离散数学(胡海涛版)

第一章

1. 判断下列句子是否为命题？若是命题说明是真命题还是假命题。

（1）3是正数吗？

（2）*x*＋1=0。

（3）请穿上外衣。

（4）2＋1＝0。

（5）任一个实数的平方都是正实数。

（6）不存在最大素数。

（7）明天我去看电影。

（8）9＋5≤12。

（9）实践出真知。

（10）如果我掌握了英语、法语，那么学习其他欧洲语言就容易多了。

**解：**（1）、（2）、（3）不是命题。

（4）、（8）是假命题。

（5）、（6）、（9）、（10）是真命题。

（7）是命题，只是现在无法确定真值。

2. 设*P*表示命题“天下雪”，*Q*表示命题“我将去书店”，*R*表示命题“我有时间”，以符号形式写出下列命题。

（1）如果天不下雪并且我有时间，那么我将去书店。

（2）我将去书店，仅当我有时间。

（3）天不下雪。

（4）天下雪，我将不去书店。

**解：**

（1）（┐P∧R）→Q。

（2）Q→R。

（3）┐P。

（4）P→┐Q。

3. 将下列命题符号化。

（1）王皓球打得好，歌也唱得好。

（2）我一边看书，一边听音乐。

（3）老张和老李都是球迷。

（4）只要努力学习，成绩会好的。

（5）只有休息好，才能工作好。

（6）如果*a*和*b*是偶数，那么*a*+*b*也是偶数。

（7）我们不能既游泳又跑步。

（8）我反悔，仅当太阳从西边出来。

（9）如果*f*(*x*)在点*x*0处可导，则*f*(*x*)在点*x*0处可微。反之亦然。

（10）如果张老师和李老师都不讲这门课，那么王老师就讲这门课。

（11）四边形*ABCD*是平行四边形，当且仅当*ABCD*的对边平行。

（12）或者你没有给我写信，或者信在途中丢失了。

**解：**

（1）P：王皓球打得好，Q：王皓歌唱得好。原命题可符号化：P∧Q。

（2）P：我看书，Q：我听音乐。原命题可符号化：P∧Q。

（3）P：老张是球迷，Q：老李是球迷。原命题可符号化：P∧Q。

（4）P：努力学习，Q：成绩会好。原命题可符号化：P→Q。

（5）P：休息好，Q：工作好。原命题可符号化：Q→P。

（6）P：*a*是偶数，Q：*b*是偶数，R：*a*+*b*是偶数。原命题可符号化：（P∧Q）→R。

（7）P：我们游泳，Q：我们跑步。原命题可符号化：┐（P∧Q）。

（8）P：我反悔，Q：太阳从西边出来。原命题可符号化：P→Q。

（9）P：*f*(*x*)在点*x*0处可导， Q：*f*(*x*)在点*x*0处可微。原命题可符号化：P→← Q。

（10）P：张老师讲这门课，Q：李老师讲这门课，R：王老师讲这门课。原命题可符号化：（┐P∧┐Q）→R。

（11）P：四边形*ABCD*是平行四边形，Q：四边形*ABCD*的对边平行。原命题可符号化：P→← Q。

（12）P：你给我写信，Q：信在途中丢失了。原命题可符号化：┐P←∣ → （P∧Q）。

4. 判断下列公式哪些是合式公式，哪些不是合式公式。

（1）(*Q*→*R*∧*S*)

（2）(*P*→← (*R*→*S*))

（3）((┐*P*→*Q*) →(*Q*→*P*)))

（4）(*RS*→***F***)

（5）((*P*→(*Q*→*R*))→((*P*→*Q*) →(*P*→*R*)))

**解：**

（1）、（2）、（5）是合式公式，（3）、（4）不是合式公式。

5. 否定下列命题：

（1） 桂林处处山清水秀。

（2） 每一个自然数都是偶数。

**解：**

（1）桂林并非处处山清水秀。

（2）并不是每一个自然数都是偶数。或：有些自然数不是偶数。

6. 给出下述每一个命题的逆命题、否命题和逆否命题。

（1） 如果天下雨，我将不去。

（2） 仅当你去我才不去。

（3） 如果Δ=*b*2−4*ac*<0，则方程*ax*2+*bx*+*c*=0无实数解。

（4） 如果我不获得奖学金，我就不能完成学业。

**解：**

（1）逆命题：如果我不去，那么天下雨。

否命题：如果天不下雨，我就去。

逆否命题：如果我去，那么天不下雨。

（2）逆命题：如果你去，我将不去。

否命题：如果我去，你将不去。

逆否命题：如果你不去，我就去。

（3）逆命题：如果方程*ax*2+*bx*+*c*=0无实数解，则Δ=*b*2−4*ac*<0。

否命题：如果Δ=*b*2−4*ac*≥0，则方程*ax*2+*bx*+*c*=0有实数解。

逆否命题：如果方程*ax*2+*bx*+*c*=0有实数解，则Δ=*b*2−4*ac*≥0。

（4）逆命题：如果我不能完成学业，那么我没有获得奖学金。

否命题：如果我获得奖学金，我就能完成学业。

逆否命题：如果我就能完成学业，那么我就获得奖学金。

7. 求下列各式的真值表。

（1）*P*→(*R*∨*S*)

（2）(*P*∧*R*) ∨(*P*→*Q*)

（3）(*P*∨*Q*) →← (*Q*∨*P*)

（4）(*P*∨┐*Q*) ∧*R*

（5）(*P*→(*Q*→*R*))→((*P*→*Q*) →(*P*→*R*))

**解：**

（1）*P*→(*R*∨*S*)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *R* | *S* | *R*∨*S* | *P*→(*R*∨*S*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

（2）(*P*∧*R*) ∨(*P*→*Q*)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *P*∧*R* | *P*→*Q* | (*P*∧*R*) ∨(*P*→*Q*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

（3）(*P*∨*Q*) →← (*Q*∨*P*)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *P*∨*Q* | *Q*∨*P* | (*P*∨*Q*) →← (*Q*∨*P*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

（4）(*P*∨┐*Q*) ∧*R*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | ┐*Q* | *P*∨┐*Q* | (*P*∨┐*Q*) ∧*R* |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

（5）(*P*→(*Q*→*R*))→((*P*→*Q*) →(*P*→*R*))

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *Q*→*R* | *P*→(*Q*→*R*) | *P*→*Q* | *P*→*R* | (*P*→*Q*) →(*P*→*R*) | 原公式 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

8. 用真值表判断下列公式的类型：

(1) *P*∨┐*Q*→*Q*

(2) ((*P*→*Q*)∨(*R*→*S*))→((*P*∨*R*)→(*Q*∨*S*))

**解：**

(1) *P*∨┐*Q*→*Q*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | ┐*Q* | *P*∨┐*Q* | *P*∨┐*Q*→*Q* |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

（1）为可满足式。

(2) ((*P*→*Q*)∨(*R*→*S*))→((*P*∨*R*)→(*Q*∨*S*))

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *S* | *P*→*Q* | *R*→*S* | (*P*→*Q*)∨(*R*→*S*) | *P*∨*R* | *Q*∨*S* | (*P*∨*R*)→(*Q*∨*S*) | 原公式 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

（2）为可满足式。

9. 证明下列等价式。

（1）*P*→(*Q*→*P*) ⇔┐*P*→(*P*→┐*Q*)

（2）┐(*P*→← *Q*)⇔ (*P*∨*Q*) ∧┐(*P*∧*Q*)

（3）┐(*P*→*Q*)⇔ *P*∧┐*Q*

（4）┐(*P*→← *Q*)⇔(*P*∧┐*Q*) ∨ (┐*P*∧*Q*)

（5）*P*→(*Q*∨*R*) ⇔(*P*∧┐*Q*) →*R*

（6）(*P*→*R*) ∧(*Q*→*R*)⇔ (*P*∨*Q*) →*R*

（7）((*P*∧*Q*)→*R*) ∧(*Q*→(*S*∨*R*))⇔ (*Q*∧(*S*→*P*)) →*R*

**证明：**

（1）*P*→(*Q*→*P*) ⇔┐*P*∨(┐*Q*∨*P*) ⇔*P*∨(┐*P*∨┐*Q*)⇔┐*P*→(*P*→┐*Q*)

（2）┐(*P*→← *Q*)⇔┐((*P*∧*Q*) ∨(┐*P*∧┐*Q*)) ⇔┐(*P*∧*Q*) ∧┐(┐*P*∧┐*Q*)) ⇔ (*P*∨*Q*) ∧┐(*P*∧*Q*)

（3）┐(*P*→*Q*)⇔ ┐(┐*P*∨*Q*) ⇔*P*∧┐*Q*

（4）┐(*P*→← *Q*)⇔┐((*P*→*Q*)∧(*Q*→*P*)) ⇔┐ (┐*P*∨*Q*) ∨┐ (┐*Q*∨*P*) ⇔(*P*∧┐*Q*) ∨ (┐*P*∧*Q*)

（5）*P*→(*Q*∨*R*) ⇔┐*P*∨(*Q*∨*R*) ⇔┐(*P*∧┐*Q*) ∨*R* ⇔(*P*∧┐*Q*) →*R*

（6）(*P*→*R*) ∧(*Q*→*R*)⇔ (┐*P*∨*R*) ∧(┐*Q*∨*R*) ⇔ (┐*P*∧┐*Q*)∨*R*⇔┐(*P*∨*Q*)∨*R*⇔ (*P*∨*Q*) →*R*

（7）((*P*∧*Q*)→*R*) ∧(*Q*→(*S*∨*R*))⇔ ┐(*P*∧*Q*) ∨*R*) ∧(┐*Q*∨(*S*∨*R*)) ⇔┐*Q*∨(┐*P*∧*S*)∨*R*

⇔┐(*Q*∧(┐*S*∨*P*)) ∨*R* ⇔┐(*Q*∧(*S*→*P*)) ∨*R* ⇔ (*Q*∧(*S*→*P*)) →*R*

10. 使用恒等式证明下列各式，并写出它们对偶的公式。

（1）(┐(┐*P*∨┐*Q*)∨┐(┐*P*∨*Q*)) ⇔ *P*

（2）(*P*∨┐*Q*) ∧(*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨┐*Q*)⇔┐(┐*P*∨*Q*)

（3）*Q*∨┐((┐*P*∨*Q*)∧*P*) ⇔***T***

**证明：**

（1）(┐(┐*P*∨┐*Q*)∨┐(┐*P*∨*Q*))⇔ (*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*Q*)⇔*P*∧(*Q*∨┐*Q*) ⇔*P*∧***T***⇔*P*

（2）(*P*∨┐*Q*) ∧(*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨┐*Q*)⇔*P*∨(┐*Q*∧*Q*)∧(┐*P*∨┐*Q*)⇔*P*∨***F***∧(┐*P*∨┐*Q*) ⇔*P*∧(┐*P*∨┐*Q*)⇔(*P*∧┐*P*)∨(*P*∧┐*Q*)⇔***F***∨(*P*∧┐*Q*)⇔(*P*∧┐*Q*) ⇔┐(┐*P*∨*Q*)

（3）*Q*∨┐((┐*P*∨*Q*)∧*P*)⇔*Q*∨(┐(┐*P*∨*Q*)∨┐*P*)⇔ *Q*∨(*P*∧┐*Q*)∨┐*P*

⇔( *Q*∨┐*P*∨*P* ) ∧(*Q*∨┐*P*∨┐*Q*)⇔ ***T***∨***T***⇔***T***

11. 试证明{∨}，{→}不是全功能联结词集合。

**证明：**

若{∨}是最小联结词组，则 ┐*P*⇔( *P*∨...)

对所有命题变元指派***T***，则等价式左边为***F***，右边为***T***，等价式矛盾。

若{→}是最小联结词组，则 ┐*P*⇔ *P*→ ( *P*→( *P*→...)...)

对所有命题变元指派***T***，则等价式左边为***F***，右边为***T***，等价式矛盾。

12. 证明下列蕴涵式：

（1）*P*∧*Q*⇒(*P*→*Q*)

（2）*P* ⇒(*Q*→*P*)

（3）(*P*→(*Q*→*R*)) ⇒ ( *P*→*Q*) →(*P*→*R*)

**证明：**

（1）*P*∧*Q*→(*P*→*Q*)⇔┐( *P*∧*Q*)∨(*P*→*Q*)⇔ (┐*P*∨┐*Q*)∨(┐*P*∨*Q*)⇔┐*P*∨(┐*Q*∨*Q*)⇔***T***

因为*P*∧*Q*→(*P*→*Q*)为永真式，所以*P*∧*Q*⇒(*P*→*Q*)。

（2）*P* →( *Q*→*P*) ⇔┐*P*∨(┐*Q*∨*P*) ⇔┐*Q*∨(┐*P*∨*P*) ⇔***T***

因为*P* →( *Q*→*P*)为永真式，所以*P* ⇒(*Q*→*P*)。

（3）(*P*→(*Q*→*R*)) →(( *P*→*Q*) →(*P*→*R*))

⇔ ┐(┐*P*∨(┐*Q*∨*R*))∨(┐(┐*P*∨*Q*) ∨(┐*P*∨*R*))

⇔(*P*∧(*Q*∧┐*R*))∨((*P*∧┐*Q*) ∨(┐*P*∨*R*))

⇔ (*P*∧*Q*∧┐*R*)∨((*P*∨┐*P*∨*R*)∧(┐*Q*∨┐*P*∨*R*))

⇔(*P*∧*Q*∧┐*R*)∨(┐*P*∨┐*Q*∨*R*)

⇔((*P*∨(┐*P*∨┐*Q*∨*R*))∧(*Q*∨(┐*P*∨┐*Q*∨*R*))∧(┐*R*∨(┐*P*∨┐*Q*∨*R*) )⇔ ***T***

因为(*P*→(*Q*→*R*)) →(( *P*→*Q*) →(*P*→*R*))为永真式，所以(*P*→(*Q*→*R*)) ⇒ ( *P*→*Q*) →(*P*→*R*)。

13. 对下列各公式，试仅用↑或↓表示。

（1）┐*P*

（2）*P*∧*Q*

（3）*P*∨*Q*

（4）*P*→*Q*

**解：**

（1）┐*P*⇔┐(*P*∧*P*)⇔ *P*↑*P*

（2）*P*∧*Q*⇔(*P*↑*Q*)↑(*P*↑*Q*)

（3）*P*∨*Q*⇔┐(┐*P*∧┐*Q*) ⇔(┐*P*↑┐*Q*) ⇔(*P*↑*P*)↑(*Q*↑*Q*)

（4）*P*→*Q*⇔┐*P*∨*Q*⇔(*P*↑*P*)∨*Q* ⇔((*P*↑*P*)↑(*P*↑*P*))↑(*Q*↑*Q*)

14. 将下列公式化成与之等值且仅含{┐，→}中联结词的公式。

（1）(*P*→┐*Q*)∧*R*

（2）*P* →← (*Q*∧*R*)∨*P*

**解：**

（1）(*P*→┐*Q*)∧*R*⇔(┐*P*∨┐*Q*)∧*R*⇔(┐*P*∧*R*)∨(┐*Q*∧*R*)⇔┐(*P*∨┐*R*)∨┐(*Q*∨┐*R*)

⇔┐(*R*→*P*)∨┐(*R*→*Q*)⇔(*R*→*P*)→┐(*R*→*Q*)

（2）*P* →← (*Q*∧*R*)∨*P*⇔(*P*→((*Q*∧*R*)∨*P*))∧(((*Q*∧*R*)∨*P*)→*P*)⇔(┐*P*∨((*Q*∧*R*)∨*P*))∧(┐((*Q*∧*R*)∨*P*)∨*P*)⇔ ***T***∧(((┐*Q*∨┐*R*)∧┐*P*)∨*P*)⇔((┐*Q*∨┐*R*)∨*P*)⇔ *P*∨(┐*Q*∨┐*R*)⇔*P*∨(*Q*→┐*R*)⇔ ┐*P*→(*Q*→┐*R*)

15. 如果*A*(*P*，*Q*，*R*)由*R*↑(*Q*∧┐(*R*↓*P*))给出，求它的对偶*A*\*(*P*，*Q*，*R*)，并求出与*A*及*A*\*等价且仅包含联接词“∧”，“∨”及“┐”的公式。

**解：**

*A*\*(*P*，*Q*，*R*)：*R*↓ (*Q*∨┐(*R*↑*P*))

*R*↑(*Q*∧┐(*R*↓*P*))⇔┐(*R*∧(*Q*∧(*R*∨*P*)))⇔┐*R*∨┐*Q*∨(┐*R*∧┐*P*)

*R*↓ (*Q*∨┐(*R*↑*P*))⇔┐*R*∧┐*Q*∧(┐*R*∨┐*P*)

16. 把*P*↑*Q*表示为只含有“↓”的等价公式。

**解：***P*↑*Q*⇔┐(*P*∧*Q*)⇔┐((*P*↓*P*)↓(*Q*↓*Q*))⇔ ((*P*↓*P*)↓(*Q*↓*Q*))↓((*P*↓*P*)↓(*Q*↓*Q*))

17. 证明：

（1）┐(*P*↑*Q*)⇔┐*P*↓┐*Q*

（2）┐(*P*↓*Q*)⇔┐*P*↑┐*Q*

**证明：**

（1）┐(*P*↑*Q*)⇔┐(┐(*P*∧*Q*)) ⇔(*P*∧*Q*)⇔┐(┐*P*∨┐*Q*)⇔┐*P*↓┐*Q*

（2）┐(*P*↓*Q*)⇔┐(┐(*P*∨*Q*)) ⇔(*P*∨*Q*)⇔┐(┐*P*∧┐*Q*)⇔┐*P*↑┐*Q*

18. 求公式*P*∧(*P*→*Q*)的析取范式和合取范式。

**解：***P*∧(*P*→*Q*) ⇔ *P*∧(┐*P*∨*Q*) 合取范式

⇔(*P*∧┐*P*)∨(*P*∧*Q*) 析取范式

19. 求下列公式的主析取范式和主合取范式。

（1）(┐*P*→*Q*)→(┐*Q*∨*P*)

（2）(*P*→ (*P*∨*Q*))∨*R*

（3）(*P*→ *Q*∧*R*)∧(┐*P*→ (┐*Q*∧┐*R*))

**解：**

（1）真值表法

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | ┐*P*→*Q* | ┐*Q*∨*P* | (┐*P*→*Q*)→(┐*Q*∨*P*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

主析取范式为：(*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*Q*)∨(┐*P*∧┐*Q*)

主合取范式为：*P*∨┐*Q*

公式化归法

(┐*P*→*Q*)→(┐*Q*∨*P*)⇔┐(*P*∨*Q*)∨(┐*Q*∨*P*)⇔ (┐*P*∧┐*Q*)∨(┐*Q*∨*P*)

⇔(┐*P*∨┐*Q*∨*P*)∧(┐*Q*∨┐*Q*∨*P*) ⇔*P*∨┐*Q* 主合取范式

⇔(*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*Q*)∨(┐*P*∧┐*Q*) 主析取范式

（2）真值表法(*P*→ (*P*∨*Q*))∨*R*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *P*∨*Q* | *P*→ (*P*∨*Q*) | (*P*→ (*P*∨*Q*))∨*R* |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

原式为永真式，其主析取范式为所有小项的析取，即：

*m*000∨*m*001∨*m*010∨*m*011∨*m*100∨*m*101∨*m*110∨*m*111

不能表示为主合取范式。

公式化归法

(*P*→ (*P*∨*Q*))∨*R*⇔(┐*P*∨(*P*∨*Q*))∨*R*⇔***T***∨*R*⇔ ***T***

（3）真值表法(*P*→ *Q*∧*R*)∧((┐*P*→ (┐*Q*∧┐*R*))

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *Q*∧*R* | *P*→ *Q*∧*R* | ┐*Q*∧┐*R* | ┐*P*→ (┐*Q*∧┐*R*) | 原公式 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

主析取范式为：(*P*∧*Q*∧*R*)∨(┐*P*∧┐*Q*∧┐*R*)⇔*m*111∨*m*000⇔*m*7∨*m*0

主合取范式为：*M*1∧*M*2∧*M*3∧*M*4∧*M*5∧*M*6⇔ *M*001∧*M*010∧*M*011∧*M*100∧*M*101∧*M*110⇔(*P*∨*Q*∨┐*R*)∧(*P*∨┐*Q*∨*R*)∧(*P*∨┐*Q*∨┐*R*)∧(┐*P*∨*Q*∨*R*)∧(┐*P*∨*Q*∨┐*R*)∧(┐*P*∨┐*Q*∨*R*)

20. 求下列公式的主析取范式和主合取范式，并指出该公式的类型。

（1）(┐*P*∨┐*Q*)→(*P*→← ┐*Q*)

（2）*Q*∧(*P*∨┐*Q*)

（3）*P*∨(┐*P*→(*Q*∨(┐*Q*→*R*)))

（4）(*P*→(*Q*∧*R*))∧(┐*P*→(┐*Q*∧┐*R*))

（5）*P*→(*P*∧(*Q*→ *P*))

（6）(*Q*→*P*)∧(┐*P*∧*Q*)

**解：**

（1）

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | ┐*P*∨┐*Q* | *P*→← ┐*Q* | (┐*P*∨┐*Q*)→(*P*→← ┐*Q*) |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

主析取范式为：(*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*Q*)∨(┐*P*∧*Q*)

主合取范式为：*P*∨*Q*

公式为可满足式。

（2）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *P*∨┐*Q* | *Q*∧(*P*∨┐*Q*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

主析取范式为：*P*∧*Q*

主合取范式为：(┐*P*∨*Q*)∧(*P*∨┐*Q*)∧(*P*∨*Q*)

公式为可满足式。

（3）*P*∨(┐*P*→(*Q*∨(┐*Q*→*R*)))⇔ *P*∨(*P*∨(*Q*∨(*Q*∨*R*)))

⇔ *P*∨*Q*∨*R* 主合取范式

⇔ *M*000⇔*M*0⇔ *m*1∨*m*2∨*m*3∨*m*4∨*m*5∨*m*6∨*m*7 主析取范式

公式为可满足式。

（4）(*P*→(*Q*∧*R*))∧(┐*P*→(┐*Q*∧┐*R*))⇔(┐*P*∨(*Q*∧*R*))∧(*P*∨(┐*Q*∧┐*R*))⇔(┐*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨*R*)∧(*P*∨┐*Q*)∧(*P*∨┐*R*)⇔(┐*P*∨*Q*∨*R*)∧(┐*P*∨*Q*∨┐*R*)∧(┐*P*∨┐*Q*∨┐*R*)∧(*P*∨┐*Q*∨*R*)∧(*P*∨┐*Q*∨┐*R*)∧(*P*∨*Q*∨┐*R*) ⇔ *M*100∧*M*101∧*M*111∧*M*010∧*M*011∧*M*001⇔*M*4∧*M*5∧*M*7∧*M*2∧*M*3∧*M*1 主合取范式

⇔ *m*0∨*m*6⇔ *m*000∨*m*110 主析取范式

公式为可满足式。

（5）*P*→(*P*∧(*Q*→ *P*))⇔┐*P*∨(*P*∧(┐*Q*∨*P*))⇔(┐*P*∨*P*)∧(┐*P*∨(┐*Q*∨*P*))⇔***T***

主析取范式为：*m*0∨*m*1∨*m*2∨*m*3

公式为永真式。

（6）(*Q*→*P*)∧(┐*P*∧*Q*)⇔(┐*Q*∨*P*)∧(┐*P*∧*Q*)⇔(┐*Q*∧┐*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*P*∧*Q*) ⇔***F***

主合取范式为：*M*0∧*M*1∧*M*2∧*M*3

公式为永假式。

21. 用将合式公式化为范式的方法证明下列各题中两式是等价的。

（1）(*P*→*Q*)∧(*P*→*R*) ，*P*→(*Q*∧*R*)

（2）(*P*→*Q*)→(*P*∧*Q*)，(┐*P*→*Q*)∧(*Q*→*P*)

（3）*P*∧*Q*∧(┐*P*∨┐*Q*)，┐*P*∧┐*Q*∧(*P*∨*Q*)

（4）*P*∨(*P*→(*P*∧*Q*))，┐*P*∨┐*Q*∨(*P*∧*Q*)

**证明：**

（1）(*P*→*Q*)∧(*P*→*R*) ⇔(┐*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨*R*)

*P*→(*Q*∧*R*) ⇔┐*P*∨(*Q*∧*R*) ⇔(┐*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨*R*)

（2）(*P*→*Q*)→(*P*∧*Q*) ⇔┐(┐*P*∨*Q*)∨(*P*∧*Q*)⇔(*P*∧┐*Q*)∨(*P*∧*Q*)⇔*P*∧(┐*Q*∨*Q*)⇔*P*

(┐*P*→*Q*)∧(*Q*→*P*) ⇔(*P*∨*Q*)∧(┐*Q*∨*P*)⇔*P*∨(*Q*∧┐*Q*)⇔ *P*

（3）*P*∧*Q*∧(┐*P*∨┐*Q*) ⇔(*P*∧*Q*∧┐*P*)∨(*P*∧*Q*∧┐*Q*) ⇔***F***

┐*P*∧┐*Q*∧(*P*∨*Q*) ⇔(┐*P*∧┐*Q*∧*P*)∨(┐*P*∧┐*Q*∧*Q*) ⇔***F***

（4）*P*∨(*P*→(*P*∧*Q*)) ⇔ *P*∨(┐*P*∨(*P*∧*Q*)) ⇔***T***∨(*P*∧*Q*) ⇔***T***

┐*P*∨┐*Q*∨(*P*∧*Q*) ⇔(┐*P*∨┐*Q*∨*P*)∧(┐*P*∨┐*Q*∨*Q*) ⇔***T***

22. 用推理规则证明以下各式。

（1）┐(*P*∧┐*Q*)，┐*Q*∨*R*，┐*R* ⇒┐*P*

（2）*A*→(*B*∨*C*)，(*D*∨*E*)→*A*，*D*∨*E* ⇒ *B*∨*C*

（3）*B*∧*C*，(*B* →← *C*)→(*D*∨*E*)⇒*D*∨*E*

（4）*P*→*Q*，(┐*Q*∨*R*)∧┐*R*，┐(┐*P*∧*S*)⇒┐*S*

**证明：**

（1）┐(*P*∧┐*Q*)，┐*Q*∨*R*，┐*R* ⇒┐*P*

**证明：**

(1) ┐*R* P

(2) ┐*Q*∨*R* P

(3) ┐*Q* T(1)(2) I

(4) ┐(*P*∧┐*Q*)P

(5) ┐*P*∨*Q* T(4) E

(6) ┐*P* T(3)(5) I

（2）*A*→(*B*∨*C*)，(*D*∨*E*)→*A*，*D*∨*E* ⇒ *B*∨*C*

**证明：**

(1) *D*∨*E* P

(2) (*D*∨*E*)→*A* P

(3) *A* T(1)(2) I

(4) *A*→(*B*∨*C*)P

(5) *B*∨*C* T(3)(4) I

（3）*B*∧*C*，(*B* →← *C*)→(*D*∨*E*)⇒*D*∨*E*

**证明：**

(1) *B*∧*C* P

(2) *B* →← *C* T(1) I

(3) (*B* →← *C*)→(*D*∨*E*)P

(4) *D*∨*E* T(2)(3) I

（4）*P*→*Q*，(┐*Q*∨*R*)∧┐*R*，┐(┐*P*∧*S*)⇒┐*S*

**证明：**

(1) (┐*Q*∨*R*)∧┐*R* P

(2) ┐*Q*∨*R* T(1) I

(3) ┐*R* T(1) I

(4) ┐*Q* T(2)(3) I

(5) ┐(┐*P*∧*S*)P

(6) *S*→ *P* T(5) E

(7) *P*→*Q* P

(8) *S*→*Q* T(6) (7) I

(9) ┐*Q*→┐*S* T(8) E

(10) ┐*S*  T(4) (8) I

23. 仅用规则**P**和**T**，推证以下公式。

（1）┐*A*∨*B*，*C*→┐*B*⇒ *A*→┐*C*

（2）*A*→(*B*→*C*)，(*C*∧*D*)→*E*，┐*F*→(*D*∧┐*E*) ⇒ *A*→(*B*→*F*)

（3）*A*∨*B*→*C*∧*D*，*D*∨*E*→*F*，⇒ *A*→*F*

（4）*A*→(*B*∧*C*)，┐*B*∨*D*，(*E*→┐*F*) →┐*D*，*B*→(*A*∧┐*E*)⇒*B*→*E*

（5）(*A*→*B*)∧(*C*→*D*)，(*B*→*E*)∧(*D*→*F*)，┐(*E*∧*F*)，*A*→*C* ⇒┐*A*

**证明：**

（1）┐*A*∨*B*，*C*→┐*B*⇒ *A*→┐*C*

**证明：**

(1) ┐*A*∨*B* P

(2) *A*→*B* T(1) E

(3) *C*→┐*B* P

(4) *B*→┐*C* T(3) E

(5) *A*→┐*C* T(2) (4) I

（2）*A*→(*B*→*C*)，(*C*∧*D*)→*E*，┐*F*→(*D*∧┐*E*) ⇒ *A*→(*B*→*F*)

**证明：**

(1) *A*→(*B*→*C*) P

(2) ┐*A*∨┐*B*∨*C* T(1) E

(3) (*A*∧*B*)→*C* T(2) E

(4) (*C*∧*D*)→*E* P

(5) *C*→┐(*D*∧┐*E*) T(4) E

(6) (*D*∧┐*E*) →┐*C* T(5) E

(7) ┐*F*→(*D*∧┐*E*)P

(8) ┐*F*→┐*C* T(6) (7) I

(9) *C*→*F* T(8) E

(10) (*A*∧*B*)→*F* T(3) (9) I

(11) ┐*A*∨┐*B*∨*F* T(10) E

(12) *A*→(*B*→*F*) T(11) E

（3）*A*∨*B*→*C*∧*D*，*D*∨*E*→*F*⇒ *A*→*F*

**证明：**

(1) *A*∨*B*→*C*∧*D* P

(2) *A*∨*B*→*D* T(1) I

(3) *D*∨*E*→*F* P

(4) *D*→*F* T(3) I

(5) *A*∨*B*→*F* T(2)(4) I

(6) *A*→*F* T(5) I

（4）*A*→(*B*∧*C*)，┐*B*∨*D*，(*E*→┐*F*) →┐*D*，*B*→(*A*∧┐*E*)⇒*B*→*E*

**证明：**

(1) ┐*B*∨*D* P

(2) *B*→*D* T(1)E

(3) (*E*→┐*F*) →┐*D* P

(4) *D*→┐(*E*→┐*F*)T(3) E

(5) *D*→(*E*∧*F*)T(4) E

(6) *B*→(*E*∧*F*) T(2)(5) I

(7) *B*→*E* T(6) I

（5）(*A*→*B*)∧(*C*→*D*)，(*B*→*E*)∧(*D*→*F*)，┐(*E*∧*F*)，*A*→*C* ⇒┐*A*

**证明：**

(1) (*A*→*B*)∧(*C*→*D*)P

(2) *A*→*B* T(1) I

(3) *C*→*D* T(1) I

(4) (*B*→*E*)∧(*D*→*F*) P

(5) *B*→*E* T(4) I

(6) *D*→*F* T(4) I

(7) *A*→*E* T(2) (5) I

(8) *C*→*F* T(3) (6) I

(9) *A*→*C* P

(10) *A*→*F* T(8) (9) I

(11) *A*→(*E*∧*F*) T(7) (10) I

(12) ┐(*E*∧*F*)→┐*A* T(11) E

(13) ┐(*E*∧*F*) P

(14) ┐*A*  T(12) (13) I

24. 用**CP**规则推证上题中的（1）、（2）、（3）和（4）式。

**证明：**

（1）┐*A*∨*B*，*C*→┐*B*⇒ *A*→┐*C*

**证明：**

(1) *A* P（附加前提）

(2) ┐*A*∨*B* P

(3) *B* T(1) (2) I

(4) *C*→┐*B* P

(5) ┐*C* T(3) (4) I

(6) *A*→┐*C* T(1) (5) CP

（2）*A*→(*B*→*C*)，(*C*∧*D*)→*E*，┐*F*→(*D*∧┐*E*) ⇒ *A*→(*B*→*F*)

**证明：**

(1) *A* P（附加前提）

(2) *A*→(*B*→*C*)P

(3) *B*→*C* T(1) (2) I

(4) (*C*∧*D*)→*E* P

(5) *C*→┐(*D*∧┐*E*)T(4) E

(6) *B*→┐(*D*∧┐*E*)T(3)(5) I

(7) ┐*F*→(*D*∧┐*E*)P

(8) ┐(*D*∧┐*E*) →*F* T(7) E

(9) *B*→*F* T(6)(8) I

(10) *A*→(*B*→*F*) CP(1)(9)

（3）*A*∨*B*→*C*∧*D*，*D*∨*E*→*F*⇒ *A*→*F*

**证明：**

(1) *A* P（附加前提）

(2) *A*∨*B* T(1) I

(3) *A*∨*B*→*C*∧*D* P

(4) *C*∧*D*  T(2) (3) I

(5) *D* T(4) I

(6) *D*∨*E*  T(5) I

(7) *D*∨*E*→*F* P

(8) *F*  T(6)(7) I

(9) *A*→*F* CP(5)(8)

（4）*A*→(*B*∧*C*)，┐*B*∨*D*，(*E*→┐*F*) →┐*D*，*B*→(*A*∧┐*E*)⇒*B*→*E*

**证明：**

(1) *B* P（附加前提）

(2) ┐*B*∨*D* P

(3) *D* T(1) (2)I

(4) (*E*→┐*F*) →┐*D* P

(5) *D*→┐(*E*→┐*F*)T(4) E

(6) ┐(*E*→┐*F*) T(3) (5) I

(7) *E*∧*F* T(6) E

(8) *E*  T(7) I

(9) *B*→*E* CP(1)(8)

25. 证明下列各式。

（1）*R*→┐*Q*，*R*∨*S*，*S*→┐*Q*，*P*→*Q*⇒┐*P*

（2）*S*→┐*Q*，*R*∨*S*，┐*R*，┐*P*→← *Q*⇒*P*

（3）┐(*P*→*Q*)→┐(*R*∨*S*)，(*Q*→*P*)∨┐*R*，*R*⇒*P*→← *Q*

**证明：**

（1）*R*→┐*Q*，*R*∨*S*，*S*→┐*Q*，*P*→*Q*⇒┐*P*

**证明：**

(1) *P* P(附加前提)

(2) *P*→*Q* P

(3) *Q* T(1)(2) I

(4) *R*→┐*Q* P

(5) *S*→┐*Q* P

(6) *Q*→┐*R* T(4) E

(7) *Q*→┐*S* T(5) E

(8) ┐*R* T(3)(6) I

(9) ┐*S* T(3)(7) I

(10) ┐*R*∧┐*S* T(8)(9) I

(11) ┐( *R*∨*S*) T(10) E

(12) *R*∨*S* P

(13) ┐( *R*∨*S*)∧( *R*∨*S*)(矛盾) T(12)(13) I

（2）*S*→┐*Q*，*R*∨*S*，┐*R*，┐*P*→← *Q*⇒*P*

**证明：**

(1) ┐*R* P

(2) *R*∨*S* P

(3) *S* T(1)(2) I

(4) *S*→┐*Q* P

(5) ┐*Q* T(3)(4) I

(6) ┐*P*→← *Q* P

(7) (┐*P*→*Q*)∧(*Q*→┐*P*)T(6) E

(8) ┐*P*→*Q* T(7) I

(9) ┐*Q*→*P* T(8) E

(10) *P* T(5)(9) I

（3）┐(*P*→*Q*)→┐(*R*∨*S*)，(*Q*→*P*)∨┐*R*，*R*⇒*P*→← *Q*

**证明：**

(1) *R* P

(2) (*Q*→*P*)∨┐*R* P

(3) *Q*→*P* T(1)(2) I

(4) ┐(*P*→*Q*)→┐(*R*∨*S*)P

(5) (*R*∨*S*)→(*P*→*Q*)T(4) E

(6) *P*→*Q* T(1)(5) I

(7) (*P*→*Q*)∧( *Q*→*P*)T(3)(6) I

(8) *P*→← *Q* T(7) E

26. 甲、乙、丙和丁四人参加考试，有人问他们，谁的成绩最好？甲说“不是我”，乙说“是丁”，丙说“是乙”，丁说“不是我”。四人的回答只有一人符合实际。问成绩最好的是哪些？若只有一人成绩最好，是谁？

**解：**设*A*：甲的成绩最好。*B*：乙的成绩最好。*C*：丙的成绩最好。*D*：丁的成绩最好。

因为四人的回答只有一人符合实际，所以

若甲的回答符合实际，有：(┐*A*∧┐*D*∧┐*B*∧*D*)

若乙的回答符合实际，有：(*A*∧*D*∧┐*B*∧*D*)

若丙的回答符合实际，有：(*A*∧┐*D*∧*B*∧*D*)

若丁的回答符合实际，有：(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*D*)

所以：

(┐*A*∧┐*D*∧┐*B*∧*D*)∨(*A*∧*D*∧┐*B*∧*D*)∨(*A*∧┐*D*∧*B*∧*D*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*D*) ⇔***T***

即(*A*∧*D*∧┐*B*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*) ⇔***T***

但(*A*∧*D*∧┐*B*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*) ⇔(*A*∧*D*∧┐*B*∧*C*)∨(*A*∧*D*∧┐*B*∧┐*C*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧*C*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*C*)

(*A*∧*D*∧┐*B*∧*C*)表示甲、丙和丁三人并列成绩最好。

(*A*∧*D*∧┐*B*∧┐*C*)表示甲、丁两人并列成绩最好。

(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧*C*)表示甲、丙两人并列成绩最好。

(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*C*)表示甲成绩最好。

若只有一人成绩最好，是甲。

27. 三人估计比赛结果，甲说“*A*第一，*B*第二”。乙说“*C*第二，*D*第四”。丙说“*A*第二，*D*第四”。结果三人估计得都不全对，但都对了一个，问*A*、*B*、*C*、*D*的名次。

**解：**设*A*：*A*第一。*B*：*B*第二。*C*：*C*第二。*D*：*D*第四。*E*：*A*第二。

根据题意有： (*A* ←∣ → *B*)∧(*C* ←∣ → *D*)∧(*E* ←∣ → *D*)成立。将其化为析取范式的形式：

(*A* ←∣ → *B*)∧(*C* ←∣ → *D*)∧(*E* ←∣ → *D*)

⇔(( *A*∧┐*B*)∨(┐*A*∧*B*))∧(( *C*∧┐*D*)∨(┐*C*∧*D*))∧(( *E*∧┐*D*)∨(┐*E*∧*D*))

⇔((*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*)∨( *A*∧┐*B*∧┐*C*∧*D*)∨(┐*A*∧*B*∧*C*∧┐*D*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*)) ∧(( *E*∧┐*D*)∨(┐*E*∧*D*))

其中( *A*∧┐*B*∧┐*C*∧*D*)和(┐*A*∧*B*∧*C*∧┐*D*)不复合题意，可以从上式中删去，原式化为：

((*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*))∧(( *E*∧┐*D*)∨(┐*E*∧*D*))

⇔(*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*∧*E*∧┐*D*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*∧*E*∧┐*D*)∨(*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*∧┐*E*∧*D*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*∧┐*E*∧*D*)

⇔(*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*∧*E*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*∧┐*E*)

(*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*∧*E*)中*C*和*E*)同时成立矛盾，故只能是(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*∧┐*E*)成立，即*B*第二，*D*第四，*A*第三，*C*第一。

28. *A*，*B*，*C*，*D*四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？如何派？

（1）若*A*去则*C*和*D*要去一人；

（2）*B*和*C*不能都去；

（3）*C*去则*D*要留下。

**解：**设 *A*：*A*去。*B*：*B*去。*C*：*C*去。*D*：*D*去。

则（1）可表示为：*A*→(*C* ←∣ → *D*)；（2）可表示为：┐(*B*∧*C*)；（3）可表示为：*C*→┐*D*。

(1)(2)(3)同时成立，即*A*→(*C* ←∣ → *D*)∧┐(*B*∧*C*)∧(*C*→┐*D*)成立。将其化为析取范式的形式：*A*→(*C* ←∣ → *D*)∧┐(*B*∧*C*)∧(*C*→┐*D*)

⇔(┐*A*∨(┐*C*∧*D*)∨(*C*∧┐*D*)) ∧(┐*B*∨┐*C*)∧(┐*C*∨┐*D*)

⇔(┐*A*∨(┐*C*∧*D*)∨(*C*∧┐*D*)) ∧((┐*B*∧┐*C*)∨(┐*B*∧┐*D*)∨┐*C*∨(┐*C*∧┐*D*))

⇔(┐*A*∧┐*B*∧┐*C*)∨(┐*A*∧┐*B*∧┐*D*)∨(┐*A*∧┐*C*)∨(┐*A*∧┐*C*∧┐*D*)∨(┐*C*∧*D*∧┐*B*∧┐*C*)∨(┐*C*∧*D*∧┐*B*∧┐*D*)∨(┐*C*∧*D*∧┐*C*)∨(┐*C*∧*D*∧┐*C*∧┐*D*)∨(*C*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*C*)∨(*C*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*D*)∨(*C*∧┐*D*∧┐*C*)∨(*C*∧┐*D*∧┐*C*∧┐*D*)

⇔(┐*A*∧┐*B*∧┐*C*)∨(┐*A*∧┐*B*∧┐*D*)∨(┐*A*∧┐*C*)∨(┐*A*∧┐*C*∧┐*D*)∨(┐*B*∧┐*C*∧*D*)∨(┐*C*∧*D*)∨(┐*B*∧*C*∧┐*D*)

上式划线的部分不符合题意，因此复合题意的有：

(┐*A*∧┐*C*)∨(┐*B*∧┐*C*∧*D*)∨(┐*C*∧*D*)∨(┐*B*∧*C*∧┐*D*)，

(┐*A*∧┐*C*)表示*B*和*D*去，(┐*B*∧┐*C*∧*D*) 表示*A*和*D*去，(┐*C*∧*D*)表示*A*和*D*去或*B*和*D*去，(┐*B*∧*C*∧┐*D*)表示*A*和*C*去。

故总共有三种派法：*B*和*D*去，*A*和*D*去或*A*和*C*去。

29. 在一个盗窃案件中，已知下列事实：

（1）甲或乙是窃贼。

（2）甲是窃贼，作案时间不会发生在夜间12点以前。

（3）若乙的证词正确，则夜间12点时被盗物品所在房间灯光未灭。

（4）若乙的证词不正确，则作案时间发生在夜间12点以前。

（5）夜间12点被盗房间的灯光灭了。

判断谁是盗贼，用构造证明法写出结论的判断过程。

**证明：**设*A*：甲是窃贼。*B*：乙是窃贼。*C*：作案时间发生在夜间12点以前。*D*：乙的证词正确。*E*：夜间12点被盗房间的灯光灭了。则（1）可以表示为：*A*∨*B*。（2）可以表示为：*A*→┐*C*。（3）可以表示为：*D*→┐*E*。（4）可以表示为：┐*D*→*C*。（5）可以表示为：*E*。

以下是推理过程：

(1) *E* P

(2) *D*→┐*E* P

(3) ┐*D* T(1)(2) I

(4) ┐*D*→*C* P

(5) *C* T(3)(4) I

(6) *A*→┐*C* P

(7) ┐*A* T(5)(6) I

(8) *A*∨*B* P

(9) *B* T(7)(8) I

所以*B*成立，即乙是窃贼。

30. 构造下面推理的证明：

（1）如果今天是星期六，我们就要到独秀峰或象鼻山去玩，如果独秀峰游人太多，我们就不去独秀峰。今天是星期六。独秀峰游人太多，所以我们去象鼻山玩。

（2）如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟，如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑。烤熟的鸭子不会跑。所以，羊不吃草。

**证明：**

（1）P：今天是星期六，Q：我们要到独秀峰去玩，R：我们要到象鼻山去玩，S：独秀峰游人太多。

P→(Q←∣ → R)，S→┐Q，P，S⇒ R

（1） S P

（2） S→┐Q P

（3） ┐Q T（1），（2）I

（4） P P

（5） P→(Q←∣ → R) P

（6） Q←∣ → R T（4），（5）I

（7） ┐Q T（6）I

（8） R T（7）I

（2）P：马会飞，Q：羊吃草，R：母鸡就会是飞鸟，S：烤熟的鸭子会跑。

（P∨Q）→R，R→S，┐S⇒┐Q

（1） ┐S P

（2） R→S P

（3） ┐R T（1），（2）I

（4） （P∨Q）→R P

（5） ┐（P∨Q） T（3），（4）I

（6） ┐P∧┐Q T（5）E

（7） ┐Q T（6）I