普通高等教育“十一五”国家级规划教材

概率论与数理统计

第四版

浙江大学 盛 骤 谢式千 潘承毅 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，在2001年出版的《概率论与数理统计》(第三版)的基础上增订而成。本次修订新增的内容有：在数理统计中应用 Excel，bootstrap 方法，p 值检验法，箱线图等；同时吸收了国内外优秀教材的优点对习题的类型和数量进行了调整和充实。

本书主要内容包括概率论、数理统计、随机过程三部分，每章附有习题；同时涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的所有知识点。本书可作为高等学校工科、理科(非数学专业)各专业的教材和研究生入学考试的参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/盛骤，谢式千，潘承毅编. －4版.
北京：高等教育出版社，2008.6
ISBN 978－7－04－023896－9

Ⅰ.概… Ⅱ.①盛…②谢…③潘… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第057920号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 余 杨 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1979年3月第1版
开　　本	787×960　1/16		2008年6月第4版
印　　张	26.75	印　　次	2008年6月第1次印刷
字　　数	490 000	定　　价	25.80元

物料号 23896－00

第四版前言

本书自 1979 年 3 月初版至今，已发行近三十年。历经多年教学实践的检验，得到了国内广大院校和任课教师的认可，发行量为国内同类教材中最多的。

第四版是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，在第三版的基础上修订编写而成。在编写之前，高等教育出版社在全国有关高校作过相当广泛的调查，本版的编写吸取了相关的意见。

教材应该力求与时俱进。本版新增加了以下内容：

(1) 介绍了 bootstrap 方法的基本思想和方法，介绍了用 bootstrap 方法求参数点估计和区间估计的具体做法。bootstrap 方法是近代统计中的一种用于数据处理的重要的实用方法。

(2) 新增了在数理统计中应用 Excel 软件一章。介绍了 Excel 软件及其在数理统计中的应用，举例介绍了应用 VBA 语言编写“宏”求解具体的数理统计问题。

(3) 新增了假设检验问题的 p 值检验法。新增了箱线图，箱线图能大致描述随机变量分布的一些重要性质，还能检测疑似异常点。

(4) 对第三版原有的例题和习题作了一些调整，增加了有关加强基本概念、基本运算的习题，在例题和习题的选择上扩大了涉及的范围，例如，农业、保险业、医学、商业、管理学、体育、等等。

选用本教材的院校类别较为广泛，专业不一，学生程度不一。我们认为，教材内容要比教学大纲多一些，要比教师在课堂讲授的多一些，这样能照顾到各类学校各个专业的需要，能满足不同程度的学生的学习需要。

我们在目录中打上了一些 * 号，在学时限制下，有 * 号的内容可以不学。这些内容是相对独立的，删去不学不影响全书的讲授。在概率论与数理统计部分中打 * 号的内容有：基于截尾样本的最大似然估计；置信区间与假设检验之间的关系；样本容量的选取；秩和检验。此外还有偏度、峰度检验，以及这一版新增的部分或全部内容。随机过程部分视教学计划中有无这一门课决定取舍。

本次修订也包括配套辅导书，它们将与教材同时出版。

本书中新增的有关在数理统计中应用 Excel 软件的内容由浙江大学于渤教授编写。

本书由浙江大学范大茵教授审阅，对此我们表示衷心的感谢。

高等教育出版社蒋青、李蕊、兰莹莹同志为本版教材做了很多认真、细致的工作，对此，我们表示诚挚的感谢。

诚恳地希望读者批评、指正。

盛　骤　谢式千　潘承毅

2008年4月

第三版前言

这一版我们对于本书第二版中的一些疏漏和不妥之处作了修改，增加了“基于截尾样本的最大似然估计”和“置信区间与假设检验之间的关系”两小节，对各章的例题和习题作了少量的增减。

为了帮助读者抓住要点，提高学习质量与效率，在各章末增写了“小结”。小结中所包含的内容，有的是用来说明概念的现实背景和含义，对某些概念与方法所基于的概率和统计思想作了进一步的阐述；有的则阐明一章内容的重点和基本要求；有的则指出学习时应注意之点。小结也能起到提纲挈领的作用。

书末还增加了两个参读材料：(一)随机变量样本值的产生，(二)标准正态变量分布函数 $\Phi(x)$ 的数值计算。这些内容在解决实际问题时是常会用到的。

本书这一版承柴根象教授、王静龙教授、谢国瑞教授、范大茵教授审阅，他们提出了许多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。

盛　骤　谢式千　潘承毅

2000 年 8 月

第二版前言

本书是在1979年出版的第一版的基础上修订的，可作为高等学校工科、理科（非数学专业）概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员参考。

本书分三部分。概率论部分（第一章至第五章）作为基础知识，为读者提供了必要的理论基础。数理统计部分（第六章至第九章）主要讲述了参数估计和假设检验，并介绍了方差分析和回归分析。随机过程部分（第十章至第十二章）在讲清基本知识的基础上主要讨论了平稳随机过程，还介绍了马尔可夫过程。数理统计和随机过程这两部分内容是相互独立的，可根据专业的需要选用。

在本书第一版出版后，我们经过进一步的教学实践，积累了不少的经验，并吸收了广大读者的意见，修订稿是在这一基础上写出的。我们修改了第一版中存在的不当之处，并致力于教材质量的提高。我们在选材和叙述上尽量做到联系工科专业的实际，注重应用，力图将概念写得清晰易懂，做到便于教学。我们在例题和习题的选择上作了努力，这些题目既具有启发性，又有广泛的应用性，从题目的广泛性也可看到本门课程涉及生活和技术应用领域的广泛性。读者将会发现，这些例题和习题是饶有趣味的。为适应经济建设的需要，我们加强了数理统计的内容，例如编写了“矩估计法”、“样本容量的选取”和“正态分布的偏度、峰度检验”等，并有意识地加强学习者统计计算能力的培养。

书中的一部分内容能直接应用于解决实际课题，另一部分内容为读者今后进一步学习有关课程或在实际应用方面提供一定的基础。

黄纪青同志曾参加过本书第一版编写大纲的讨论，撰写过第一版第一章的初稿。

本书的全部插图是由张礼明同志描绘的。

本书第二版承魏宗舒教授、林少宫教授、沈恒范教授、范大茵副教授、樊孝述副教授和汪振鹏副教授审阅，他们提出了很多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。

书中不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

盛　骤　谢式千　潘承毅

1988年1月

目　　录

第一章 概率论的基本概念

自然界和社会上发生的现象是多种多样的.有一类现象,在一定条件下必然发生,例如,向上抛一石子必然下落,同性电荷必相互排斥,等等.这类现象称为**确定性现象**.在自然界和社会上存在着另一类现象,例如,在相同条件下抛同一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么;用同一门炮向同一目标射击,各次弹着点不尽相同,在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置.这类现象,在一定的条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,而在试验或观察之前不能预知确切的结果.但人们经过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性.例如,多次重复抛一枚硬币得到正面朝上大致有一半,同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布,等等.这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,就是我们以后所说的**统计规律性**.

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,我们称之为**随机现象**.概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

§1 随机试验

我们遇到过各种试验.在这里,我们把试验作为一个含义广泛的术语.它包括各种各样的科学实验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.下面举一些试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3:将一枚硬币抛掷三次,观察出现正面的次数.

E_4:抛一颗骰子,观察出现的点数.

E_5:记录某城市 120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

E_6:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

E_7:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

上面举出了七个试验的例子,它们有着共同的特点.例如,试验 E_1 有两种可能结果,出现 H 或者出现 T,但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T,这

个试验可以在相同的条件下重复地进行. 又如试验 E_6，我们知道灯泡的寿命(以小时计) $t \geqslant 0$，但在测试之前不能确定它的寿命有多长. 这一试验也可以在相同的条件下重复地进行. 概括起来，这些试验具有以下的特点：

1° 可以在相同的条件下重复地进行；

2° 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**.

本书中以后提到的试验都是指随机试验.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

§2　样本空间、随机事件

(一) 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**.

下面写出 §1 中试验 $E_k(k=1,2,\cdots,7)$ 的样本空间 S_k：

S_1：$\{H,T\}$；

S_2：$\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$；

S_3：$\{0,1,2,3\}$；

S_4：$\{1,2,3,4,5,6\}$；

S_5：$\{0,1,2,3,\cdots\}$；

S_6：$\{t \mid t \geqslant 0\}$；

S_7：$\{(x,y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度(℃)，y 表示最高温度(℃). 并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

(二) 随机事件

在实际中，当进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如，若规定某种灯泡的寿命(小时)小于 500 为次品，则在 E_6 中我们关心灯泡的寿命是否有 $t \geqslant 500$. 满足这一条件的样本点组成 S_6 的一个子集：$A=\{t \mid t \geqslant 500\}$. 我们称 A 为试验 E_6 的一个随机事件. 显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t \geqslant 500$.

一般，我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**①. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**.

特别，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$；试验 E_4 有 6 个基本事件 $\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，S 称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，$\varnothing$ 称为**不可能事件**.

下面举几个事件的例子.

例 1 在 E_2 中事件 A_1："第一次出现的是 H"，即

$$A_1=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}.$$

事件 A_2："三次出现同一面"，即

$$A_2=\{HHH,TTT\}.$$

在 E_6 中，事件 A_3："寿命小于 1000 小时"，即

$$A_3=\{t\mid 0\leqslant t<1000\}.$$

在 E_7 中，事件 A_4："最高温度与最低温度相差 10 摄氏度"，即

$$A_4=\{(x,y)\mid y-x=10,T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}.$$ □

（三）事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法. 并根据"事件发生"的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1° 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B **相等**.

2° 事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 当且仅当 A,B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

3° 事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 当且仅

---

① 严格地说，事件是指 S 中的满足某些条件的子集. 当 S 是由有限个元素或由可列无限个元素组成时，每个子集都可作为一个事件. 若 S 是由不可列无限个元素组成时，某些子集必须排除在外. 幸而这种不可容许的子集在实际应用中几乎不会遇到. 今后，每当我们讲到一个事件时都是假定它是容许考虑的那种子集. 读者如有兴趣可参考较详细的教材.

当 A,B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也记作 AB.

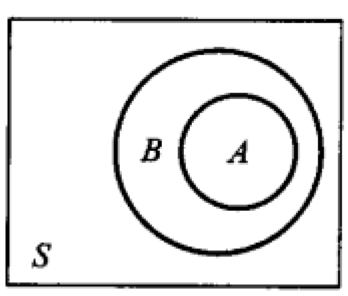
类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

4° 事件 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A-B$ 发生.

5° 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是**互不相容的**，或**互斥的**. 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

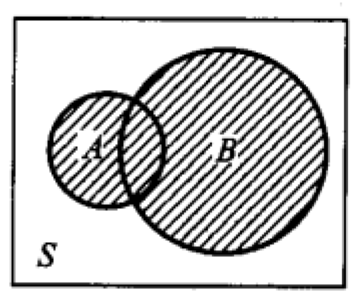
6° 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 又称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**. 这指的是对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A}=S-A$.

用图 1－1—图 1－6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算. 例如，在图 1－1 中长方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A. 又如在图 1－2 中长方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，而阴影部分表示和事件 $A\cup B$.



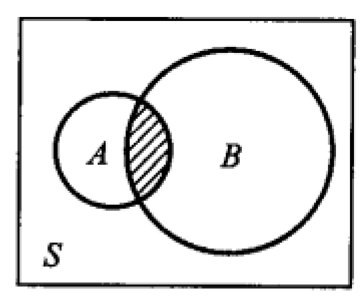
$A\subset B$

图 1－1



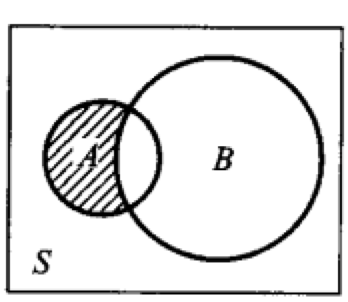
$A\cup B$

图 1－2



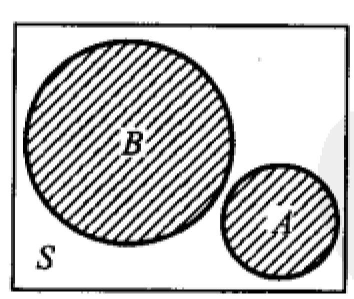
$A\cap B$

图 1－3



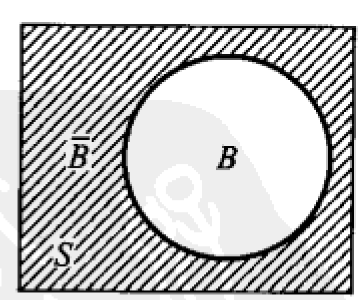
$A-B$

图 1－4



$A\cap B=\varnothing$

图 1－5



$B\cup\overline{B}=S,\ B\cap\overline{B}=\varnothing$

图 1－6

在进行事件运算时，经常要用到下述定律. 设 A,B,C 为事件，则有

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$； $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 2 在例 1 中有

$A_1\cup A_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,TTT\}$,

$A_1\cap A_2=\{HHH\}$,

$A_2-A_1=\{TTT\}$,

$\overline{A_1\cup A_2}=\{THT,TTH,THH\}$. □

例 3 如图 1－7 所示的电路中，以 A 表示“信号灯亮”这一事件，以 B,C,D 分别表示事件：继电器接点Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ闭合，那么容易知道 $BC\subset A,BD\subset A$，$BC\cup BD=A$，而 $\overline{B}A=\varnothing$，即事件 $\overline{B}$ 与事件 A 互不相容. 又，$\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}$.（左边表示事件“Ⅰ，Ⅱ至少有一个闭合”的逆事件，也就是Ⅰ，Ⅱ都不闭合，即 $\overline{B},\overline{C}$ 同时发生．） □

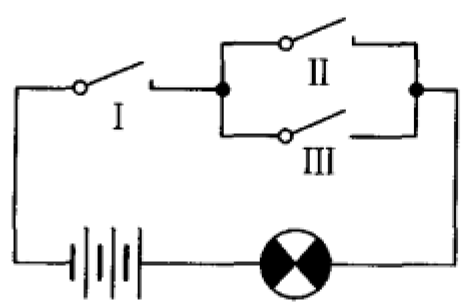


图 1－7

§3 频率与概率

对于一个事件(除必然事件和不可能事件外)来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如，为了确定水坝的高度，就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小. 我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

(一) 频率

定义 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**，并记成 $f_n(A)$.

由定义，易见频率具有下述基本性质：

1° $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

2° $f_n(S)=1$；

3° 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发

生的频繁程度.频率大,事件 A 发生就频繁,这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就大.反之亦然.因而,直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.但是否可行,先看下面的例子.

例 1　考虑"抛硬币"这个试验,我们将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次,各做 10 遍.得到数据如表 1—1 所示(其中 n_H 表示 H 发生的频数,$f_n(H)$表示 H 发生的频率).

表 1—1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

这种试验历史上有人做过,得到如表 1—2 所示的数据.

表 1—2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K・皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K・皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出:抛硬币次数 n 较小时,频率 $f_n(H)$在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大,但随着 n 增大,频率 $f_n(H)$呈现出稳定性.即当 n 逐渐增大时 $f_n(H)$总是在 0.5 附近摆动,而逐渐稳定于 0.5.　□

例 2　考察英语中特定字母出现的频率.当观察字母的个数 n(试验的次

数)较小时,频率有较大幅度的随机波动.但当 n 增大时,频率呈现出稳定性.表1—3就是一份英文字母频率的统计表①:

表1—3

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

□

大量试验证实,当重复试验的次数 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性,逐渐稳定于某个常数.这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性.我们让试验重复大量次数,计算频率 $f_n(A)$,以它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的.

但是,在实际中,我们不可能对每一个事件都做大量的试验,然后求得事件的频率,用以表征事件发生可能性的大小.同时,为了理论研究的需要,我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发,给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义.

(二) 概率

定义 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间.对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的**概率**,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1° **非负性**: 对于每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

2° **规范性**: 对于必然事件 S,有 $P(S)=1$;

3° **可列可加性**: 设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件,即对于 $A_iA_j=\varnothing$,$i\neq j$,$i,j=1,2,\cdots$,有

① 这是由Dewey,G.统计了约438 023个字母得到的.引自Relative Frequency of English Spellings(Teachers College Press,Columbia University,New York,1970).

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots. \tag{3.1}$$

在第五章中将证明，当 $n \to \infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们就有理由将概率 $P(A)$ 用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质.

性质 i　$P(\varnothing) = 0$.

证　令 $A_n = \varnothing$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$，且 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots$. 由概率的可列可加性(3.1)得

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing).$$

由概率的非负性知，$P(\varnothing) \geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing) = 0$. □

性质 ii（有限可加性）　若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{3.2}$$

(3.2) 式称为概率的**有限可加性**.

证　令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，即有 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots$. 由 (3.1) 式得

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \end{aligned}$$

(3.2)式得证. □

性质 iii　设 A, B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A); \tag{3.3}$$

$$P(B) \geqslant P(A). \tag{3.4}$$

证　由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B-A)$ (参见图 1－1)，且 $A(B-A) = \varnothing$，再由概率的有限可加性(3.2)，得

$$P(B) = P(A) + P(B-A),$$

(3.3)得证；又由概率的非负性 1°，$P(B-A) \geqslant 0$ 知

$$P(B) \geqslant P(A).$$ □

性质 iv　对于任一事件 A，

$$P(A) \leqslant 1.$$

证　因 $A \subset S$，由性质 iii 得

$$P(A) \leqslant P(S) = 1.$$ □

性质 v(逆事件的概率) 对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证 因 $A\cup\overline{A}=S$,且 $A\overline{A}=\varnothing$,由 (3.2) 式,得

$$1=P(S)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

性质 v 得证. □

性质 vi(加法公式) 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{3.5}$$

证 因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$ (参见图 1-2),且 $A(B-AB)=\varnothing$,$AB\subset B$,故由(3.2)式及(3.3)式得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

□

(3.5) 式还能推广到多个事件的情况. 例如,设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned} \tag{3.6}$$

一般,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以用归纳法证得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned} \tag{3.7}$$

§4 等可能概型(古典概型)

§1 中所说的试验 E_1,E_4,它们具有两个共同的特点:

1° 试验的样本空间只包含有限个元素;

2° 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验是大量存在的. 这种试验称为**等可能概型**. 它在概率论发展初期曾是主要的研究对象,所以也称为**古典概型**. 等可能概型的一些概念具有直观、容易理解的特点,有着广泛的应用.

下面我们来讨论等可能概型中事件概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同,即有

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

又由于基本事件是两两互不相容的. 于是

$$\begin{aligned}1=P(S)&=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})\\&\quad+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\}),\end{aligned}$$

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

若事件 A 包含 k 个基本事件,即 $A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\}$,这里 i_1, $i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 k 个不同的数. 则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\ \text{包含的基本事件数}}{S\ \text{中基本事件的总数}}.\tag{4.1}$$

(4.1) 式就是等可能概型中事件 A 的概率的计算公式[①].

例 1 将一枚硬币抛掷三次. (1) 设事件 A_1 为"恰有一次出现正面",求 $P(A_1)$;(2) 设事件 A_2 为"至少有一次出现正面",求 $P(A_2)$.

解 (1)我们考虑§1 中 E_2 的样本空间:

$$S_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}.$$

而 $$A_1=\{HTT,THT,TTH\}.$$

S_2 中包含有限个元素,且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 故由(4.1)式,得

$$P(A_1)=\frac{3}{8}.$$

(2) 由于$\overline{A}_2=\{TTT\}$,于是

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$ □

当样本空间的元素较多时,我们一般不再将 S 中的元素一一列出,而只需分别求出 S 中与 A 中包含的元素的个数(即基本事件的个数),再由(4.1)式即可求出 A 的概率.

例 2 一个口袋装有 6 只球,其中 4 只白球、2 只红球. 从袋中取球两次,每次随机地取一只. 考虑两种取球方式:(a) 第一次取一只球,观察其颜色后放回袋中,搅匀后再取一球. 这种取球方式叫做**放回抽样**. (b) 第一次取一球不放回袋中,第二次从剩余的球中再取一球. 这种取球方式叫做**不放回抽样**. 试分别就上面两种情况求(1) 取到的两只球都是白球的概率;(2) 取到的两只球颜色相同的概率;(3) 取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解 (a) 放回抽样的情况.

---

① 易知由(4.1)所确定的概率满足非负性、规范性和有限可加性. 但此时由于 S 中只含有限个子集(只有 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 个子集). 因而若在 S 中取可列无限个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,则其中必包含无限多个不可能事件,即知可列可加性与有限可加性是等价的.

以 A、B、C 分别表示事件"取到的两只球都是白球","取到的两只球都是红球","取到的两只球中至少有一只是白球".易知"取到两只颜色相同的球"这一事件即为 $A\cup B$,而 $C=\overline{B}$.

在袋中依次取两只球,每一种取法为一个基本事件,显然此时样本空间中仅包含有限个元素.且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同,因而可利用(4.1)式来计算事件的概率.

第一次从袋中取球有 6 只球可供抽取,第二次也有 6 只球可供抽取.由组合法的乘法原理,共有 6×6 种取法.即样本空间中元素总数为 6×6.对于事件 A 而言,由于第一次有 4 只白球可供抽取,第二次也有 4 只白球可供抽取,由乘法原理共有 4×4 种取法,即 A 中包含 4×4 个元素.同理,B 中包含 2×2 个元素.于是

$$P(A)=\frac{4\times 4}{6\times 6}=\frac{4}{9}.$$

$$P(B)=\frac{2\times 2}{6\times 6}=\frac{1}{9}.$$

由于 $AB=\varnothing$,得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}.$$

$$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{8}{9}.$$

(b) 不放回抽样的情况.

由读者自己完成. □

例 3 将 n 只球随机地放入 N ($N\geqslant n$)个盒子中去,试求每个盒子至多有一只球的概率(设盒子的容量不限).

解 将 n 只球放入 N 个盒子中去,每一种放法是一基本事件.易知,这是古典概率问题.因每一只球都可以放入 N 个盒子中的任一个盒子,故共有 $N\times N\times\cdots\times N=N^n$ 种不同的放法,而每个盒子中至多放一只球共有 $N(N-1)\cdots[N-(n-1)]$种不同放法.因而所求的概率为

$$p=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

有许多问题和本例具有相同的数学模型.例如,假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的,即都等于 1/365,那么随机选取 n ($n\leqslant 365$) 个人,他们的生日各不相同的概率为

$$\frac{365\cdot 364\cdot\cdots\cdot(365-n+1)}{365^n}.$$

因而,n 个人中至少有两人生日相同的概率为

$$p=1-\frac{365\cdot 364\cdot\cdots\cdot(365-n+1)}{365^n}.$$

经计算可得下述结果：

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.999 999 7

从上表可看出，在仅有 64 人的班级里，“至少有两人生日相同”这一事件的概率与 1 相差无几，因此，如作调查的话，几乎总是会出现的. 读者不妨试一试. □

例 4 设有 N 件产品，其中有 D 件次品，今从中任取 n 件，问其中恰有 k $(k\leqslant D)$ 件次品的概率是多少？

解 在 N 件产品中抽取 n 件（这里是指不放回抽样），所有可能的取法共有 $\binom{N}{n}$[①] 种，每一种取法为一基本事件，且由于对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 又因在 D 件次品中取 k 件，所有可能的取法有 $\binom{D}{k}$ 种. 在 $N-D$ 件正品中取 $n-k$ 件所有可能的取法有 $\binom{N-D}{n-k}$ 种，由乘法原理知在 N 件产品中取 n 件，其中恰有 k 件次品的取法共有 $\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}$ 种，于是所求概率为

$$p=\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}\Big/\binom{N}{n}. \tag{4.2}$$

(4.2) 式即所谓超几何分布的概率公式. □

例 5 袋中有 a 只白球，b 只红球，k 个人依次在袋中取一只球，(1) 作放回抽样；(2) 作不放回抽样，求第 i $(i=1,2,\cdots,k)$ 人取到白球（记为事件 B）的概率 $(k\leqslant a+b)$.

解 (1) 放回抽样的情况，显然有

$$P(B)=\frac{a}{a+b}.$$

(2) 不放回抽样的情况. 各人取一只球，每种取法是一个基本事件. 共有 $(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)=A_{a+b}^k$ 个基本事件，且由于对称性知每个基本事

---

① 对于任意实数 a 以及非负整数 r，定义 $\binom{a}{r}=\frac{a(a-1)\cdots(a-r+1)}{r!}$，$\binom{a}{0}=1$. 例如 $\binom{-\pi}{3}=\frac{(-\pi)(-\pi-1)(-\pi-2)}{3!}=-\frac{\pi(\pi+1)(\pi+2)}{3!}$. 特别，当 a 为正整数，且 $r\leqslant a$ 时，$\binom{a}{r}$ 即为组合数，即 $\binom{a}{r}=C_a^r$.

件发生的可能性相同．当事件 B 发生时，第 i 人取的应是白球，它可以是 a 只白球中的任一只，有 a 种取法．其余被取的 $k-1$ 只球可以是其余 $a+b-1$ 只球中的任意 $k-1$ 只，共有 $(a+b-1)(a+b-2)\cdots[a+b-1-(k-1)+1]=A_{a+b-1}^{k-1}$ 种取法，于是事件 B 中包含 $a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}$ 个基本事件，故由(4.1)式得到

$$P(B)=a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}/A_{a+b}^{k}=\frac{a}{a+b}.$$

值得注意的是 $P(B)$ 与 i 无关，即 k 个人取球，尽管取球的先后次序不同，各人取到白球的概率是一样的，大家机会相同(例如在购买福利彩票时，各人得奖的机会是一样的)．另外还值得注意的是放回抽样的情况与不放回抽样的情况下 $P(B)$ 是一样的． □

例 6 在 1～2000 的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少？

解 设 A 为事件"取到的数能被 6 整除"，B 为事件"取到的数能被 8 整除"，则所求概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$
$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)].$$

由于 $$333<\frac{2000}{6}<334,$$

故得 $$P(A)=\frac{333}{2000}.$$

由于 $$\frac{2000}{8}=250,$$

故得 $$P(B)=\frac{250}{2000}.$$

又由于一个数同时能被 6 与 8 整除，就相当于能被 24 整除，因此，由

$$83<\frac{2000}{24}<84,$$

得 $$P(AB)=\frac{83}{2000}.$$

于是所求概率为

$$p=1-\left(\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000}\right)=\frac{3}{4}.$$ □

例 7 将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中去，这 15 名新生中有 3 名是优秀生．问 (1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率是多少？(2) 3 名优秀生分配在同一班级的概率是多少？

解 15 名新生平均分配到三个班级中的分法总数为

$$\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}.$$

每一种分配法为一基本事件,且由对称性易知每个基本事件发生的可能性相同.

(1) 将 3 名优秀生分配到三个班级使每个班级都有一名优秀生的分法共 3! 种.对于这每一种分法,其余 12 名新生平均分配到三个班级中的分法共有 $\frac{12!}{4!\ 4!\ 4!}$种.因此,每一班级各分配到一名优秀生的分法共有$\frac{3!\ 12!}{4!\ 4!\ 4!}$种.于是所求概率为

$$p_1=\frac{3!\times 12!}{4!\ 4!\ 4!}\Big/\frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}=\frac{25}{91}.$$

(2) 将 3 名优秀生分配在同一班级的分法共有 3 种.对于这每一种分法,其余 12 名新生的分法(一个班级 2 名,另两个班级各 5 名)有$\frac{12!}{2!\ 5!\ 5!}$种.因此 3 名优秀生分配在同一班级的分法共有$\frac{3\times 12!}{2!\ 5!\ 5!}$种,于是,所求概率为

$$p_2=\frac{3\times 12!}{2!\ 5!\ 5!}\Big/\frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}=\frac{6}{91}.$$ □

例 8　某接待站在某一周曾接待过 12 次来访,已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的,问是否可以推断接待时间是有规定的?

解　假设接待站的接待时间没有规定,而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的,那么,12 次接待来访者都在周二、周四的概率为

$$\frac{2^{12}}{7^{12}}=0.000\ 000\ 3.$$

人们在长期的实践中总结得到"**概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的**"(称之为**实际推断原理**).现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了,因此有理由怀疑假设的正确性,从而推断接待站不是每天都接待来访者,即认为其接待时间是有规定的. □

§5　条件概率

(一) 条件概率

条件概率是概率论中的一个重要而实用的概念.所考虑的是事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率.先举一个例子.

例 1　将一枚硬币抛掷两次,观察其出现正反面的情况.设事件 A 为"至少有一次为 H",事件 B 为"两次掷出同一面".现在来求已知事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率.

这里，样本空间为 $S=\{HH,HT,TH,TT\}$，$A=\{HH,HT,TH\}$，$B=\{HH,TT\}$. 易知此属古典概型问题. 已知事件 A 已发生，有了这一信息，知道 TT 不可能发生，即知试验所有可能结果所成的集合就是 A. A 中共有 3 个元素，其中只有 $HH\in B$. 于是，在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率（记为 $P(B|A)$）为

$$P(B|A)=\frac{1}{3}.$$ □

在这里，我们看到 $P(B)=2/4\neq P(B|A)$. 这是很容易理解的，因为在求 $P(B|A)$ 时我们是限制在事件 A 已经发生的条件下考虑事件 B 发生的概率的.

另外，易知

$$P(A)=\frac{3}{4},P(AB)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{1/4}{3/4},$$

故有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.\tag{5.1}$$

对于一般古典概型问题，若仍以 $P(B|A)$ 记事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率，则关系式(5.1)仍然成立. 事实上，设试验的基本事件总数为 n，A 所包含的基本事件数为 $m\ (m>0)$，AB 所包含的基本事件数为 k，即有

$$P(B|A)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

在一般场合，我们将上述关系式作为条件概率的定义.

定义 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\tag{5.2}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

不难验证，条件概率 $P(\cdot|A)$ 符合概率定义中的三个条件，即

1° **非负性**：对于每一事件 B，有 $P(B|A)\geqslant 0$；

2° **规范性**：对于必然事件 S，有 $P(S|A)=1$；

3° **可列可加性**：设 $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A).$$

既然条件概率符合上述三个条件，故§3 中对概率所证明的一些重要结果都适用于条件概率. 例如，对于任意事件 B_1,B_2 有

$$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A).$$

例 2 一盒子装有 4 只产品，其中有 3 只一等品，1 只二等品. 从中取产品两

次，每次任取一只，作不放回抽样. 设事件 A 为“第一次取到的是一等品”，事件 B 为“第二次取到的是一等品”. 试求条件概率 $P(B|A)$.

解　易知此属古典概型问题. 将产品编号，1，2，3 号为一等品；4 号为二等品. 以 (i,j) 表示第一次、第二次分别取到第 i 号、第 j 号产品. 试验 E（取产品两次，记录其号码）的样本空间为

$$S=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\cdots,(4,1),(4,2),(4,3)\},$$

$$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\},$$

$$AB=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.$$

按(5.2)式，得条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/12}{9/12}=\frac{2}{3}.$$

也可以直接按条件概率的含义来求 $P(B|A)$. 我们知道，当事件 A 发生以后，试验 E 所有可能结果的集合就是 A，A 中有 9 个元素，其中只有 (1,2)，(1,3)，(2,1)，(2,3)，(3,1)，(3,2)属于 B，故可得

$$P(B|A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

□

（二）乘法定理

由条件概率的定义 (5.2)，立即可得下述定理.

乘法定理　设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(B|A)P(A). \tag{5.3}$$

(5.3)式称为**乘法公式**.

(5.3) 式容易推广到多个事件的积事件的情况. 例如，设 A,B,C 为事件，且 $P(AB)>0$，则有

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A). \tag{5.4}$$

在这里，注意到由假设 $P(AB)>0$ 可推得 $P(A)\geqslant P(AB)>0$.

一般，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，$n\geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1). \tag{5.5}$$

例 3　设袋中装有 r 只红球，t 只白球. 每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球. 若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解　以 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示事件“第 i 次取到红球”，则 $\overline{A}_3$、$\overline{A}_4$ 分别表示事件第三、四次取到白球. 所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$=\frac{t+a}{r+t+3a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{r}{r+t}.\qquad\square$$

例 4 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 1/2，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为 7/10，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为 9/10. 试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件"透镜第 i 次落下打破"，以 B 表示事件"透镜落下三次而未打破". 因为 $B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，故有

$$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)$$

$$=\left(1-\frac{9}{10}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{200}.$$

另解，按题意

$$\overline{B}=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

而 $A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 是两两互不相容的事件，故有

$$P(\overline{B})=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

已知 $P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{7}{10},P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{9}{10}$，即有

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{7}{10}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{20},$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)$$

$$=\frac{9}{10}\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{200}.$$

故得

$$P(\overline{B})=\frac{1}{2}+\frac{7}{20}+\frac{27}{200}=\frac{197}{200},$$

$$P(B)=1-\frac{197}{200}=\frac{3}{200}.\qquad\square$$

（三）全概率公式和贝叶斯公式

下面建立两个用来计算概率的重要公式. 先介绍样本空间的划分的定义.

定义 设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件. 若

(i) $B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$;

(ii) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$,

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个**划分**.

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分，那么，对每次试验，事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中必有一个且仅有一个发生.

例如，设试验 E 为"掷一颗骰子观察其点数". 它的样本空间为 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. E 的一组事件 $B_1=\{1,2,3\},B_2=\{4,5\},B_3=\{6\}$是 S 的一个划分. 而事

件组 $C_1=\{1,2,3\}$,$C_2=\{3,4\}$,$C_3=\{5,6\}$不是 S 的划分.

定理 设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n). \tag{5.6}$$

(5.6) 式称为**全概率公式**.

在很多实际问题中 $P(A)$不易直接求得,但却容易找到 S 的一个划分 B_1, $B_2,\cdots,B_n$,且 $P(B_i)$和 $P(A|B_i)$或为已知,或容易求得,那么就可以根据(5.6)式求出 $P(A)$.

证 因为

$$A=AS=A(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n,$$

由假设 $P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,且$(AB_i)(AB_j)=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$ 得到

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)\\&=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots\\&\quad+P(A|B_n)P(B_n).\end{aligned}$$

□

另一个重要公式是下述的贝叶斯公式.

定理 设试验 E 的样本空间为 S. A 为 E 的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(A)>0,P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{5.7}$$

(5.7) 式称为**贝叶斯(Bayes)公式**①.

证 由条件概率的定义及全概率公式即得

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},i=1,2,\cdots,n.$$

□

特别在(5.6)式,(5.7)式中取 $n=2$,并将 B_1 记为 B,此时 B_2 就是 $\bar{B}$,那么,全概率公式和贝叶斯公式分别成为

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\bar{B})P(\bar{B}), \tag{5.8}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\bar{B})P(\bar{B})}. \tag{5.9}$$

这两个公式是常用的.

---

① 在全概率公式和贝叶斯公式中,要求 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 S 的一个划分,将这一条件改为"$B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$,且 $P\{B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n\}=1$"两个公式仍然成立.

例 5 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下的数据：

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志. (1) 在仓库中随机地取一只元件，求它是次品的概率；(2) 在仓库中随机地取一只元件，若已知取到的是次品，为分析此次品出自何厂，需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少. 试求这些概率.

解 设 A 表示"取到的是一只次品"，$B_i(i=1,2,3)$ 表示"所取到的产品是由第 i 家工厂提供的". 易知，B_1,B_2,B_3 是样本空间 S 的一个划分，且有

$$P(B_1)=0.15, P(B_2)=0.80, P(B_3)=0.05,$$
$$P(A|B_1)=0.02, P(A|B_2)=0.01, P(A|B_3)=0.03.$$

(1) 由全概率公式

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)\\&=0.0125.\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times0.15}{0.0125}=0.24.$$
$$P(B_2|A)=0.64, \quad P(B_3|A)=0.12.$$

以上结果表明，这只次品来自第 2 家工厂的可能性最大. □

例 6 据美国的一份资料报导，在美国总的来说患肺癌的概率约为 0.1%，在人群中有 20% 是吸烟者，他们患肺癌的概率约为 0.4%，求不吸者患肺癌的概率是多少？

解 以 C 记事件"患肺癌"，以 A 记事件"吸烟"，按题意 $P(C)=0.001$，$P(A)=0.20$，$P(C|A)=0.004$. 需要求条件概率 $P(C|\overline{A})$. 由全概率公式有

$$P(C)=P(C|A)P(A)+P(C|\overline{A})P(\overline{A}).$$

将数据代入，得

$$\begin{aligned}0.001&=0.004\times0.20+P(C|\overline{A})P(\overline{A})\\&=0.004\times0.20+P(C|\overline{A})\times0.80,\end{aligned}$$
$$P(C|\overline{A})=0.00025.$$ □

例 7 对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为

98%,而当机器发生某种故障时,其合格率为 55%. 每天早上机器开动时,机器调整良好的概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格品时,机器调整良好的概率是多少?

解　设 A 为事件"产品合格",B 为事件"机器调整良好". 已知 $P(A|B)=0.98$,$P(A|\overline{B})=0.55$,$P(B)=0.95$,$P(\overline{B})=0.05$,所需求的概率为 $P(B|A)$. 由贝叶斯公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$
$$=\frac{0.98\times0.95}{0.98\times0.95+0.55\times0.05}=0.97.$$

这就是说,当生产出第一件产品是合格品时,此时机器调整良好的概率为 0.97. 这里,概率 0.95 是由以往的数据分析得到的,叫做**先验概率**. 而在得到信息(即生产出的第一件产品是合格品)之后再重新加以修正的概率(即 0.97)叫做**后验概率**. 有了后验概率我们就能对机器的情况有进一步的了解. □

例 8　根据以往的临床记录,某种诊断癌症的试验具有如下的效果:若以 A 表示事件"试验反应为阳性",以 C 表示事件"被诊断者患有癌症",则有 $P(A|C)=0.95$,$P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$. 现在对自然人群进行普查,设被试验的人患有癌症的概率为 0.005,即 $P(C)=0.005$,试求 $P(C|A)$.

解　已知 $P(A|C)=0.95$,$P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.05$,$P(C)=0.005$,$P(\overline{C})=0.995$,由贝叶斯公式

$$P(C|A)=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})}=0.087.$$

本题的结果表明,虽然 $P(A|C)=0.95$,$P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$,这两个概率都比较高. 但若将此试验用于普查,则有 $P(C|A)=0.087$,亦即其正确性只有 8.7%(平均 1000 个具有阳性反应的人中大约只有 87 人确患有癌症). 如果不注意到这一点,将会得出错误的诊断,这也说明,若将 $P(A|C)$ 和 $P(C|A)$ 混淆了会造成不良的后果. □

§6　独　立　性

设 A,B 是试验 E 的两事件,若 $P(A)>0$,可以定义 $P(B|A)$. 一般,A 的发生对 B 发生的概率是有影响的,这时 $P(B|A)\neq P(B)$,只有在这种影响不存在时才会有 $P(B|A)=P(B)$,这时有

$$P(AB)=P(B|A)P(A)=P(A)P(B).$$

例 1　设试验 E 为"抛甲、乙两枚硬币,观察正反面出现的情况". 设事件 A

为"甲币出现 H",事件 B 为"乙币出现 H". E 的样本空间为

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}.$$

由 (4.1) 式得

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P(B|A)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}.$$

在这里我们看到 $P(B|A)=P(B)$,而 $P(AB)=P(A)P(B)$. 事实上,由题意,显然甲币是否出现正面与乙币是否出现正面是互不影响的. □

定义 设 A,B 是两事件,如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B), \tag{6.1}$$

则称事件 A,B **相互独立**,简称 A,B **独立**.

容易知道,若 $P(A)>0,P(B)>0$,则 A,B 相互独立与 A,B 互不相容不能同时成立.

定理一 设 A,B 是两事件,且 $P(A)>0$. 若 A,B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$. 反之亦然.

定理的正确性是显然的.

定理二 若事件 A 与 B 相互独立,则下列各对事件也相互独立:

$$A 与 \overline{B},\ \overline{A} 与 B,\ \overline{A} 与 \overline{B}.$$

证 因为 $A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$,得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB\cup A\overline{B}) = P(AB)+P(A\overline{B}) \\ &= P(A)P(B)+P(A\overline{B}), \end{aligned}$$

$$P(A\overline{B}) = P(A)[1-P(B)] = P(A)P(\overline{B}).$$

因此 A 与 $\overline{B}$ 相互独立. 由此可立即推出 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立. 再由 $\overline{\overline{B}}=B$,又推出 $\overline{A}$ 与 B 相互独立. □

下面我们将独立性的概念推广到三个事件的情况.

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\left.\begin{aligned} &P(AB)=P(A)P(B), \\ &P(BC)=P(B)P(C), \\ &P(AC)=P(A)P(C), \\ &P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

则称事件 A,B,C **相互独立**.

一般,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n $(n\geqslant 2)$ 个事件,如果对于其中任意 2 个,任意 3 个,$\cdots$,任意 n 个事件的积事件的概率,都等于各事件概率之积,则称事件 A_1, $A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

由定义，可以得到以下两个推论．

1°若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 k $(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也是相互独立的．

2°若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们各自的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立．

1°由独立性定义可直接推出．2°从直观上看是显然的．对于 $n=2$ 时，在定理二已作了证明，一般的情况由数学归纳法容易证得，此处略．

两事件相互独立的含义是它们中一个已发生，不影响另一个发生的概率．在实际应用中，对于事件的独立性常常是根据事件的实际意义去判断．一般，若由实际情况分析，A,B 两事件之间没有关联或关联很微弱，那就认为它们是相互独立的．例如 A,B 分别表示甲、乙两人患感冒．如果甲、乙两人的活动范围相距甚远．就认为 A、B 相互独立．若甲乙两人是同住在一个房间里的，那就不能认为 A、B 相互独立了．

例 2　一个元件（或系统）能正常工作的概率称为元件（或系统）的可靠性．如图 1－8，设有 4 个独立工作的元件 1，2，3，4 按先串联再并联的方式连接（称为串并联系统）．设第 i 个元件的可靠性为 $p_i(i=1,2,3,4)$，试求系统的可靠性．

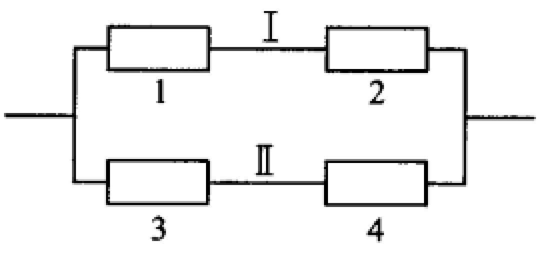


图 1－8

解　以 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示事件“第 i 个元件正常工作”，以 A 表示事件“系统正常工作”．

系统由两条线路Ⅰ和Ⅱ组成（如图 1－8）．当且仅当至少有一条线路中的两个元件均正常工作时这一系统正常工作，故有

$$A=A_1A_2\cup A_3A_4.$$

由事件的独立性，得系统的可靠性

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)\\&=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\\&=p_1p_2+p_3p_4-p_1p_2p_3p_4.\end{aligned}$$

□

例 3　要验收一批（100 件）乐器．验收方案如下：自该批乐器中随机地取 3 件测试（设 3 件乐器的测试的结果是相互独立的），如果 3 件中至少有一件在测试中被认为音色不纯，则这批乐器就被拒绝接收．设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为 0.95；而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为 0.01．如果已知这 100 件乐器中恰有 4 件是音色不纯的．试问这批乐器被接收的概率是多少？

解　设以 $H_i(i=0,1,2,3)$ 表示事件“随机地取出 3 件乐器，其中恰有 i 件音色不纯”，H_0,H_1,H_2,H_3 是 S 的一个划分，以 A 表示事件“这批乐器被接收”．

已知一件音色纯的乐器，经测试被认为音色纯的概率为 0.99，而一件音色不纯的乐器，经测试被误认为音色纯的概率为 0.05，并且 3 件乐器的测试的结果是相互独立的，于是有

$$P(A|H_0)=0.99^3, P(A|H_1)=0.99^2\times0.05,$$
$$P(A|H_2)=0.99\times0.05^2, P(A|H_3)=0.05^3,$$

而
$$P(H_0)=\binom{96}{3}\Big/\binom{100}{3},\quad P(H_1)=\binom{4}{1}\binom{96}{2}\Big/\binom{100}{3},$$
$$P(H_2)=\binom{4}{2}\binom{96}{1}\Big/\binom{100}{3},\quad P(H_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{100}{3}.$$

故
$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A\mid H_i)P(H_i)=0.8574+0.0055+0+0$$
$$=0.8629.$$
□

例 4　甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为 p，$p\geqslant1/2$. 问对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利．设各局胜负相互独立．

解　采用三局二胜制，甲最终获胜，其胜局的情况是："甲甲"或"乙甲甲"或"甲乙甲". 而这三种结局互不相容，于是由独立性得甲最终获胜的概率为

$$p_1=p^2+2p^2(1-p).$$

采用五局三胜制，甲最终获胜，至少需比赛 3 局(可能赛 3 局，也可能赛 4 局或 5 局)，且最后一局必须是甲胜，而前面甲需胜二局．例如，共赛 4 局，则甲的胜局情况是："甲乙甲甲"，"乙甲甲甲"，"甲甲乙甲"，且这三种结局互不相容．由独立性得在五局三胜制下甲最终获胜的概率为

$$p_2=p^3+\binom{3}{2}p^3(1-p)+\binom{4}{2}p^3(1-p)^2,$$

而
$$p_2-p_1=p^2(6p^3-15p^2+12p-3)$$
$$=3p^2(p-1)^2(2p-1).$$

当 $p>\frac{1}{2}$ 时 $p_2>p_1$；当 $p=\frac{1}{2}$ 时 $p_2=p_1=\frac{1}{2}$. 故当 $p>\frac{1}{2}$ 时，对甲来说采用五局三胜制为有利．当 $p=\frac{1}{2}$ 时两种赛制甲、乙最终获胜的概率是相同的，都是 50%.

□

小结

随机试验的全部可能结果组成的集合 S 称为样本空间．样本空间 S 的子集称为事件，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生．事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合的运算来处理．集合间的关

系和集合的运算，读者是熟悉的，重要的是要知道它们在概率论中的含义。

在一次试验中，一个事件(除必然事件与不可能事件外)可能发生也可能不发生，其发生的可能性的大小是客观存在的．事件发生的频率以及它的稳定性，表明能用一个数来表征事件在一次试验中发生的可能性的大小．我们从频率的稳定性及频率的性质得到启发和抽象，给出了概率的定义．我们定义了一个集合(事件)的函数 $P(\cdot)$，它满足三条基本性质：1°非负性，2°规范性，3°可列可加性．这一函数的函数值 $P(A)$ 就定义为事件 A 的概率．

概率的定义只给出概率必须满足的三条基本性质，并未对事件 A 的概率 $P(A)$ 给定一个具体的数．只在古典概型的情况，对于每个事件 A 给出了概率 $P(A)=k/n$ ((4.1)式)．一般，我们可以进行大量的重复试验，得到事件 A 的频率，而以频率作为 $P(A)$ 的近似值．或者根据概率的性质分析，得到 $P(A)$ 的取值.

在古典概型中，我们证明了条件概率的公式

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad P(A)>0. \tag{5.2}$$

在一般的情况，(5.2)式则作为条件概率的定义．固定 A，条件概率 $P(\cdot \mid A)$ 具有概率定义中的三条基本性质，因而条件概率是一种概率．

有两种计算条件概率 $P(B|A)$ 的方法：(1) 按条件概率的含义，直接求出 $P(B|A)$．注意到，在求 $P(B|A)$ 时已知事件 A 已发生，样本空间 S 中所有不属于 A 的样本点都被排除，原有的样本空间 S 缩减成为 $S'=A$. 在缩减了的样本空间 $S'=A$ 中计算事件 B 的概率就得到 $P(B|A)$. (2) 在 S 中计算 $P(AB)$ 及 $P(A)$，再按(5.2)式求得 $P(B|A)$.

将(5.2)式写成

$$P(AB)=P(B \mid A)P(A), \qquad P(A)>0. \tag{5.3}$$

这就是乘法公式．我们常按上述第一种方法求出条件概率，从而按(5.3)可求得 $P(AB)$.

事件的独立性是概率论中的一个非常重要的概念．概率论与数理统计中的很多很多内容都是在独立的前提下讨论的．应该注意到，在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来验证而是根据实际意义来加以判断的．根据实际背景判断事件的独立性，往往并不困难．

■ **重要术语及主题**

下面列出了本章的重要术语及主题，请读者写出它们的定义或内容，然后与教材中的陈述校核，看看你是否写对了．这样做旨在使读者在复习时收到较好的效果．

随机试验　样本空间　随机事件　基本事件　频率　概率　古典概型　A 的对立事件 $\overline{A}$ 及其概率　两个互不相容事件的和事件的概率　概率的加法定理　条件概率　概率的乘法公式　全概率公式　贝叶斯公式　事件的独立性　实际推断原理

习题

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查

出了 2 件次品就停止检查，或检查了 4 件产品就停止检查，记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

2. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生.

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生.

(3) A,B,C 中至少有一个发生.

(4) A,B,C 都发生.

(5) A,B,C 都不发生.

(6) A,B,C 中不多于一个发生.

(7) A,B,C 中不多于两个发生.

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

3. (1) 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

(2) 已知 $P(A)=1/2$，$P(B)=1/3$，$P(C)=1/5$，$P(AB)=1/10$，$P(AC)=1/15$，$P(BC)=1/20$，$P(ABC)=1/30$，求 $A\cup B$，$\overline{A}\overline{B}$，$A\cup B\cup C$，$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，$\overline{A}\overline{B}\cup C$ 的概率.

(3) 已知 $P(A)=1/2$，(i)若 A,B 互不相容，求 $P(A\overline{B})$，(ii)若 $P(AB)=1/8$，求 $P(A\overline{B})$.

4. 设 A,B 是两个事件.

(1) 已知 $A\overline{B}=\overline{A}B$，验证 $A=B$.

(2) 验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$.

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

(1) 从中任意抽取 5 片，求其中至少有 2 片是安慰剂的概率.

(2) 从中每次取一片，作不放回抽样，求前 3 次都取到安慰剂的概率.

6. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率.

(2) 求最大号码为 5 的概率.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

8. 在 1500 件产品中有 400 件次品、1100 件正品. 任取 200 件.

(1) 求恰有 90 件次品的概率.

(2) 求至少有 2 件次品的概率.

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件

强度太弱的概率是多少？

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生.

(1) 在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

(2) 在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

14. (1) 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B\mid A\cup\overline{B})$.

(2) 已知 $P(A)=1/4$，$P(B\mid A)=1/3$，$P(A\mid B)=1/2$，求 $P(A\cup B)$.

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法).

16. 据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P\{\text{孩子得病}\}=0.6,P\{\text{母亲得病}\mid\text{孩子得病}\}=0.5,$$
$$P\{\text{父亲得病}\mid\text{母亲及孩子得病}\}=0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品，在其中取两次，每次任取一件，作不放回抽样. 求下列事件的概率：

(1) 两件都是正品.

(2) 两件都是次品.

(3) 一件是正品，一件是次品.

(4) 第二次取出的是次品.

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

19. (1) 设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球；乙袋中装有 N 只白球、M 只红球. 今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球. 问取到白球的概率是多少？

(2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球. 先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒中任取一只球. 求取到白球的概率.

20. 某种产品的商标为“MAXAM”，其中有 2 个字母脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为“MAXAM”的概率.

21. 已知男子有 5% 是色盲患者，女子有 0.25% 是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲者，问此人是男性的概率是多少？

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 p，若第一次及格则第二次及格的概率也为 p；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $p/2$.

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率.

(2) 若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

23. 将两信息分别编码为 A 和 B 传送出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01. 信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2 : 1. 若接收站收到的信息是 A，问原发信息是 A 的概率是多少？

24. 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品. 今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样. 求

(1) 第一次取到的零件是一等品的概率.

(2) 在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率.

25. 某人下午 5:00 下班，他所积累的资料表明：

到家时间	5:35～5:39	5:40～5:44	5:45～5:49	5:50～5:54	迟于 5:54
乘地铁的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 5:47 到家的. 试求他是乘地铁回家的概率.

26. 病树的主人外出，委托邻居浇水，设已知如果不浇水，树死去的概率为 0.8. 若浇水则树死去的概率为 0.15. 有 0.9 的把握确定邻居会记得浇水.

(1) 求主人回来树还活着的概率.

(2) 若主人回来树已死去，求邻居忘记浇水的概率.

27. 设本题涉及的事件均有意义. 设 A,B 都是事件.

(1) 已知 $P(A)>0$，证明 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

(2) 若 $P(A|B)=1$，证明 $P(\bar{B}|\bar{A})=1$.

(3) 若设 C 也是事件，且有 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，$P(A|\bar{C})\geqslant P(B|\bar{C})$，证明 $P(A)\geqslant P(B)$.

28. 有两种花籽，发芽率分别为 0.8，0.9，从中各取一颗，设各花籽是否发芽相互独立. 求

(1) 这两颗花籽都能发芽的概率.

(2) 至少有一颗能发芽的概率.

(3) 恰有一颗能发芽的概率.

29. 根据报道美国人血型的分布近似地为：A 型为 37%，O 型为 44%，B 型为 13%，AB 型为 6%. 夫妻拥有的血型是相互独立的.

(1) B 型的人只有输入 B、O 两种血型才安全. 若妻为 B 型，夫为何种血型未知，求夫是妻的安全输血者的概率.

(2) 随机地取一对夫妇，求妻为 B 型夫为 A 型的概率.

(3) 随机地取一对夫妇，求其中一人为 A 型，另一人为 B 型的概率.

(4) 随机地取一对夫妇，求其中至少有一人是 O 型的概率.

30. (1) 给出事件 A、B 的例子，使得

(i) $P(A|B)<P(A)$，　(ii) $P(A|B)=P(A)$，　(iii) $P(A|B)>P(A)$.

(2) 设事件 A,B,C 相互独立，证明(i) C 与 AB 相互独立. (ii) C 与 $A\cup B$ 相互独立.

(3) 设事件 A 的概率 $P(A)=0$，证明对于任意另一事件 B，有 A,B 相互独立.

(4) 证明事件 A,B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$.

31. 设事件 A,B 的概率均大于零，说明以下的叙述(1) 必然对. (2) 必然错. (3) 可能对. 并说明理由.

(1) 若 A 与 B 互不相容，则它们相互独立.

(2) 若 A 与 B 相互独立，则它们互不相容.

(3) $P(A)=P(B)=0.6$，且 A,B 互不相容.

(4) $P(A)=P(B)=0.6$，且 A,B 相互独立.

32. 有一种检验艾滋病毒的检验法，其结果有概率 0.005 报导为假阳性(即不带艾滋病毒者，经此检验法有 0.005 的概率被认为带艾滋病毒)．今有 140 名不带艾滋病毒的正常人全部接受此种检验，被报道至少有一人带艾滋病毒的概率为多少？

33. 盒中有编号为 1,2,3,4 的 4 只球，随机地自盒中取一只球，事件 A 为"取得的是 1 号或 2 号球"，事件 B 为"取得的是 1 号或 3 号球"，事件 C 为"取得的是 1 号或 4 号球"验证：

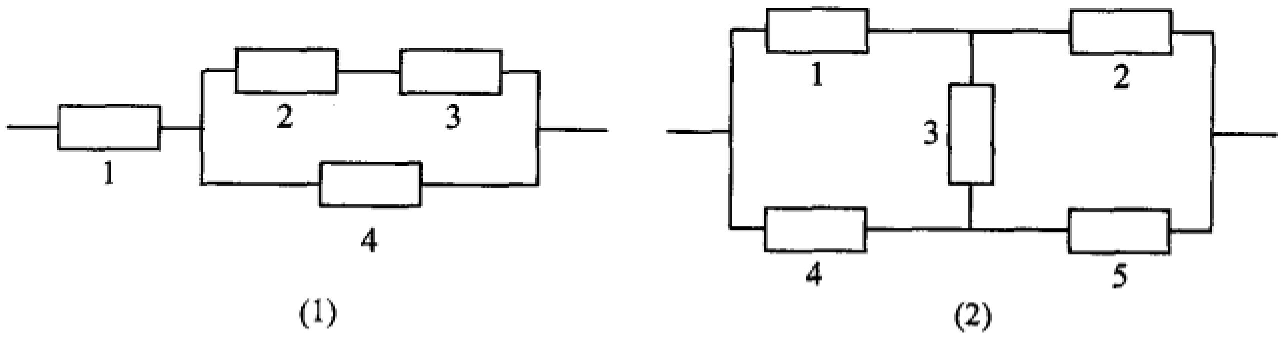
$$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C),$$

但　　$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$,

即事件 A,B,C 两两独立，但 A,B,C 不是相互独立的．

34. 试分别求以下两个系统的可靠性：

(1) 设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4．它们的可靠性分别为 p_1,p_2,p_3,p_4，将它们按题 34 图(1)的方式连接(称为并串联系统)．



题 34 图

(2) 设有 5 个独立工作的元件 1,2,3,4,5．它们的可靠性均为 p，将它们按题 34 图(2)的方式连接(称为桥式系统)．

35. 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性．在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出．如果两个这样的开关并联连接，它们每个具有 0.96 的可靠性(即在情况 C 发生时闭合的概率)，问这时系统的可靠性(即电路闭合的概率)是多少？如果需要有一个可靠性至少为 0.9999 的系统，则至少需要用多少只开关并联？设各开关闭合与否是相互独立的．

36. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 1/5,1/3,1/4．问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少？

37. 设第一只盒子中装有 3 只蓝球，2 只绿球，2 只白球；第二只盒子中装有 2 只蓝球，3 只绿球，4 只白球．独立地分别在两只盒子中各取一只球．

(1) 求至少有一只蓝球的概率．

(2) 求有一只蓝球一只白球的概率．

(3) 已知至少有一只蓝球，求有一只蓝球一只白球的概率．

38. 袋中装有 m 枚正品硬币、n 枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽)，在袋中任取一枚，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽．问这枚硬币是正品的概率为多少？

39. 设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%(这一事件记为 A_1)，损坏 10%(事件 A_2)，损坏 90%(事件 A_3)，且知 $P(A_1)=0.8,P(A_2)=$

0.15，$P(A_3)=0.05$. 现在从已被运输的物品中随机地取 3 件，发现这 3 件都是好的（这一事件记为 B）. 试求 $P(A_1|B)$，$P(A_2|B)$，$P(A_3|B)$（这里设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率）.

40. 将 A、B、C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 α，而输出为其他一字母的概率都是 $(1-\alpha)/2$. 今将字母串 AAAA，BBBB，CCCC 之一输入信道，输入 AAAA，BBBB，CCCC 的概率分别为 p_1，p_2，p_3（$p_1+p_2+p_3=1$），已知输出为 ABCA，问输入的是 AAAA 的概率是多少？（设信道传输各个字母的工作是相互独立的.）