古代希腊最伟大的数学家和科学家．当他沉思一个问题的时候，经常废寝忘食，忘记了周围的一切．他经常坐在火炉旁几个小时，思考着画在炉灰上的几何图形．当战争波及到他居住的城市——西西里岛上的塞拉库斯（当时是希腊的殖民地）时，他正在聚精会神地考虑一个画在沙盘上的几何图形．他突然发现，有一个人影映到他的几何图形上．当他站起来要求陌生人不要打断他的思路时，冲进来的罗马士兵杀死了他．罗马人不象希腊人那样耽于幻想，但是从来没有哪个罗马人，在数学或科学方面作出象阿基米德那样大的贡献．

阿基米德由于发明了许多机械装置而出了名．其中不少是军事装置．他还发现了一个原理：浸在液体里的物体所受的浮力，等于它所排开的液体的重量．有个故事说，他在洗澡时突然想起了这个念头，于是他衣服也顾不上穿好，就急急忙忙奔到国王那里，向国王宣布自己的发现．后人为了纪念他，把这个原理叫做阿基米德原理．

在数学方面，阿基米德的突出贡献是求得 π 的近似值．他将圆和圆内接多边形相比较，并不断增加多边形的边数，算得 π 的值比 $\frac{223}{71}$ 略大，比 $\frac{220}{70}$ 略小．他证明了许多关于几何图形的面积和体积的公式，其中一个公式是将圆柱的体积和球的体积作比较后得出的．他的一个想法类似于牛顿所发现的微积分．

据说阿基米德曾经说过："如果你给我一根足够长的杠杆，我能够推动这世界．"阿基米德确实"推动"了世界的进步，不过用的是数学和科学上的发现，而不是用的体力．

学的世界里是成立的，在物理世界里可能没有明显的应用或解释．例如两个波兰数学家，斯蒂凡·巴拿赫与艾尔弗雷德·塔斯基，从数学观点用一种逻辑证明了：一粒豌豆大小的固体球能够分割成有限多数目的薄片，然后装配成太阳大小的一个球！难怪数学被认为是一门不寻常的科学．

练习 4　识别和应用推理方法

1．识别下列各例中用的是归纳推理还是演绎推理：

a．四年级学生在试验过几种不同物体和液体后，得到这样的结论：如果一个物体排开的液体的重量等于它自身的重量，这个物体将漂浮在液体中．

b．仅有六年级学生能够参加数学竞赛．约翰参加数学竞赛．约翰是六年级学生．

c．五十个人服用某种牌子的维生素丸药两个月，其中四十五人在这期间增加了体重．我们由此得到结论，维生素丸药能使人增加体重．

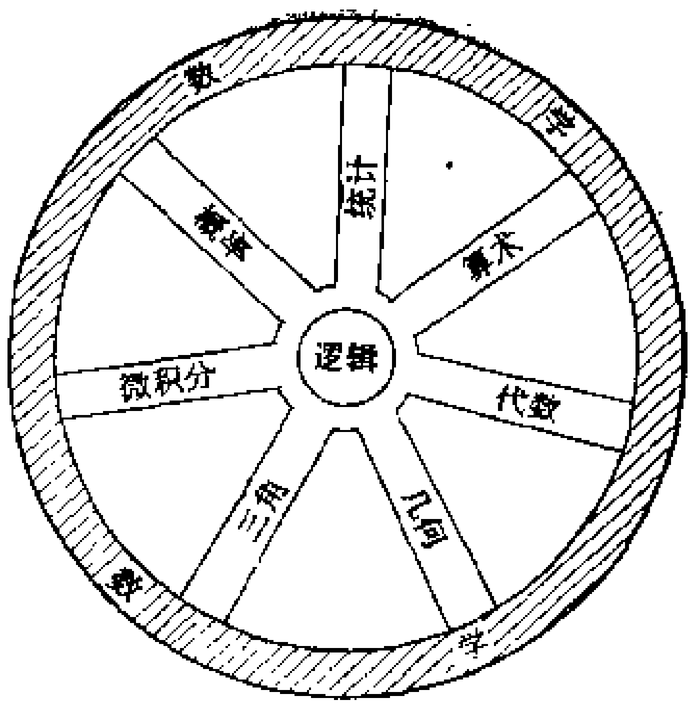
2．三个旅客在一家旅馆同住一个房间，每人付了 10 镑，即共付 30 镑．旅馆老板想了一会，发觉多收了他们的钱，就叫一个旅馆服务员送还 5 镑．这个服务员觉得 5 镑不便分成三等分，就索性把两镑放进自己的口袋，仅还给每个旅客 1 镑．这样每个旅客付了 9 镑房钱，一共付了 27 镑．如果我们在 27 镑上加上服务员藏起来的两镑，得到总数 29 镑．可是 3 个旅客原来共付 30 镑，还有一镑哪里去了呢？

3．有一个国王要从三个候选人中挑选一人担任首相，他决定测验一下这三个人的智力．他告诉他们，他先蒙上他们的眼睛，再在每个人的额上画一个红十字或者一个蓝十字．然后解开蒙眼睛的手帕．如果哪个候选人看见红十字就举起手，当他断定自己额上画的什么十字时就把手放下．国王于是蒙住每个候选人的眼睛，并在每个人的额上画一个红十字，然后解开手帕．在相互看过之后，三个候选人都举起了手．过了一会，一个候选人放下手说："我的十字是红的，"并说出他的

理由．你能够复述一下他的理由吗?

4．一天早晨，一家小杂货店的第一个顾客送给店主一张 5 镑的钞票，要买价值 2 镑的货物．因为找不出零钱，店主拿着这张 5 镑的钞票到街对面的药房，换得 5 张 1 镑的钞票．然后这店主给他的顾客价值 2 镑的货物与 3 张 1 镑的钞票．中午时分，药房老板手里拿着这张 5 镑的钞票走过来跟店主说，这是张假钞票，要求退还他的钱．杂货店主于是给他 5 张 1 镑的钞票，拿回假钞票．试问杂货店主实际损失多少?

5．一棋盘共有 64 个方格，假设你有 32 块骨牌，每块骨牌正好盖住两方格，于是 32 块骨牌正好盖住 64 个方格，如果你在棋盘的两个对角上各切去一个方格，即一共切去两个方格，同时丢开一块骨牌，能否在棋盘上放置 31 块骨牌，使余下的 62 个方格全被盖住?如果可能，请说明放置方法，如果不可能，请予证明．



三、主要数学分支初探

1. 数 学 结 构

数学是从回答这一类简单问题开始产生的："有多少?""什么时候?""有多远?""有多大?"以及"在什么方向"等等.这些问题至今仍然用数学来回答. 诸如宇宙航行和原子能等新学科的发展都向数学提出了新问题，于是就需要新的数，新的测度，寻找关系的新方法.其中最重要的数学新理论之一就是证明新的事实所用的新方法. 作为这一切需要的结果，我们现在有八十多个不同的数学分支. 事实上，世界各地每天都在创造新的数学思想，多得任何一个人都无法读完当天的成果.

每一个数学分支都是逻辑地发展和组织起来的. 因此，

每个数学分支都可叫做一个逻辑结构或体系.

为了建立一个数学体系，数学家一开始就得使用一组未定义的词语和一组未证明的假设. 他必须有一组词语才能表达他的思想，必须有一组假设才能据此推导他的理论. 然后他发展一些法则，用以描述与这数学结构有关的事物. 最后，他发明一些符号，使得应用这些法则更为简便. 这些词语、符号或法则并不一定需要参照我们周围世界的物体. 数学中经常包括一些从来没有见过或从来没有体验过的事物. 有些人以为一切数学都必须用具体的物体、度量或实验来证实. 其实并非如此，数学属于概念想像和幻想的领域，但它也是一门人们所熟知的最实际的学问，这正是数学的独特之处.

2. 算术：数学结构的一个范例

让我们用初等算术做一个范例，来说明数学结构是怎样形成的. 算术一开始，用 1 作为一个未定义的术语. 利用 1 这个单位，就可定义其它的数. 加法运算和乘法运算也是未定义的术语. 我们利用加法表和乘法表来描述这些运算，但是并没有给出它们的定义. 但是，减法与除法运算是分别用加法与乘法运算来定义的.

其次，我们来叙述几个看来符合我们实际经验的关于数的假设. 例如，我们假定加法运算满足结合律，即

$$2+(3+4)=(2+3)+4.$$

我们还假定两数之和永远是一个数.

再利用单位1和加法来定义其它数，例如：

$$2=1+1,\ 3=2+1,\ 4=3+1,$$

等等.

然后，应用这些未定义的术语、运算、定义和假设来证明称为定理的新关系. 让我们来看一下怎样应用这个演绎体系去证明 $2+2=4$.

一个逻辑证明的范例

叙述	理由
1. $2+2=2+(1+1)$	1. 2定义为 $1+1$.
2. $2+(1+1)=(2+1)+1$	2. 结合律.
3. $(2+1)+1=3+1$	3. 3定义为 $2+1$.
4. $3+1=4$	4. 4定义为 $3+1$.

用类似的方法，我们能够证明通常认为理所当然的其它一些关系式. 这种演绎法也能够应用于其它的数学系统和概念. 在每一种情形下，数学结构都是在未定义的术语、假设和定理的证明的基础上发展起来的.

练习5 算术证明

1. 仿照上述逻辑证明范例，证明 $2+3=5$.

2. 假定乘法分配律成立，证明 $2\times2=4$. 乘法分配律可举例说明如下：$2(3+1)=2\times3+2\times1$.

3. 再谈算术

我们已经看到算术是一个逻辑数学体系. 但是，算术起

初是作为回答人们日常生活中提出的各种问题的一种语言。为了回答这些问题，必须发明数和度量，并规定结合和比较这些数的方式。这最终导致算术——数的科学的进一步发展。

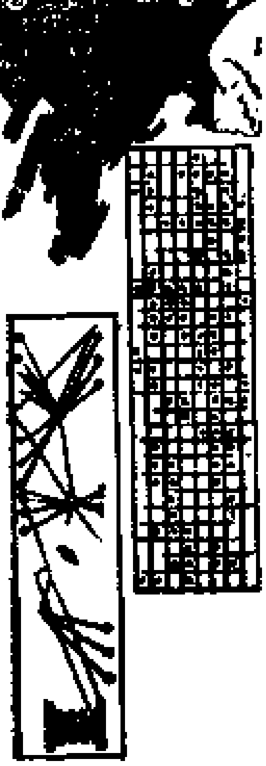
为了发明一套便于应用的数的符号体系，人类花了很长的时间。这种数的符号叫做数字。人们使用数字许多年以后才发明了零的符号。我们知道，应用位值原理的十进位数制要比古代的许多种数制优越得多。但是，十进数制不是唯一的数制，它也未必就是最好的数制。有些人认为，使用 12 个基本符号的数制要比十进数制来得好。另外有一种叫做二进数制的数制，只使用 0，1 两个符号，它在电子计算机和其它电子装置中得到广泛的应用。为了比较二进数和十进数，列成下表。

二进数和十进数比较表

二进数	十进数	二进数	十进数
0	0	100	4
1	1	101	5
10	2	110	6
11	3	111	7

对于数的研究永远是一个吸引人的课题。甚至一个最普通的数字运算问题也能发人深省，使人想起新的问题或新的概念。你不妨试试看，能否解释在解下面的除法问题时所用的方法：

莱布尼兹(1646—1716)



$$\int_2^{10} x\,dx$$

戈特弗里德·威廉·莱布尼兹是作为数学家而闻名于世的，但他是一个多才多艺的人．他不仅致力于数学，而且致力于法律、宗教、政治、历史、哲学和科学．

莱布尼兹出生在德国的莱比锡，并在当地大学里读书，17 岁时得到学士学位．如果不是这个大学的教授们对于这位才气横溢的青年人心怀妒忌的话，他本来可以在 20 岁时得到博士学位．他的一生其余大部分时间都是作为旅行外交官度过的．他的许多重要发现，都是在 17 世纪的欧洲不平坦的道路上颠簸时想起来的．

莱布尼兹最大的兴趣之一，是发展一种能够回答所有领域一切问题的数学．这一目标导致他去研究逻辑，这种逻辑是现代符号逻辑的基础．

莱布尼兹是一个信仰宗教的人，写了很多关于宗教的文章．甚至他发现的二进数也和他的宗教信仰有关．他认为 1 表示上帝，而 0 表示空或无．正象上帝能够从无到有创造万物一样，仅用 1 和 0 的二进数制也能够表示所有的数．

莱布尼兹和牛顿差不多同时发现了微积分．关于究竟谁第一个发现了微积分，有着很多争论．莱布尼兹还发明了一种计算机，用它可作加、减、乘、除和求平方根的计算．

莱布尼兹本来或许能成为最伟大的数学家，但是有两件事情影响了他．一件是他爱财，另一件是他对人类知识的所有领域都很爱好．如果他用全部时间专心致志地研究数学的话，他能发现的数学规律一定会更多呢．

$$
\begin{array}{r}
23\overline{)552} \\
\underline{230} = \underline{10} \times 23 \\
322 \\
\underline{230} = \underline{10} \times 23 \\
92 \\
\underline{92} = \underline{\ \ 4} \times 23 \\
24
\end{array}
$$

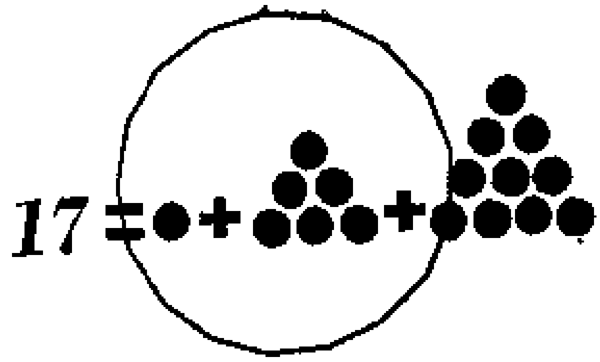
$$552 \div 23 = 10 + 10 + 4 = 24$$

我们常常能找到一些不寻常的数的模型，这些模型能使人对数的关系有进一步的认识． 9 的倍数的模型就是一个好例子．

$$
\begin{array}{ll}
1 \times 9 = 9 & 0 + 9 = 9 \\
2 \times 9 = 18 & 1 + 8 = 9 \\
3 \times 9 = 27 & 2 + 7 = 9 \\
4 \times 9 = 36 & 3 + 6 = 9 \\
5 \times 9 = 45 & 4 + 5 = 9 \\
6 \times 9 = 54 & 5 + 4 = 9 \\
7 \times 9 = 63 & 6 + 3 = 9 \\
8 \times 9 = 72 & 7 + 2 = 9 \\
9 \times 9 = 81 & 8 + 1 = 9 \\
10 \times 9 = 90 & 9 + 0 = 9
\end{array}
$$

注意乘积中的十位数由 1 增加到 9，而个位数则由 9 减少到 0． 在 45 之后的各个积，相当于把 45 以前的各个积的两个数字交换一下．

还有许多其他有趣的数的模型． 例如，三角形模型能用来表示 1，3，6，10 等数．



高斯(1777—1855)

卡尔·弗里德里克·高斯，与牛顿和阿基米德一起，被认为是有史以来最伟大的三个数学家．高斯于1777年出生在德国，是穷苦人的儿子．他从童年起就表现出数学才能．高斯自己说，他在会说话之前就会计数！当他十岁时，他的数学才能使他的老师大吃一惊．因为老师刚说完问题：81,297＋81,495＋81,693＋…＋100,899，小高斯就算出了和是多少．从这个时候起，他就开始努力掌握数学并独立思考地研究数学．算术成为高斯一生中最心爱的研究科目．

很幸运，布伦斯威克的公爵愿意提供经费，这就使高斯能在15岁时上大学．当他18岁时，他发现了几个数论的新定律，并且发现了一种叫做“最小二乘法”的新的统计方法，这种方法用来判断一个几何图形是否最好地表示了一组数据．当他发现每个正整数都是至多三个三角形数之和时（例如 $17=1+6+10$），他非常高兴．在同一年，他还发现了正17边形的作图方法．

高斯逐渐结识了许多其他的数学家，但是他认为牛顿是他学习的榜样．高斯虽然为人友善，但是他藐视那些装做什么都知道而且永远不承认一个错误的人．他谦虚朴实地度过了一生，连续不断地对数学作出贡献，直到逝世为止．他在算术、几何、天文和统计等各方面的发现都是世人熟知的．但是，尽管他对数学作出了无比辉煌的贡献，谦虚的高斯说：“如果其他人也象我那样持续不断地深入钻研数学真理，他们也会作出我所作出的那种发现”．

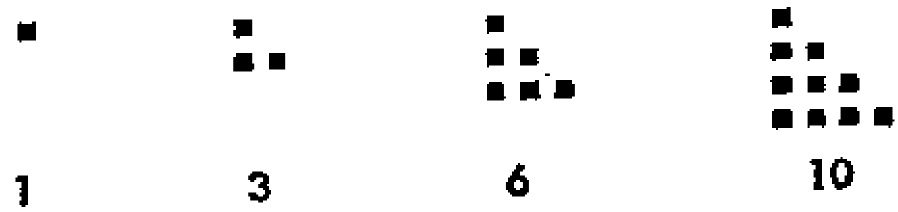


图 5

再如正方形模型能表示 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100 等数.

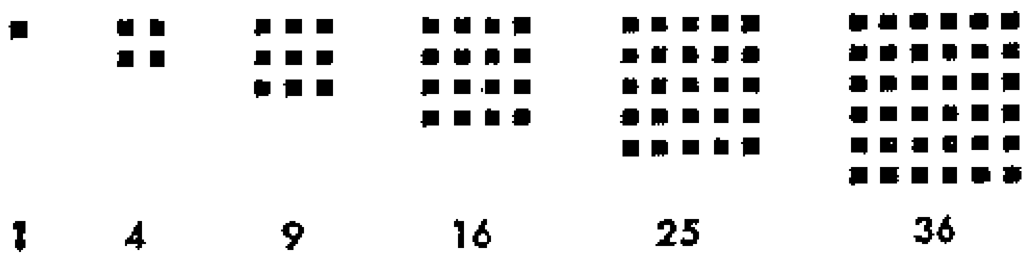


图 6

任何一个平方数有一奇怪的性质，即都能表示为连续奇数之和. 例如:

$$4 = 1 + 3,$$

$$9 = 1 + 3 + 5,$$

$$16 = 1 + 3 + 5 + 7.$$

有一些数，如 6，10，15 等，能用一个矩形模型来表示.

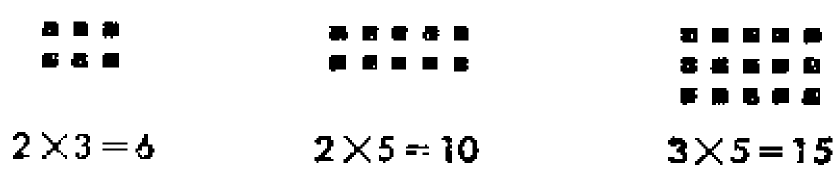


图 7

另一些数，如 2，3，5，7，11，13，等等，既不能用正方形也不能用矩形来表示. 这些整数除了自身和 1 之外，没有其

它整数因子，被叫做素数．数学家们曾经研究过许多年，力图找出素数之间的关系，希望能写出一个表示素数的公式，并找出一个求素数的方法．但是至今还没有人求到能给出所有素数的公式．所以关于素数的相当多的研究工作仍然是用归纳法进行的．

让我们考察一些有趣的素数模型．如果我们用箭头(→)表示一个素数乘子，用星号(*)表示积，我们能作出图示来说明每一个整数都可表示为 1 与若干个素数之积．例如，4 的图示是

$$\overset{1}{*} \xrightarrow[2]{} \overset{2}{*} \xrightarrow[2]{} \overset{4}{*}$$

这图示说明 $1 \times 2 = 2$ 以及 $2 \times 2 = 4$．7 的图示是

$$\overset{1}{*} \xrightarrow[7]{} \overset{7}{*}$$

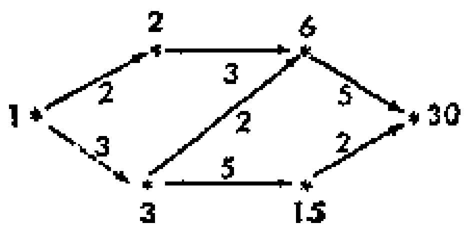
而 9 的图示是

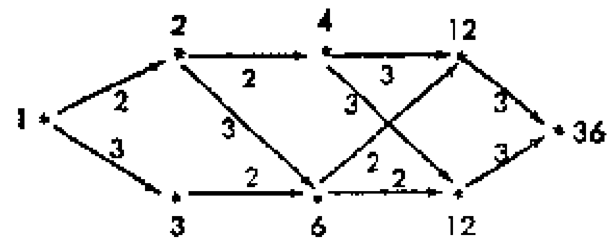
$$\overset{1}{*} \xrightarrow[3]{} \overset{3}{*} \xrightarrow[3]{} \overset{9}{*}$$

要得到 6，可经过两条不同的路线，如下图：

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{2}{*} \arrow[dr, "3"] & \\
\overset{1}{*} \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "3"'] & & \overset{6}{*} \\
 & \underset{3}{*} \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

注意这里的箭头长度是与乘数的大小无关的．还可举出另一些数的图示，如下图：





想一想：哪些数的图示是一条直线？哪些数的图示是比较复杂的图形？

这些例子说明数学家感兴趣的是如何寻求整数之间的关系．数论——研究数的模型的一个重要的数学分支，已经起到了发现许多新的数学概念的作用．我们看到简单的算术，可以是许多使人感兴趣的数学思想和关系的基础．

练习 6　一些算术问题

1．一只篮里有 50 到 60 个鸡蛋．如果三只三只地数，剩下 2 只，如果五只五只地数，剩下 4 只．问篮中有多少鸡蛋？

2．下面是一道加法问题，其中每个字母代表一个数字，不同的字母代表不同的数字：

$$\begin{array}{r} SEND \\ +\ MORE \\ \hline MONEY \end{array}$$

试问这些字母各代表什么数字？

3．利用表示素数乘子的箭头，作出 18 的图示．

4．有 6 只外形和大小完全一样的砝码，其中 1 只是铅做的，其余 5 只是铁做的．为了挑出铅做的砝码，只要在天平上称两次就行了．试问如何称法？

4. 一种新的算术

大多数人每天都要用好几次钟或表.钟表是计时的工具,而任何计量方法本质上都是一个数学问题. 计时的计算规则是比较特殊的. 例如现在是 8 点钟, 7 个钟头之后,我们通常说是 3 点钟,而很少有人说是 15 点钟. 这意味着就钟点数来说, 8 与 7 之和等于 3. 这里的"钟点数"就是指 1,2,3,……, 12 这 12 个数. 按照习惯, 超过 12 时不再向上数,而再从 1 数起, 于是得出 8 与 7 之和等于 3 的结论. 象这样一种算术叫做*模算术*, 12 就是钟点数的*模*. 钟点数的全部 12 个数组成一个数系,这一类数系有时也叫做*有限数系*,因为在这一类数系中一共只有规定好的有限多个数.

一个星期中的各天组成另一个有限数系. 我们把星期天看做数 1, 把星期一看做数 2, 把星期二看做数 3,……, 把星期六看做数 7. 这个有限数系内没有大于 7 的数,它的模是 7. 在做加法时,如果超过 7 就再从 1 数起. 例如, 4 与 5 的和是 2 (即星期三以后五天,是星期一).

在由钟点数组成的有限数系中, 8 与 9 的和写成

$$8+9=5\ (模\ 12).$$

读作"8 加 9 等于 5(模 12)". 词语"模 12"的意思是指这个数系内只有 12 个数. 在由一个星期中的各天组成的数系内, 5 与 6 的和写成

$$5+6=4\ (模\ 7).$$

让我们来考察只有 5 个数和 5 个数符号：0,1,2,3, 4 的模数系．这数系称为“模 5”数系．我们将描述（但不是定义）这个数系内的加法与乘法．然后象普通算术一样，把减法定义为加法的逆运算，把除法定义为乘法的逆运算．我们所描述的这个数系内的运算，要保证运算结果得到的数都在这个数系之内．

用数学术语来说，这样的数系是一个封闭系，因为模 5 数系内的加、减、乘、除各种运算所得的结果，仍然是原来这 5 个数中的一个．在这个数系内，我们将仿照在时钟刻度盘上按顺时针方向数数，即这样数：0, 1、2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1,等等．

弄懂模 5 数系内的加法的含义的一个方法，是制作一个如图 8 所示的数码盘．用硬纸板做成数码圆盘和指针，然后再在盘中心挖个小洞：把指针用图钉钉在数码面上，但能转动．这个数码盘就是模 5 数系的一种刻度表示，就好象图 9 所示的直线是普通数系的数轴一样．

模上数系的刻度表示

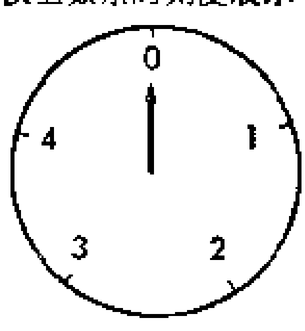


图 8

普通数系的数轴

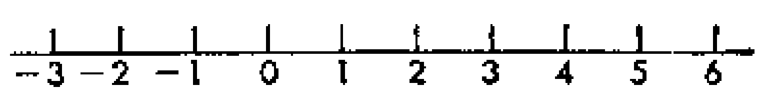


图 9

在整数的数轴上，我们做正整数加法是向右数空格．在模 5 数系的刻度表示里，我们做加法是沿顺时针方向数空格．

例如在模 5 数系内要做 3 加 4 的运算，先使时针指着 3，然后将它沿顺时针方向转动 4 个空格，这样就得到 3 + 4 = 2（模 5）.

我们看到，当和数不大于 4 时，在模 5 数系内的加法和普通数系内一样；当和大于 4 时，将和数除以 5，弃掉商，用余数代替通常的和．例如：

$$3+4=7,\ 7\div 5=1\text{ 余 }2,$$

所以

$$3+4=2\ (\text{模 }5).$$

同样

$$2+3=0\ (\text{模 }5).$$

再如，因为

$$4+4+4=12,\ 12\div 5=2\text{ 余 }2,$$

所以

$$4+4+4=2\ (\text{模 }5).$$

这种数系看上去有些奇怪，可是，在一切使用数码盘或使用有限个数码的机器上却都要应用这种数系．科学家们还发现，有限数系对于研究具有电子层的原子也很有用处．有限数系其实很简单，因为在整个数系里就只有那么几个数．既没有负数，也没有分数，可你还能够用这些数解方程．再一个特点是你无法说出一个数比另一个数更大或者更小．

2 颗弹子加 2 颗弹子永远等于 4 颗弹子吗？在普通数系内，这是当然成立的．但有时候，象 2 和 4 这样的数，我们用来表示另外一种含义．至今还没有人知道能否发现一些新数，将比现在使用的数更好．也许你以后竟然能发现这样一种新

数，而这种新数将导致重要的数学发现.

练习 7 关于模算术的问题

1. 利用模 5 的数码盘求和:

a. $4+4=$

b. $3+2=$

c. $3+3=$

d. $2+4=$

e.
$$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ +2 \\ \hline \end{array}$$

f.
$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 3 \\ +4 \\ \hline \end{array}$$

2. 在模 5 数系内，$3+4=4+3$ 是否成立?

3. 完成关于模 5 数系内的加法表.

+	0	1	2	3	4
0	0				
1		2			
2			4		
3				1	
4					3

4. 回答下列关于模 5 数的问题:

a. 两个偶数之和永远是偶数吗?

b. 两个奇数之和永远是奇数吗?

c. 一个奇数与一个偶数之和永远是奇数吗?

5. 抄写并完成下列关于模 5 数的乘法表:

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1		3	4
2	0	2	4		3
3	0		1		
4	0	4			

6. 在普通算术里，“7减3等于什么数?”的问题可以解释为“什么数加3，得到7?”所以我们说，减法定义为加法的逆运算. 利用减法的这个定义去解下列问题:

a. $4-3$(模 5)　　d. $3-3$(模 5)

b. $3-4$(模 5)　　e. $2-0$(模 5)

c. $2-4$(模 5)　　f. $0-2$(模 5)

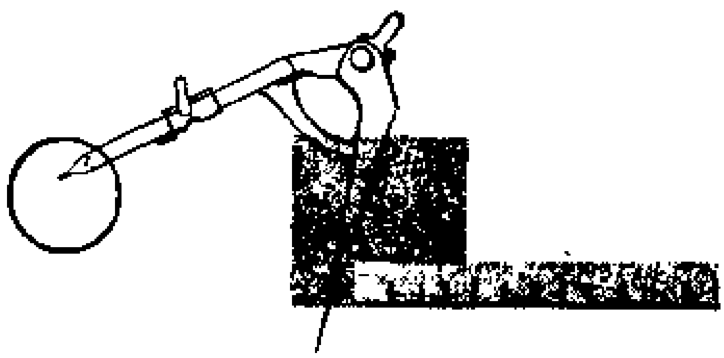
7. 根据除法是乘法的逆运算的定义，解下列模5数的除法问题:

a. $4\div 2$(模 5)　　d. $1\div 2$(模 5)

b. $2\div 1$(模 5)　　e. $3\div 4$(模 5)

c. $2\div 4$(模 5)　　f. $3\div 2$(模 5)

8. 设想一个模4数系，并制作关于模4数系的加法表与乘法表. 编几道关于模4数的减法问题与除法问题，并应用加法表与乘法表求解.



5. 几何: 空间、形状与测量

研究空间、形状与测量的数学叫做几何学. 几何告诉我们怎样画出各种不同形状的图形，并告诉我们有关这些图形之间的关系的许多知识.

对于艺术家、工程师和建筑师来说，学习几何知识是基本的. 要画出一所建筑物的准确的设计图，要确定一股强劲的阵风对一架飞机的影响，要画一幅设计得匀称和谐的图画，这

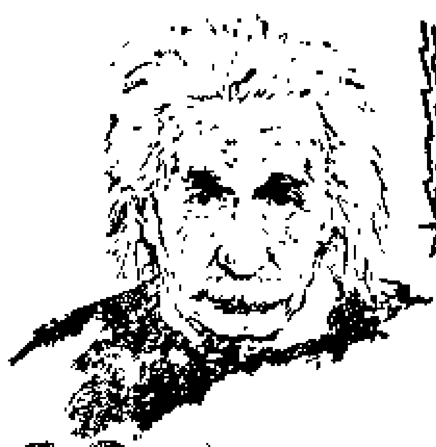
一切都需要关于点、线、角以及形状的知识，这些知识都是几何学研究的内容。

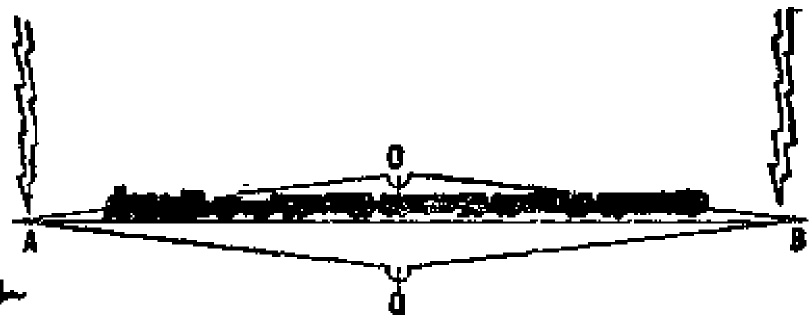
多少世纪以来，人们一直渴望知道几何的奥秘。例如：一个圆的周长与直径的关系；两条平行线是否会相交；空间是否弯曲的并且没有边界，等等．甚至象一条直线这样简单的概念都引起人们的兴趣．你要知道从来没有人看到过一条真正的直线．因为在几何中，直线被说成没有宽度仅有长度，而且是直的．但是没有一个人知道，一条直线是否可能真正是“直的”。

6. 新 的 几 何

我们多数人熟悉的几何是所谓欧几里德几何，这个名称是为了纪念希腊学者欧几里德（公元前 323—285），他收集、整理并系统地记述了当时的几何知识．但是，欧几里德几何不是唯一可能的几何．从某些关于线的假设（与欧几里德的假设稍有不同）出发，数学家们在上世纪发展了几种奇怪的几何，这些几何都叫做非欧几何。

有一种非欧几何说，两点之间的最短距离不是一段直线，而是一段曲线．这话听起来很奇怪吧！如果我们是指平面上的两点，那确实是奇怪的．但如果我们所考虑的，不是在平面上而是在球面上的情况，这种想法就有意义了．实际上，轮船和飞机驾驶员都知道，地球（近似于球体）表面上两点之间的距离是一段曲线．这段曲线是经过球面上这两点的大圆的一





爱因斯坦(1879—1955)

艾伯特·爱因斯坦是一个和善、热心的人，他以其独有的卓越的智慧和才能，引起了我们关于宇宙概念的一次深刻的革命．他的关于相对论、力学和光学的理论，使得许多以牛顿的理论为基础的概念都黯然失色．他是有史以来最伟大的科学家之一．

爱因斯坦出生在德国的乌尔姆．他在童年时代就自学微积分和其它高等数学与科学．后来他到瑞士上大学．1902年，他在伯尔尼的瑞士专利局得到一个职位．在那里工作时，他有充足的时间思考和想象，并写了一些数学和物理论文．1905年，在他发表的关于相对论的第一篇论文里，介绍了著名的公式 $E=mc^2$．这个理论导致核能的发现．这个公式预言一次象原子弹爆炸那样的核反应将会释放出多么巨大的能量．

爱因斯坦知道，他已经在数学和科学方面作了重大贡献，但是他仍然热心于为研究新思想而独自工作．他的理想是寻找一个能够把重力、电力和原子能等自然力都统一起来的数学公式．他的伟大的科学发现是以数学推理为基础，而不是以实验为基础的，这也说明数学与科学之间的密切关系．非欧几何的一些概念对爱因斯坦的思想起了重要的作用．爱因斯坦关于第四维的理论，在宇宙航行中是非常有用的．

爱因斯坦的晚年是在美国度过的．由于他在德国时曾经体验过宗教偏见使他受到的困苦，所以他总是同情并乐于帮助遇到困难的人．他最大的功绩是帮助我们通过掌握自然力来获得巨大的能量，而他最大的忧虑是担心我们会滥用这种巨大的能量．

部分。

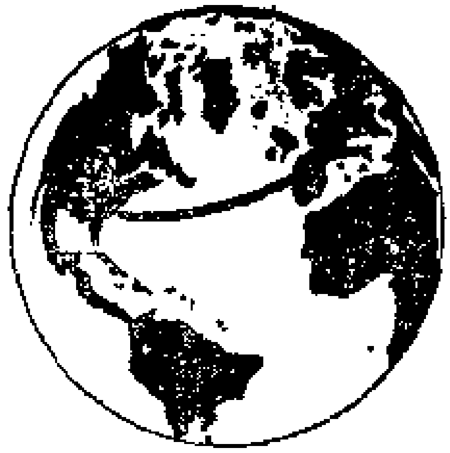


图 10

从大圆的这一概念出发，我们可进一步得到非欧几何的另一个惊人的结论： 球面上画的一个三角形的内角和大于 180°。我们从图 11 所示的三角形可以看到这一点。

图 11

假设这球体是地球．三角形的底边在赤道上，图中与赤道相交的两条线是经线，它们相交于北极，从而构成三角形。因为球面角是由形成该角的两条弧所夹的角度来度量的，而已知经线与赤道是垂直的，所以，这个三角形的内角和等于两

个直角加上两条经线相交于北极所形成的角．因此这三角形的内角和大于 $180°$．

另一种新的几何叫做拓扑学．与我们通常学习的几何不同，拓扑学是不管大小与形状的．拓扑学也研究线、点和图形，但是这些图形在拓扑学中是允许变化其形状与大小的．有时也把拓扑学叫做橡皮几何，因为拓扑图形好象在橡皮片上那样，能够伸缩扭曲，但用拓扑语言来说，还是同一个图形．

拓扑学着重研究与形状和大小无关的位置的性质．在拓扑世界里，下图所示的直线 AB 与曲线 CD 被看做是相同的，因为它们中的每一条都代表两点之间的一条道路．

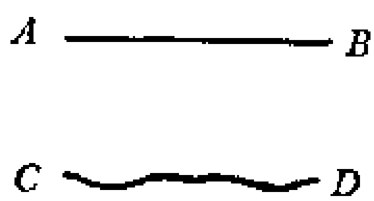


图 12

拓扑学又说，一个三角形，一个正方形，和一个圆都是相

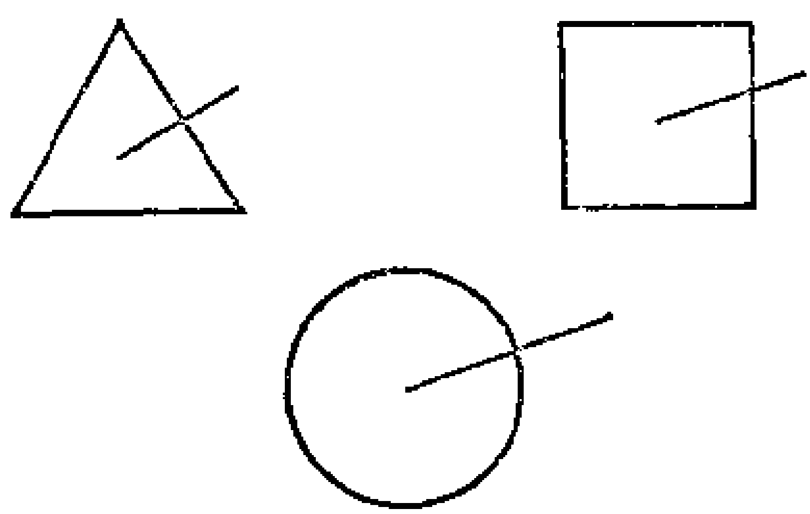


图 13

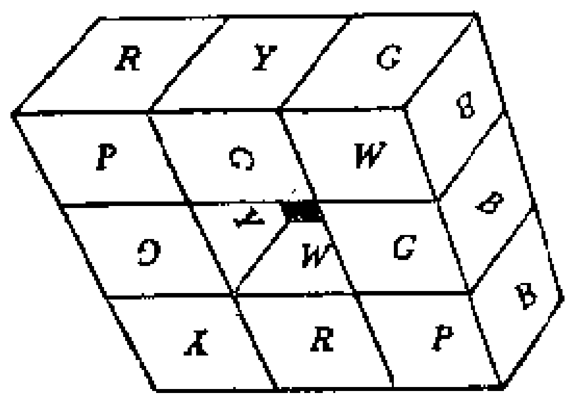
同的．因为这三者都有一个内部和一个外部，并且从内部到外部必须经过而且只经过一条线．

拓扑学的这些新概念，已成为解决许多数学问题的工具．

练习8　两则特殊的几何问题

1．一个探险家向正南走了一英里，转身向正东走一英里，然后再转身向正北走一英里．结果他发现自己回到了出发点．这在地球表面上的什么地方才有可能(有这种可能的地方不止一处)?

2．下图由相同的方块迭合而成，每个方块的六个面上同样标注着六个字母．试用你的想象或草拟一个模型来找出规律，并说出Y、G、W的对面分别是什么字母．



7．三角与测量

三角是另一个涉及测量、空间和形状的数学分支．三角学开始于研究直角三角形的三边之间的关系．以后扩展到任意三角形．三角形之间的边角关系成为间接测量距离的工具，例如测量悬岩的高度或地球到月球的距离．考察图14，对于如何测量到月球的距离，我们能够有一个初步的概念．我们知道地球的直径AB约等于8000英里．根据这一事实，再测量出角A和角B，就为我们计算到月球的距离提供了足够的数据．应用三角知识，我们算得AM约等于239,000英里．

现在三角学远远超出了解决这类问题的范围．三角学中

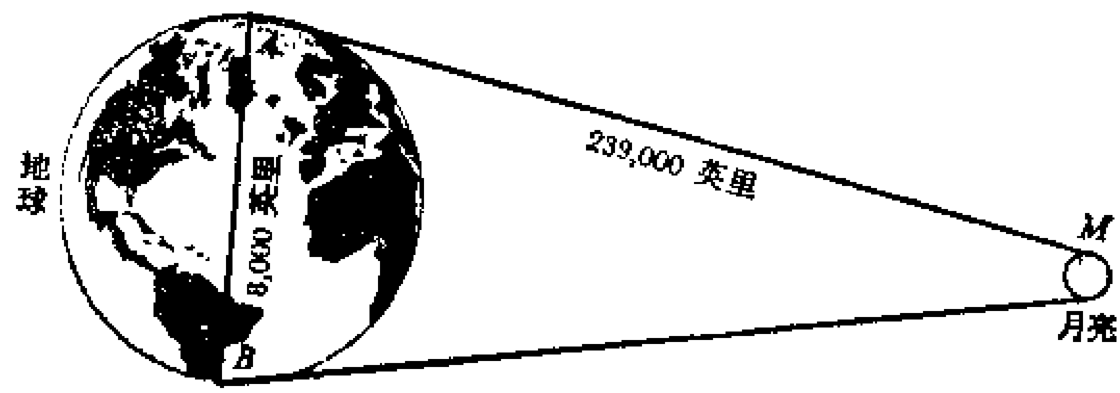
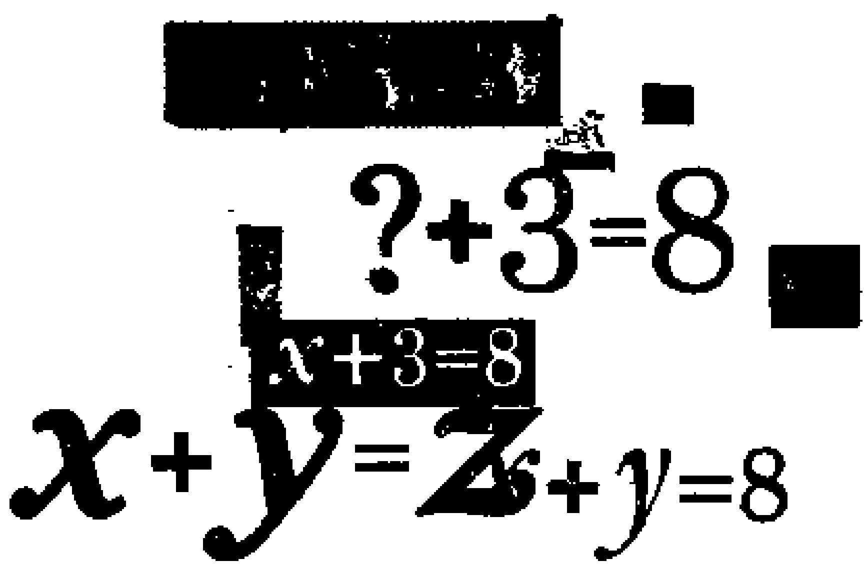


图 14

建立起来的关系和公式，对于研究电子学、声学、原子能等领域中发现的各种模型有着很重要的应用。



8. 代数与数学语言

数学能够成为如此有力的科学的一个重要原因，是它使

用了象＋或 5 之类的符号．这些符号使数学具有最简洁的语言．书写 $5+3=8$，要比书写“5 与 3 之和等于 8”简便得多．这些符号使人更便于思考数学思想，并且有可能证明对于特殊的数成立的规律或关系，对于所有的数可能也是成立的．例如，我们知道若 $5+3=8$，则 $8-3=5$．假如使用 a、b、c 代表任意的数，那么我们就能说，若 $a+b=c$，则 $c-b=a$．使用字母代表数，这是代数学的一个基本思想．同样，你能写出圆的周长公式 $c=\pi d$，这也是使用字母代表数的结果．

我们把 $c=\pi d$ 这样的公式，叫做数学语句．在代数中你将学习，怎样求得使语句成立的 c、d 等字母所代表的数值．例如在语句 $x+3=8$ 里，什么数代替 x 能使这个语句成立呢？

当科学家做实验去发现未知规律的时候，他常常把测得的量列成一张表格的形式．然后他们试图写出一个象公式那样的数学语句，以说明表格中所列的各数据之间有着什么关系．

让我们来考察下表所列数据，看看能否用一个公式来表示．

如果将这两种量数相加，比较它们的和 $(a+b)$，我们找不出这些和有什么规律．但如果将这两种量相乘，比较它们的积 $(a\times b)$，我们发现这些积等于 12．这说明表示这两种量数之间的关系的公式是 $a\times b=12$．这就是应用代数思想去发现并叙述数据之间关系的一个例子．

量 a	量 b	$a+b$	$a\times b$
1	12	13	12
2	6	8	12
3	4	7	12
4	3	7	12
6	2	8	12
8	$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	12
10	$1\frac{1}{5}$	$11\frac{1}{5}$	12
12	1	13	12

著名的法国数学家雷内·笛卡儿（1596—1650），揭示出代数与几何之间的联系。他画出一条直线说明，任何一个数都能用直线上的一个点来表示，反之，直线上的任何一个点都能代表一个数。例如在图 15 中，点 x 代表 3，而点 y 代表 1.43786。

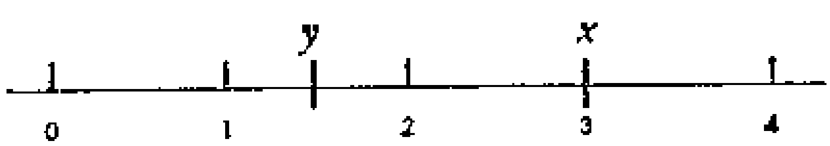
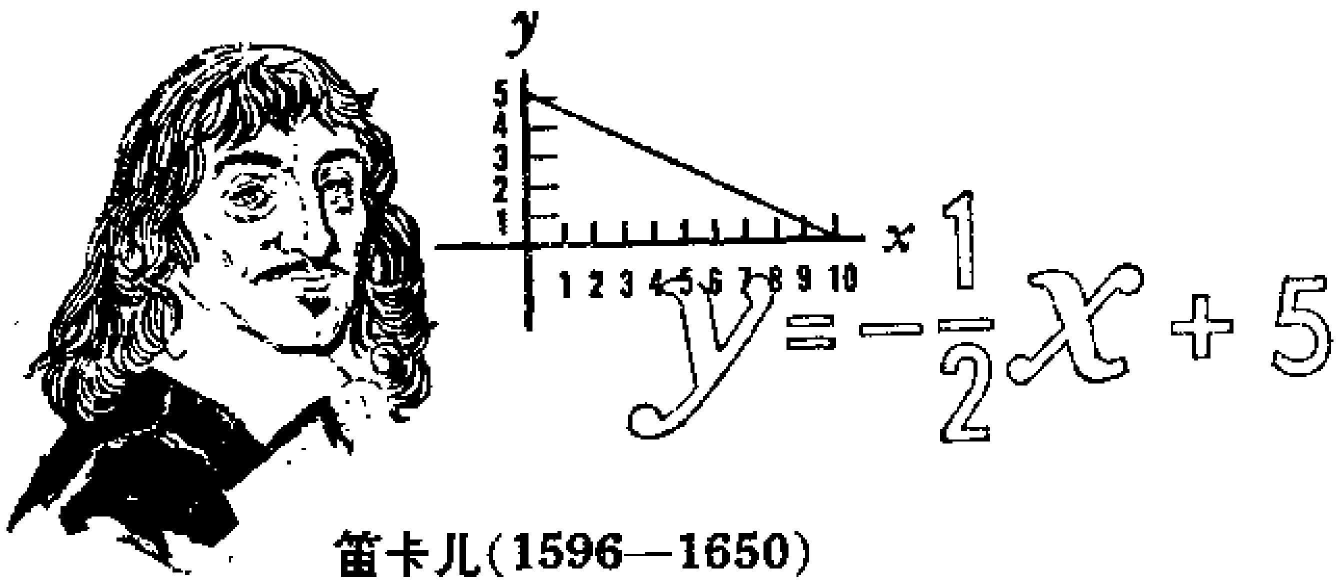
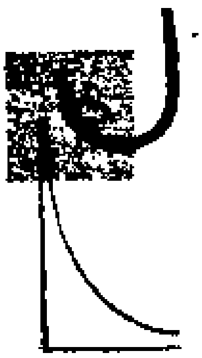


图 15

这种表示数的直线叫做数轴，数轴上表示 0 的一点叫做原点。两条相交于原点且互相垂直的数轴叫做坐标轴，其中画成水平的一条叫做横轴，画成竖直的一条叫做纵轴。我们



笛卡儿(1596—1650)



雷内·笛卡儿是伟大的法国数学家和哲学家，他生活在一个如同我们今天的世界一样的变革的时代．他生活的世纪是在科学、数学、哲学和文学等方面的新思想蓬勃兴起的时代，象牛顿、伽里略、费马和莎士比亚等文化巨人，为创建这些新思想作出了不朽的贡献．

笛卡儿年轻时十分瘦弱，大部分的时间是在床上度过的．他经常躺在床上学习和思索着我们的宇宙．18岁时他入伍当兵，幸运的是，他在部队里仍然能有许多时间来思考数学和哲学上的重要问题．

1619年的11月，当他宿营在多瑙河畔的一个小村庄时，在他梦中出现了一个重要的思想．他在梦中想起代数怎么能用到几何上去．这个思想开创了数学中叫做解析几何的一个全新的领域．解析几何是科学家研究自然现象的最有用的工具之一．

笛卡儿在结束他的部队生活之后开始在欧洲漫游．起初他在寻欢作乐中浪费了大量的时间，但后来定居在荷兰，并献身于对数学、神学和科学的研究．

在1650年的冬天，他成为瑞典的年青皇后克里斯蒂娜的教师．不幸的是这个皇后坚持要他在清晨5时给她讲课，而且要在她的不生火炉的图书馆里．笛卡儿的身体太虚弱了，经不起瑞典冬晨的严寒，加之睡眠太少，不久就生了肺炎，并因此去世．要不是这个愚蠢的年青皇后提出这种奇怪的要求，谁能估计，笛卡儿将对世界继续作出何等重大的贡献？

能用平面上一点表示一个数对．例如，图 16 中的点 x 表示数对 $(a=3, b=4)$.

如果我们把上文表中所列的 a 与 b 的每组对应数值都看成数对，并在坐标系内找出表示这些数对的点，然后用一条曲线连结这些点，我们就得到如图 16 所示的几何图形，它是所谓双曲线的一部分.

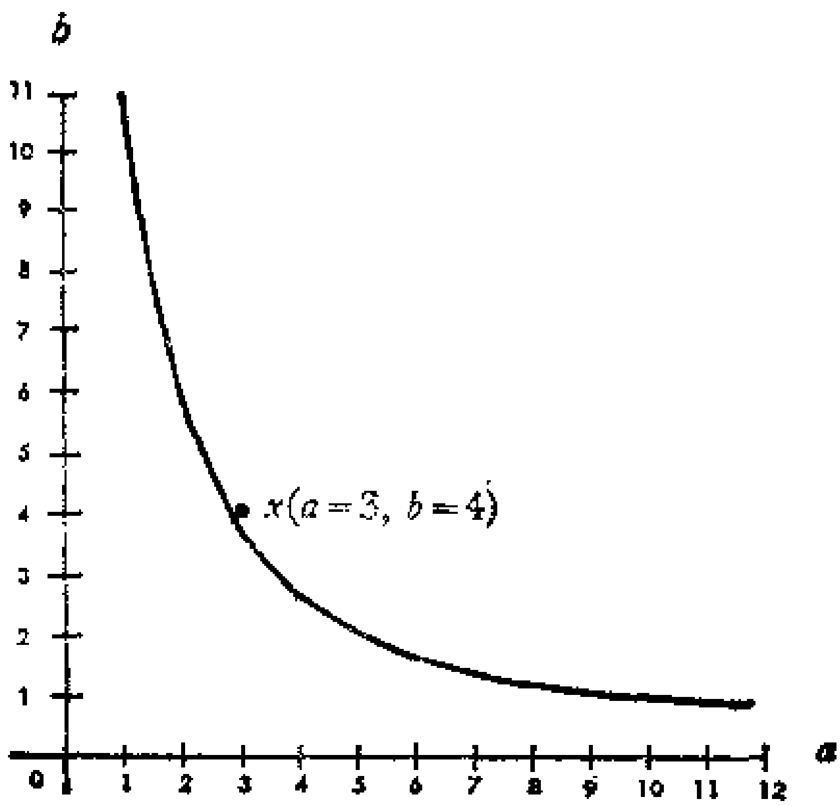


图 16

所以，数学语句 $a \times b = 12$ 能用一个几何图形来表示.

练习 3 用图形表示代数关系

1. 在坐标纸上，依据下列数据画出表示方程 $x^2 + y^2 = 25$ 的几何图形.

量 x	值 y	x^2	y^2
0	5	0	25
1	4.9	1	24(近似值)
2	4.6	4	21(近似值)
3	4	9	16
4	3	16	9
5	0	25	0

2. 下面是一物体自由下落时测出的数据:

时间 t(单位: 秒)	下落距离 s(单位: 英尺)	t^2
1	16	1
2	64	4
3	144	9
4	256	16

s 与 t 之间的关系能用怎样的公式来表示? 即 $s=$?

9. 代 数 魔 术

代数是以用来解题而著名的. 下面的数字游戏也可说明代数的用处.

想一个在 0 与 10 之间的数,

将它乘以 5.

再加上 7.

这得数再乘以 2.

加上另一个在 0 与 10 之间的数。

从这得数减去 3.

如果你说出你的答案，

我就能说出你想的什么数。

下面来分析你和你的朋友玩的这个数字游戏.

你的指令	你朋友的算术	你的代数解法
想一个在 0 与 10 之间的一个数	想到一个数 6	用 x 代表这个未知数
将它乘以 5	$6\times5=30$	$5x$
再加上 7	$30+7=37$	$5x+7$
这得数再乘以 2	$37\times2=74$	$10x+14$
加上另一个在 0 与 10 之间的数	加上 8，$74+8=82$	用 y 代表这另一个数，$10x+14+y$
从这得数减去 3	$82-3=79$	$10x+11+y$
如果你说出你的答案，我就能说出你想的什么数	79	$x=6$，$y=8$

怎样求得未知数的值 6 和 8 的呢？只要使你最后的代数式等于你朋友的答案，就得到方程：

$$10x+11+y=79.$$

从等式两边减去 11，得

$$10x+y=68.$$

现在你就知道了因为 x 与 y 都是代表 0 与 10 之间的数，所以由上式可得 $x=6$，$y=8$. 这就是说，他开始想到的数是 6，后来加上去的另一个数是 8. 你不妨试着和你的朋友玩一下这个游戏，以显示你能用代数做魔术.

10. 概率：关于机会的科学

最使人感兴趣的数学分支之一，就是对概率或机会的研究．概率告诉我们某事件发生的可能性有多大，或者说某事发生的机会有多大．因此可以说，概率是关于机会的科学．自然科学家和社会科学家，都从概率这门学问里寻找处理我们这个不确定的世界的工具．计算某事件发生的概率，就好象窥视未来一样．

在商业，行政管理和科学中概率被用来做出各种预测．应用概率，保险公司预测每年大概有多少房屋失火烧毁；行政部门预测明年大概有多少税收；而科学家们在一枚宇宙飞船发射之前就预测它的完成飞行的情况．因为我们每天都有发生意外事故的风险，都有失败与成功的机会，所以，我们学一点关于概率的数学知识是有重要意义的．

说明概率的最简单的实例是投掷一枚硬币．如果你掷一枚硬币，可能出现正面也可能出现背面．如果我们一次投掷几枚硬币，我们期望约有一半出现正面，另一半出现背面，所以我们说，当投掷一枚硬币时，得到正面的概率是 $\frac{1}{2}$．用数学术语说，如果在一次试验中总共有 t 个等可能的试验结果，其中 f 个试验结果能使某事件成功，那么某事件成功的概率就是 $\frac{f}{t}$．

为了了解投掷几枚硬币的情形会怎样，我们需要研究所

有的可能性．如果我们投掷两枚硬币，这两枚硬币落下后总共可能出现四种等可能的结果（$t=4$），如下图．图中Ⓗ表示出现正面，Ⓣ表示出现背面．

Ⓗ	Ⓣ	Ⓗ	Ⓣ
Ⓗ	Ⓗ	Ⓣ	Ⓣ

图 17

因为这四种可能的结果中，只有一种结果是两个正面（$f=1$），所以投掷两枚硬币时出现两个正面的概率是 $\frac{1}{4}$．

如果我们投掷三枚硬币，这些硬币落下后总共可能出现八种等可能的结果，图示如下：

Ⓗ	Ⓗ	Ⓗ	Ⓗ	Ⓣ	Ⓣ	Ⓣ	Ⓣ
Ⓗ	Ⓗ	Ⓣ	Ⓣ	Ⓗ	Ⓗ	Ⓣ	Ⓣ
Ⓗ	Ⓣ	Ⓗ	Ⓣ	Ⓗ	Ⓣ	Ⓗ	Ⓣ

图 18

想一想，得到 3 枚正面的概率是多少？得到 2 枚正面 1 枚背面的概率是多少？

练习 10　关于概率的问题

1．假设你有两颗骰子[1]，试列表说明这两颗骰子掷下后，总共有哪几种可能的结果．用两颗骰子一次掷得 7 点的概率是多少？

2．设想你有三只箱子，第一只有两条黑领带，第二只有两条白领

1）骰（音投）子，也叫色子，是一种骨制的小正方体，各个面上分别刻有 1 至 6 点．骰子是旧社会流行的一种赌具，数学书中常用它作为说明概率的模型．——译者

带，第三只有一条黑领带和一条白领带．箱子上挂有说明其内容的标签——黑黑，白白，黑白．但有人换了一下标签，所以现在每只箱子上的标签都是错误的．现在允许你从任意一只箱子里一次拿一条领带，但拿时不许看箱子里面，然后根据拿出来的领带判断三只箱子的内容．你最少拿几次？从哪只箱子里拿？

11. 统计：探究数据的意义

几乎在每天的报纸上都可以看到数据或统计数字．无论在工厂、农场、学校、家庭，还是在政府和国家的立法机关和教堂里，统计都起着重要的作用．关于天气变化、体育运动、就业、工资、价格和人口变化等的情报都是人们关心的日常新闻．这些情报数据是作出重要决定的基础．要使所作的决定成为正确的决定，必须正确、明智地解释有关数据的含义．

统计的一个重要应用是抽取样本．例如进行民意测验，电视节目公众评分，工业中的质量控制等都要抽取样本．在抽取样本时，我们从总体中选取少数认为是典型的个体作为样本，并对样本进行考察分析．然后可以说，如果样本选取得适当，那么适用于样本的结论也能适用于总体．

举一个简单的例子来说明抽取样本的必要性．假如你希望就海滩上卵石的大小研究出某个结论，显然，你不可能把海滩上所有的卵石都测量一下，而必须抽取样本．同样，在工业生产中为了检验产品质量，不可能把每个产品都逐一试验，而必须抽取样本进行检验．例如在橡胶厂中，通过测试轮胎样

本的性能，来判断该厂所生产的全部轮胎的质量。

应用统计方法，例如应用列表法整理数据，应用统计图表示数据，能帮助我们识读数据并解释数据的意义。统计学还告诉我们如何去计算平均值和标准差等统计量，以便了解数据的集中趋势和分散程度。通过计算两组量数之间的相关系数，可以确定两个量之间是否存在某种关系。统计中常用概率阐述数据的意义，或者预报未来的结果。例如，如果一个统计学家看到你的数学测验成绩，他会告诉你如何与中等水平的学生作比较，预测你在学校是否名列前茅，并告诉你他的预测得以证实的概率。

练习 11　数据、样本与关系

1.为了求出你校学生花多少时间看电视节目，选择下列各样本为什么不好？

a. 数学班的学生。

b. 音乐队的学生。

c. 足球赛的观众。

d. 乘公共汽车上学的学生。

2.为了使下列叙述成立，必须假设具有什么关系？

a. “塔山牌”肥皂是最好的肥皂，因为它的泡沫特别多。

b. “里普尔”牌自行车是最好的自行车，因为它最便宜。

c　你的足球队长是吃粥的，所以，如果你也吃粥，你就会成为象你的足球队长一样的好运动员。

3.从报纸上、学校里、或者你的朋友那里去寻找下列问题的答案：

a. 你的同班同学每星期花多少时间看电视？

b. 你校足球赛的平均成绩在过去 5 年中有何变化？

c. 你的几个朋友的平均身高是多少？

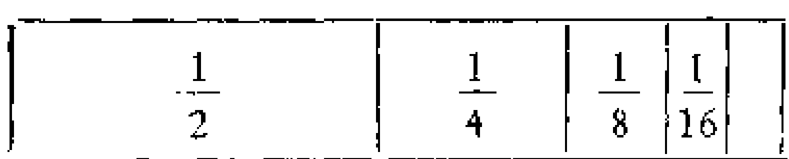
d. 你校每年有多少学生上大学?

12. 无穷、极限、变量和微积分

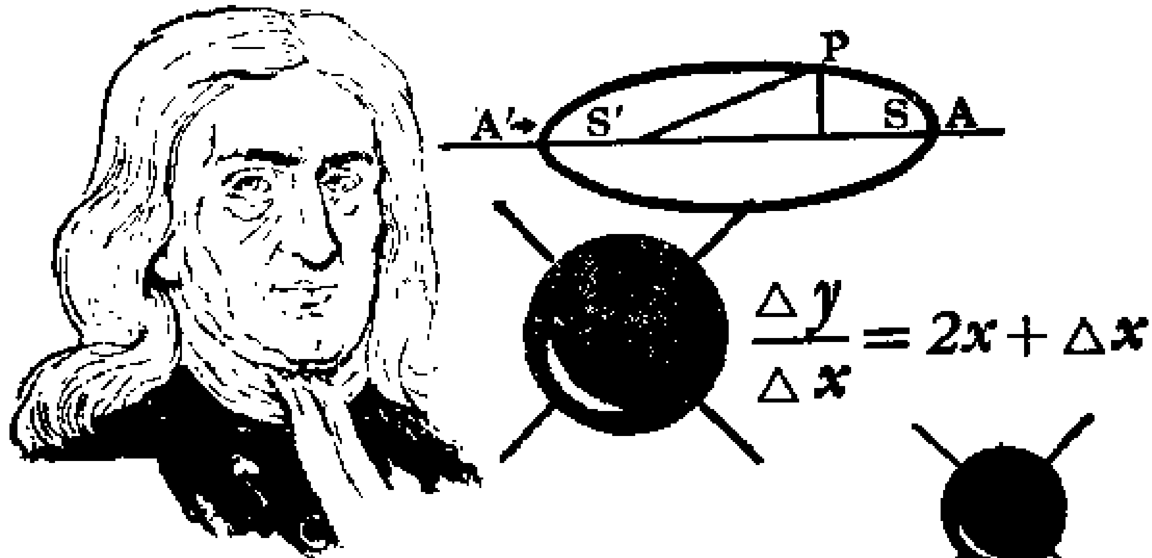
宇宙的终极之点究竟有多远? 宇宙存在的时间究竟有多长? 在数轴上究竟有多少个数? 在一条直线上究竟有多少个点? 所有这一切问题的答案都是"一个无穷大的数". 我们这样说的意思是指这答案其大无比, 要比人们可能想象出的任何一个数还要大.

无穷大是一个难以理解的、非常抽象的概念. 但是数学家们已经想出了一些方法来处理含有无穷多项的关系和问题. 例如, 假设我们有一串分数: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, 等等, 每个新出现的分数都取在它前面的那个分数的一半. 那么, 所有这种形式的分数的总和是什么呢?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$$



象这种形式的分数你永远写不完. 我们说这些分数的个数是无穷大, 或者说这级数有无穷多个项. 如果你试着将这些分数相加, 加到比较多的项时, 你将发现所得的和很接近1. 如果你继续加下去, 和就更接近于1. 你想要接近到什么程度就可以接近到什么程度. 所以数学家说, 这些分数的和



牛顿（1642—1727）

艾萨克·牛顿是伟大的英国数学家和科学家，他虽然生活在距今 300 年前，但是他却被誉为宇宙数学的先驱者．如果没有他所发现的统辖宇宙的数学和物理法则，今天的科学家就无法把火箭送上外层空间，或把人造卫星送上地球周围的轨道．

正象许多其他的大数学家一样，牛顿的数学才能在早年就得到发展．当他 14 岁时，他就全神贯注地钻研数学，以致忽视了他在母亲的农场上的工作．当他 24 岁时，他就对数学作出了他的主要贡献——发现了微积分，当时他把它叫做"流数法"．虽然他做出了这样伟大的发现，但是他的理论在当时仍然是很不完善的．在他的最重要的科学工作中需要解决某一个微积分问题，他为了解决这个问题竟花了 20 多年时间．今天的大学生将能在微积分课本中找到同样的问题，并且说不定只要花半个小时就能解决它．

牛顿作为数学家的声誉广为流传开了．据说著名科学家约翰·伯努里提出了两道很难的数学问题，并给了数学家六个月的限期来解决它们．在牛顿收到这问题的第二天就把这两个问题解出来了．甚至在晚年，牛顿仍然保有数学解题能力．当他 74 岁时，他接受了莱布尼兹的解一道数学难题的挑战，并在一个晚上就解出了这道难题．

艾萨克·牛顿是一个不朽的伟人．他被称为"一个为人类增添了光彩的人物"．但是，尽管他十分伟大，毕竟受时代的限制，他的许多思想在今天受到挑战，并且正在被当代科学家的工作所修正．

的极限是 1. 但是，只要相加的这些分数是有限项(无论它有多大）时，和是永远比 1 要小的. 每当我们研究涉及诸如时间、点、数等无穷量时，都要用到一种特殊的数学. 用以处理无穷和极限等问题的数学分支是微积分.

微积分使我们有可能深入研究变量之间的关系. 这里举一个用微积分解决的典型问题:

如果一块卵石从悬岩上掉下，那么经过 6 秒钟卵石将达到多大的速度?

在这个问题中，时间、距离、速度都是变化着的量，因而都是变量. 当卵石落下时，距离是随着时间的变化而变化的，速度也随着时间的变化而变化. 应用微积分解决这个问题，在于求出把时间划分成愈来愈小的单位时平均速度的极限值. 这样做的最后结果告诉我们: 任何时刻的速度都等于所经过的秒数乘以 9.8 米/秒^2. 经过 6 秒钟，石子的速度将达到每秒 58.8 米/秒.

练习 12 极限和变量

1. 12 点正，两个细菌被放进培养液内. 一分钟后得到 4 个细菌，再过一分钟就变成 8 个细菌; 又过一分钟变成 16 个，如此等等. 到 1 点正，所得细菌质量为 1 加仑(英制容量单位，合 4.546 升). 试问什么时候的细菌质量为$\frac{1}{4}$加仑?

2. 无限小数 1.99999…的极限是什么?

3. 在 0 和 1 之间有多少个分数?

4. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\cdots$的极限是什么?

5. 举几个有无穷多项的数或量数的例子.

13. 集合：一个有用的数学概念

德国数学家乔治·康托尔（1845—1918）所创立的集合论，是十九世纪发展的最伟大的数学新概念之一. 集合论已经成为发现新的事实和证明已知事实的一个工具.

集合概念是一个很简单的概念. 例如一堆物体，一组数，一群人，或一组概念，都是集合. 你实际上已经熟悉许多集合，例如书的集合，碗碟的集合，工具的集合等等，甚至你自己也是一个由人组成的集合的一个成员，因为你所在的班级或你的家庭，都是集合.

在许多数学分支里都用到集合概念. 在算术中，我们谈到数的集合. 例如，小于 10 的素数的集合是 $\{2, 3, 5, 7\}$.

在代数中，我们谈到方程的解的集合. 例如 $x - 5 = 7$ 的解的集合只含有一个数 12.

在几何中，我们谈到适合某种条件的点的集合. 例如，既在直线 AB 上也在圆周上的点的集合包括点 P 和 Q（见图 19）.

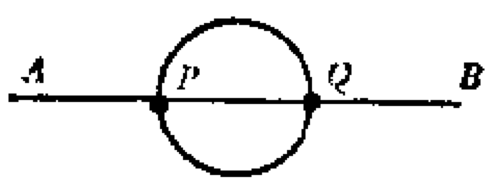


图 19

在统计学中，我们谈到数据的集合，例如，一次数学小测

验（满分定为 10 分）的得分集合是 {7，10，5，6，9，7，8，4，6，8，5，7}。

在概率中，我们谈到所有可能事件的集合。例如，三个字母 A、B、C 的排列方式的集合是 {ABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBA}。

在测量中，我们谈到度量单位的集合。例如，米制长度单位的集合是{千米，百米，十米，米，分米，厘米，毫米}。

在日常生活中，我们谈到具有某种特点的人的集合或物体的集合。例如，代数班中参加足球队的全部学生的集合可能是{约翰，比尔，斯蒂夫}。

集合论已经成为新的数学研究的基础。它使数学从研究单个的数中解放出来，使它有可能去研究由数构成的集合的整体性质。集合论也使许多涉及一些关系而不是涉及一些数的问题有可能得到解决。已经证实，在设计电子计算机时，集合论很有用处。

练习 13　涉及人的集合的推理问题

1. 琼斯和史密斯的年龄相同。但是琼斯的年龄比布朗大，布朗的年龄又比鲁宾逊大，另外一个人卡尔，他的年龄比鲁宾逊大，但是比布朗小，又史密斯的年龄比他的朋友史蒂文斯小。

a. 鲁宾逊的年龄比史密斯大还是小？

b. 卡尔的年龄比琼斯大还是小？

c. 史蒂文斯的年龄比布朗大还是小？

d. 琼斯的年龄比鲁宾逊大还是小？

如果这些人的年龄都是 3 的倍数，而且最小的是 9 岁，最大的是 21

岁，求出每个人的年龄。

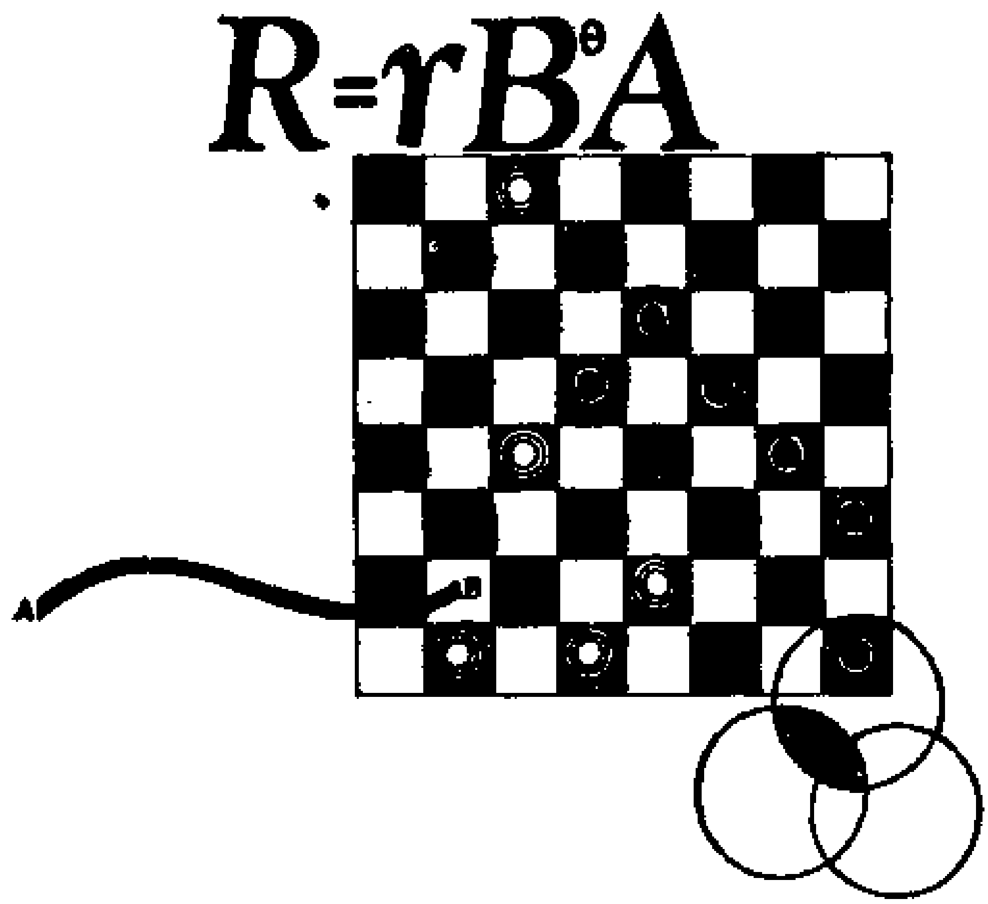
2. 某艺术学校招收新生。标准条件是身高不低于165cm，体重不低于50公斤，年龄不超过16岁，外貌较佳，动作敏捷，英语发音清楚。

约翰15岁，体重48公斤，身高165cm，五官端正，动作迅速，英语流利。

里查得16岁，体重53公斤，身长168cm，动作比较慢，外貌漂亮，有些口吃。

非迪南德14岁，体重51公斤，身长166cm，两眼近视，动作迟钝，英语流利。

这三人都去报考这个艺术学校，哪一个可能录取？

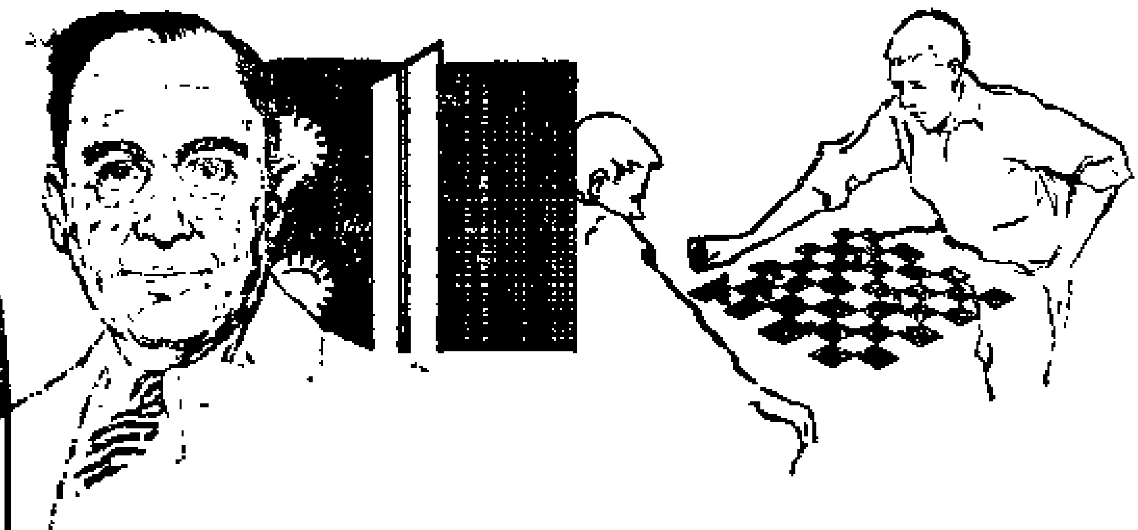


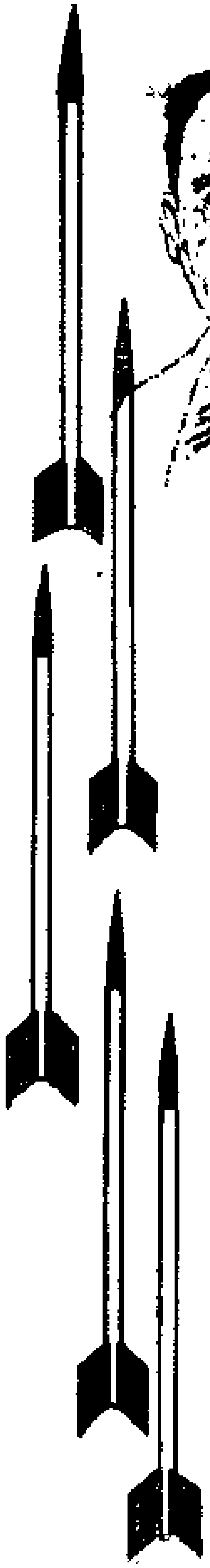
四、数学的进展

1. 数学的新发展

虽然数学是一门历史悠久的科学，但它至今仍象一个上学的儿童一样，正在成长发展．新概念，新术语，新方法，新问题正在不断地涌现．数学发展得从来没有象今天这样迅速．

给人印象最深的一个数学分支是对策论．数学家约翰·冯·诺伊曼对于对策论的发展作了很大的贡献．对策论原先是在俱乐部会员、体育运动员和棋手等人群中用以描述和分析竞赛策略的一种数学方法．它为在一种竞赛局面下应作出





冯·诺伊曼(1903—1957)

约翰·冯·诺伊曼是当代杰出的数学家之一．如同许多其他的数学家一样，他在科学和数学两方面都作出了重要的贡献．冯·诺伊曼一向对于策略和机会的游戏（如下棋、打牌等）特别感兴趣，难怪他成为一个叫做对策论的数学新分支的创始人之一．冯·诺伊曼的对策论能够用来解决经济学、科学和军事策略中的许多问题．

冯·诺伊曼出生在匈牙利的布达佩斯．当他6岁时，他能心算象78,463,215÷49,673,235那样的除法问题．他8岁时就已掌握大学微积分，并且象变戏法一样，能够看一眼就记住人名，地址，或电话簿上某一栏的电话号码．当他仅有23岁时，就写出一本用于发展原子能的书：《量子力学的数学基础》．

1930年，冯·诺伊曼去美国接受普林斯敦大学的数学物理教授的职位．他对于使用大型计算机越来越感兴趣，并建造了称为MANIAC（数学分析器，数字积分机和计算机）的第一台现代化的电脑．在第二次世界大战中，作为美国政府的顾问，他对于设计导弹和核武器都是有影响的．

冯·诺伊曼爱好多方面的知识，解题是他最大的乐趣．有时他在旅行中全神贯注地思考一个问题，以致必须打电话问他的妻子，询问他为什么要作这次旅行．由于约翰·冯·诺伊曼的杰出的解题才能，使我们扩大了数学眼界．

什么决策和步骤才能赢得胜利提供了数学分析．因此在商业、外交、国防和侦破凶案中，都可应用对策论进行分析，以便作出比较正确的决定．

数学家们设计了各种新型电子计算机和运用计算机解题的新方法．这些计算机广泛用于设计工厂的自动控制系统．这些计算机也用于扩展数学知识．例如，一架电子计算机已经列出 46,000,000 以内的全部素数表．但是，任何一台计算机都不能创造新的数学概念，而且，要不是数学家预先“告诉”计算机怎样解决问题的话，连最简单的问题计算机也无法解决．

一种叫做*群论*的新的代数，被应用于研究运动、数和空间．我们在前面已经提到过一种叫做拓扑学的新的几何，它研究点、线等的关系，但是不涉及形状和大小．数学家还创造了一种称为*四元数*的新数，以及用以进行四元数的计算的新的算术．集合论正以一种新的方式被用来解决关于电路的逻辑问题．

数学家是怎样创造新的数学概念的呢？数学家常常是通过对客观世界的观察、实验、估计、猜测、推理，不断地发现蕴藏于事物内部和事物之间的秘密，并寻找打开这秘密的钥匙．数学实验往往不需要工具和设备，通常只需要纸和笔就行．通过实验和思考，数学家得到结论，然后他再应用演绎法证明所得结论是正确的．

练习 14　两则数学思考题

1. 写出从 1 到 10 的各个整数的平方. 试写出大于 2 且小于 100 的能够写成这种平方数的两个、三个或四个的和的数. 例如, $13=9+4$, $33=16+16+1=25+4+4$. 你能找到一个小于 100 的数,而它不能写成四个以下的这种平方数的和吗?

2. 一个 3 英寸×3 英寸×3 英寸的立方体的所有各面都涂成红色, 把它分成 27 个 1 英寸×1 英寸×1 英寸的小立方体. 试问有几个三面是红色的小立方体? 有几个两面是红色的小立方体? 有几个一面是红色的小立方体? 有几个没有红色的小立方体? 你是怎样解决这个问题的——靠实验还是运用你的想象力?

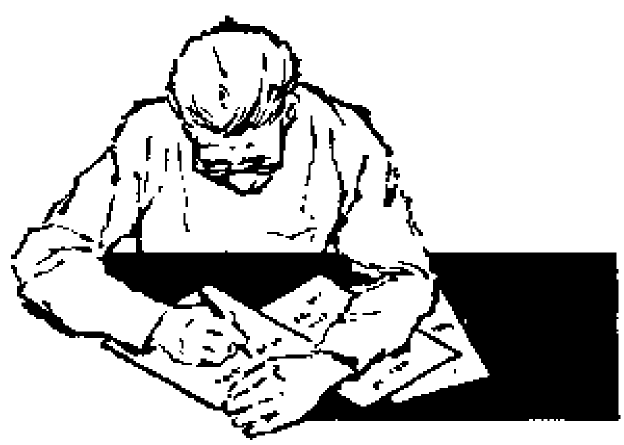
2. 旧数学的新应用

虽然我们已经看到数学的许多实际应用, 但是在数学家创立新数学的时候, 他们所关心的并不总是应用. 当德国大数学家戈特弗里德·莱布尼兹(1646—1716)创立二进数制的时候,二进数并无实用价值. 按照这种数制,我们能用 0 和 1 两个数字写出任何一个数. 现在这种数制已经在电子计算机的运算中得到应用. 当$\sqrt{-5}$这一类数刚一提出的时候, 就被人称为虚数(虚构的数),因为在当时看来,虚数的概念显得毫无意义,简直荒唐可笑. 人们认为根本不存在这样一个数,它自乘的结果能够得到-5. 但是,现在需要用虚数来解决关于电学的问题. 当德国数学家伯哈德·黎曼(1826—1866)提出两点之间的最短距离是一段曲线时,被认为是一句蠢话. 但

是，现在核子物理学家在他们的研究中正在应用这个概念和其它非欧几何的概念.

通过研究模型，数学家发现了以后被证明是非常有用的概念. 例如，希腊人很早就研究了椭圆. 一千多年以后，德国天文学家和数学家约翰尼斯·凯普勒(1571—1630)应用椭圆的概念预报了行星的运动. 现在，预报行星运动的公式被用来预报人造卫星的运动规律，并且将被用来获得关于宇宙航行的知识.

现在正在创立的新的数学概念也不一定都能立即得到应用，其中有一些也许要在若干年甚至若干世纪之后才能得到应用. 但是大多数数学家深信，如果他们创立了好的数学，总有一天会得到应用.



3. 一些未解决的数学问题

虽然我们通常认为数学是用以解决所有问题的一门"精确的科学"，但是，至今还有许多数学问题，对于数学家来说仍

然是难于解决的谜.

与素数有关的谜　一些最古老的没有解决的问题都涉及到素数. 例如, 至今没有人能够写出用以检验一个给定数是否素数的公式或一种系统的方法. 需要有某种形成素数的方法, 但是至今也没有人能够找到某种构成素数的系统的方法.

另一个关于素数的秘密是这样一个问题: "有无限多个素数对吗?"所谓素数对,是指差数为2的一对素数. 例如(3,5),(11,13),(41,43)都是素数对. 在我们的自然数系中素数对似乎到处都会碰到. 但是没有人能回答素数对究竟有多少,也没有人能发现一个求素数对的公式. 另外一方面,没有一个人能够证明: 存在某一个数, 在这数之后再也没有素数对.

哥德巴赫猜想　"每一个大于2的偶数都是两个素数之和吗?"至今这仍然是另一个没有解决的数学难题. 在1742年, 德国数学家哥德巴赫写了一封信给他的朋友——瑞士人数学家伦哈特·欧拉(1707—1783), 信中他提出了除2以外的每一个偶数都是两个素数之和的猜想. 这是一个有趣的结论,对于他所考察过的每一个偶数都成立,但是他不能证明这结论对于所有的偶数都能成立.

如果你用某些偶数来试验, 你会发现结论总是对的. 例如, $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$. 至今没有发现有哪一个大于2的偶数不是两个素数之和, 但是还不能证明任意偶数都是两个素数之和, 如果你能发现一个大于2的偶数不

是两个素数之和，那么这猜想就被推翻，因而这问题也就得到解答．因为对于这个看上去很简单的问题，至今没有找到逻辑证明，也没有被推翻，所以它仍然是一个数学秘密[1]．

费马最后定理（也有人译为“费尔马大定理”）　另一个著名的数学难题叫做费马最后定理．著名的法国数学家皮埃尔·费马（1601—1665），在一本数学书页边的空白处写道："如果 n 是一个大于 2 的数，那么没有三个整数 a，b，c 能使 $a^n+b^n=c^n$ 成立．我已经找到一个真正奇妙的证明，只是这页边太小了，写不下．"

在费马时代以前很久就知道，当 $n=2$ 时，容易找到三个整数 x，y，z，使 $x^2+y^2=z^2$ 成立．例如，(3，4，5)，(5，12，13)，等等（顺便说一下，这些数叫做毕达哥拉斯数）．但是从来没有人能找到三个整数 x，y，z，使 $x^3+y^3=z^3$ 或 $x^4+y^4=z^4$ 成立．费马说的是他能证明不可能找到这些数．

在费马死后，他的页边记述被发现了，数学家们开始寻找费马定理的证明．至今没有人能够证明成功．但也没有人能够推翻它．由于凡是费马宣布他能证明的其它的一些结论都已经被以后的数学家所证明，所以这个定理找不到证明就有些奇怪了．实际上，费马的这个定理的现实意义并不大，但

1）哥德巴赫猜想可简单地表示为(1+1)，即每一个大于 2 的偶数是 1 个素数加 1 个素数的和．1920 年，挪威数学家布朗证明了(9+9)，即证明了每一个大偶数是 9 个素数之积加 9 个素数之积的和．后来又有许多数学家陆续改进了这一结果．1965 年，有人用电子计算机证明了(1+3)．1966 年 5 月，我国著名数学家陈景润证明了(1+2)，距离(1+1)仅一步之遥，对解决这一著名世界难题做出了卓越的贡献．——译者

是，作为力图去证明它的结果，却发展了现代数学中的某些重要的概念.

奇数完全数秘密 古希腊人认为某些数是完全的数. 所谓完全数，就是指该数的所有因数之和等于它自身的数. 数 6 是这样一个数，因为 $6 = 1 + 2 + 3$. 另一个完全数是 28，因为 $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. 28 之后的一个完全数是 496. 还发现了其它一些完全数，所有这些数都是偶数. 从来没有人找到过一个奇数完全数. 但是没有人能够证明：每一个完全数必然是偶数.

三个作图问题 几个最早出现的未解决的数学问题，是希腊人提出的三个著名的作图问题. 这些问题中规定只能用圆规和直尺作图：

1. 你能作一个圆，使它和已知正方形面积相等吗？

2. 你能作一个立方体，使它的体积正好等于已知立方体的体积的两倍吗？

3. 你能将一个角分成正好相等的三个角吗？

数学家们对于这些问题研究了许多年才得到解答. 但是，所得的解答并不是你所希望的结果. 这些问题的解答都相同，即只用圆规和直尺要完成这些作图是不可能的.

怎样堆放球体 至今没有解决的一个几何问题涉及到堆放象乒乓球之类的球体. 应当怎样把球体放进一只箱子，才能使它们占据的空间最小？这类似于一个画圆的问题. 应当怎样把几个圆画在一起，或者怎样把象硬币之类的圆片拼在一起，才能使所占据的面积最小？关于在一个平面上拼放

圆的问题已经找到下面的模型：

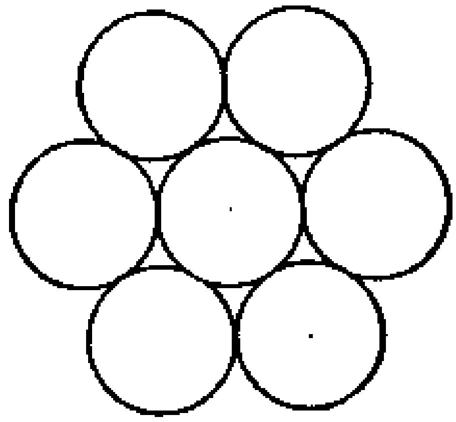


图 20

在堆放球体的问题中，这模型也是堆放第一层的最好的方案．但是关于如何堆放第二层球体的问题，至今还没有人能够解决．

四色地图问题　在拓扑学领域里也有未解决的问题．其中之一就是四色地图问题．画地图需要多少种不同的颜色，才能使具有公共边界的国家都着上不同的颜色？下面的图形说明几种可能的地图．

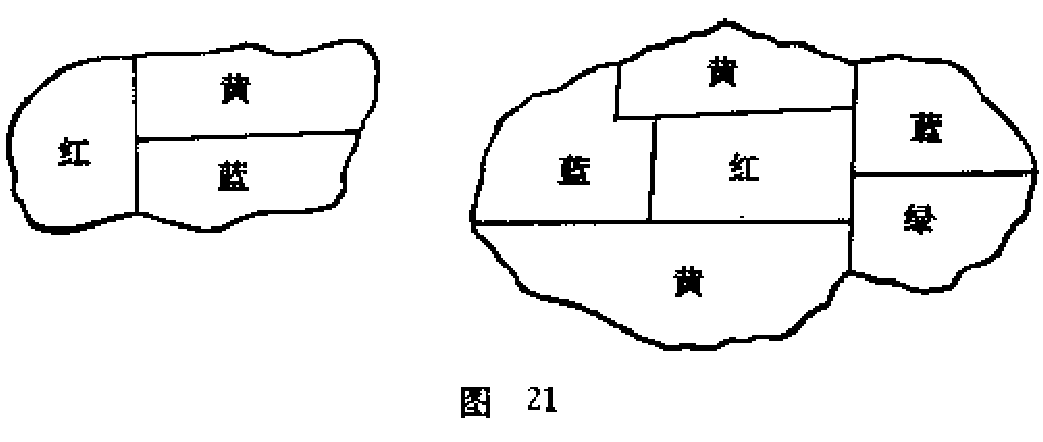


图 21

这对于地图测绘员和数学家是一个真正的难题．他们画

地图时只需要四种颜色就够了，但同时他们不能证明[1]：对于任何地图，四种颜色都是足够的.

数学家和科学家每天都在为解决那些似乎是不可解的问题而工作着. 其中有些问题的答案也许是：不可能有解. 另一些问题的答案，可能得出新的概念，这些新概念将导致数学上的重大新发现. 或许你将能找到其中一个问题的解，并将因此而成为著名的科学家.

练习 15 关于某些数学难题的实验

1. 写出1到50之间的全部素数. 求出相邻两个素数之间的差. 你能找到一个能给出任意素数的公式吗?

2. a. 写出小于100的所有的素数对.

   b. 这些素数对中，每相邻两个之间相隔多远?

   c. 每相邻两个素数对之间的间隔等吗?

3. 下列各偶数能写成哪两个素数之和?

   a. 8 b. 26 c. 18 d. 48

4. 下列这些数适合方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 吗?

a. $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$

b. $x = 7$, $y = 24$, $z = 25$

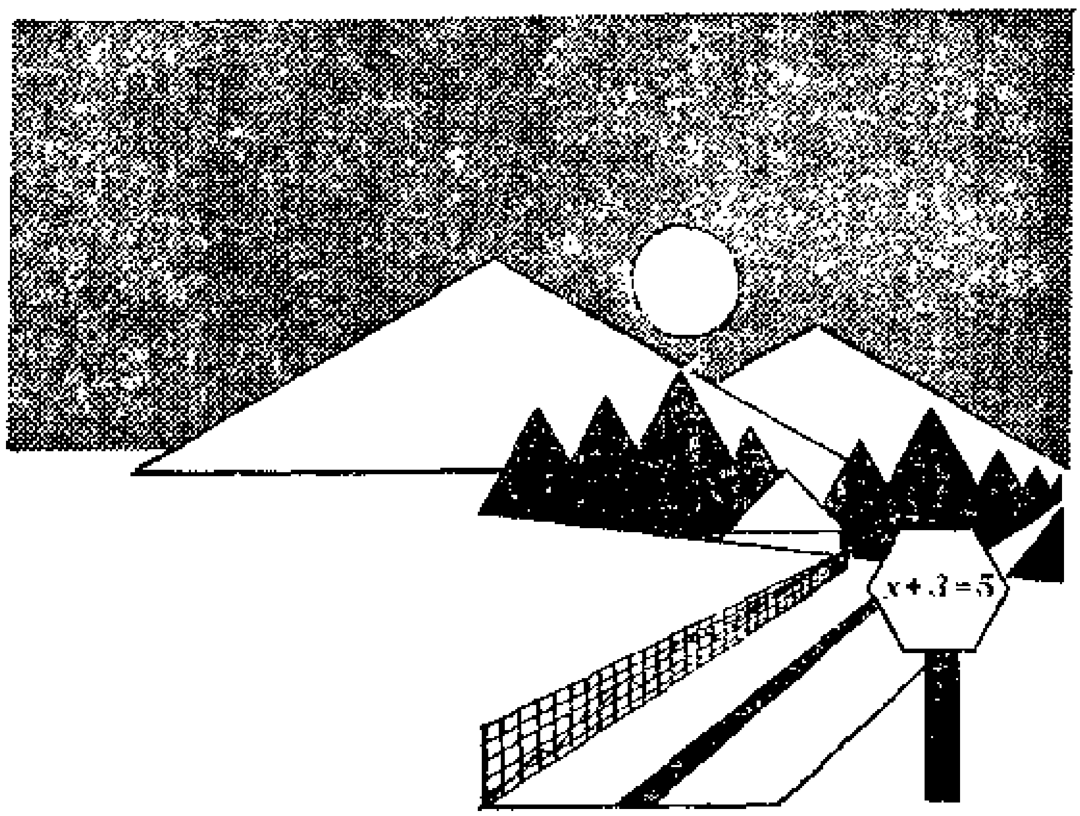
c. $x = 8$, $y = 6$, $z = 10$

5. 下列这些数适合方程 $x^3 + y^3 = z^3$ 吗?

a. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

b. $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$

1) 据报道，地图四色问题已于最近利用电子计算机得到证明. ——译者



五、数学的特点与力量

在通向数学的短暂的旅程里，我们试图把注意力集中在路旁的某些最有趣的景色上．当你在数学课上沿着这条道路较缓慢地前进时，你将有机会更仔细地观察沿途的树木、平原和建筑物．但即使在这次快速旅行中，我们也希望你能够看到数学具有的这些最值得注意的特点：

数学为逻辑推理提供了一个理想模型　数学证明的演绎逻辑被认为是证明一个新概念成立的最好的方法．当用归纳法去建立事实时，结论常用概率论的数学用语来叙述．

数学具有清楚简洁的表达式　例如，表达式$\{x|x+3=5\}$是一种简短的叙述方式，意思是："能使语句$x+3=5$成立的所有x的值".

数学具有确定的结论　例如，只要2，3，5这些数字的意义不改变，$2+3=5$就是永远成立的真理.

数学涉及的门类众多，异趣横生　数学不仅与物理、天文、力学等学科关系密切，它也涉及其它各种各样的事物，如测绘地图、竞技、音乐、艺术、哲学、生物，等等. 甚至折纸的技巧也可用到数学，有不少数学家对于折纸还很有研究呢！

数学的抽象性增强了它解决问题的能力　几何学讨论点与直线，但是没有人看到过数学中所描述的真正的点与直线. 同样，没有人能够举出一个四维空间的物体的例子，但是数学家能用表达式描述四维空间. 没有人能够写出全部素数，但是数学家能够证明素数有无限多个.

数学具有预报事件的能力　爱因斯坦早在1905年就能写出公式，预报从原子爆炸中获得的能量. 在天文学中，应用关于天体的运动和位置的公式来预报日蚀.

数学具有间接测量的能力　数学家已经测量出地球到太阳的距离，并在92,000,000英里之外测出太阳中心的温度.

甚至在公元前 230 年，数学家厄拉多塞就间接地测量出环绕地球的距离，虽然当时还不知道地球是圆的！

数学具有无限的创造机会　正如没有登峰造极的最动人的诗篇，或者完美无缺的最瑰丽的画卷一样，同样没有已经达到顶峰的最完美的数学结构．数学的每个领域，从算术到拓扑，都有创造新概念的充分的机会．

数学比其它各学科更经得起时间的考验　19 世纪以前建立的主要数学理论至今仍然成立并仍然有用，在这一方面，数学可以说是唯一的学科．π 的数值永远是 3.14159…，并且决不会改变（虽然有一个国家的议会曾试图把 π 的值规定为3）．古代希腊的哲学家和数学家毕达哥拉斯，利用数字建立了音乐的音阶，按照这种音阶，主音与其它各乐音的振动数之比分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$ 等值．这种规定至今在音乐中仍然适用．

数学曲线和数学曲面多数具有平衡和对称的特点，象艺术作品那样悦目　从简单的圆到复杂的双曲抛物线，从黄金分割到钟摆模型，都具有一种平衡性和对称性，作为一种基础图形，广泛应用于艺术、建筑、广告等方面．

在自然界的结构和规律之中到处都碰到数学　从蜗牛壳的螺线到雪片晶体的对称性，从蜜蜂的六角形蜂窝到行星

的椭圆形轨道，数学曲线和几何结构普遍存在于自然界中。同样，雨点落下的距离$\left(s=\frac{1}{2}gt^2\right)$和原子的能量$(E=mc^2)$等等，都能以数学公式来表示。

练 习 答 案

练习 1

1 他们永远不会在同一天休息.

2.

a. HHH — TTT　*b.* HH — HTTT　*c.* HHTH — TT

d. HHTHT — T　*e.* HHT — THT　*f.* H — THTHT

g. — HTHTHT　*h.* TH — HTHT　*i.* THTH — HT

j. THTHTH —　*k.* THTHT — H　*l.* THT — THH

m. T — THTHH　*n.* TT — HTHH　*o.* TTTH — HH

p. TTT — HHH

解题的模型是：空位两边一出现 HT，即变换成 TH.

练习 2

1.一个整数的数字和能被 9 整除，这整数就能被 9 整除. 所以，477，648 和 8766 都能被 9 整除.

2.奇数的平方是奇数. 偶数的平方是偶数. 能被 5 整除的自然数的平方,仍然能被 5 整除. 22 的平方能被 2 和 11 整除.

3.所得各商都约等于 $3\frac{1}{7}$ 或 3.14,即约等于圆周率 π.

4.摆长越大,摆动的次数越少,即每次摆动的时间越长.

练习 3

1.3 分钟.

2.塞子的价格是 1 个便士.

3.28 天.

练习 4

1．a.归纳推理 b.演绎推理 c.归纳推理

2．三个旅客共付 27 镑，旅馆收到 25 镑，服务员藏 2 镑．这 2 镑在 27 镑之内，不是在 27 镑之外．

3．首先肯定国王最多只画了一个蓝十字．因为如果画了两个或三个蓝十字，那么这三个人就不会都举起手．设三个候选人是 A、B 和 C．A 的理由是：如果他是蓝十字，B 和 C 就能立即认定自己是红十字．因为 B 和 C 不能马上确定自己是什么颜色的十字，所以 A 的额上一定画着红十字．这是一个间接推理的例子．

4．杂货店主损失价值 2 镑的货物和 3 镑钞票．

5．不可能．设这棋盘的 64 个小方格染着红、黑相间的两种颜色，则两个对角上的颜色必然相同，骨牌盖住一个红方格和一个黑方格．现在切去两个对角上的方格．如果是两个红方格，则多下两个黑方格；如果是两个黑方格，则多下两个红方格．都无法用骨牌盖住．

练习 5

1．
$$\begin{aligned}2+3&=2+(2+1)\\&=(2+2)+1\\&=4+1\\&=5\end{aligned}$$

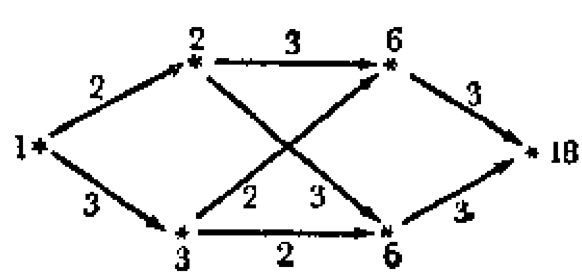
2．
$$\begin{aligned}2\times2&=2(1+1)\\&=2\times1+2\times1\\&=2+2\\&=4\end{aligned}$$

练习 6

1．59

2．
$$\begin{array}{r}9\,5\,6\,7\\+1\,0\,8\,5\\\hline 1\,0\,6\,5\,2\end{array}$$

3．



4. 每个砝码用一字母表示，如 P_1、P_2，等.

a. 将 P_1，P_2 与 P_3，P_4 放在天平两端.

b. 如果平衡，将 P_1，P_4 放在天平上比较.

如果不平衡，将较重的两个放在天平上比较. 这题还可有其它的解法.

练习 7

1. a. 3(模 5)　b. 0(模 5)　c. 1(模 5)

　d. 1(模 5)　e. 4(模 5)　f. 0(模 5)

2. 成立.

3.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

4. a. 不　b. 不

　c. 不

5.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

6. a. 1(模 5)　b. 4(模 5)　c. 3(模 5)

　d. 0(模 5)　e. 2(模 5)　f. 3(模 5)

7. a. 2(模 5)　b. 2(模 5)　c. 3(模5)

　d. 3(模 5)　e. 2(模 5)　f. 4(模 5)

8.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

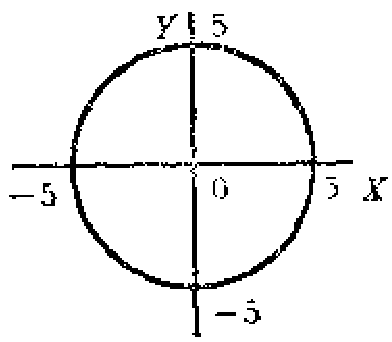
×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

练习 8

1. 在北极，或在距南极 $1\frac{1}{6}$ 英里的地方(由于地轴略有偏斜)

2. Y 的对面是 B，G 的对面是 R，W 的对面是 P.

练习 9

1. 

2. $S = 16t^2$.

练习 10

1. 两颗骰子掷下后，总共有 36 种等可能的不同结果。其中掷得 7 点的情形有 (6,1)，(5,2)，(4,3)，(3,4)(2,5)(1,6)，共 6 种。所以掷得 7 点的概率是 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

2. 最少拿一次就行。从标有黑白标签的箱子里拿。如果你拿出一条黑的，说明这箱子有两条黑的，因此白白标签的箱子里有一黑一白，黑黑标签的箱子里有两条白的。如果你拿出一条白的，说明这箱子有两条白的，黑黑标签的箱子里有一黑一白，白白标签的箱子里有两条黑的。

练习 11

1. 每一组的人都是由特殊学生组成，不能作为你校一般学生的代表。

2. a. 肥皂的质量取决于泡沫的多少。

   b. 价格便宜是决定自行车质量的最重要的标准。

c. 吃粥能提高球艺。

练习 12

1. 12 点 53 分　　2. 2

3. 无限多个　　4. 0

练习 13

1. a. 小 b. 小 c. 大 d. 大

鲁 宾 逊	9 岁
卡　　尔	12 岁
布　　朗	15 岁
史密斯，琼斯	18 岁
史蒂文斯	21 岁

2. 约翰录取的希望大，因为他除了体重略低外，其它条件都符合。但如果这个艺术学校坚持全部条件，这三个就都不能录取。

练习 14

1. 每一个数都能写成四个以下(包括四个)的这种平方数的和。

2. 3 面是红色的立方体有 8 个。
   2 面是红色的立方体有 12 个。
   1 面是红色的立方体有 6 个。
   没有红色的立方体有 1 个。

练习 15

1. 找不到能给出任意素数的公式。

2. a. (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61), (71,73)

   b. 0, 4, 4, 10, 10, 16, 10

c. 不是都相等。

3. a. 5 + 3 b. 19 + 7 c. 11 + 7 d. 37 + 11

4. a. 适合 b. 适合 c. 适合

5. a. 不适合 b. 不适合

翻 译 说 明

我国新的中学数学教学大纲中规定，从小学起就要渗透现代数学的观点. 因此，有必要向学生介绍现代数学包括哪些主要内容，为什么要学习数学，著名数学家是怎样研究数学的，数学的发展趋势怎样，有哪些未解决的数学问题等.《大家学数学》一书正好能适合这种要求.

原书没有目录，为了便利我国读者，增编了目录，并按所述具体内容，修改了部分章节的标题.

限于水平，难免有误译或不妥之处，欢迎批评指正.

周焕山

恽简馨

[General Information]
书名=大家学数学
作者=（英）D·A·约翰逊　　W·H·格伦
页数=77
SS号=10068841
出版日期=1980年10月第1版