离散数学(胡海涛版)

第四章

1. 分析下列各个函数，指出其性质（入射、满射或双射）

（1）*f*: ***Z***→***Z***, *f*(*j*)=*j* mod 3

（2）*f*: *N*→*N*，

（3）*f*: *N*→{0,1}，

（4）*f*: ***Z***→*N*，*f*(*i*)=|2*i*|+1

（5）*f*: *R*→*R*，*f*(*r*)=2*r* –15

**解：**

（1）、（2）、（4）既不是入射，也不是满射。

（3）是满射。

（5）是双射。

2. 假设*f*和*g*是函数，求证*f*∩*g*也是函数。

**证明：**

*f*∩*g*={<*x*,*y*>|*x*∈dom *f*∧*x*∈dom *g*∧*y*=*f*(*x*)∧*y*=*g*(*x*)}={<*x*,*y*>|*x*∈dom *f*∩dom *g*∧*y*=*f*(*x*)=*g*(*x*)}

令*h* = *f*∩*g*，则

dom *h* ={*x*|*x*∈dom *f*∩dom *g*∧*f*(*x*) =*g*(*x*)}

若*y*1≠ *y*2，因为*f*是函数，故必有*y*1=*f*(*x*1)，*y*2=*f*(*x*2)，且*x*1≠*x*2，所以*h* = *f*∩*g*是一个函数。因为dom *h*存在且*y*1≠ *y*2时*x*1≠*x*2，即

*h* ={<*x*,*y*>|*x*∈dom *h*，*y*=*h*(*x*) =*f*(*x*) =*g*(*x*)}

3. 设*A*={1，2，…，*n*}，证明从*A*到*A*的任意单射函数必是满射函数，其逆亦真。

**证明：**设*f*是从*A*到*A*的单射函数，则|*A*|=| *f*(*A*)|，因为*f*是*A*到*A*的函数，所以

*f*(*A*) ⊆ *A*，又因为|*A*|=| *f*(*A*)|，且|*A*|是有限的，因此必有*f*(*A*) = *A*，即*f*是满射函数。

反之，若*f*是从*A*到*A*的满射函数，根据满射定义有，*f*(*A*) = *A*，于是|*A*|=| *f*(*A*)|，又由|*A*|是有限的，故*f*是从*A*到*A*的单射函数。

4. 证明从**N**×***N***到**N**的函数*f*(*x*，*y*)=*x*+y和*g*(*x*，*y*)=*x***∙**y是满射，但不是单射。

**证明：**对任意*z*∈***N***，显然存在0，1，*z*∈***N***，使得0+*z*=*z*，1**∙***z*=*z*，因而*f*(*x*，*y*)=*x*+y和*g*(*x*，*y*)=*x***∙**y是满射。由于3+2=4+1=5，因而*f*(*x*，*y*)=*x*+y不是单射，由于3**∙**2=6**∙**1=6，因而*g*(*x*，*y*)=*x***∙**y不是单射。

5. 试给出满足下列条件的函数例子。

（1）是单射而不是满射。

（2）是满射而不是单射。

（3）不是单射也不是满射。

（4）既是单射又是满射。

**解：**

（1）设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2,3,4}，*f*={<*a*,2>,<*b*,3>,<*c*,4>}。

（2）设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2}，*f*={<*a*,2>,<*b*,1>,<*c*,1>}。

（3）设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2,3,4}，*f*={<*a*,2>,<*b*,1>,<*c*,1>}。

（4）设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2,3}，*f*={<*a*,2>,<*b*,3>,<*c*,1>}。

6. 有限集*A*和*B*，|*A*|=*m*，|*B*|=*n*，问：

（1）*A*到*B*的不同的二元关系有多少？

（2）从*A*到*B*存在多少不同的函数？

（3）从*A*到*B*存在入射的条件是什么？有多少不同的入射？

（4）从*A*到*B*存在满射的条件是什么？有多少不同的满射？

（5）从*A*到*B*存在双射的条件是什么？有多少不同的双射？

**解：**（1）2 *mn* 。（2）*n m*。（3）*m*≤*n*，。 （4）*n*≤*m*，*n*!*S*(*m*，*n*)。(本题具有一定的难度，*S*(*m*，*n*)的意义请参见9.5节，本题即第9章44题。)（5）*m*=*n*，*m*！。

7. 证明：

（1）*f*(*A*∪*B*)= *f*(*A*)∪*f*(*B*)

（2）*f*(*A*∩*B*)⊆ *f*(*A*)∩*f*(*B*)

（3）*f*(*A*)-*f*(*B*) ⊆ *f*(*A*-*B*)

**证明：**

（1）对任意的*y*∈*f*(*A*∪*B*)有，

*y*∈*f*(*A*∪*B*) ⇔∃*x*∈*A*∪*B*∧*f*(*x*)= *y*⇔∃*x*∈*A*∨∃*x*∈*B*∧*f*(*x*)= *y* ⇔(∃*x*∈*A*∧*f*(*x*)= *y*)∨(∃*x*∈*B*∧*f*(*x*)= *y*) ⇔ *y*∈*f*(*A*)∨*y*∈*f*(*B*) ⇔ *y*∈*f*(*A*)∪*f*(*B*)

（2）对任意的*y*∈*f*(*A*∩*B*)有，

*y*∈*f*(*A*∩*B*) ⇔∃*x*∈*A*∩*B*∧*f*(*x*)= *y*⇔∃*x*∈*A*∧∃*x*∈*B*∧*f*(*x*)= *y* ⇒(∃*x*1∈*A*∧*f*(*x*1)= *y*) ∧(∃*x*2∈*B*∧*f*(*x*2)= *y*) ⇔ *y*∈*f*(*A*)∧*y*∈*f*(*B*) ⇔ *y*∈*f*(*A*)∩*f*(*B*)

（3）对任意的*y*∈ *f*(*A*)-*f*(*B*)有，*y*∈*f*(*A*)∧*y*∉*f*(*B*)。即对某个*x*1∈*A*，*y*=*f*(*x*1)，但对任意*x*∈*B*，*y*∉*f*(*x*)。故对某个*x*1∈*A*-*B*，*y*=*f*(*x*1)，即 *y*∈ *f*(*A*-*B*)

于是 *f*(*A*)-*f*(*B*) ⊆ *f*(*A*-*B*)。

8. 设*f*: *A*→*B*是满射函数，且函数*g*: *B*→*P*(*A*)定义为:

*g*(b)={*x*|*x*∈*A*∧*f*(*x*)=*b*}

证明：*g*是单射。其逆成立吗？若成立给出证明，否则给出例子予以说明。

**证明：**因为*f*是满射函数，则对任意*b*∈*B*，至少存在一个*x*∈*A*，使得*f*(*x*)=*b*，故*g*的定义域为*B*。对任意的*b*1，*b*2∈*B*，且*b*1≠*b*2，

*g*(*b*1)={*x*|*x*∈*A*∧*f*(*x*)= *b*1}

*g*(*b*2)={*y*|*y*∈*A*∧*f*(*y*)= *b*2}

因为*b*1≠*b*2，*f*(*x*)≠*f*(*y*)，而*f*是函数，故*x*≠*y*，所以 *g*(*b*1) ≠*g*(*b*2)

故*g*是单射。

逆不成立。

例如：*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={*x*,*y*,*z*}，则

*f*: *A*→*B*，*f*(*a*)=*x*，*f*(*b*)=*x*，*f*(*c*)=*y*。

*g*: *B*→*P*(*A*)，*g*(*x*)={*a*,*b*}，*g*(*y*)={*c*}，*g*(*z*)= ∅。

*g*是单射，但*f*不是满射。

9. 证明：若*f*: *A*→*B*，*g*: *B*→*A*，且*g**f* =*IA*，*f* *g* =*IB*，则*g*=*f*-1，且*f*=*g*-1。

**证明：**因为*g**f* =*IA*，所以*g**f* (*a*1)= *g*(*f* (*a*1)) =*a*1，*g**f* (*a*2)= *g*(*f* (*a*2)) =*a*2，若*a*1≠*a*2，*g*(*f* (*a*1))≠*g*(*f* (*a*2))，所以*f* (*a*1)≠*f* (*a*2)，即*f*:是入射。

又对任意的*a*∈*A*有*g**f* (*a*)= *g*(*f* (*a*)) =*a*，即存在*f* (*a*)=*b*∈*B*，使得*g*(*b*) =*a*，因此*g*是满射。同理，若*f* *g* =*IB*，则*g*是入射且*f*是满射，故可知*f*和*g*都是双射函数。

设<*a*,*b*>∈*f*，因为<*a*,*a*>∈*IA*，而*g**f* =*IA*，故必有某个*c*∈*B*，使得<*a*,*c*>∈*f*且<*c*,*a*>∈*g*，由<*a*,*b*>∈*f*∧<*a*,*c*>∈*f*⇒*b*=*c*

因此<*b*,*a*>∈*g*。

反之，若<*b*,*a*>∈*g*，由<*b*,*b*>∈*IB*，故必有某个*d*∈*A*，有<*b*,*d*>∈*g*∧<*d*,*b*>∈*f*，由<*b*,*a*>∈*g*∧<*b*,*d*>∈*g*⇒*a*=*d*

因此<*a*,*b*>∈*f*。

上述证明得到<*a*,*b*>∈*f*当且仅当<*b*,*a*>∈*g*，所以*g*=*f*-1且*f*=*g*-1。

10. 证明：若(*g**f*)-1是一个函数，则*f*和*g*不一定是入射。

**证明：**设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2,3,4}，*C*={*x*,*y*,*z*}，*f*是*A*到*B*的函数，*g*是*B*到*C*的函数，

*f*={<*a*,2>,<*b*,3>,<*c*,4>}，*g*={<1,*x*>,<2,*x*>,<3,*y*>,<4,*z*>},

则*g**f*={<*a*,*x*>,<*b*,*y*>,<*c*,*z*>}，(*g**f*)-1={<*x*,*a* >,<*y*,*b* >,<*z*,*c*>}是双射函数，但*g*不是入射。