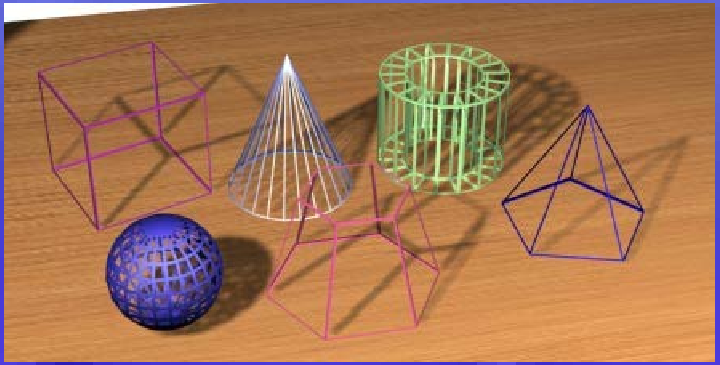
第三章 几何造型技术

几何造型技术是一项研究在计算机中，如何表达物体模型形状的技术。

描述物体的三维模型有三种：**线框模型、表面模型和实体模型**。

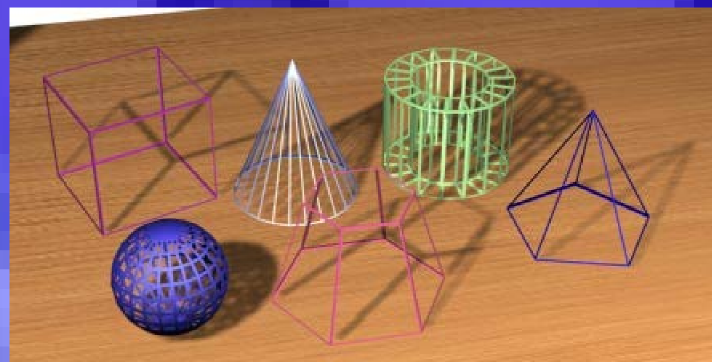
– 线框模型用**顶点**和**棱边**来表示物体。

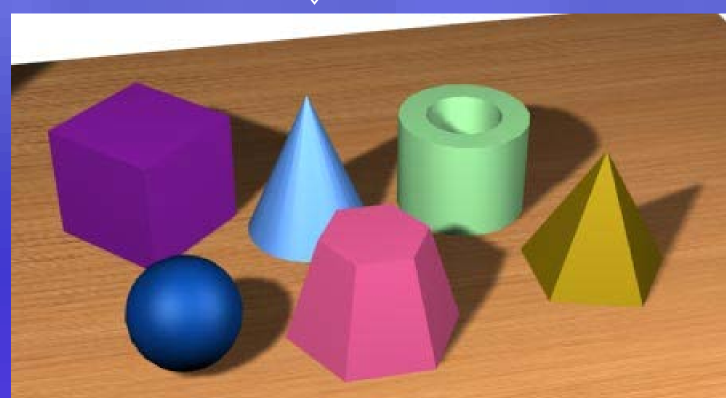


线框模型的问题:

- 由于没有面的信息，它不能表示表面含有曲面的物体;
- 它不能明确地定义给定点与物体之间的关系（点在物体内部、外部或表面上）。

- 表面模型用**面的集合**来表示物体，而用**环**来定义面的**边界**。



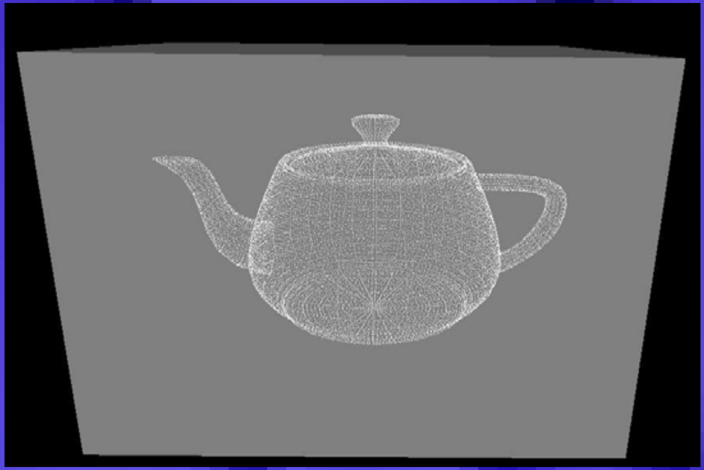
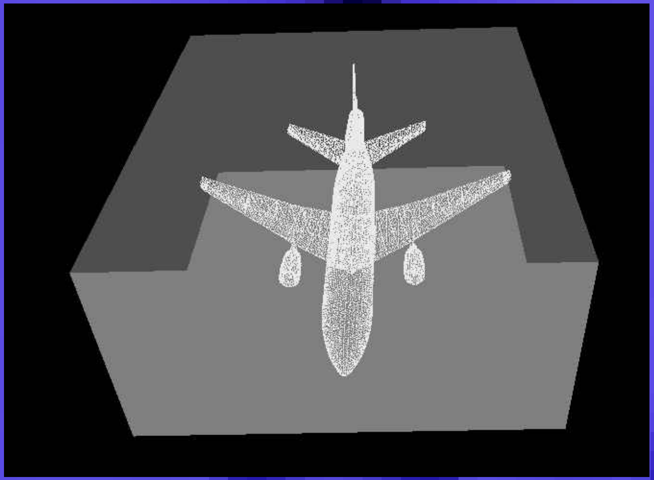
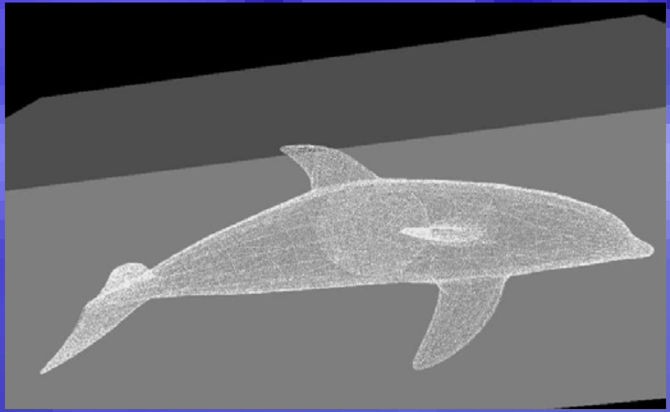
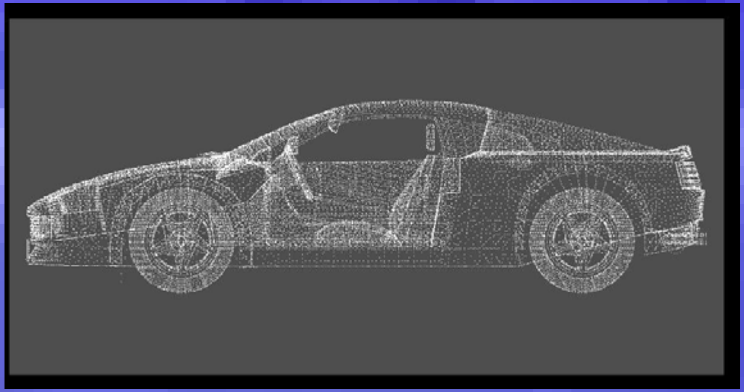
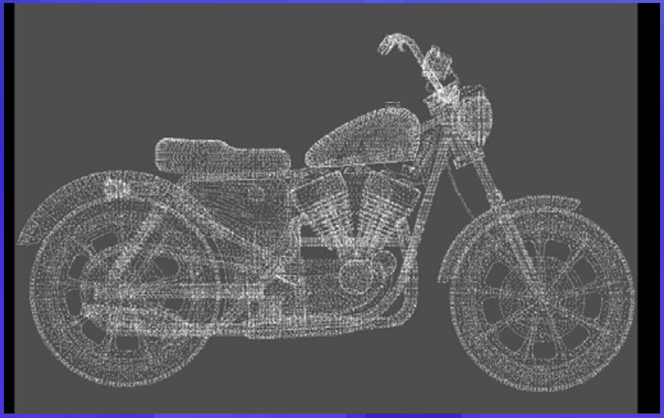
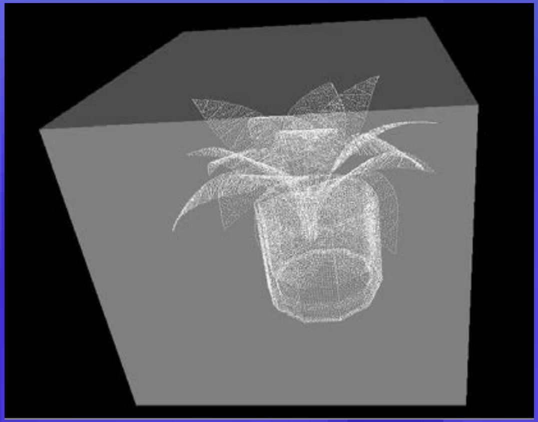


– 表面模型的特点：

- 表面模型能够满足面面求交、线面消隐、明暗色彩图、数控加工等需要。
- 但在该模型中，只有**一张张面**的信息，物体究竟存在于表面的哪一侧，并没有给出明确的定义，无法计算和分析物体的整体性质。如物体的表面积、体积、重心等。
- 也不能将这个物体作为一个整体去考察它与其它物体相互关联的性质，如是否相交等。

- **实体模型**能完整表示物体的所有形状信息，可以无歧义地确定一个点是在物体外部、内部或表面上。是最高级的模型。
  - 这种模型能够进一步满足物性计算、有限元分析等应用的要求。

三维表面模型表示三维物体的信息并不完整，但它能够表达复杂的雕刻曲面，在几何造型中具有重要的地位，对于支持曲面的三维实体模型，表面模型是它的基础。

3.1 参数曲线和曲面

3.1.1 曲线曲面参数表示的基础知识

- 显式表示: $y = f(x)$
- 隐式表示: $f(x,y) = 0$
- 参数表示: $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

显式或隐式表示存在下述**问题**:

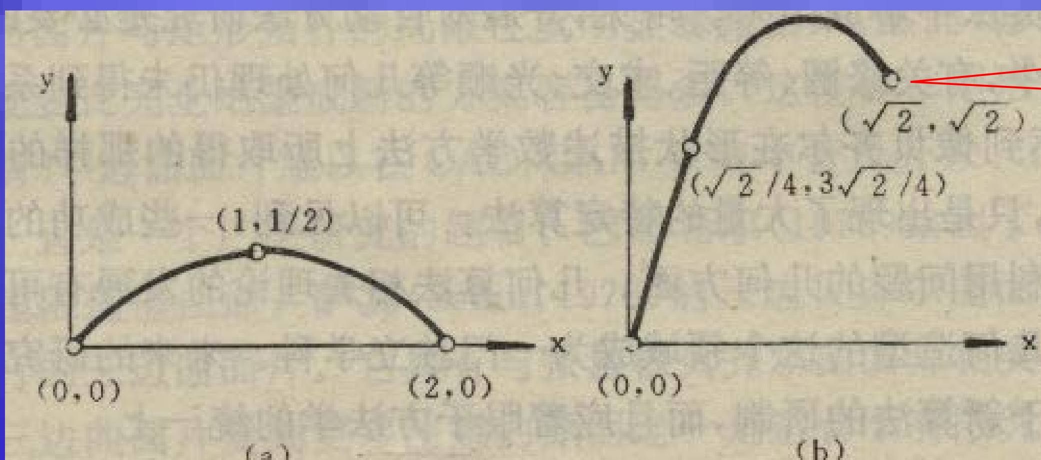
(1) 与坐标轴相关;

(2) 会出现斜率为无穷大的情形(如垂线);

(3) 对于非平面曲线、曲面，难以用常系数的非参数化函数表示;

参数表示的**优点**:

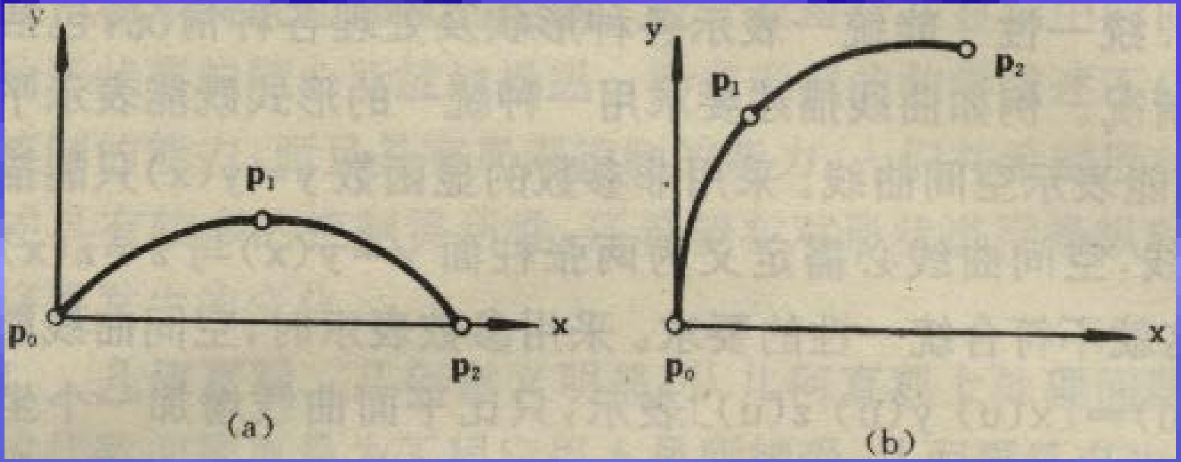
(1) 可以满足**几何不变性**的要求，即曲线形状不依赖坐标系的选择。



三点绕原点逆时针旋转45°后

不具有几何不变性

备注: 欲保持曲线形状不变，虽然可将原曲线上点逐点旋转得到，但曲线上有无限多点，要逐点进行就行不通了。要寻求采用的数学方法具有几何不变性!



具有几何不变性

（2）便于处理斜率为无穷大的情形，不会因此而中断计算。

（3）变量分离的特点使我们可以用数学公式处理几何分量，便于用户把低维空间中曲线、曲面扩展到高维空间去。

（4）规格化的参数变量 $t \in [0, 1]$，使其相应的几何分量是有界的，而不必用另外的参数去定义边界。

（5）可以表示任意复杂的曲线曲面，容易控制形状。在非参数方程中，坐标变量的系数与曲线曲面形状之间的关系不明确，造成形状控制十分困难。

3.1.2 位置矢量、切矢量、法矢量

- 曲线上任一点的**位置矢量**可表示为：$P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$;
- **切矢量**
  - 选择弧长s作为参数，则 $T = \dfrac{dP}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta P}{\Delta s}$ 是**单位切矢**
  - 根据弧长微分公式有：$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

    $$(ds/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2 = |P'(t)|^2$$

    $$\frac{ds}{dt} = |P'(t)| \geq 0$$
  - 所以 $\dfrac{dP}{ds} = \dfrac{dP}{dt} \cdot \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{P'(t)}{|P'(t)|}$ 是单位切矢

– 法矢量

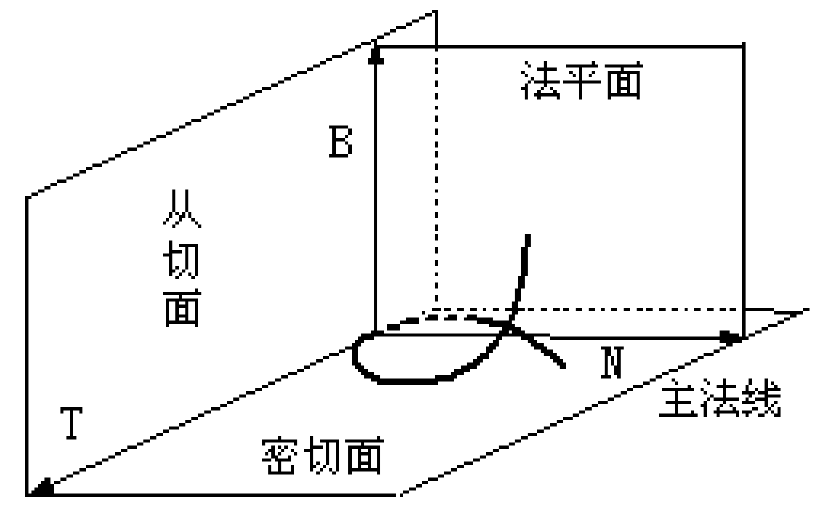
若对曲线上任一点的单位切矢为*T*，因为

$[T(s)]^2=1$，两边对*s*求导矢得：$2T(s).T'(s)=0$，

可见 $\dfrac{dT}{ds}$ 是一个与*T*垂直的矢量。

- 与 $\frac{dT}{ds}$ 平行的单位法矢称为曲线在该点的**主法矢*N***
- 矢量积 $B = T \times N$ 是第三个单位矢量，它垂直于T和N。把平行于矢量B的法矢称为曲线的**副法矢**，B称为单位副法矢量。

- *T*(切矢)、*N*(主法矢)和*B*(副法矢)构成了曲线上的活动坐标架
- *N*、*B*构成的平面称为**法平面**，*N*、*T*构成的平面称为**密切平面**，*B*、*T*构成的平面称为**从切平面**。



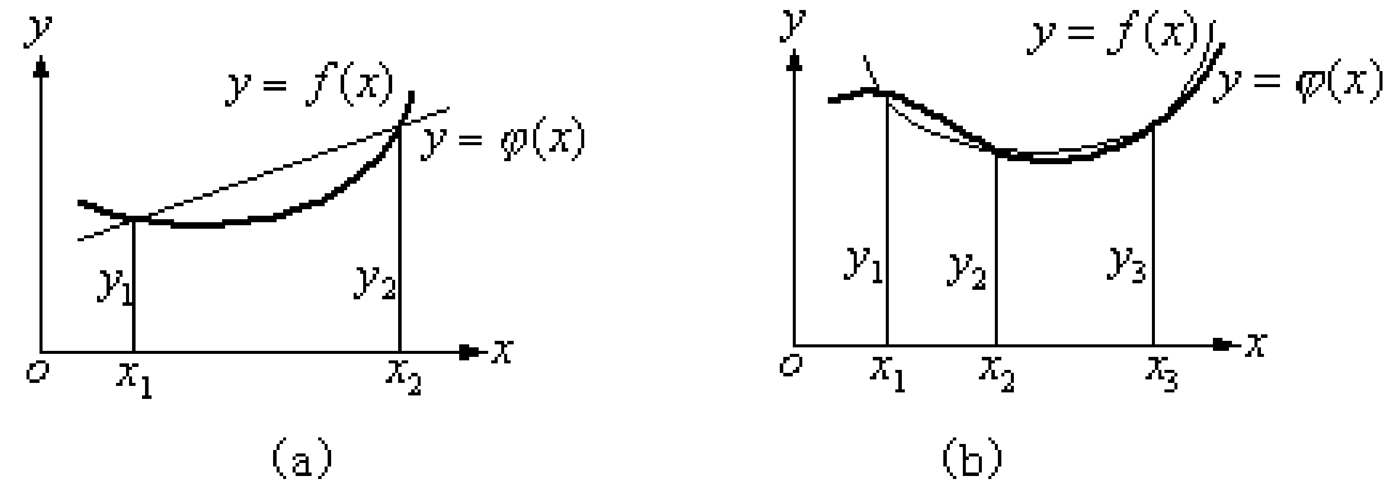
曲线的法矢

3.1.3 插值、逼近、拟合和光顺

给定一组有序的数据点P_i，$i = 0, 1, \ldots, n$，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行**插值**，所构造的曲线称为**插值曲线**。

- **线性插值**：假设给定函数$f(x)$在两个不同点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，用直线段P_1P_2近似代替曲线段P_1P_2，称为的**线性插值**。
- **抛物线插值**：已知在三个互异点x_1, x_2, x_3的函数值为y_1, y_2, y_3，要求构造一个函数

$\varphi(x)=ax^2+bx+c$，使抛物线 $\varphi(x)$ 在结点x_i处与 $f(x)$在x_i处的值y_i相等.



线性插值和抛物插值

- **逼近**：构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点，所构造的曲线为**逼近曲线**。
- 插值和逼近则统称为**拟合**。
- **光顺**(Fairing)指曲线的拐点不能太多。对平面曲线而言，相对光顺的条件是：
  - *a*. 具有二阶**几何连续性**(G^2);
  - *b*. 不存在多余拐点和奇异点;
  - *c*. 曲率变化较小。

尖点或二重点(打圈圈)

3.1.1.4 参数化

- 参数t，在[0, 1]区间的分割可以有无数种。因为P_0、P_1和P_2可对应：

$$[t_0 = 0,\ t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = 1];\ [t_0 = 0,\ t_1 = \frac{1}{3},\ t_2 = 1];$$

其中每个参数值称为**节点**(knot)。

- 对于一组有序的**型值点**P_i，确定一种参数分割t_i，称之对这组**型值点参数化**。

- 参数化常用方法有:
  - **均匀参数化(等距参数化)**
    - 节点在参数轴上呈等距分布，$t_{i+1} = t_i + \text{正常数}$。
  - **累加弦长参数化**

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = t_{i-1} + \left|\Delta P_{i-1}\right|, \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \qquad \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

    - 这种参数法如实反映了型值点按弦长的分布情况，能够克服型值点按弦长分布不均匀的情况下采用均匀参数化所出现的问题。

- **参数区间的规格化**

我们通常将参数区间$[t_{0,}t_n]$规格化为[0, 1]，若$[t_{0,}\ \ t_n]\neq[0,\ 1]$，只需对参数化区间作如下参数变换：

$$u=\frac{t-t_0}{t_n-t_0}\qquad u_i=\frac{t_i-t_0}{t_n-t_0}\quad(i=0,1,2,\cdots,n)$$

$$\Rightarrow\quad u\in[0,1]$$

3.1.6 连续性

- 曲线间连接的光滑度的度量有两种:
  - 函数的**可微性**：组合参数曲线在连接处具有直到*n*阶连续导矢，即*n*阶连续可微，这类光滑度称之为C^n或*n*阶参数连续性。
  - **几何连续性**：组合曲线在连接处满足不同于C^n的某一组约束条件，称为具有*n*阶几何连续性，简记为G^n。

- 若要求在结合处达到 G^0 连续或 C^0 连续，即两曲线在结合处位置连续：$P(1)=Q(0)$
- 若要求在结合处达到 G^1 连续，就是说两条曲线在结合处在满足 G^0 连续的条件下，**切矢方向连续**，即存在常数 $\alpha>0$，使得 $Q'(0)=\alpha P'(1)$

当 $\alpha=1$ 时，G^1 连续就成为 C^1 连续。

我们已经看到，C^1 连续保证 G^1 连续，C^2 连续能保证 G^2 连续，但反过来不行。也就是说：C^n 连续的条件比 G^n 连续的条件要苛刻。