离散数学(胡海涛版)

第三章

1. 分别用描述法和列举法表示下列集合：

1. 非负偶数集；
2. 整数24的全部正因子的集合；
3. 不超过9且与9互质的正整数集合（该集合的元素个数称欧拉函数ϕ (9)）。

**解：**

描述法

（1）{x|x是非负偶数}

（2）{x|x是24的正因子}

（3）{x| x是不超过9且与9互质的正整数}

列举法

（1）{0,2,4,…}

（2）{1,2,3,4,6,8,12,24}

（3）{1,2,4,5,7,8}

2. 是否存在集合*A*和*B*，使得*A*⊆*B*且*A*∈*B*？若存在，请举一例。

**解：**存在。A={1}，B={1,{1}}，则*A*⊆*B*且*A*∈*B*均成立。

3. 求下列集合的幂集：

（1）∅；

（2）{∅}；

（3）{a,{a}}；

（4）{{1,2}}。

**解：**

（1）P(∅)={∅}

（2）P({∅})={∅,{∅}}

（3）P({a,{a}})={∅,{a},{{a}},{a,{a}}}

（4）P({{1,2}})={∅,{{1,2}}}

4. 设*S* = {0, 1}，求集合*S*×*P*(*S*)。

**解：**

P(S)={∅,{0},{1},{0,1}}

*S*×*P*(*S*)={< 0, ∅>, <0, {0}>,<0, {1}>,<0, {0,1}>,<1, ∅>,<1, {0}>,<1, {1}>,<1, {0,1}>}

5. 证明：对任意集合*A*，*B*都有

*P*(*A*)∩*P*(*B*)＝*P*(*A*∩*B*)，*P*(*A*)∪*P*(*B*)⊆*P*(*A*∪*B*)

并举例说明，一般*P*(*A*)∪*P*(*B*)≠*P*(*A*∪*B*)。

**证明：**

对任意的集合C，若

C∈*P*(*A*)∩*P*(*B*)⇔C∈*P*(*A*)∧C∈*P*(*B*)⇔C⊆*A*∧C⊆*B*⇔C⊆*A*∩*B*

所以*P*(*A*)∩*P*(*B*)＝*P*(*A*∩*B*)成立。

对任意的集合C，若

C∈*P*(*A*)∪*P*(*B*)⇔C∈*P*(*A*)∨C∈*P*(*B*)⇔C⊆*A*∨C⊆*B*⇒C⊆*A*∪*B*

所以*P*(*A*)∪*P*(*B*)⊆*P*(*A*∪*B*)成立。

举例：A={1,2}，B={2,3}，*P*(*A*)={ ∅，{1}，{2}，{1,2}}，*P*(*B*)={ ∅，{2}，{3}，{2,3}}，

*P*(*A*)∪*P*(*B*)={ ∅，{1}，{2}，{1,2}，{3}，{2,3}}，

*A*∪*B*={1,2,3}，*P*(*A*∪*B*)= { ∅，{1}，{2}，{1,2}，{3}，{2,3}，{1,3}，{1,2,3}}。

所以，*P*(*A*)∪*P*(*B*)≠*P*(*A*∪*B*)。

6. 设*A*，*B*，*C*是任意集合，证明：

（1）*C*∩(*A*⊕*B*)=(*C*∩*A*)⊕(*C*∩*B*)；

（2）已知*A*∩*B*⊆*B*∩*C*，且有*A*-*B*⊆*B*-*C*，则*A*⊆*B*。

**证明：**

（1）*C*∩(*A*⊕*B*)

=*C*∩((*A*－*B*)∪(*B*－*A*))=(*C*∩(*A*－*B*))∪(*C*∩(*B*－*A*))

= ((*C*∩*A*)－(*C*∩*B*))∪((*C*∩*B*)－(*C*∩*A*))=(*C*∩*A*)⊕(*C*∩*B*)

（2）反证法。假设结论不成立，则存在*x*∈*A*，且*x*∉*B*，则*x*∈*A*-*B*，*x*∈*B*-*C*，即*x*∈*B*。与*x*∉*B*矛盾。

7. 确定下列关系具备哪些性质？

（1）当且仅当|*i*-*k*|<11(*i*, *k*∈***Z***)时，有*iRk*；

（2）当且仅当*mn*>8(*m*, *n*∈*N*)时，有*mRn*；

（3）当且仅当*i*≤*k*(*i*, *k*∈*N*)时，有*iRk*。

**解：**

（1）自反，对称

（2）对称

（3）自反，对称，传递

8. 请在集合*A*＝{*a*,*b*,*c*}上分别构造满足下述要求的二元关系：

（1）既是对称又是反对称的；

（2）既不自反也不反自反；

（3）对称且自反；

（4）自反,对称且传递；

（5）以{<*a*,*b*>,<*b*,*c*>}为子集而且还是传递的。

**解：**

（1）{<*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>}

（2）{<*a*,*a*>,<*b*,*b*>}

（3）{<*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>,<*a*,*b*>,<*b*,*a*>}

（4）{<*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>,<*a*,*b*>,<*b*,*a*>}

（5）{<*a*,*b*>,<*b*,*c*><*a*,*c*>}

9. 设*Rj*表示***Z***上模*j*等价关系，*Rk*表示***Z***上模*k*等价关系, 证明：***Z****/Rk*细分***Z****/Rj*当且仅当*k*是*j*的整数倍。

**证明：**充分性：若*k*是*j*的整数倍，即∃*l*∈***Z***，使*k*=*lj*，

***Z****/Rk*={[*a*]*Rk*| *a*∈***Z***}，***Z****/Rj*={[*a*]*Rj*| *a*∈***Z*** }，[*a*]*Rk*={*x*| *x*∈***Z***∧*aRkx*}，[*a*]*Rj*={*x*| *x*∈***Z***∧*aRjx*}，显然对任意的*x*∈[*a*]*Rk*，*a*≡*x*(*mod**k*)，即∃*m*∈***Z***，使得*a*−*x*=*km*= *ljm*= *lmj*，即*x*∈[*a*]*Rj*，因此***Z****/Rk*细分***Z****/Rj*。

必要性：若***Z****/Rk*细分***Z****/Rj*，即[*a*]*Rk*⊆[*a*]*Rj*，显然<*k*,0>∈[*a*]*Rk*，因此<*k*,0>∈[*a*]*Rj*，所以*k*−0=1·*k*=*c*·*j*， *c*∈***Z***，于是*k*是*j*的整数倍。

10. 证明：若关系*R*是对称的, 则*Rk*(*k*≥1, *k*∈*N*)也是对称的。

**证明：**

设*R*是*A*上的二元关系，∀*x*，*y*∈*A*，若*xRky*成立，则由关系复合的定义，存在*x*0=*x*,*x*1,*x*2,…*xk*-1,*xk*=*y*，使得*x*0*Rx*1, *x*1*Rx*2,…, *xk*-1*Rxk*成立，由*R*是对称的,故*xkRxk*-1, *xk*-1*Rxk*-2, …, *x*2*Rx*1, *x*1*Rx*0成立,再由关系复合的定义，有*xkRkx*0成立，即*yRkx*，因而*Rk*(*k*≥1, *k*∈*N*)是对称的。

11. 设集合*A*={*a*,*b*,*c*,*d*}上的关系*R*={<*a*,*b*>,<*b*,*a*>,<*b*,*c*>,<*c*,*d*>}，用矩阵运算求出*R*的自反、对称和传递闭包。

**解：**

，，,

∨=。

所以r(R)={<*a*,*b*>,<*b*,*a*>,<*b*,*c*>,<*c*,*d*><*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>,<*d*,*d*>}

∨=

所以s(R)={<*a*,*b*>,<*b*,*a*>,<*b*,*c*>,<*c*,*d*><*c*,*b*>,<*d*,*c*>}







所以

t(R)={ <*a*,*a*>,<*a*,*b*>,<*a*,*c*>,<*a*,*d*>,<*b*,*a*>,<*b*,*b*>,<*b*,*c*>,<*b*,*d*>,<*c*,*d*>}

12. 设*R*和*S*是*A*上的二元关系，且*R*⊆*S*，证明：

（1）r(*R*) ⊆r(*S*)

（2）s(*R*) ⊆s(*S*)

（3）t(*R*) ⊆t(*S*)

**证明：**

（1）∀<x,y>∈r(*R*),由r(*R*)的定义有<x,y>∈*R*∨<x,y>∈*IA,* 若<x,y>∈*R* ,由*R*⊆*S*, <x,y>∈r(*S*), 若<x,y>∈*IA,* 有<x,y>∈r(*S*),所以r(*R*)⊆r(*S*)。

（2）∀<x,y>∈s(*R*)，由s(*R*)的定义有<x,y>∈*R*∨<x,y>∈*R*−1*,* 若<x,y>∈*R* ,由*R*⊆*S*, <x,y>∈s(*S*), 若<x,y>∈ *R*−1*,* 有<y,x>∈*R*,因而<y,x>∈*S*,所以<x,y>∈*S*−1*,* 即<x,y>∈s(*S*)，所以s(*R*)⊆s(*S*)。

（3）∀<x,y>∈ t(*R*),由t(*R*)的定义有<x,y>∈*Rk*(*k*≥1, *k*∈*N*)，即存在*x*0=*x*,*x*1,*x*2,…*xk*-1,*xk*=*y*，使得*x*0*Rx*1, *x*1*Rx*2,…, *xk*-1*Rxk*成立，由*R*⊆*S*,因而*x*0*Sx*1, *x*1*Sx*2,…, *xk*-1*Sxk*成立，所以<x,y>∈*Sk*(*k*≥1, *k*∈*N*)，即<x,y>∈ t(*S*),因而t(*R*) ⊆t(*S*)。

13. 设*R*和*S*是*A*上的二元关系，证明：

（1）r(*R*∪*S*)= r(*R*)∪r(*S*)

（2）s(*R*∪*S*)= s(*R*)∪s(*S*)

（3）t(*R*)∪t(*S*)⊆t(*R*∪*S*)

**证明：**

（1）r(*R*∪*S*)= (*R*∪*S*)∪*IA*= (*R*∪*IA*)∪(*S*∪*IA*) = r(*R*)∪r(*S*)。

（2）s(*R*∪*S*)= (*R*∪*S*)∪(*R*∪*S*) −1= (*R*∪*S*)∪(*R*−1∪*S*−1) = (*R*∪*R*−1)∪(*S*∪*S*−1) = s(*R*)∪s(*S*)。

（3）t(*R*)∪t(*S*) =∪，t(*R*∪*S*) ==∪∪，显然t(*R*)∪t(*S*)⊆t(*R*∪*S*)。

14. 求集合{*a*，*b*，*c*，*d*}的所有划分和等价关系。

**解：**集合{*a*，*b*，*c*，*d*}中共有4个元素，可作如下划分：

1. 4＝1＋1＋1＋1型划分，只有一个，即{ {*a*}，{*b*}，{*c*}，{*d*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>}。
2. 4＝2＋1＋1型划分，有＝6个，即{ {*a*，*b*}，{*c*}，{*d*}}，{ {*a*，*c*}，{*b*}，{*d*}}，{ {*a*，*d*}，{*b*}，{*c*}}，{ {*b*，*c*}，{*a*}，{*d*}}，{ {*b*，*d*}，{*a*}，{*c*}}，{ {*c*，*d*}，{*a*}，{*b*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*c*，*c*>，<*b*，*b*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*d*，*d*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>}，{ <*b*，*b*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*c*，*c*>，<*a*，*a*>，<*d*，*d*>}，{ <*b*，*b*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*d*，*d*>，<*a*，*a*>，<*c*，*c*>}，{ <*c*，*c*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*>，<*d*，*d*>，<*a*，*a*>，<*b*，*b*>}。
3. 4＝3＋1型划分，有＝4个，即{ {*a*，*b*，*c*}，{*d*}}，{ {*a*，*b*，*d*}，{*c*}}，{ {*a*，*c*，*d*}，{*b*}}，{ {*b*，*c*，*d*}，{*a*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*b*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*b*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*d*，*d*>，<*c*，*c*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*c*，*c*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*>，<*d*，*d*>，<*b*，*b*>}，{ <*a*，*a*>，<*b*，*b*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>}。
4. 4＝2＋2型划分，有＝3个，即{ {*a*，*b*}，{*c*，*d*}}，{ {*a*，*c*}，{ *b*，*d*}}，{ {*a*，*d*}，{*b*，*c*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*c*，*c*>，<*b*，*b*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*d*，*d*>，<*b*，*b*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*c*，*c*>}。
5. 4＝4＋0型划分，有1个，即{ {*a*，*b*，*c*，*d*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*> }。

综上，集合{*a*，*b*，*c*，*d*}的划分和等价关系共有15个。

15. 设*R*是非空集合*A*上的二元关系。如果对∀*a*,*b*,*c*∈*A*满足*aRb*且*bRc*⇒*cRa*，则称*R*为*A*上循环关系。证明：*R*是自反和循环的关系当且仅当*R*是等价关系。

**证明：**

必要性：若*R*是自反和循环的，对∀*a*,*b*,*c*∈*A*，*aRa*成立，若*aRc*成立*，*由*R*是循环的，有*cRa*，因此*R*是对称的，再若*aRb*且*bRc，*由*R*是循环的，有*cRa*，再由*R*是对称的，有*aRc*，因此*R*是传递的，因而*R*是等价关系。

充分性：若*R*是等价关系，则显然*R*是自反的，只需证*R*是循环的。对∀*a*,*b*,*c*∈*A*，若

*aRb*且*bRc，*由*R*的传递性，有*aRc*，再由*R*的对称性，*有cRa*，因此*R*是循环的。

16. 设*A*, *B*是非空集合，*f*是从*A*到*B*的映射。定义*A*上二元关系*R*为：

*x*，*y*∈*A*, *xRy*当且仅当*f*(*x*)=*f*(*y*)

证明：*R*是*A*上等价关系，并描述由*R*生成的*A*的划分。

**证明：**

显然*f*(*x*)=*f*(*x*)，因此*xRx*当，即*R*是自反的。

若*xRy*，有*f*(*x*)=*f*(*y*)，因此*f*(*y*)=*f*(*x*)，所以*yRx*，即*R*是对称的。

若*xRy*，*yRz*，有*f*(*x*)=*f*(*y*)，*f*(*y*)=*f*(*z*)，因此*f*(*x*)=*f*(*z*)，所以*xRz*，即*R*是传递的。

因此*R*是*A*上等价关系。

由*R*生成的*A*的划分中凡是对应的值相同的自变量属于同一分块。

17. 给出一个既是等价关系又是偏序关系的二元关系。

**解：** *A*＝{*a*,*b*,*c*}上的*R*={<*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>}。

18. 设*A*1、*A*2和*A*3是全集*U*的子集，则形如*Ai*′(*Ai*′为*Ai*或~*Ai*)的集合称为由*A*1、*A*2和*A*3产生的小项。试证由*A*1、*A*2和*A*3所产生的所有非空小项的集合构成全集*U*的一个划分。

**证明：**

（1）*Ai*′≠∅

（2）*Ai*′∩*Aj*′=∅

（3）(*A*1∩*A*2∩*A*3)∪(*A*1∩*A*2∩~*A*3)∪(*A*1∩~*A*2∩*A*3)∪(*A*1∩~*A*2∩~*A*3)∪(~*A*1∩*A*2∩*A*3)∪(~*A*1∩*A*2∩~*A*3)∪(~*A*1∩~*A*2∩*A*3)∪(~*A*1∩~*A*2∩~*A*3)=(*A*1∩*A*2)∪(*A*1∩~*A*2)∪(~*A*1∩*A*2)∪(~*A*1∩~*A*2) = *A*1∪~*A*1=*U*

因此，由*A*1、*A*2和*A*3所产生的所有非空小项的集合构成全集*U*的一个划分。

19. 设*R*和*S*是*A*上的相容关系，问：

（1）复合关系*R**S*是*A*上的相容关系吗？

（2）*R*∩*S*是*A*上的相容关系吗？

（3）*R*∪*S*是*A*上的相容关系吗？

**解：**

（1）设*A*={1,2,3}，*R*={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>}，*S*={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,3>,<3,2>}，*R**S*={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<1,3>}，不是相容关系。

（2）*R*∩*S*显然是自反的，<*x*,*y*>∈*R*∩*S*，则<*x*,*y*>∈*R*且<*x*,*y*>∈*S*，因而<*y*,*x*>∈*R*且<*y*,*x*>∈*S*，即<*y*,*x*>∈*R*∩*S*，因此*R*∩*S*是*A*上的相容关系。

（3）*R*∪*S*显然是自反的，<*x*,*y*>∈*R*∪*S*，则<*x*,*y*>∈*R*或<*x*,*y*>∈*S*，因而<*y*,*x*>∈*R*或<*y*,*x*>∈*S*，即<*y*,*x*>∈*R*∪*S*，因此*R*∪*S*是*A*上的相容关系。

是*A*上的相容关系。

20. 画出集合S={1,2,3,4,5,6}在偏序关系“整除”下的哈斯图，

（1）写出{1,2,3,4,5,6}的最大(小)元和极大(小)元；

（2）分别写出{2,3,6}和{2,3,5}的上(下)界、上(下)确界。

**解：**哈斯图如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | {1,2,3,4,5,6}的最大元：无。{1,2,3,4,5,6}的最小元：1。  {1,2,3,4,5,6}的极大元：4、5、6。{1,2,3,4,5,6}的极小元：1  {2,3,6}的上界：6。{2,3,6}的下界：1。  {2,3,6}的上确界：6。{2,3,6}的下确界：1。  {2,3,5}的上界：无。{2,3,5}的下界：1。  {2,3,5}的上确界：无。{2,3,5}的下确界：1。 |