离散数学(胡海涛版)

第二章

1. 用谓词表达式符号化下列命题。

（1）小王不是学生。

（2）小王聪明而又好学。

（3）小王和小张是好朋友。

（4）他是田径或球类运动员。

（5）若*m*是奇数，则2*m*不是奇数。

（6）每一个有理数都是实数。

（7）某些实数是有理数。

（8）并非每一个实数都是有理数。

（9）每一个自然数不是奇数就是偶数。

（10）不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫。

（11）有会说话的机器人。

（12）有的人不吃萝卜，但人都要喝水。

**解：**

（1）*S*(*x*)：*x*是学生。*w*：小王。┐*S*(*w*)

（2）*C*(*x*)：*x*聪明。*S*(*x*)：*x*好学。*w*：小王。*C*(*w*)∧*S*(*w*)

（3）*F*(*x*，*y*)：*x*和*y*是好朋友。*w*：小王。*z*：小张。*F*(*w*，*z*)

（4）*S*(*x*)：*x*是田径运动员。*B*(*x*)：*x*是球类运动员。*h*：他。*S*(*h*)∨*B*(*h*)

（5）*O*(*x*)：*x*是奇数。*O*(*m*)→┐*O*(2*m*)。

（6）*Q*(*x*)：*x*是有理数。*R*(*x*)：*x*是实数。(∀*x*)(*Q*(*x*)→*R*(*x*))

（7）*Q*(*x*)：*x*是有理数。*R*(*x*)：*x*是实数。(∃*x*)(*R*(*x*)∧*Q*(*x*))

（8）*Q*(*x*)：*x*是有理数。*R*(*x*)：*x*是实数。┐(∀*x*)( *R*(*x*)→*Q*(*x*))

（9）*N*(*x*)：*x*是自然数。*O*(*x*)：*x*是奇数。*E*(*x*)：*x*是偶数。(∀*x*)(*N*(*x*)→(*O*(*x*)←∣ → *E*(*x*)))

（10）*B*(*x*)：*x*是黑猫。*W*(*x*)：*x*是白猫。*G*(*x*)：*x*是好猫。*Z*(*x*)：*x*抓住老鼠。论域为{猫}。 (∀*x*)((*B*(*x*)∨*W*(*x*))∧*Z*(*x*)→*G*(*x*))

（11）*M*(*x*)：*x*是机器人。*T*(*x*)：*x*会说话。(∃*x*)(*M* (*x*)∧*T*(*x*))

（12）*M*(*x*)：*x*是人。*E*(*x*)：*x*吃萝卜。*D*(*x*)：*x*喝水。(∃*x*)(*M*(*x*)∧┐*E*(*x*))∧(∀*x*)(*M*(*x*)→*D*(*x*))

2. 用谓词表达式符号化下列命题。

（1）并非所有大学生都能成为科学家。

（2）直线*A*平行于直线*B*，当且仅当直线*A*不相交于直线*B*。

（3）某些运动员是大学生。

（4）某些教练员是年老的，但是很健壮。

（5）王教练既不年老，也不健壮。

（6）某些大学生运动员是国家对选手。

（7）所有运动员都钦佩某些教练。

（8）有些大学生不钦佩教练。

（9）并不是所有的汽车都比火车快。

（10）男人一定比女人高，是不对的。

（11）某些汽车慢于所有的火车，但至少有一火车快于每一汽车。

（12）两个不相等的实数间，必存在第三个实数。

**解：**

（1）*S*(*x*)：*x*是大学生。*K*(*x*)：*x*是科学家。┐(∀*x*)(*S*(*x*)→*K*(*x*))

（2）*P*(*x*,*y*)：*x*平行于*y*。*C*(*x*,*y*)：*x*与*y*相交。*a*：直线*A*。*b*：直线*B*。*P*(*a*,*b*)→← ┐*C*(*a*,*b*)

（3）*S*(*x*)：*x*是大学生。*A*(*x*)：*x*是运动员。(∃*x*)(*A*(*x*)∧*S*(*x*))

（4）*T*(*x*)：*x*是教练员。*O*(*x*)：*x*是年老的。*J*(*x*)：*x*是健壮的。(∃*x*)(*T*(*x*)∧*O*(*x*)∧*J*(*x*))

（5）*O*(*x*)：*x*是年老的。*J*(*x*)：*x*是健壮的。*w*：王教练。┐*O*(*w*)∧┐*J*(*w*)

（6）*S*(*x*)：*x*是大学生。*A*(*x*)：*x*是运动员。*G*(*x*)：*x*是国家对选手。(∃*x*)(*A*(*x*)∧*S*(*x*)∧*G*(*x*))

（7）*A*(*x*)：*x*是运动员。*T*(*x*)：*x*是教练员。*P*(*x*,*y*)：*x*钦佩*y*。(∀*x*)(*A*(*x*)→(∃*y*)(*T*(*y*)∧*P*(*x*,*y*)))

（8）*S*(*x*)：*x*是大学生。*T*(*x*)：*x*是教练员。*P*(*x*,*y*)：*x*钦佩*y*。(∃*x*)(*S* (*x*)∧(∀*y*)(*T*(*y*)→┐*P*(*x*,*y*)))

（9）*C*(*x*)：*x*是汽车。*T*(*x*)：*x*是火车。*K*(*x*,*y*)：*x*比*y*快。┐(∀*x*)(*C*(*x*)→(∀*y*)(*T*(*y*)→*K*(*x*,*y*)))

（10）*M*(*x*)：*x*是男人。*W*(*x*)：*x*是女人。*T*(*x*,*y*)：*x*比*y*高。┐(∀*x*)(*M*(*x*)→(∀*y*)(*W*(*y*)→*T*(*x*,*y*)))

（11）*C*(*x*)：*x*是汽车。*T*(*x*)：*x*是火车。*K*(*x*,*y*)：*x*比*y*快。

(∃*x*)(*C*(*x*)∧(∀*y*)(*T*(*y*)→┐*K*(*x*,*y*)))∧(∃*y*)(*T*(*y*)∧(∀*x*)(*C*(*x*)→*K*(*y*,*x*)))

（12）*R*(*x*)：*x*是实数。*E*(*x*,*y*)：*x*等于*y*。

(∀*x*)(∀*y*)((*R*(*x*)∧*R*(*y*)∧┐*E*(*x*,*y*))→(∃*z*)(*R*(*z*)∧┐*E*(*x*,*z*)∧┐*E*(*y*,*z*)))

3. 试表示出“*A*是*B*的外祖父”，只允许用以下谓词：*P*(*x*)表示“*x*是人”，*F*(*x*，*y*)表示“*x*是*y*的父亲”，*M*(*x*，*y*)表示“*x*是*y*的母亲”。

**解：***P*(*A*)∧*P*(*B*)∧*P*(*C*)∧*F*(*A*，*C*)∧*M*(*C*，*B*)

4. 利用谓词公式翻译下列命题。

（1）如果有限个数的乘积为零，那么至少有一个因子等于零。

（2）对于每一个实数*x*，存在一个更大的实数*y*。

（3）存在实数*x*，*y*和*z*，使得*x*与*y*之和大于*x*与*z*之积。

**解：**

（1）*N*(*x*)：*x*是有限个数的乘积。*Z*(*y*)：*y*为零。*P*(*x*)：*x*的乘积为零。*F*(*y*)：*y*是乘积中的一个因子。(∀*x*)(*N*(*x*)∧*P*(*x*)→(∃*y*)(*F*(*y*)∧*Z*(*y*)))

（2）*R*(*x*)：*x*是实数。*Q*(*x*,*y*)：*y*大于*x*。(∀*x*)(*R*(*x*)→(∃*y*)(*R*(*y*)∧*Q*(*x*,*y*)))

（3）*R*(*x*)：*x*是实数。*G*(*x*,*y*)：*x*大于*y*。(∃*x*)(∃*y*)(∃*z*)(*R*(*x*)∧*R*(*y*)∧*R*(*z*)∧*G*(*x*+*y*,*x*·*z*))

5. 自然数一共有3条公理。

（1）每个数都有惟一的一个数是它的后继数。

（2）没有一个数使数1是它的后继数。

（3）每个不等于1的数都有惟一的一个数是它的直接先行者。

用两个谓词表达上述3条公理。

**解：***N*(*x*)：*x*是自然数。*S*(*x*,*y*)：*y*是*x*的后继数。

（1）(∀*x*)(*N*(*x*)→(∃!*y*)(*N*(*y*)∧*S*(*x*,*y*)))

（2）┐(∃*x*)( *N*(*x*)∧*S*(*x*,1))

（3）(∀*x*)(*N*(*x*)∧┐*S*(*x*,2)→(∃!*y*)(*N*(*y*)∧*S*(*y*,*x*)))

6. 对下面的每个公式指出约束变元和自由变元。

（1）(∀*x*)*P*(*x*)→*P*(*y*)

（2）(∀*x*)(*P*(*x*)∧*Q*(*x*))∧(∃*x*)*S*(*x*)

（3）(∃*x*)(∀*y*)(*P*(*x*)∧*Q*(*y*))→(∀*x*)*R*(*x*)

（4）(∃*x*)(∃*y*)(*P*(*x*，*y*)∧*Q*(*z*))

**解：**

（1）*x*为约束变元，受(∀*x*) 约束，*y*为自由变元。

（2）(*P*(*x*)∧*Q*(*x*))的*x*为约束变元，受(∀*x*) 约束，*S*(*x*)的*x*为约束变元，受(∃*x*)约束。

（3）(*P*(*x*)∧*Q*(*y*)) 的*x*和*y*为约束变元，分别受(∃*x*)和(∀*y*)约束，*R*(*x*)的*x*为约束变元，受(∀*x*) 约束。

（4）(*P*(*x*，*y*)∧*Q*(*z*))的*x*和*y*为约束变元，分别受(∃*x*)和(∃*y*)约束，*Q*(*z*)中的*z*为自由变元。

7. 如果论域是集合{*a*，*b*，*c*}，试消去下面公式中的量词。

（1）(∀*x*)*P*(*x*)

（2）(∀*x*)*P*(*x*)∧(∀*x*)*Q*(*x*)

（3）(∀*x*)(*P*(*x*) →*Q*(*x*))

（4）(∀*x*)┐(*P*(*x*)∨(∀*x*) (*P*(*x*)

**解：**

（1）*P*(*a*)∧*P*(*b*)∧*P*(*c*)

（2）(*P*(*a*)∧*P*(*b*)∧*P*(*c*))∧(*Q*(*a*)∧*Q*(*b*)∧*Q*(*c*))

（3）(*P*(*a*) →*Q*(*a*))∧(*P*(*b*) →*Q*(*b*))∧(*P*(*c*) →*Q*(*c*))

（4）(┐*P*(*a*)∧┐*P*(*b*)∧┐*P*(*c*))∨(*P*(*a*)∧*P*(*b*)∧*P*(*c*))

8. 试求下列各式的真值。

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))，其中*P*(*x*)：*x*=1，*Q*(*x*)：*x*=2，论域是{1，2}。

（2）(∀*x*) (*P*→*Q*(*x*))∨*R*(*a*)，其中*P*：2>1，*Q*(*x*)：*x*≤3，*R*(*x*)：*x*>5，*a*：5，论域是{-2，3，6}。

**解：**

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*)) ⇔ (*P*(1)∨*Q*(1)) ∧(*P*(2)∨*Q*(2)) ⇔(***T***∨***F***) ∧(***F***∨***T***) ⇔***T*** ∧***T***⇔***T***

（2）(∀*x*) (*P*→*Q*(*x*))∨*R*(*a*)⇔(*P*→*Q*(-2))∧(*P*→*Q*(3))∧(*P*→*Q*(6))∨*R*(*a*)

⇔ (***T***→***T***)∧(***T***→***T***)∧(***T***→***F***)∨***F***⇔ ***T***∧***T***∧***F***∨***F***⇔***F***

9. 对下列谓词公式中的约束变元进行换名。

（1）(∀*x*)(∃*y*)(*P*(*x*，*z*)→*Q*(*y*))→← *S*(*x*，*y*)

（2）((∀*x*)(*P*(*x*)→(*R*(*x*)∨*Q*(*x*)))∧(∃*x*)*R*(*x*))→(∃*z*)*S*(*x*，*z*)

**解：**

（1）(∀*u*)(∃*v*)(*P*(*u*，*z*)→*Q*(*v*))→← *S*(*x*，*y*)

（2）((∀*u*)(*P*(*u*)→(*R*(*u*)∨*Q*(*u*)))∧(∃*v*)*R*(*v*))→(∃*z*)*S*(*x*，*z*)

10. 对下列谓词公式中的自由变元进行代入。

（1）((∃*y*)*A*(*x*，*y*)→(∀*x*)*B*(*x*，*z*))∧(∃*x*)(∀*z*)*C*(*x*，*y*，*z*)

（2）((∀*y*)*P*(*x*，*y*)∧(∃*z*)*Q*(*x*，*z*))∨(∀*x*)*R*(*x*，*y*)

**解：**

（1）((∃*y*)*A*(*u*，*y*)→(∀*x*)*B*(*x*，*v*))∧(∃*x*)(∀*z*)*C*(*x*，*w*，*z*)

（2）((∀*y*)*P*(*u*，*y*)∧(∃*z*)*Q*(*v*，*z*))∨(∀*x*)*R*(*x*，*w*)

11. 考虑以下赋值。

论域 *D*={1，2}

指定常数*a*：1，*b*：2

指定函数*f*：*f* (1)=2，*f* (2)=1

指定谓词*P*：*P*(1，1)⇔***T***，*P*(1，2)⇔***T***，*P*(2，1)⇔***F***，*P*(2，2)⇔***F***

求以下各式的真值。

（1）*P*(*a*，*f*(*a*))∧*P*(*b*，*f*(*b*))

（2）(∀*x*)(∃*y*)*P*(*y*，*x*)

（3）(∀*x*)( ∀*y*)(*P*(*x*，*y*)→*P*(*f* (*x*)，*f* (*y*)))

**解：**

（1）*P*(*a*，*f*(*a*))∧*P*(*b*，*f*(*b*)) ⇔ *P*(1，*f*(1))∧*P*(2，*f*(2)) ⇔ *P*(1，2)∧*P*(2，1) ⇔ ***T***∧***F***⇔***F***

（2）(∀*x*)(∃*y*)*P*(*y*，*x*) ⇔(∀*x*)(*P*(1，*x*)∨*P*(2，*x*))⇔(*P*(1，1)∨*P*(2，1))∧(*P*(1，2)∨*P*(2，2))

⇔( ***T***∨***F***)∧(***T***∨***F***) ⇔***T***∧***T***⇔***T***

（3）(∀*x*)(∀*y*)(*P*(*x*，*y*)→*P*(*f* (*x*)，*f* (*y*)))⇔(∀*x*)((*P*(*x*，1)→*P*(*f* (*x*)，*f* (1)))∧(*P*(*x*，2)→*P*(*f* (*x*)，*f* (2)))) ⇔((*P*(1，1)→*P*(*f* (1)，*f* (1)))∧(*P*(1，2)→*P*(*f* (1)，*f* (2))))∧((*P*(2，1)→*P*(*f* (2)，*f* (1)))∧(*P*(2，2)→*P*(*f* (2)，*f* (2))))⇔ ((***T***→***F***)∧(***T***→***F***))∧((***F***→***F***)∧(***F***→***T***))⇔(***F***∧***F***)∧(***T***∧***T***)⇔***F***∧***T***⇔***F***

12. 将下面各式翻译成自然语言，然后在不同的个体域中确定它们的真值。

（1）(∀*x*) (∃*y*)(*x*·*y*=0)

（2）(∃*x*) (∀*y*)( *x*·*y*=0)

（3）(∀*x*) (∃*y*)( *x*·*y*=1)

（4）(∃*x*) (∀*y*)( *x*·*y*=1)

（5）(∀*x*) (∃*y*)( *x*·*y*=*x*)

（6）(∃*x*) (∀*y*)( *x*·*y*=*x*)

（7）(∀*x*) (∀*y*) (∃*z*)(*x*-*y*=*z*)

个体域分为

（a）实数集合***R***

（b）整数集合***Z***

（c）正整数集合***Z*+**

（d）非零实数集合***R***-{0}

**解：**（1）对于任意的*x*，存在*y*，使得*x*·*y*=0。

（2）存在*x*，对于任意的*y*，都有*x*·*y*=0。

（3）对于任意的*x*，存在*y*，使得*x*·*y*=1。

（4）存在*x*，对于任意的*y*，都有*x*·*y*=1。

（5）对于任意的*x*，存在*y*，使得*x*·*y*=*x*。

（6）存在*x*，对于任意的*y*，都有*x*·*y*=*x*。

（7）对于任意的*x*，任意的*y*，存在*z*，使得*x*-*y*=*z*。

个体域分为

（a）实数集合***R***

（1）真（2）真（3）假（4）假（5）真（6）真（7）真

（b）整数集合***Z***

（1）真（2）真（3）假（4）假（5）真（6）真（7）真

（c）正整数集合***Z*+**

（1）假（2）假（3）假（4）假（5）真（6）假（7）假

（d）非零实数集合***R***-{0}

（1）假（2）假（3）真（4）假（5）真（6）假（7）假

13. 判断下面公式的真假，如果是真，请证明之；如果为假，请给出*P*和*Q*的解释，以说明公式为假

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*)) ⇒(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)

（2）(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*) ⇒(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))

**解：**（1）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇔(∀*x*)(┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*))⇔(∀*x*)┐(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*))⇔┐(∃*x*)(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*)) ⇒┐((∃*x*)*P*(*x*)∧(∃*x*)┐*Q*(*x*))⇔┐(∃*x*)*P*(*x*)∨┐(∃*x*)┐*Q*(*x*))⇔(∀*x*)┐*P*(*x*)∨(∀*x*)*Q*(*x*))

⇒ (∃*x*)┐*P*(*x*)∨(∀*x*)*Q*(*x*))⇔ ┐(∀*x*)*P*(*x*)∨(∀*x*)*Q*(*x*)) ⇔(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)

（2）(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*) ⇒(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))不成立。

*P*(*x*)：*x*成绩优秀。*Q*(*x*)：*x*获得奖学金。论域为所有学生。

(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)表示：若所有学生成绩都优秀，则所有学生都获得奖学金。

(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))表示：任何一个学生，只要成绩优秀，他就获得奖学金。

显然“任何一个学生，只要成绩优秀，他就获得奖学金。”可以推出“若所有学生成绩都优秀，则所有学生都获得奖学金。”反之未必成立。

14. 求证：(∃*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇔(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)*Q*(*x*)

**证明：**(∃*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇔ (∃*x*)( ┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*))⇔ (∃*x*)┐*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*))⇔ ┐(∀*x*) *P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)) ⇔(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)*Q*(*x*)

15. 求证：(∀*x*)(∀*y*)(*P*(*x*)→*Q*(*y*))⇔(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*y*)*Q*(*y*)

**证明：**(∀*x*)(∀*y*)(*P*(*x*)→*Q*(*y*))⇔ (∀*x*)(∀*y*)( ┐*P*(*x*)∨*Q*(*y*)) ⇔ (∀*x*) ┐*P*(*x*)∨(∀*y*)*Q*(*y*)

⇔ ┐(∃*x*)*P*(*x*)∨(∀*y*)*Q*(*y*)⇔(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*y*)*Q*(*y*)

16. 下列推导过程中有何错误？

（1） (∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*)) P

（2） *P*(*a*)→*Q*(*a*) US(1)

（3） (∃*x*)*P*(*x*) P

（4） *P*(*a*) ES(3)

（5） *Q*(*a*) T(2),(4) *I*

（6） (∃*x*)*Q*(*x*) EG(5)

**解：**应先消去存在量词。

17. 把以下各式化为前束范式。

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)→(∃*y*)*Q*(*x*，*y*))

（2）(∃*x*)(┐((∃*y*)*P*(*x*，*y*))→((∃*z*)*Q*(*z*)→*R*(*x*)))

（3）(∀*x*)(∀*y*)(((∃*z*)*P*(*x*，*y*，*z*)∧(∃*u*)*Q*(*x*，*u*))→(∃*v*)*Q*(*y*，*v*))

**解：**

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)→(∃*y*)*Q*(*x*，*y*)) ⇔ (∀*x*)(┐*P*(*x*)∨(∃*y*)*Q*(*x*，*y*)) ⇔(∀*x*)(∃*y*)(┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*，*y*))

（2）(∃*x*)(┐((∃*y*)*P*(*x*，*y*))→((∃*z*)*Q*(*z*)→*R*(*x*)))

⇔(∃*x*)((∃*y*)*P*(*x*，*y*)∨((∃*z*)*Q*(*z*)→*R*(*x*))) ⇔(∃*x*)((∃*y*)*P*(*x*，*y*)∨(┐(∃*z*)*Q*(*z*)∨*R*(*x*)))

⇔(∃*x*)((∃*y*)*P*(*x*，*y*)∨((∀*z*) ┐*Q*(*z*)∨*R*(*x*))) ⇔(∃*x*)(∃*y*)(∀*z*)(*P*(*x*，*y*)∨┐*Q*(*z*)∨*R*(*x*))

（3）(∀*x*)(∀*y*)(((∃*z*)*P*(*x*，*y*，*z*)∧(∃*u*)*Q*(*x*，*u*))→(∃*v*)*Q*(*y*，*v*))

⇔(∀*x*)(∀*y*)(┐((∃*z*)*P*(*x*，*y*，*z*)∧(∃*u*)*Q*(*x*，*u*))∨(∃*v*)*Q*(*y*，*v*))

⇔(∀*x*)(∀*y*)((∀*z*) ┐*P*(*x*，*y*，*z*)∨(∀*u*) ┐*Q*(*x*，*u*))∨(∃*v*) *Q*(*y*，*v*))

⇔(∀*x*)(∀*y*)(∀*z*)(∀*u*)(∃*v*)(┐*P*(*x*，*y*，*z*)∨┐*Q*(*x*，*u*)∨*Q*(*y*，*v*))

18. 求等价于下面各式的前束析取范式和前束合取范式。

（1）((∃*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*))→ (∃*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))

（2）(∀*x*)(*P*(*x*)→(∀*y*)((∀*z*)*Q*(*x*，*y*)→┐(∀*z*)*R*(*y*，*x*)))

（3）(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)((∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*z*)*R*(*x*，*y*，*z*))

（4）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))→((∃*y*)*P*(*y*)∧(∃*z*)*Q*(*y*，*z*))

**解：**

（1）((∃*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*))→ (∃*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))

因为((∃*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)) ⇔(∃*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))，所以((∃*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*))→ (∃*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))为永真式，不写为前束范式的形式。

（2）(∀*x*)(*P*(*x*)→(∀*y*)((∀*z*)*Q*(*x*，*y*)→┐(∀*z*)*R*(*y*，*x*)))

⇔(∀*x*)(┐*P*(*x*)∨(∀*y*)(*Q*(*x*，*y*)→┐*R*(*y*，*x*)))

⇔(∀*x*)(∀*y*)(┐*P*(*x*)∨┐*Q*(*x*，*y*)∨┐*R*(*y*，*x*))) 前束合取范式

⇔(∀*x*)(∀*y*)((┐*P*(*x*)∧*Q*(*x*，*y*)∧*R*(*y*，*x*))∨(┐*P*(*x*)∧*Q*(*x*，*y*)∧┐*R*(*y*，*x*))∨(┐*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*)∧*R*(*y*，*x*))∨(┐*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*)∧┐*R*(*y*，*x*))∨(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*)∧*R*(*y*，*x*))∨(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*)∧┐*R*(*y*，*x*))∨(*P*(*x*)∧*Q*(*x*，*y*)∧┐*R*(*y*，*x*))) 前束析取范式

（3）(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)((∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*z*)*R*(*x*，*y*，*z*))

⇔┐(∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)((∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*z*)*R*(*x*，*y*，*z*))

⇔(∃*x*)┐*P*(*x*)∨(∃*x*)((∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*u*)*R*(*x*，*y*，*u*))

⇔(∃*x*)( ┐*P*(*x*)∨(∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*u*)*R*(*x*，*y*，*u*))

⇔(∃*x*)(∀*z*)(∀*u*)( ┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*，*z*)∨*R*(*x*，*y*，*u*)) 前束合取范式

⇔(∃*x*)(∀*z*)(∀*u*)((┐*P*(*x*) ∧*Q*(*x*，*z*) ∧*R*(*x*，*y*，*u*))∨(┐*P*(*x*) ∧*Q*(*x*，*z*) ∧┐*R*(*x*，*y*，*u*))∨(┐*P*(*x*) ∧┐*Q*(*x*，*z*) ∧*R*(*x*，*y*，*u*))∨(┐*P*(*x*) ∧┐*Q*(*x*，*z*) ∧┐*R*(*x*，*y*，*u*))∨(*P*(*x*) ∧*Q*(*x*，*z*) ∧*R*(*x*，*y*，*u*))∨(*P*(*x*) ∧*Q*(*x*，*z*) ∧┐*R*(*x*，*y*，*u*))∨(*P*(*x*) ∧┐*Q*(*x*，*z*) ∧*R*(*x*，*y*，*u*))) 前束析取范式

（4）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))→((∃*y*)*P*(*y*)∧(∃*z*)*Q*(*y*，*z*))

⇔┐(∀*x*)(┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*，*y*))∨((∃*y*)*P*(*y*)∧(∃*z*)*Q*(*y*，*z*))

⇔(∃*x*)(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*))∨((∃*u*)*P*(*u*)∧(∃*z*)*Q*(*y*，*z*))

⇔(∃*x*)(∃*u*)(∃*z*)((*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*))∨(*P*(*u*)∧*Q*(*y*，*z*)) 前束析取范式

⇔(∃*x*)(∃*u*)(∃*z*)((*P*(*x*)∨*P*(*u*))∧(*P*(*x*)∨*Q*(*y*，*z*))∧(┐*Q*(*x*，*y*)∨*P*(*u*))∧(┐*Q*(*x*，*y*)∨*Q*(*y*，*z*))) 前束合取范式

19. 求下列各式的斯柯伦范式。

（1）(∀*x*) *P*(*x*)∧┐(∃*x*)*Q*(*x*)

（2）(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*x*) *Q*(*x*)

（3）((∀*x*) *P*(*x*)∨(∃*y*)*Q*(*y*))→(∀*x*)*R*(*x*)

（4）(∀*x*) (*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))→((∃*y*)*R*(*y*)→(∃*z*)*S*(*y*，*z*))

**解：**

（1）(∀*x*) *P*(*x*)∧┐(∃*x*)*Q*(*x*)

⇔(∀*x*) *P*(*x*)∧┐(∃*y*)*Q*(*y*) ⇔(∃*y*)(∀*x*) (*P*(*x*)∧┐*Q*(*y*))

（2）(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*x*) *Q*(*x*)

⇔(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*y*) *Q*(*y*)⇔(∃*x*)(∀*y*)(*P*(*x*)→*Q*(*y*))

（3）((∀*x*) *P*(*x*)∨(∃*y*)*Q*(*y*))→(∀*x*)*R*(*x*)

⇔┐((∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*y*)*Q*(*y*))∨(∀*x*)*R*(*x*) ⇔ (┐(∀*x*) *P*(*x*)∧┐(∃*y*)*Q*(*y*))∨(∀*x*)*R*(*x*)

⇔ ((∃*x*)┐*P*(*x*)∧(∀*y*)┐*Q*(*y*))∨(∀*x*)*R*(*x*) ⇔ (∃*x*)(∀*y*)(∀*z*)(┐*P*(*x*)∧┐*Q*(*y*)∨*R*(*z*))

（4）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))→((∃*y*)*R*(*y*)→(∃*z*)*S*(*y*，*z*))

⇔┐(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))∨((∃*y*)*R*(*y*)→(∃*z*)*S*(*y*，*z*))

⇔ (∃*x*)(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*))∨((∀*y*) ┐*R*(*y*)∨(∃*z*)*S*(*y*，*z*))

⇔ (∃*x*)(∃*z*)(∀*y*)(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*u*)∨┐*R*(*y*)∨*S*(*v*，*z*))

20. 证明下列各式。

（1）(∀*x*)( ┐*A*(*x*)→*B*(*x*))，(∀*x*) ┐*B*(*x*) ⇒(∃*x*)*A*(*x*)

（2）(∃*x*)*A*(*x*)→(∀*x*)*B*(*x*) ⇒(∀*x*) (*A*(*x*)→*B*(*x*))

（3）(∀*x*)(*A*(*x*)→*B*(*x*))，(∀*x*)(*C*(*x*)→┐*B*(*x*))⇒(∀*x*)(*C*(*x*)→┐*A*(*x*))

（4）(∀*x*)(*A*(*x*)∨*B*(*x*))，(∀*x*)(*B*(*x*)→┐*C*(*x*))，(∀*x*)*C*(*x*)⇒ (∀*x*)*A*(*x*)

**证明：**

（1）

(1) (∀*x*) ┐*B*(*x*)P

(2) ┐*B*(*a*)ES(1)

(3) (∀*x*)( ┐*A*(*x*)→*B*(*x*))P

(4) ┐*A*(*a*)→*B*(*a*)US(3)

(5) *A*(*a*) T(2)(4) I

(6) (∃*x*)*A*(*x*) EG(5)

（2）

(∃*x*)*A*(*x*)→(∀*x*)*B*(*x*)

⇔┐(∃*x*)*A*(*x*)∨(∀*x*)*B*(*x*)⇔(∀*x*)┐*A*(*x*)∨(∀*x*)*B*(*x*) ⇒(∀*x*)(┐*A*(*x*)∨*B*(*x*))⇔ (∀*x*) (*A*(*x*)→*B*(*x*))

（3）

(1) (∀*x*)(*C*(*x*)→┐*B*(*x*))P

(2) *C*(*a*)→┐*B*(*a*)US(1)

(3) (∀*x*)(*A*(*x*)→*B*(*x*))P

(4) *A*(*a*)→*B*(*a*)US(3)

(5) ┐*B*(*a*)→┐*A*(*a*)T(4) E

(6) *C*(*a*)→┐*A*(*a*)T(2)(5) I

(7) (∀*x*)(*C*(*x*)→┐*A*(*x*)) UG(6)

（4）(∀*x*)(*A*(*x*)∨*B*(*x*))，(∀*x*)(*B*(*x*)→┐*C*(*x*))，(∀*x*)*C*(*x*)⇒ (∀*x*)*A*(*x*)

(1) (∀*x*)*C*(*x*) P

(2) *C*(*a*) US(1)

(3) (∀*x*)(*B*(*x*)→┐*C*(*x*))P

(4) *B*(*a*)→┐*C*(*a*)US(3)

(5) ┐*B*(*a*) T(2)(4) I

(6) (∀*x*)(*A*(*x*)∨*B*(*x*))P

(7) *A*(*a*)∨*B*(*a*) US(6)

(8) *A*(*a*) T(5)(7) I

(9) (∀*x*)*A*(*x*) UG(8)

21. 用CP规则证明。

（1）(∀*x*) (*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇒ (∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)

（2）(∀*x*) (*P*(*x*)∨*Q*(*x*))⇒ (∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)

**证明：**

（1）(∀*x*) (*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇒ (∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)

**证明：**

(1) (∀*x*)*P*(*x*)P(附加前提)

(2) *P*(*a*)ES(1)

(3) (∀*x*) (*P*(*x*)→*Q*(*x*))P

(4) *P*(*a*)→*Q*(*a*)US(3)

(5) *Q* (*a*)T(2)(4) I

(6) (∀*x*)*Q*(*x*) UG(5)

(7) (∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)CP(1) (6)

（2）(∀*x*) (*P*(*x*)∨*Q*(*x*))⇒ (∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)

**证明：**

(1) ┐(∀*x*)*P*(*x*) P(附加前提)

(2) (∃*x*)┐*P*(*x*)T(1) E

(3) ┐*P*(*a*) ES(2)

(4) (∀*x*) (*P*(*x*)∨*Q*(*x*))P

(5) *P*(*a*)∨*Q*(*a*)US(4)

(6) *Q*(*a*) T(3)(5) I

(7) (∃*x*)*Q*(*x*) EG(6)

(8) ┐(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)*Q*(*x*)CP(1) (7)

(9) (∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)T(8) E

22. 符号化下列命题，并推证其结论：

（1）任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车。每一个人或者喜欢汽车或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车。因而有人的不爱步行。

（2）不存在能表示成分数的无理数。有理数都能表示成分数。因此，有理数都不是无理数。

（3）每个自然数不是奇数就是偶数。自然数是偶数当且仅当它能被2整除。并不是所以的自然数都能被2整除。因此，有的自然数是奇数。

（4）三角函数都是周期函数。一些三角函数是连续函数。所以，一些周期函数是连续函数。

（5）每个科学家都是勤奋的。每个勤奋又身体健康的人在事业中都会获得成功。存在着身体健康的科学家。所以存在着事业获得成功的人或事业半途而废的人。

**解：**

（1）*F*(*x*)：*x*喜欢步行。*C*(*x*)：*x*喜欢喜欢乘汽车。*B*(*x*)：*x*喜欢骑自行车。论域是{人}。

(∀*x*) (*F*(*x*)→┐*C*(*x*))，(∀*x*) (*C*(*x*)∨*B*(*x*))，(∃*x*)┐*B*(*x*) ⇒ (∃*x*)┐*F*(*x*)

**证明：**

(1) (∃*x*)┐*B*(*x*)P

(2) ┐*B*(*a*)ES(1)

(3) (∀*x*) (*C*(*x*)∨*B*(*x*))P

(4) *C*(*a*)∨*B*(*a*)US(3)

(5) *C*(*a*)T(2)(4) I

(6) (∀*x*) (*F*(*x*)→┐*C*(*x*))P

(7) *F*(*a*)→┐*C*(*a*)US(6)

(8) *C*(*a*)→┐*F*(*a*)T(7) E

(9) ┐*F*(*a*)T(5)(8) I

(10) (∃*x*)┐*F*(*x*) EG(9)

（2）*Q*(*x*)：*x*是有理数。*W*(*x*)：*x*是无理数。*D*(*x*)：*x*能表示成分数。

┐(∃*x*)(*W*(*x*)∧*D*(*x*))，(∀*x*)(*Q*(*x*)→*D*(*x*))⇒(∀*x*)(*Q*(*x*)→┐*W*(*x*))

**证明：**

(1) ┐(∃*x*)(*W*(*x*)∧*D*(*x*))P

(2) (∀*x*)┐(*W*(*x*)∧*D*(*x*))T(1) E

(3) (∀*x*) (*W*(*x*)→┐*D*(*x*))T(2 E

(4) *W*(*a*)→┐*D*(*a*)US(3)

(5) *D*(*a*)→┐*W*(*a*) T(4) E

(6) (∀*x*)(*Q*(*x*)→*D*(*x*))P

(7) *Q*(*a*)→*D*(*a*)US(6)

(8) *Q*(*a*)→┐*W*(*a*)T(5)(7) I

(9) (∀*x*)(*Q*(*x*)→┐*W*(*x*))UG(8)

（3）*O*(*x*)：*x*是奇数。*E*(*x*)：*x*是偶数。*D*(*x*)：*x*能被2整除。论域为{自然数}。

(∀*x*)(*O*(*x*)←∣ → *E*(*x*))，(∀*x*)(*E*(*x*)→← *D*(*x*))，┐(∀*x*)*D*(*x*)⇒(∃*x*)*O*(*x*)

**证明：**

(1) ┐(∀*x*)*D*(*x*)P

(2) (∃*x*) ┐*D*(*x*)T(1) E

(3) ┐*D*(*a*)ES(2)

(4) (∀*x*)(*E*(*x*)→← *D*(*x*))P

(5) *E*(*a*)→← *D*(*a*)US(4)

(6) ┐*E*(*a*) T(3)(5) I

(7) (∀*x*)(*O*(*x*)←∣ → *E*(*x*))P

(8) *O*(*a*)←∣ → *E*(*a*)US(7)

(9) *O*(*a*) T(6)(8) I

(10) (∃*x*)*O*(*x*) EG(9)

（4）*S*(*x*)：*x*是三角函数。*D*(*x*)：*x*是周期函数。*H*(*x*)：*x*是连续函数。论域是{函数}。

(∀*x*) (*S*(*x*)→*D*(*x*))，(∃*x*)(*S*(*x*)∧*H*(*x*)) ⇒(∃*x*)(*D*(*x*)∧*H*(*x*))

**证明：**

(1) (∃*x*)(*S*(*x*)∧*H*(*x*))P

(2) *S*(*a*)∧*H*(*a*)ES(1)

(3) *S*(*a*) T(2) I

(4) *H*(*a*) T(2) I

(5) (∀*x*) (*S*(*x*)→*D*(*x*))P

(6) *S*(*a*)→*D*(*a*)US(5)

(7) *D*(*a*) T(3)(6) I

(8) *D*(*a*)∧*H*(*a*) T(4)(7) I

(9) (∃*x*)(*D*(*x*)∧*H*(*x*)) EG(8)

（5）*S*(*x*)：*x*是科学家。*D*(*x*)：*x*是勤奋的。*H*(*x*)：*x*是身体健康的。*C*(*x*)：*x*是成功的。论域是{人}。

(∀*x*) (*S*(*x*)→*D*(*x*))，(∀*x*) (*D*(*x*)∧*H*(*x*)→*C*(*x*))，(∃*x*)(*S*(*x*)∧*H*(*x*)) ⇒ (∃*x*)*C*(*x*)∨(∃*x*)┐*C* (*x*)

**证明：**

(1) (∃*x*)(*S*(*x*)∧*H*(*x*))P

(2) *S*(*a*)∧*H*(*a*)ES(1)

(3) *S*(*a*) T(2) I

(4) *H*(*a*) T(2) I

(5) (∀*x*) (*S*(*x*)→*D*(*x*))P

(6) *S*(*a*)→*D*(*a*)US(5)

(7) *D*(*a*) T(3)(6) I

(8) (∀*x*) (*D*(*x*)∧*H*(*x*)→*C*(*x*))P

(9) *D*(*a*)∧*H*(*a*)→*C*(*a*)US(8)

(10) *C*(*a*) T(4)(7) (9) I

(11) (∃*x*)*C*(*x*) EG(10)

(12) (∃*x*)*C*(*x*)∨(∃*x*)┐*C* (*x*) T(11) I