**离散数学习题答案**

## 习题一

1. 判断下列句子是否为命题？若是命题说明是真命题还是假命题。

（1）3是正数吗？

（2）*x*＋1=0。

（3）请穿上外衣。

（4）2＋1＝0。

（5）任一个实数的平方都是正实数。

（6）不存在最大素数。

（7）明天我去看电影。

（8）9＋5≤12。

（9）实践出真知。

（10）如果我掌握了英语、法语，那么学习其他欧洲语言就容易多了。

**解：**（1）、（2）、（3）不是命题。

（4）、（8）是假命题。

（5）、（6）、（9）、（10）是真命题。

（7）是命题，只是现在无法确定真值。

2. 设*P*表示命题“天下雪”，*Q*表示命题“我将去书店”，*R*表示命题“我有时间”，以符号形式写出下列命题。

（1）如果天不下雪并且我有时间，那么我将去书店。

（2）我将去书店，仅当我有时间。

（3）天不下雪。

（4）天下雪，我将不去书店。

**解：**

（1）（┐P∧R）→Q。

（2）Q→R。

（3）┐P。

（4）P→┐Q。

3. 将下列命题符号化。

（1）王皓球打得好，歌也唱得好。

（2）我一边看书，一边听音乐。

（3）老张和老李都是球迷。

（4）只要努力学习，成绩会好的。

（5）只有休息好，才能工作好。

（6）如果*a*和*b*是偶数，那么*a*+*b*也是偶数。

（7）我们不能既游泳又跑步。

（8）我反悔，仅当太阳从西边出来。

（9）如果*f*(*x*)在点*x*0处可导，则*f*(*x*)在点*x*0处可微。反之亦然。

（10）如果张老师和李老师都不讲这门课，那么王老师就讲这门课。

（11）四边形*ABCD*是平行四边形，当且仅当*ABCD*的对边平行。

（12）或者你没有给我写信，或者信在途中丢失了。

**解：**

（1）P：王皓球打得好，Q：王皓歌唱得好。原命题可符号化：P∧Q。

（2）P：我看书，Q：我听音乐。原命题可符号化：P∧Q。

（3）P：老张是球迷，Q：老李是球迷。原命题可符号化：P∧Q。

（4）P：努力学习，Q：成绩会好。原命题可符号化：P→Q。

（5）P：休息好，Q：工作好。原命题可符号化：Q→P。

（6）P：*a*是偶数，Q：*b*是偶数，R：*a*+*b*是偶数。原命题可符号化：（P∧Q）→R。

（7）P：我们游泳，Q：我们跑步。原命题可符号化：┐（P∧Q）。

（8）P：我反悔，Q：太阳从西边出来。原命题可符号化：P→Q。

（9）P：*f*(*x*)在点*x*0处可导， Q：*f*(*x*)在点*x*0处可微。原命题可符号化：P→← Q。

（10）P：张老师讲这门课，Q：李老师讲这门课，R：王老师讲这门课。原命题可符号化：（┐P∧┐Q）→R。

（11）P：四边形*ABCD*是平行四边形，Q：四边形*ABCD*的对边平行。原命题可符号化：P→← Q。

（12）P：你给我写信，Q：信在途中丢失了。原命题可符号化：┐P←∣ → （P∧Q）。

4. 判断下列公式哪些是合式公式，哪些不是合式公式。

（1）(*Q*→*R*∧*S*)

（2）(*P*→← (*R*→*S*))

（3）((┐*P*→*Q*) →(*Q*→*P*)))

（4）(*RS*→***F***)

（5）((*P*→(*Q*→*R*))→((*P*→*Q*) →(*P*→*R*)))

**解：**

（1）、（2）、（5）是合式公式，（3）、（4）不是合式公式。

5. 否定下列命题：

（1） 桂林处处山清水秀。

（2） 每一个自然数都是偶数。

**解：**

（1）桂林并非处处山清水秀。

（2）并不是每一个自然数都是偶数。或：有些自然数不是偶数。

6. 给出下述每一个命题的逆命题、否命题和逆否命题。

（1） 如果天下雨，我将不去。

（2） 仅当你去我才不去。

（3） 如果Δ=*b*2−4*ac*<0，则方程*ax*2+*bx*+*c*=0无实数解。

（4） 如果我不获得奖学金，我就不能完成学业。

**解：**

（1）逆命题：如果我不去，那么天下雨。

否命题：如果天不下雨，我就去。

逆否命题：如果我去，那么天不下雨。

（2）逆命题：如果你去，我将不去。

否命题：如果我去，你将不去。

逆否命题：如果你不去，我就去。

（3）逆命题：如果方程*ax*2+*bx*+*c*=0无实数解，则Δ=*b*2−4*ac*<0。

否命题：如果Δ=*b*2−4*ac*≥0，则方程*ax*2+*bx*+*c*=0有实数解。

逆否命题：如果方程*ax*2+*bx*+*c*=0有实数解，则Δ=*b*2−4*ac*≥0。

（4）逆命题：如果我不能完成学业，那么我没有获得奖学金。

否命题：如果我获得奖学金，我就能完成学业。

逆否命题：如果我就能完成学业，那么我就获得奖学金。

7. 求下列各式的真值表。

（1）*P*→(*R*∨*S*)

（2）(*P*∧*R*) ∨(*P*→*Q*)

（3）(*P*∨*Q*) →← (*Q*∨*P*)

（4）(*P*∨┐*Q*) ∧*R*

（5）(*P*→(*Q*→*R*))→((*P*→*Q*) →(*P*→*R*))

**解：**

（1）*P*→(*R*∨*S*)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *R* | *S* | *R*∨*S* | *P*→(*R*∨*S*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

（2）(*P*∧*R*) ∨(*P*→*Q*)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *P*∧*R* | *P*→*Q* | (*P*∧*R*) ∨(*P*→*Q*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

（3）(*P*∨*Q*) →← (*Q*∨*P*)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *P*∨*Q* | *Q*∨*P* | (*P*∨*Q*) →← (*Q*∨*P*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

（4）(*P*∨┐*Q*) ∧*R*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | ┐*Q* | *P*∨┐*Q* | (*P*∨┐*Q*) ∧*R* |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

（5）(*P*→(*Q*→*R*))→((*P*→*Q*) →(*P*→*R*))

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *Q*→*R* | *P*→(*Q*→*R*) | *P*→*Q* | *P*→*R* | (*P*→*Q*) →(*P*→*R*) | 原公式 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

8. 用真值表判断下列公式的类型：

(1) *P*∨┐*Q*→*Q*

(2) ((*P*→*Q*)∨(*R*→*S*))→((*P*∨*R*)→(*Q*∨*S*))

**解：**

(1) *P*∨┐*Q*→*Q*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | ┐*Q* | *P*∨┐*Q* | *P*∨┐*Q*→*Q* |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

（1）为可满足式。

(2) ((*P*→*Q*)∨(*R*→*S*))→((*P*∨*R*)→(*Q*∨*S*))

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *S* | *P*→*Q* | *R*→*S* | (*P*→*Q*)∨(*R*→*S*) | *P*∨*R* | *Q*∨*S* | (*P*∨*R*)→(*Q*∨*S*) | 原公式 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

（2）为可满足式。

9. 证明下列等价式。

（1）*P*→(*Q*→*P*) ⇔┐*P*→(*P*→┐*Q*)

（2）┐(*P*→← *Q*)⇔ (*P*∨*Q*) ∧┐(*P*∧*Q*)

（3）┐(*P*→*Q*)⇔ *P*∧┐*Q*

（4）┐(*P*→← *Q*)⇔(*P*∧┐*Q*) ∨ (┐*P*∧*Q*)

（5）*P*→(*Q*∨*R*) ⇔(*P*∧┐*Q*) →*R*

（6）(*P*→*R*) ∧(*Q*→*R*)⇔ (*P*∨*Q*) →*R*

（7）((*P*∧*Q*)→*R*) ∧(*Q*→(*S*∨*R*))⇔ (*Q*∧(*S*→*P*)) →*R*

**证明：**

（1）*P*→(*Q*→*P*) ⇔┐*P*∨(┐*Q*∨*P*) ⇔*P*∨(┐*P*∨┐*Q*)⇔┐*P*→(*P*→┐*Q*)

（2）┐(*P*→← *Q*)⇔┐((*P*∧*Q*) ∨(┐*P*∧┐*Q*)) ⇔┐(*P*∧*Q*) ∧┐(┐*P*∧┐*Q*)) ⇔ (*P*∨*Q*) ∧┐(*P*∧*Q*)

（3）┐(*P*→*Q*)⇔ ┐(┐*P*∨*Q*) ⇔*P*∧┐*Q*

（4）┐(*P*→← *Q*)⇔┐((*P*→*Q*)∧(*Q*→*P*)) ⇔┐ (┐*P*∨*Q*) ∨┐ (┐*Q*∨*P*) ⇔(*P*∧┐*Q*) ∨ (┐*P*∧*Q*)

（5）*P*→(*Q*∨*R*) ⇔┐*P*∨(*Q*∨*R*) ⇔┐(*P*∧┐*Q*) ∨*R* ⇔(*P*∧┐*Q*) →*R*

（6）(*P*→*R*) ∧(*Q*→*R*)⇔ (┐*P*∨*R*) ∧(┐*Q*∨*R*) ⇔ (┐*P*∧┐*Q*)∨*R*⇔┐(*P*∨*Q*)∨*R*⇔ (*P*∨*Q*) →*R*

（7）((*P*∧*Q*)→*R*) ∧(*Q*→(*S*∨*R*))⇔ ┐(*P*∧*Q*) ∨*R*) ∧(┐*Q*∨(*S*∨*R*)) ⇔┐*Q*∨(┐*P*∧*S*)∨*R*

⇔┐(*Q*∧(┐*S*∨*P*)) ∨*R* ⇔┐(*Q*∧(*S*→*P*)) ∨*R* ⇔ (*Q*∧(*S*→*P*)) →*R*

10. 使用恒等式证明下列各式，并写出它们对偶的公式。

（1）(┐(┐*P*∨┐*Q*)∨┐(┐*P*∨*Q*)) ⇔ *P*

（2）(*P*∨┐*Q*) ∧(*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨┐*Q*)⇔┐(┐*P*∨*Q*)

（3）*Q*∨┐((┐*P*∨*Q*)∧*P*) ⇔***T***

**证明：**

（1）(┐(┐*P*∨┐*Q*)∨┐(┐*P*∨*Q*))⇔ (*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*Q*)⇔*P*∧(*Q*∨┐*Q*) ⇔*P*∧***T***⇔*P*

（2）(*P*∨┐*Q*) ∧(*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨┐*Q*)⇔*P*∨(┐*Q*∧*Q*)∧(┐*P*∨┐*Q*)⇔*P*∨***F***∧(┐*P*∨┐*Q*) ⇔*P*∧(┐*P*∨┐*Q*)⇔(*P*∧┐*P*)∨(*P*∧┐*Q*)⇔***F***∨(*P*∧┐*Q*)⇔(*P*∧┐*Q*) ⇔┐(┐*P*∨*Q*)

（3）*Q*∨┐((┐*P*∨*Q*)∧*P*)⇔*Q*∨(┐(┐*P*∨*Q*)∨┐*P*)⇔ *Q*∨(*P*∧┐*Q*)∨┐*P*

⇔( *Q*∨┐*P*∨*P* ) ∧(*Q*∨┐*P*∨┐*Q*)⇔ ***T***∨***T***⇔***T***

11. 试证明{∨}，{→}不是全功能联结词集合。

**证明：**

若{∨}是最小联结词组，则 ┐*P*⇔( *P*∨...)

对所有命题变元指派***T***，则等价式左边为***F***，右边为***T***，等价式矛盾。

若{→}是最小联结词组，则 ┐*P*⇔ *P*→ ( *P*→( *P*→...)...)

对所有命题变元指派***T***，则等价式左边为***F***，右边为***T***，等价式矛盾。

12. 证明下列蕴涵式：

（1）*P*∧*Q*⇒(*P*→*Q*)

（2）*P* ⇒(*Q*→*P*)

（3）(*P*→(*Q*→*R*)) ⇒ ( *P*→*Q*) →(*P*→*R*)

**证明：**

（1）*P*∧*Q*→(*P*→*Q*)⇔┐( *P*∧*Q*)∨(*P*→*Q*)⇔ (┐*P*∨┐*Q*)∨(┐*P*∨*Q*)⇔┐*P*∨(┐*Q*∨*Q*)⇔***T***

因为*P*∧*Q*→(*P*→*Q*)为永真式，所以*P*∧*Q*⇒(*P*→*Q*)。

（2）*P* →( *Q*→*P*) ⇔┐*P*∨(┐*Q*∨*P*) ⇔┐*Q*∨(┐*P*∨*P*) ⇔***T***

因为*P* →( *Q*→*P*)为永真式，所以*P* ⇒(*Q*→*P*)。

（3）(*P*→(*Q*→*R*)) →(( *P*→*Q*) →(*P*→*R*))

⇔ ┐(┐*P*∨(┐*Q*∨*R*))∨(┐(┐*P*∨*Q*) ∨(┐*P*∨*R*))

⇔(*P*∧(*Q*∧┐*R*))∨((*P*∧┐*Q*) ∨(┐*P*∨*R*))

⇔ (*P*∧*Q*∧┐*R*)∨((*P*∨┐*P*∨*R*)∧(┐*Q*∨┐*P*∨*R*))

⇔(*P*∧*Q*∧┐*R*)∨(┐*P*∨┐*Q*∨*R*)

⇔((*P*∨(┐*P*∨┐*Q*∨*R*))∧(*Q*∨(┐*P*∨┐*Q*∨*R*))∧(┐*R*∨(┐*P*∨┐*Q*∨*R*) )⇔ ***T***

因为(*P*→(*Q*→*R*)) →(( *P*→*Q*) →(*P*→*R*))为永真式，所以(*P*→(*Q*→*R*)) ⇒ ( *P*→*Q*) →(*P*→*R*)。

13. 对下列各公式，试仅用↑或↓表示。

（1）┐*P*

（2）*P*∧*Q*

（3）*P*∨*Q*

（4）*P*→*Q*

**解：**

（1）┐*P*⇔┐(*P*∧*P*)⇔ *P*↑*P*

（2）*P*∧*Q*⇔(*P*↑*Q*)↑(*P*↑*Q*)

（3）*P*∨*Q*⇔┐(┐*P*∧┐*Q*) ⇔(┐*P*↑┐*Q*) ⇔(*P*↑*P*)↑(*Q*↑*Q*)

（4）*P*→*Q*⇔┐*P*∨*Q*⇔(*P*↑*P*)∨*Q* ⇔((*P*↑*P*)↑(*P*↑*P*))↑(*Q*↑*Q*)

14. 将下列公式化成与之等值且仅含{┐，→}中联结词的公式。

（1）(*P*→┐*Q*)∧*R*

（2）*P* →← (*Q*∧*R*)∨*P*

**解：**

（1）(*P*→┐*Q*)∧*R*⇔(┐*P*∨┐*Q*)∧*R*⇔(┐*P*∧*R*)∨(┐*Q*∧*R*)⇔┐(*P*∨┐*R*)∨┐(*Q*∨┐*R*)

⇔┐(*R*→*P*)∨┐(*R*→*Q*)⇔(*R*→*P*)→┐(*R*→*Q*)

（2）*P* →← (*Q*∧*R*)∨*P*⇔(*P*→((*Q*∧*R*)∨*P*))∧(((*Q*∧*R*)∨*P*)→*P*)⇔(┐*P*∨((*Q*∧*R*)∨*P*))∧(┐((*Q*∧*R*)∨*P*)∨*P*)⇔ ***T***∧(((┐*Q*∨┐*R*)∧┐*P*)∨*P*)⇔((┐*Q*∨┐*R*)∨*P*)⇔ *P*∨(┐*Q*∨┐*R*)⇔*P*∨(*Q*→┐*R*)⇔ ┐*P*→(*Q*→┐*R*)

15. 如果*A*(*P*，*Q*，*R*)由*R*↑(*Q*∧┐(*R*↓*P*))给出，求它的对偶*A*\*(*P*，*Q*，*R*)，并求出与*A*及*A*\*等价且仅包含联接词“∧”，“∨”及“┐”的公式。

**解：**

*A*\*(*P*，*Q*，*R*)：*R*↓ (*Q*∨┐(*R*↑*P*))

*R*↑(*Q*∧┐(*R*↓*P*))⇔┐(*R*∧(*Q*∧(*R*∨*P*)))⇔┐*R*∨┐*Q*∨(┐*R*∧┐*P*)

*R*↓ (*Q*∨┐(*R*↑*P*))⇔┐*R*∧┐*Q*∧(┐*R*∨┐*P*)

16. 把*P*↑*Q*表示为只含有“↓”的等价公式。

**解：***P*↑*Q*⇔┐(*P*∧*Q*)⇔┐((*P*↓*P*)↓(*Q*↓*Q*))⇔ ((*P*↓*P*)↓(*Q*↓*Q*))↓((*P*↓*P*)↓(*Q*↓*Q*))

17. 证明：

（1）┐(*P*↑*Q*)⇔┐*P*↓┐*Q*

（2）┐(*P*↓*Q*)⇔┐*P*↑┐*Q*

**证明：**

（1）┐(*P*↑*Q*)⇔┐(┐(*P*∧*Q*)) ⇔(*P*∧*Q*)⇔┐(┐*P*∨┐*Q*)⇔┐*P*↓┐*Q*

（2）┐(*P*↓*Q*)⇔┐(┐(*P*∨*Q*)) ⇔(*P*∨*Q*)⇔┐(┐*P*∧┐*Q*)⇔┐*P*↑┐*Q*

18. 求公式*P*∧(*P*→*Q*)的析取范式和合取范式。

**解：***P*∧(*P*→*Q*) ⇔ *P*∧(┐*P*∨*Q*) 合取范式

⇔(*P*∧┐*P*)∨(*P*∧*Q*) 析取范式

19. 求下列公式的主析取范式和主合取范式。

（1）(┐*P*→*Q*)→(┐*Q*∨*P*)

（2）(*P*→ (*P*∨*Q*))∨*R*

（3）(*P*→ *Q*∧*R*)∧(┐*P*→ (┐*Q*∧┐*R*))

**解：**

（1）真值表法

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | ┐*P*→*Q* | ┐*Q*∨*P* | (┐*P*→*Q*)→(┐*Q*∨*P*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

主析取范式为：(*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*Q*)∨(┐*P*∧┐*Q*)

主合取范式为：*P*∨┐*Q*

公式化归法

(┐*P*→*Q*)→(┐*Q*∨*P*)⇔┐(*P*∨*Q*)∨(┐*Q*∨*P*)⇔ (┐*P*∧┐*Q*)∨(┐*Q*∨*P*)

⇔(┐*P*∨┐*Q*∨*P*)∧(┐*Q*∨┐*Q*∨*P*) ⇔*P*∨┐*Q* 主合取范式

⇔(*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*Q*)∨(┐*P*∧┐*Q*) 主析取范式

（2）真值表法(*P*→ (*P*∨*Q*))∨*R*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *P*∨*Q* | *P*→ (*P*∨*Q*) | (*P*→ (*P*∨*Q*))∨*R* |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

原式为永真式，其主析取范式为所有小项的析取，即：

*m*000∨*m*001∨*m*010∨*m*011∨*m*100∨*m*101∨*m*110∨*m*111

不能表示为主合取范式。

公式化归法

(*P*→ (*P*∨*Q*))∨*R*⇔(┐*P*∨(*P*∨*Q*))∨*R*⇔***T***∨*R*⇔ ***T***

（3）真值表法(*P*→ *Q*∧*R*)∧((┐*P*→ (┐*Q*∧┐*R*))

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *Q*∧*R* | *P*→ *Q*∧*R* | ┐*Q*∧┐*R* | ┐*P*→ (┐*Q*∧┐*R*) | 原公式 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

主析取范式为：(*P*∧*Q*∧*R*)∨(┐*P*∧┐*Q*∧┐*R*)⇔*m*111∨*m*000⇔*m*7∨*m*0

主合取范式为：*M*1∧*M*2∧*M*3∧*M*4∧*M*5∧*M*6⇔ *M*001∧*M*010∧*M*011∧*M*100∧*M*101∧*M*110⇔(*P*∨*Q*∨┐*R*)∧(*P*∨┐*Q*∨*R*)∧(*P*∨┐*Q*∨┐*R*)∧(┐*P*∨*Q*∨*R*)∧(┐*P*∨*Q*∨┐*R*)∧(┐*P*∨┐*Q*∨*R*)

20. 求下列公式的主析取范式和主合取范式，并指出该公式的类型。

（1）(┐*P*∨┐*Q*)→(*P*→← ┐*Q*)

（2）*Q*∧(*P*∨┐*Q*)

（3）*P*∨(┐*P*→(*Q*∨(┐*Q*→*R*)))

（4）(*P*→(*Q*∧*R*))∧(┐*P*→(┐*Q*∧┐*R*))

（5）*P*→(*P*∧(*Q*→ *P*))

（6）(*Q*→*P*)∧(┐*P*∧*Q*)

**解：**

（1）

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | ┐*P*∨┐*Q* | *P*→← ┐*Q* | (┐*P*∨┐*Q*)→(*P*→← ┐*Q*) |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

主析取范式为：(*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*Q*)∨(┐*P*∧*Q*)

主合取范式为：*P*∨*Q*

公式为可满足式。

（2）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *P*∨┐*Q* | *Q*∧(*P*∨┐*Q*) |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

主析取范式为：*P*∧*Q*

主合取范式为：(┐*P*∨*Q*)∧(*P*∨┐*Q*)∧(*P*∨*Q*)

公式为可满足式。

（3）*P*∨(┐*P*→(*Q*∨(┐*Q*→*R*)))⇔ *P*∨(*P*∨(*Q*∨(*Q*∨*R*)))

⇔ *P*∨*Q*∨*R* 主合取范式

⇔ *M*000⇔*M*0⇔ *m*1∨*m*2∨*m*3∨*m*4∨*m*5∨*m*6∨*m*7 主析取范式

公式为可满足式。

（4）(*P*→(*Q*∧*R*))∧(┐*P*→(┐*Q*∧┐*R*))⇔(┐*P*∨(*Q*∧*R*))∧(*P*∨(┐*Q*∧┐*R*))⇔(┐*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨*R*)∧(*P*∨┐*Q*)∧(*P*∨┐*R*)⇔(┐*P*∨*Q*∨*R*)∧(┐*P*∨*Q*∨┐*R*)∧(┐*P*∨┐*Q*∨┐*R*)∧(*P*∨┐*Q*∨*R*)∧(*P*∨┐*Q*∨┐*R*)∧(*P*∨*Q*∨┐*R*) ⇔ *M*100∧*M*101∧*M*111∧*M*010∧*M*011∧*M*001⇔*M*4∧*M*5∧*M*7∧*M*2∧*M*3∧*M*1 主合取范式

⇔ *m*0∨*m*6⇔ *m*000∨*m*110 主析取范式

公式为可满足式。

（5）*P*→(*P*∧(*Q*→ *P*))⇔┐*P*∨(*P*∧(┐*Q*∨*P*))⇔(┐*P*∨*P*)∧(┐*P*∨(┐*Q*∨*P*))⇔***T***

主析取范式为：*m*0∨*m*1∨*m*2∨*m*3

公式为永真式。

（6）(*Q*→*P*)∧(┐*P*∧*Q*)⇔(┐*Q*∨*P*)∧(┐*P*∧*Q*)⇔(┐*Q*∧┐*P*∧*Q*)∨(*P*∧┐*P*∧*Q*) ⇔***F***

主合取范式为：*M*0∧*M*1∧*M*2∧*M*3

公式为永假式。

21. 用将合式公式化为范式的方法证明下列各题中两式是等价的。

（1）(*P*→*Q*)∧(*P*→*R*) ，*P*→(*Q*∧*R*)

（2）(*P*→*Q*)→(*P*∧*Q*)，(┐*P*→*Q*)∧(*Q*→*P*)

（3）*P*∧*Q*∧(┐*P*∨┐*Q*)，┐*P*∧┐*Q*∧(*P*∨*Q*)

（4）*P*∨(*P*→(*P*∧*Q*))，┐*P*∨┐*Q*∨(*P*∧*Q*)

**证明：**

（1）(*P*→*Q*)∧(*P*→*R*) ⇔(┐*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨*R*)

*P*→(*Q*∧*R*) ⇔┐*P*∨(*Q*∧*R*) ⇔(┐*P*∨*Q*)∧(┐*P*∨*R*)

（2）(*P*→*Q*)→(*P*∧*Q*) ⇔┐(┐*P*∨*Q*)∨(*P*∧*Q*)⇔(*P*∧┐*Q*)∨(*P*∧*Q*)⇔*P*∧(┐*Q*∨*Q*)⇔*P*

(┐*P*→*Q*)∧(*Q*→*P*) ⇔(*P*∨*Q*)∧(┐*Q*∨*P*)⇔*P*∨(*Q*∧┐*Q*)⇔ *P*

（3）*P*∧*Q*∧(┐*P*∨┐*Q*) ⇔(*P*∧*Q*∧┐*P*)∨(*P*∧*Q*∧┐*Q*) ⇔***F***

┐*P*∧┐*Q*∧(*P*∨*Q*) ⇔(┐*P*∧┐*Q*∧*P*)∨(┐*P*∧┐*Q*∧*Q*) ⇔***F***

（4）*P*∨(*P*→(*P*∧*Q*)) ⇔ *P*∨(┐*P*∨(*P*∧*Q*)) ⇔***T***∨(*P*∧*Q*) ⇔***T***

┐*P*∨┐*Q*∨(*P*∧*Q*) ⇔(┐*P*∨┐*Q*∨*P*)∧(┐*P*∨┐*Q*∨*Q*) ⇔***T***

22. 用推理规则证明以下各式。

（1）┐(*P*∧┐*Q*)，┐*Q*∨*R*，┐*R* ⇒┐*P*

（2）*A*→(*B*∨*C*)，(*D*∨*E*)→*A*，*D*∨*E* ⇒ *B*∨*C*

（3）*B*∧*C*，(*B* →← *C*)→(*D*∨*E*)⇒*D*∨*E*

（4）*P*→*Q*，(┐*Q*∨*R*)∧┐*R*，┐(┐*P*∧*S*)⇒┐*S*

**证明：**

（1）┐(*P*∧┐*Q*)，┐*Q*∨*R*，┐*R* ⇒┐*P*

**证明：**

(1) ┐*R* P

(2) ┐*Q*∨*R* P

(3) ┐*Q* T(1)(2) I

(4) ┐(*P*∧┐*Q*)P

(5) ┐*P*∨*Q* T(4) E

(6) ┐*P* T(3)(5) I

（2）*A*→(*B*∨*C*)，(*D*∨*E*)→*A*，*D*∨*E* ⇒ *B*∨*C*

**证明：**

(1) *D*∨*E* P

(2) (*D*∨*E*)→*A* P

(3) *A* T(1)(2) I

(4) *A*→(*B*∨*C*)P

(5) *B*∨*C* T(3)(4) I

（3）*B*∧*C*，(*B* →← *C*)→(*D*∨*E*)⇒*D*∨*E*

**证明：**

(1) *B*∧*C* P

(2) *B* →← *C* T(1) I

(3) (*B* →← *C*)→(*D*∨*E*)P

(4) *D*∨*E* T(2)(3) I

（4）*P*→*Q*，(┐*Q*∨*R*)∧┐*R*，┐(┐*P*∧*S*)⇒┐*S*

**证明：**

(1) (┐*Q*∨*R*)∧┐*R* P

(2) ┐*Q*∨*R* T(1) I

(3) ┐*R* T(1) I

(4) ┐*Q* T(2)(3) I

(5) ┐(┐*P*∧*S*)P

(6) *S*→ *P* T(5) E

(7) *P*→*Q* P

(8) *S*→*Q* T(6) (7) I

(9) ┐*Q*→┐*S* T(8) E

(10) ┐*S*  T(4) (8) I

23. 仅用规则**P**和**T**，推证以下公式。

（1）┐*A*∨*B*，*C*→┐*B*⇒ *A*→┐*C*

（2）*A*→(*B*→*C*)，(*C*∧*D*)→*E*，┐*F*→(*D*∧┐*E*) ⇒ *A*→(*B*→*F*)

（3）*A*∨*B*→*C*∧*D*，*D*∨*E*→*F*，⇒ *A*→*F*

（4）*A*→(*B*∧*C*)，┐*B*∨*D*，(*E*→┐*F*) →┐*D*，*B*→(*A*∧┐*E*)⇒*B*→*E*

（5）(*A*→*B*)∧(*C*→*D*)，(*B*→*E*)∧(*D*→*F*)，┐(*E*∧*F*)，*A*→*C* ⇒┐*A*

**证明：**

（1）┐*A*∨*B*，*C*→┐*B*⇒ *A*→┐*C*

**证明：**

(1) ┐*A*∨*B* P

(2) *A*→*B* T(1) E

(3) *C*→┐*B* P

(4) *B*→┐*C* T(3) E

(5) *A*→┐*C* T(2) (4) I

（2）*A*→(*B*→*C*)，(*C*∧*D*)→*E*，┐*F*→(*D*∧┐*E*) ⇒ *A*→(*B*→*F*)

**证明：**

(1) *A*→(*B*→*C*) P

(2) ┐*A*∨┐*B*∨*C* T(1) E

(3) (*A*∧*B*)→*C* T(2) E

(4) (*C*∧*D*)→*E* P

(5) *C*→┐(*D*∧┐*E*) T(4) E

(6) (*D*∧┐*E*) →┐*C* T(5) E

(7) ┐*F*→(*D*∧┐*E*)P

(8) ┐*F*→┐*C* T(6) (7) I

(9) *C*→*F* T(8) E

(10) (*A*∧*B*)→*F* T(3) (9) I

(11) ┐*A*∨┐*B*∨*F* T(10) E

(12) *A*→(*B*→*F*) T(11) E

（3）*A*∨*B*→*C*∧*D*，*D*∨*E*→*F*⇒ *A*→*F*

**证明：**

(1) *A*∨*B*→*C*∧*D* P

(2) *A*∨*B*→*D* T(1) I

(3) *D*∨*E*→*F* P

(4) *D*→*F* T(3) I

(5) *A*∨*B*→*F* T(2)(4) I

(6) *A*→*F* T(5) I

（4）*A*→(*B*∧*C*)，┐*B*∨*D*，(*E*→┐*F*) →┐*D*，*B*→(*A*∧┐*E*)⇒*B*→*E*

**证明：**

(1) ┐*B*∨*D* P

(2) *B*→*D* T(1)E

(3) (*E*→┐*F*) →┐*D* P

(4) *D*→┐(*E*→┐*F*)T(3) E

(5) *D*→(*E*∧*F*)T(4) E

(6) *B*→(*E*∧*F*) T(2)(5) I

(7) *B*→*E* T(6) I

（5）(*A*→*B*)∧(*C*→*D*)，(*B*→*E*)∧(*D*→*F*)，┐(*E*∧*F*)，*A*→*C* ⇒┐*A*

**证明：**

(1) (*A*→*B*)∧(*C*→*D*)P

(2) *A*→*B* T(1) I

(3) *C*→*D* T(1) I

(4) (*B*→*E*)∧(*D*→*F*) P

(5) *B*→*E* T(4) I

(6) *D*→*F* T(4) I

(7) *A*→*E* T(2) (5) I

(8) *C*→*F* T(3) (6) I

(9) *A*→*C* P

(10) *A*→*F* T(8) (9) I

(11) *A*→(*E*∧*F*) T(7) (10) I

(12) ┐(*E*∧*F*)→┐*A* T(11) E

(13) ┐(*E*∧*F*) P

(14) ┐*A*  T(12) (13) I

24. 用**CP**规则推证上题中的（1）、（2）、（3）和（4）式。

**证明：**

（1）┐*A*∨*B*，*C*→┐*B*⇒ *A*→┐*C*

**证明：**

(1) *A* P（附加前提）

(2) ┐*A*∨*B* P

(3) *B* T(1) (2) I

(4) *C*→┐*B* P

(5) ┐*C* T(3) (4) I

(6) *A*→┐*C* T(1) (5) CP

（2）*A*→(*B*→*C*)，(*C*∧*D*)→*E*，┐*F*→(*D*∧┐*E*) ⇒ *A*→(*B*→*F*)

**证明：**

(1) *A* P（附加前提）

(2) *A*→(*B*→*C*)P

(3) *B*→*C* T(1) (2) I

(4) (*C*∧*D*)→*E* P

(5) *C*→┐(*D*∧┐*E*)T(4) E

(6) *B*→┐(*D*∧┐*E*)T(3)(5) I

(7) ┐*F*→(*D*∧┐*E*)P

(8) ┐(*D*∧┐*E*) →*F* T(7) E

(9) *B*→*F* T(6)(8) I

(10) *A*→(*B*→*F*) CP(1)(9)

（3）*A*∨*B*→*C*∧*D*，*D*∨*E*→*F*⇒ *A*→*F*

**证明：**

(1) *A* P（附加前提）

(2) *A*∨*B* T(1) I

(3) *A*∨*B*→*C*∧*D* P

(4) *C*∧*D*  T(2) (3) I

(5) *D* T(4) I

(6) *D*∨*E*  T(5) I

(7) *D*∨*E*→*F* P

(8) *F*  T(6)(7) I

(9) *A*→*F* CP(5)(8)

（4）*A*→(*B*∧*C*)，┐*B*∨*D*，(*E*→┐*F*) →┐*D*，*B*→(*A*∧┐*E*)⇒*B*→*E*

**证明：**

(1) *B* P（附加前提）

(2) ┐*B*∨*D* P

(3) *D* T(1) (2)I

(4) (*E*→┐*F*) →┐*D* P

(5) *D*→┐(*E*→┐*F*)T(4) E

(6) ┐(*E*→┐*F*) T(3) (5) I

(7) *E*∧*F* T(6) E

(8) *E*  T(7) I

(9) *B*→*E* CP(1)(8)

25. 证明下列各式。

（1）*R*→┐*Q*，*R*∨*S*，*S*→┐*Q*，*P*→*Q*⇒┐*P*

（2）*S*→┐*Q*，*R*∨*S*，┐*R*，┐*P*→← *Q*⇒*P*

（3）┐(*P*→*Q*)→┐(*R*∨*S*)，(*Q*→*P*)∨┐*R*，*R*⇒*P*→← *Q*

**证明：**

（1）*R*→┐*Q*，*R*∨*S*，*S*→┐*Q*，*P*→*Q*⇒┐*P*

**证明：**

(1) *P* P(附加前提)

(2) *P*→*Q* P

(3) *Q* T(1)(2) I

(4) *R*→┐*Q* P

(5) *S*→┐*Q* P

(6) *Q*→┐*R* T(4) E

(7) *Q*→┐*S* T(5) E

(8) ┐*R* T(3)(6) I

(9) ┐*S* T(3)(7) I

(10) ┐*R*∧┐*S* T(8)(9) I

(11) ┐( *R*∨*S*) T(10) E

(12) *R*∨*S* P

(13) ┐( *R*∨*S*)∧( *R*∨*S*)(矛盾) T(12)(13) I

（2）*S*→┐*Q*，*R*∨*S*，┐*R*，┐*P*→← *Q*⇒*P*

**证明：**

(1) ┐*R* P

(2) *R*∨*S* P

(3) *S* T(1)(2) I

(4) *S*→┐*Q* P

(5) ┐*Q* T(3)(4) I

(6) ┐*P*→← *Q* P

(7) (┐*P*→*Q*)∧(*Q*→┐*P*)T(6) E

(8) ┐*P*→*Q* T(7) I

(9) ┐*Q*→*P* T(8) E

(10) *P* T(5)(9) I

（3）┐(*P*→*Q*)→┐(*R*∨*S*)，(*Q*→*P*)∨┐*R*，*R*⇒*P*→← *Q*

**证明：**

(1) *R* P

(2) (*Q*→*P*)∨┐*R* P

(3) *Q*→*P* T(1)(2) I

(4) ┐(*P*→*Q*)→┐(*R*∨*S*)P

(5) (*R*∨*S*)→(*P*→*Q*)T(4) E

(6) *P*→*Q* T(1)(5) I

(7) (*P*→*Q*)∧( *Q*→*P*)T(3)(6) I

(8) *P*→← *Q* T(7) E

26. 甲、乙、丙和丁四人参加考试，有人问他们，谁的成绩最好？甲说“不是我”，乙说“是丁”，丙说“是乙”，丁说“不是我”。四人的回答只有一人符合实际。问成绩最好的是哪些？若只有一人成绩最好，是谁？

**解：**设*A*：甲的成绩最好。*B*：乙的成绩最好。*C*：丙的成绩最好。*D*：丁的成绩最好。

因为四人的回答只有一人符合实际，所以

若甲的回答符合实际，有：(┐*A*∧┐*D*∧┐*B*∧*D*)

若乙的回答符合实际，有：(*A*∧*D*∧┐*B*∧*D*)

若丙的回答符合实际，有：(*A*∧┐*D*∧*B*∧*D*)

若丁的回答符合实际，有：(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*D*)

所以：

(┐*A*∧┐*D*∧┐*B*∧*D*)∨(*A*∧*D*∧┐*B*∧*D*)∨(*A*∧┐*D*∧*B*∧*D*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*D*) ⇔***T***

即(*A*∧*D*∧┐*B*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*) ⇔***T***

但(*A*∧*D*∧┐*B*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*) ⇔(*A*∧*D*∧┐*B*∧*C*)∨(*A*∧*D*∧┐*B*∧┐*C*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧*C*)∨(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*C*)

(*A*∧*D*∧┐*B*∧*C*)表示甲、丙和丁三人并列成绩最好。

(*A*∧*D*∧┐*B*∧┐*C*)表示甲、丁两人并列成绩最好。

(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧*C*)表示甲、丙两人并列成绩最好。

(*A*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*C*)表示甲成绩最好。

若只有一人成绩最好，是甲。

27. 三人估计比赛结果，甲说“*A*第一，*B*第二”。乙说“*C*第二，*D*第四”。丙说“*A*第二，*D*第四”。结果三人估计得都不全对，但都对了一个，问*A*、*B*、*C*、*D*的名次。

**解：**设*A*：*A*第一。*B*：*B*第二。*C*：*C*第二。*D*：*D*第四。*E*：*A*第二。

根据题意有： (*A* ←∣ → *B*)∧(*C* ←∣ → *D*)∧(*E* ←∣ → *D*)成立。将其化为析取范式的形式：

(*A* ←∣ → *B*)∧(*C* ←∣ → *D*)∧(*E* ←∣ → *D*)

⇔(( *A*∧┐*B*)∨(┐*A*∧*B*))∧(( *C*∧┐*D*)∨(┐*C*∧*D*))∧(( *E*∧┐*D*)∨(┐*E*∧*D*))

⇔((*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*)∨( *A*∧┐*B*∧┐*C*∧*D*)∨(┐*A*∧*B*∧*C*∧┐*D*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*)) ∧(( *E*∧┐*D*)∨(┐*E*∧*D*))

其中( *A*∧┐*B*∧┐*C*∧*D*)和(┐*A*∧*B*∧*C*∧┐*D*)不复合题意，可以从上式中删去，原式化为：

((*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*))∧(( *E*∧┐*D*)∨(┐*E*∧*D*))

⇔(*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*∧*E*∧┐*D*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*∧*E*∧┐*D*)∨(*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*∧┐*E*∧*D*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*∧┐*E*∧*D*)

⇔(*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*∧*E*)∨(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*∧┐*E*)

(*A*∧┐*B*∧*C*∧┐*D*∧*E*)中*C*和*E*)同时成立矛盾，故只能是(┐*A*∧*B*∧┐*C*∧*D*∧┐*E*)成立，即*B*第二，*D*第四，*A*第三，*C*第一。

28. *A*，*B*，*C*，*D*四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？如何派？

（1）若*A*去则*C*和*D*要去一人；

（2）*B*和*C*不能都去；

（3）*C*去则*D*要留下。

**解：**设 *A*：*A*去。*B*：*B*去。*C*：*C*去。*D*：*D*去。

则（1）可表示为：*A*→(*C* ←∣ → *D*)；（2）可表示为：┐(*B*∧*C*)；（3）可表示为：*C*→┐*D*。

(1)(2)(3)同时成立，即*A*→(*C* ←∣ → *D*)∧┐(*B*∧*C*)∧(*C*→┐*D*)成立。将其化为析取范式的形式：*A*→(*C* ←∣ → *D*)∧┐(*B*∧*C*)∧(*C*→┐*D*)

⇔(┐*A*∨(┐*C*∧*D*)∨(*C*∧┐*D*)) ∧(┐*B*∨┐*C*)∧(┐*C*∨┐*D*)

⇔(┐*A*∨(┐*C*∧*D*)∨(*C*∧┐*D*)) ∧((┐*B*∧┐*C*)∨(┐*B*∧┐*D*)∨┐*C*∨(┐*C*∧┐*D*))

⇔(┐*A*∧┐*B*∧┐*C*)∨(┐*A*∧┐*B*∧┐*D*)∨(┐*A*∧┐*C*)∨(┐*A*∧┐*C*∧┐*D*)∨(┐*C*∧*D*∧┐*B*∧┐*C*)∨(┐*C*∧*D*∧┐*B*∧┐*D*)∨(┐*C*∧*D*∧┐*C*)∨(┐*C*∧*D*∧┐*C*∧┐*D*)∨(*C*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*C*)∨(*C*∧┐*D*∧┐*B*∧┐*D*)∨(*C*∧┐*D*∧┐*C*)∨(*C*∧┐*D*∧┐*C*∧┐*D*)

⇔(┐*A*∧┐*B*∧┐*C*)∨(┐*A*∧┐*B*∧┐*D*)∨(┐*A*∧┐*C*)∨(┐*A*∧┐*C*∧┐*D*)∨(┐*B*∧┐*C*∧*D*)∨(┐*C*∧*D*)∨(┐*B*∧*C*∧┐*D*)

上式划线的部分不符合题意，因此复合题意的有：

(┐*A*∧┐*C*)∨(┐*B*∧┐*C*∧*D*)∨(┐*C*∧*D*)∨(┐*B*∧*C*∧┐*D*)，

(┐*A*∧┐*C*)表示*B*和*D*去，(┐*B*∧┐*C*∧*D*) 表示*A*和*D*去，(┐*C*∧*D*)表示*A*和*D*去或*B*和*D*去，(┐*B*∧*C*∧┐*D*)表示*A*和*C*去。

故总共有三种派法：*B*和*D*去，*A*和*D*去或*A*和*C*去。

29. 在一个盗窃案件中，已知下列事实：

（1）甲或乙是窃贼。

（2）甲是窃贼，作案时间不会发生在夜间12点以前。

（3）若乙的证词正确，则夜间12点时被盗物品所在房间灯光未灭。

（4）若乙的证词不正确，则作案时间发生在夜间12点以前。

（5）夜间12点被盗房间的灯光灭了。

判断谁是盗贼，用构造证明法写出结论的判断过程。

**证明：**设*A*：甲是窃贼。*B*：乙是窃贼。*C*：作案时间发生在夜间12点以前。*D*：乙的证词正确。*E*：夜间12点被盗房间的灯光灭了。则（1）可以表示为：*A*∨*B*。（2）可以表示为：*A*→┐*C*。（3）可以表示为：*D*→┐*E*。（4）可以表示为：┐*D*→*C*。（5）可以表示为：*E*。

以下是推理过程：

(1) *E* P

(2) *D*→┐*E* P

(3) ┐*D* T(1)(2) I

(4) ┐*D*→*C* P

(5) *C* T(3)(4) I

(6) *A*→┐*C* P

(7) ┐*A* T(5)(6) I

(8) *A*∨*B* P

(9) *B* T(7)(8) I

所以*B*成立，即乙是窃贼。

30. 构造下面推理的证明：

（1）如果今天是星期六，我们就要到独秀峰或象鼻山去玩，如果独秀峰游人太多，我们就不去独秀峰。今天是星期六。独秀峰游人太多，所以我们去象鼻山玩。

（2）如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟，如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑。烤熟的鸭子不会跑。所以，羊不吃草。

**证明：**

（1）P：今天是星期六，Q：我们要到独秀峰去玩，R：我们要到象鼻山去玩，S：独秀峰游人太多。

P→(Q←∣ → R)，S→┐Q，P，S⇒ R

（1） S P

（2） S→┐Q P

（3） ┐Q T（1），（2）I

（4） P P

（5） P→(Q←∣ → R) P

（6） Q←∣ → R T（4），（5）I

（7） ┐Q T（6）I

（8） R T（7）I

（2）P：马会飞，Q：羊吃草，R：母鸡就会是飞鸟，S：烤熟的鸭子会跑。

（P∨Q）→R，R→S，┐S⇒┐Q

（1） ┐S P

（2） R→S P

（3） ┐R T（1），（2）I

（4） （P∨Q）→R P

（5） ┐（P∨Q） T（3），（4）I

（6） ┐P∧┐Q T（5）E

（7） ┐Q T（6）I

## 习题二

1. 用谓词表达式符号化下列命题。

（1）小王不是学生。

（2）小王聪明而又好学。

（3）小王和小张是好朋友。

（4）他是田径或球类运动员。

（5）若*m*是奇数，则2*m*不是奇数。

（6）每一个有理数都是实数。

（7）某些实数是有理数。

（8）并非每一个实数都是有理数。

（9）每一个自然数不是奇数就是偶数。

（10）不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫。

（11）有会说话的机器人。

（12）有的人不吃萝卜，但人都要喝水。

**解：**

（1）*S*(*x*)：*x*是学生。*w*：小王。┐*S*(*w*)

（2）*C*(*x*)：*x*聪明。*S*(*x*)：*x*好学。*w*：小王。*C*(*w*)∧*S*(*w*)

（3）*F*(*x*，*y*)：*x*和*y*是好朋友。*w*：小王。*z*：小张。*F*(*w*，*z*)

（4）*S*(*x*)：*x*是田径运动员。*B*(*x*)：*x*是球类运动员。*h*：他。*S*(*h*)∨*B*(*h*)

（5）*O*(*x*)：*x*是奇数。*O*(*m*)→┐*O*(2*m*)。

（6）*Q*(*x*)：*x*是有理数。*R*(*x*)：*x*是实数。(∀*x*)(*Q*(*x*)→*R*(*x*))

（7）*Q*(*x*)：*x*是有理数。*R*(*x*)：*x*是实数。(∃*x*)(*R*(*x*)∧*Q*(*x*))

（8）*Q*(*x*)：*x*是有理数。*R*(*x*)：*x*是实数。┐(∀*x*)( *R*(*x*)→*Q*(*x*))

（9）*N*(*x*)：*x*是自然数。*O*(*x*)：*x*是奇数。*E*(*x*)：*x*是偶数。(∀*x*)(*N*(*x*)→(*O*(*x*)←∣ → *E*(*x*)))

（10）*B*(*x*)：*x*是黑猫。*W*(*x*)：*x*是白猫。*G*(*x*)：*x*是好猫。*Z*(*x*)：*x*抓住老鼠。论域为{猫}。 (∀*x*)((*B*(*x*)∨*W*(*x*))∧*Z*(*x*)→*G*(*x*))

（11）*M*(*x*)：*x*是机器人。*T*(*x*)：*x*会说话。(∃*x*)(*M* (*x*)∧*T*(*x*))

（12）*M*(*x*)：*x*是人。*E*(*x*)：*x*吃萝卜。*D*(*x*)：*x*喝水。(∃*x*)(*M*(*x*)∧┐*E*(*x*))∧(∀*x*)(*M*(*x*)→*D*(*x*))

2. 用谓词表达式符号化下列命题。

（1）并非所有大学生都能成为科学家。

（2）直线*A*平行于直线*B*，当且仅当直线*A*不相交于直线*B*。

（3）某些运动员是大学生。

（4）某些教练员是年老的，但是很健壮。

（5）王教练既不年老，也不健壮。

（6）某些大学生运动员是国家对选手。

（7）所有运动员都钦佩某些教练。

（8）有些大学生不钦佩教练。

（9）并不是所有的汽车都比火车快。

（10）男人一定比女人高，是不对的。

（11）某些汽车慢于所有的火车，但至少有一火车快于每一汽车。

（12）两个不相等的实数间，必存在第三个实数。

**解：**

（1）*S*(*x*)：*x*是大学生。*K*(*x*)：*x*是科学家。┐(∀*x*)(*S*(*x*)→*K*(*x*))

（2）*P*(*x*,*y*)：*x*平行于*y*。*C*(*x*,*y*)：*x*与*y*相交。*a*：直线*A*。*b*：直线*B*。*P*(*a*,*b*)→← ┐*C*(*a*,*b*)

（3）*S*(*x*)：*x*是大学生。*A*(*x*)：*x*是运动员。(∃*x*)(*A*(*x*)∧*S*(*x*))

（4）*T*(*x*)：*x*是教练员。*O*(*x*)：*x*是年老的。*J*(*x*)：*x*是健壮的。(∃*x*)(*T*(*x*)∧*O*(*x*)∧*J*(*x*))

（5）*O*(*x*)：*x*是年老的。*J*(*x*)：*x*是健壮的。*w*：王教练。┐*O*(*w*)∧┐*J*(*w*)

（6）*S*(*x*)：*x*是大学生。*A*(*x*)：*x*是运动员。*G*(*x*)：*x*是国家对选手。(∃*x*)(*A*(*x*)∧*S*(*x*)∧*G*(*x*))

（7）*A*(*x*)：*x*是运动员。*T*(*x*)：*x*是教练员。*P*(*x*,*y*)：*x*钦佩*y*。(∀*x*)(*A*(*x*)→(∃*y*)(*T*(*y*)∧*P*(*x*,*y*)))

（8）*S*(*x*)：*x*是大学生。*T*(*x*)：*x*是教练员。*P*(*x*,*y*)：*x*钦佩*y*。(∃*x*)(*S* (*x*)∧(∀*y*)(*T*(*y*)→┐*P*(*x*,*y*)))

（9）*C*(*x*)：*x*是汽车。*T*(*x*)：*x*是火车。*K*(*x*,*y*)：*x*比*y*快。┐(∀*x*)(*C*(*x*)→(∀*y*)(*T*(*y*)→*K*(*x*,*y*)))

（10）*M*(*x*)：*x*是男人。*W*(*x*)：*x*是女人。*T*(*x*,*y*)：*x*比*y*高。┐(∀*x*)(*M*(*x*)→(∀*y*)(*W*(*y*)→*T*(*x*,*y*)))

（11）*C*(*x*)：*x*是汽车。*T*(*x*)：*x*是火车。*K*(*x*,*y*)：*x*比*y*快。

(∃*x*)(*C*(*x*)∧(∀*y*)(*T*(*y*)→┐*K*(*x*,*y*)))∧(∃*y*)(*T*(*y*)∧(∀*x*)(*C*(*x*)→*K*(*y*,*x*)))

（12）*R*(*x*)：*x*是实数。*E*(*x*,*y*)：*x*等于*y*。

(∀*x*)(∀*y*)((*R*(*x*)∧*R*(*y*)∧┐*E*(*x*,*y*))→(∃*z*)(*R*(*z*)∧┐*E*(*x*,*z*)∧┐*E*(*y*,*z*)))

3. 试表示出“*A*是*B*的外祖父”，只允许用以下谓词：*P*(*x*)表示“*x*是人”，*F*(*x*，*y*)表示“*x*是*y*的父亲”，*M*(*x*，*y*)表示“*x*是*y*的母亲”。

**解：***P*(*A*)∧*P*(*B*)∧*P*(*C*)∧*F*(*A*，*C*)∧*M*(*C*，*B*)

4. 利用谓词公式翻译下列命题。

（1）如果有限个数的乘积为零，那么至少有一个因子等于零。

（2）对于每一个实数*x*，存在一个更大的实数*y*。

（3）存在实数*x*，*y*和*z*，使得*x*与*y*之和大于*x*与*z*之积。

**解：**

（1）*N*(*x*)：*x*是有限个数的乘积。*Z*(*y*)：*y*为零。*P*(*x*)：*x*的乘积为零。*F*(*y*)：*y*是乘积中的一个因子。(∀*x*)(*N*(*x*)∧*P*(*x*)→(∃*y*)(*F*(*y*)∧*Z*(*y*)))

（2）*R*(*x*)：*x*是实数。*Q*(*x*,*y*)：*y*大于*x*。(∀*x*)(*R*(*x*)→(∃*y*)(*R*(*y*)∧*Q*(*x*,*y*)))

（3）*R*(*x*)：*x*是实数。*G*(*x*,*y*)：*x*大于*y*。(∃*x*)(∃*y*)(∃*z*)(*R*(*x*)∧*R*(*y*)∧*R*(*z*)∧*G*(*x*+*y*,*x*·*z*))

5. 自然数一共有3条公理。

（1）每个数都有惟一的一个数是它的后继数。

（2）没有一个数使数1是它的后继数。

（3）每个不等于1的数都有惟一的一个数是它的直接先行者。

用两个谓词表达上述3条公理。

**解：***N*(*x*)：*x*是自然数。*S*(*x*,*y*)：*y*是*x*的后继数。

（1）(∀*x*)(*N*(*x*)→(∃!*y*)(*N*(*y*)∧*S*(*x*,*y*)))

（2）┐(∃*x*)( *N*(*x*)∧*S*(*x*,1))

（3）(∀*x*)(*N*(*x*)∧┐*S*(*x*,2)→(∃!*y*)(*N*(*y*)∧*S*(*y*,*x*)))

6. 对下面的每个公式指出约束变元和自由变元。

（1）(∀*x*)*P*(*x*)→*P*(*y*)

（2）(∀*x*)(*P*(*x*)∧*Q*(*x*))∧(∃*x*)*S*(*x*)

（3）(∃*x*)(∀*y*)(*P*(*x*)∧*Q*(*y*))→(∀*x*)*R*(*x*)

（4）(∃*x*)(∃*y*)(*P*(*x*，*y*)∧*Q*(*z*))

**解：**

（1）*x*为约束变元，受(∀*x*) 约束，*y*为自由变元。

（2）(*P*(*x*)∧*Q*(*x*))的*x*为约束变元，受(∀*x*) 约束，*S*(*x*)的*x*为约束变元，受(∃*x*)约束。

（3）(*P*(*x*)∧*Q*(*y*)) 的*x*和*y*为约束变元，分别受(∃*x*)和(∀*y*)约束，*R*(*x*)的*x*为约束变元，受(∀*x*) 约束。

（4）(*P*(*x*，*y*)∧*Q*(*z*))的*x*和*y*为约束变元，分别受(∃*x*)和(∃*y*)约束，*Q*(*z*)中的*z*为自由变元。

7. 如果论域是集合{*a*，*b*，*c*}，试消去下面公式中的量词。

（1）(∀*x*)*P*(*x*)

（2）(∀*x*)*P*(*x*)∧(∀*x*)*Q*(*x*)

（3）(∀*x*)(*P*(*x*) →*Q*(*x*))

（4）(∀*x*)┐(*P*(*x*)∨(∀*x*) (*P*(*x*)

**解：**

（1）*P*(*a*)∧*P*(*b*)∧*P*(*c*)

（2）(*P*(*a*)∧*P*(*b*)∧*P*(*c*))∧(*Q*(*a*)∧*Q*(*b*)∧*Q*(*c*))

（3）(*P*(*a*) →*Q*(*a*))∧(*P*(*b*) →*Q*(*b*))∧(*P*(*c*) →*Q*(*c*))

（4）(┐*P*(*a*)∧┐*P*(*b*)∧┐*P*(*c*))∨(*P*(*a*)∧*P*(*b*)∧*P*(*c*))

8. 试求下列各式的真值。

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))，其中*P*(*x*)：*x*=1，*Q*(*x*)：*x*=2，论域是{1，2}。

（2）(∀*x*) (*P*→*Q*(*x*))∨*R*(*a*)，其中*P*：2>1，*Q*(*x*)：*x*≤3，*R*(*x*)：*x*>5，*a*：5，论域是{-2，3，6}。

**解：**

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*)) ⇔ (*P*(1)∨*Q*(1)) ∧(*P*(2)∨*Q*(2)) ⇔(***T***∨***F***) ∧(***F***∨***T***) ⇔***T*** ∧***T***⇔***T***

（2）(∀*x*) (*P*→*Q*(*x*))∨*R*(*a*)⇔(*P*→*Q*(-2))∧(*P*→*Q*(3))∧(*P*→*Q*(6))∨*R*(*a*)

⇔ (***T***→***T***)∧(***T***→***T***)∧(***T***→***F***)∨***F***⇔ ***T***∧***T***∧***F***∨***F***⇔***F***

9. 对下列谓词公式中的约束变元进行换名。

（1）(∀*x*)(∃*y*)(*P*(*x*，*z*)→*Q*(*y*))→← *S*(*x*，*y*)

（2）((∀*x*)(*P*(*x*)→(*R*(*x*)∨*Q*(*x*)))∧(∃*x*)*R*(*x*))→(∃*z*)*S*(*x*，*z*)

**解：**

（1）(∀*u*)(∃*v*)(*P*(*u*，*z*)→*Q*(*v*))→← *S*(*x*，*y*)

（2）((∀*u*)(*P*(*u*)→(*R*(*u*)∨*Q*(*u*)))∧(∃*v*)*R*(*v*))→(∃*z*)*S*(*x*，*z*)

10. 对下列谓词公式中的自由变元进行代入。

（1）((∃*y*)*A*(*x*，*y*)→(∀*x*)*B*(*x*，*z*))∧(∃*x*)(∀*z*)*C*(*x*，*y*，*z*)

（2）((∀*y*)*P*(*x*，*y*)∧(∃*z*)*Q*(*x*，*z*))∨(∀*x*)*R*(*x*，*y*)

**解：**

（1）((∃*y*)*A*(*u*，*y*)→(∀*x*)*B*(*x*，*v*))∧(∃*x*)(∀*z*)*C*(*x*，*w*，*z*)

（2）((∀*y*)*P*(*u*，*y*)∧(∃*z*)*Q*(*v*，*z*))∨(∀*x*)*R*(*x*，*w*)

11. 考虑以下赋值。

论域 *D*={1，2}

指定常数*a*：1，*b*：2

指定函数*f*：*f* (1)=2，*f* (2)=1

指定谓词*P*：*P*(1，1)⇔***T***，*P*(1，2)⇔***T***，*P*(2，1)⇔***F***，*P*(2，2)⇔***F***

求以下各式的真值。

（1）*P*(*a*，*f*(*a*))∧*P*(*b*，*f*(*b*))

（2）(∀*x*)(∃*y*)*P*(*y*，*x*)

（3）(∀*x*)( ∀*y*)(*P*(*x*，*y*)→*P*(*f* (*x*)，*f* (*y*)))

**解：**

（1）*P*(*a*，*f*(*a*))∧*P*(*b*，*f*(*b*)) ⇔ *P*(1，*f*(1))∧*P*(2，*f*(2)) ⇔ *P*(1，2)∧*P*(2，1) ⇔ ***T***∧***F***⇔***F***

（2）(∀*x*)(∃*y*)*P*(*y*，*x*) ⇔(∀*x*)(*P*(1，*x*)∨*P*(2，*x*))⇔(*P*(1，1)∨*P*(2，1))∧(*P*(1，2)∨*P*(2，2))

⇔( ***T***∨***F***)∧(***T***∨***F***) ⇔***T***∧***T***⇔***T***

（3）(∀*x*)(∀*y*)(*P*(*x*，*y*)→*P*(*f* (*x*)，*f* (*y*)))⇔(∀*x*)((*P*(*x*，1)→*P*(*f* (*x*)，*f* (1)))∧(*P*(*x*，2)→*P*(*f* (*x*)，*f* (2)))) ⇔((*P*(1，1)→*P*(*f* (1)，*f* (1)))∧(*P*(1，2)→*P*(*f* (1)，*f* (2))))∧((*P*(2，1)→*P*(*f* (2)，*f* (1)))∧(*P*(2，2)→*P*(*f* (2)，*f* (2))))⇔ ((***T***→***F***)∧(***T***→***F***))∧((***F***→***F***)∧(***F***→***T***))⇔(***F***∧***F***)∧(***T***∧***T***)⇔***F***∧***T***⇔***F***

12. 将下面各式翻译成自然语言，然后在不同的个体域中确定它们的真值。

（1）(∀*x*) (∃*y*)(*x*·*y*=0)

（2）(∃*x*) (∀*y*)( *x*·*y*=0)

（3）(∀*x*) (∃*y*)( *x*·*y*=1)

（4）(∃*x*) (∀*y*)( *x*·*y*=1)

（5）(∀*x*) (∃*y*)( *x*·*y*=*x*)

（6）(∃*x*) (∀*y*)( *x*·*y*=*x*)

（7）(∀*x*) (∀*y*) (∃*z*)(*x*-*y*=*z*)

个体域分为

（a）实数集合***R***

（b）整数集合***Z***

（c）正整数集合***Z*+**

（d）非零实数集合***R***-{0}

**解：**（1）对于任意的*x*，存在*y*，使得*x*·*y*=0。

（2）存在*x*，对于任意的*y*，都有*x*·*y*=0。

（3）对于任意的*x*，存在*y*，使得*x*·*y*=1。

（4）存在*x*，对于任意的*y*，都有*x*·*y*=1。

（5）对于任意的*x*，存在*y*，使得*x*·*y*=*x*。

（6）存在*x*，对于任意的*y*，都有*x*·*y*=*x*。

（7）对于任意的*x*，任意的*y*，存在*z*，使得*x*-*y*=*z*。

个体域分为

（a）实数集合***R***

（1）真（2）真（3）假（4）假（5）真（6）真（7）真

（b）整数集合***Z***

（1）真（2）真（3）假（4）假（5）真（6）真（7）真

（c）正整数集合***Z*+**

（1）假（2）假（3）假（4）假（5）真（6）假（7）假

（d）非零实数集合***R***-{0}

（1）假（2）假（3）真（4）假（5）真（6）假（7）假

13. 判断下面公式的真假，如果是真，请证明之；如果为假，请给出*P*和*Q*的解释，以说明公式为假

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*)) ⇒(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)

（2）(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*) ⇒(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))

**解：**（1）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇔(∀*x*)(┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*))⇔(∀*x*)┐(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*))⇔┐(∃*x*)(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*)) ⇒┐((∃*x*)*P*(*x*)∧(∃*x*)┐*Q*(*x*))⇔┐(∃*x*)*P*(*x*)∨┐(∃*x*)┐*Q*(*x*))⇔(∀*x*)┐*P*(*x*)∨(∀*x*)*Q*(*x*))

⇒ (∃*x*)┐*P*(*x*)∨(∀*x*)*Q*(*x*))⇔ ┐(∀*x*)*P*(*x*)∨(∀*x*)*Q*(*x*)) ⇔(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)

（2）(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*) ⇒(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))不成立。

*P*(*x*)：*x*成绩优秀。*Q*(*x*)：*x*获得奖学金。论域为所有学生。

(∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)表示：若所有学生成绩都优秀，则所有学生都获得奖学金。

(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))表示：任何一个学生，只要成绩优秀，他就获得奖学金。

显然“任何一个学生，只要成绩优秀，他就获得奖学金。”可以推出“若所有学生成绩都优秀，则所有学生都获得奖学金。”反之未必成立。

14. 求证：(∃*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇔(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)*Q*(*x*)

**证明：**(∃*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇔ (∃*x*)( ┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*))⇔ (∃*x*)┐*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*))⇔ ┐(∀*x*) *P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)) ⇔(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)*Q*(*x*)

15. 求证：(∀*x*)(∀*y*)(*P*(*x*)→*Q*(*y*))⇔(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*y*)*Q*(*y*)

**证明：**(∀*x*)(∀*y*)(*P*(*x*)→*Q*(*y*))⇔ (∀*x*)(∀*y*)( ┐*P*(*x*)∨*Q*(*y*)) ⇔ (∀*x*) ┐*P*(*x*)∨(∀*y*)*Q*(*y*)

⇔ ┐(∃*x*)*P*(*x*)∨(∀*y*)*Q*(*y*)⇔(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*y*)*Q*(*y*)

16. 下列推导过程中有何错误？

（1） (∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*)) P

（2） *P*(*a*)→*Q*(*a*) US(1)

（3） (∃*x*)*P*(*x*) P

（4） *P*(*a*) ES(3)

（5） *Q*(*a*) T(2),(4) *I*

（6） (∃*x*)*Q*(*x*) EG(5)

**解：**应先消去存在量词。

17. 把以下各式化为前束范式。

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)→(∃*y*)*Q*(*x*，*y*))

（2）(∃*x*)(┐((∃*y*)*P*(*x*，*y*))→((∃*z*)*Q*(*z*)→*R*(*x*)))

（3）(∀*x*)(∀*y*)(((∃*z*)*P*(*x*，*y*，*z*)∧(∃*u*)*Q*(*x*，*u*))→(∃*v*)*Q*(*y*，*v*))

**解：**

（1）(∀*x*)(*P*(*x*)→(∃*y*)*Q*(*x*，*y*)) ⇔ (∀*x*)(┐*P*(*x*)∨(∃*y*)*Q*(*x*，*y*)) ⇔(∀*x*)(∃*y*)(┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*，*y*))

（2）(∃*x*)(┐((∃*y*)*P*(*x*，*y*))→((∃*z*)*Q*(*z*)→*R*(*x*)))

⇔(∃*x*)((∃*y*)*P*(*x*，*y*)∨((∃*z*)*Q*(*z*)→*R*(*x*))) ⇔(∃*x*)((∃*y*)*P*(*x*，*y*)∨(┐(∃*z*)*Q*(*z*)∨*R*(*x*)))

⇔(∃*x*)((∃*y*)*P*(*x*，*y*)∨((∀*z*) ┐*Q*(*z*)∨*R*(*x*))) ⇔(∃*x*)(∃*y*)(∀*z*)(*P*(*x*，*y*)∨┐*Q*(*z*)∨*R*(*x*))

（3）(∀*x*)(∀*y*)(((∃*z*)*P*(*x*，*y*，*z*)∧(∃*u*)*Q*(*x*，*u*))→(∃*v*)*Q*(*y*，*v*))

⇔(∀*x*)(∀*y*)(┐((∃*z*)*P*(*x*，*y*，*z*)∧(∃*u*)*Q*(*x*，*u*))∨(∃*v*)*Q*(*y*，*v*))

⇔(∀*x*)(∀*y*)((∀*z*) ┐*P*(*x*，*y*，*z*)∨(∀*u*) ┐*Q*(*x*，*u*))∨(∃*v*) *Q*(*y*，*v*))

⇔(∀*x*)(∀*y*)(∀*z*)(∀*u*)(∃*v*)(┐*P*(*x*，*y*，*z*)∨┐*Q*(*x*，*u*)∨*Q*(*y*，*v*))

18. 求等价于下面各式的前束析取范式和前束合取范式。

（1）((∃*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*))→ (∃*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))

（2）(∀*x*)(*P*(*x*)→(∀*y*)((∀*z*)*Q*(*x*，*y*)→┐(∀*z*)*R*(*y*，*x*)))

（3）(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)((∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*z*)*R*(*x*，*y*，*z*))

（4）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))→((∃*y*)*P*(*y*)∧(∃*z*)*Q*(*y*，*z*))

**解：**

（1）((∃*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*))→ (∃*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))

因为((∃*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)) ⇔(∃*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))，所以((∃*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*))→ (∃*x*)(*P*(*x*)∨*Q*(*x*))为永真式，不写为前束范式的形式。

（2）(∀*x*)(*P*(*x*)→(∀*y*)((∀*z*)*Q*(*x*，*y*)→┐(∀*z*)*R*(*y*，*x*)))

⇔(∀*x*)(┐*P*(*x*)∨(∀*y*)(*Q*(*x*，*y*)→┐*R*(*y*，*x*)))

⇔(∀*x*)(∀*y*)(┐*P*(*x*)∨┐*Q*(*x*，*y*)∨┐*R*(*y*，*x*))) 前束合取范式

⇔(∀*x*)(∀*y*)((┐*P*(*x*)∧*Q*(*x*，*y*)∧*R*(*y*，*x*))∨(┐*P*(*x*)∧*Q*(*x*，*y*)∧┐*R*(*y*，*x*))∨(┐*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*)∧*R*(*y*，*x*))∨(┐*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*)∧┐*R*(*y*，*x*))∨(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*)∧*R*(*y*，*x*))∨(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*)∧┐*R*(*y*，*x*))∨(*P*(*x*)∧*Q*(*x*，*y*)∧┐*R*(*y*，*x*))) 前束析取范式

（3）(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)((∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*z*)*R*(*x*，*y*，*z*))

⇔┐(∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)((∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*z*)*R*(*x*，*y*，*z*))

⇔(∃*x*)┐*P*(*x*)∨(∃*x*)((∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*u*)*R*(*x*，*y*，*u*))

⇔(∃*x*)( ┐*P*(*x*)∨(∀*z*)*Q*(*x*，*z*)∨(∀*u*)*R*(*x*，*y*，*u*))

⇔(∃*x*)(∀*z*)(∀*u*)( ┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*，*z*)∨*R*(*x*，*y*，*u*)) 前束合取范式

⇔(∃*x*)(∀*z*)(∀*u*)((┐*P*(*x*) ∧*Q*(*x*，*z*) ∧*R*(*x*，*y*，*u*))∨(┐*P*(*x*) ∧*Q*(*x*，*z*) ∧┐*R*(*x*，*y*，*u*))∨(┐*P*(*x*) ∧┐*Q*(*x*，*z*) ∧*R*(*x*，*y*，*u*))∨(┐*P*(*x*) ∧┐*Q*(*x*，*z*) ∧┐*R*(*x*，*y*，*u*))∨(*P*(*x*) ∧*Q*(*x*，*z*) ∧*R*(*x*，*y*，*u*))∨(*P*(*x*) ∧*Q*(*x*，*z*) ∧┐*R*(*x*，*y*，*u*))∨(*P*(*x*) ∧┐*Q*(*x*，*z*) ∧*R*(*x*，*y*，*u*))) 前束析取范式

（4）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))→((∃*y*)*P*(*y*)∧(∃*z*)*Q*(*y*，*z*))

⇔┐(∀*x*)(┐*P*(*x*)∨*Q*(*x*，*y*))∨((∃*y*)*P*(*y*)∧(∃*z*)*Q*(*y*，*z*))

⇔(∃*x*)(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*))∨((∃*u*)*P*(*u*)∧(∃*z*)*Q*(*y*，*z*))

⇔(∃*x*)(∃*u*)(∃*z*)((*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*))∨(*P*(*u*)∧*Q*(*y*，*z*)) 前束析取范式

⇔(∃*x*)(∃*u*)(∃*z*)((*P*(*x*)∨*P*(*u*))∧(*P*(*x*)∨*Q*(*y*，*z*))∧(┐*Q*(*x*，*y*)∨*P*(*u*))∧(┐*Q*(*x*，*y*)∨*Q*(*y*，*z*))) 前束合取范式

19. 求下列各式的斯柯伦范式。

（1）(∀*x*) *P*(*x*)∧┐(∃*x*)*Q*(*x*)

（2）(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*x*) *Q*(*x*)

（3）((∀*x*) *P*(*x*)∨(∃*y*)*Q*(*y*))→(∀*x*)*R*(*x*)

（4）(∀*x*) (*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))→((∃*y*)*R*(*y*)→(∃*z*)*S*(*y*，*z*))

**解：**

（1）(∀*x*) *P*(*x*)∧┐(∃*x*)*Q*(*x*)

⇔(∀*x*) *P*(*x*)∧┐(∃*y*)*Q*(*y*) ⇔(∃*y*)(∀*x*) (*P*(*x*)∧┐*Q*(*y*))

（2）(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*x*) *Q*(*x*)

⇔(∃*x*)*P*(*x*)→(∀*y*) *Q*(*y*)⇔(∃*x*)(∀*y*)(*P*(*x*)→*Q*(*y*))

（3）((∀*x*) *P*(*x*)∨(∃*y*)*Q*(*y*))→(∀*x*)*R*(*x*)

⇔┐((∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*y*)*Q*(*y*))∨(∀*x*)*R*(*x*) ⇔ (┐(∀*x*) *P*(*x*)∧┐(∃*y*)*Q*(*y*))∨(∀*x*)*R*(*x*)

⇔ ((∃*x*)┐*P*(*x*)∧(∀*y*)┐*Q*(*y*))∨(∀*x*)*R*(*x*) ⇔ (∃*x*)(∀*y*)(∀*z*)(┐*P*(*x*)∧┐*Q*(*y*)∨*R*(*z*))

（4）(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))→((∃*y*)*R*(*y*)→(∃*z*)*S*(*y*，*z*))

⇔┐(∀*x*)(*P*(*x*)→*Q*(*x*，*y*))∨((∃*y*)*R*(*y*)→(∃*z*)*S*(*y*，*z*))

⇔ (∃*x*)(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*y*))∨((∀*y*) ┐*R*(*y*)∨(∃*z*)*S*(*y*，*z*))

⇔ (∃*x*)(∃*z*)(∀*y*)(*P*(*x*)∧┐*Q*(*x*，*u*)∨┐*R*(*y*)∨*S*(*v*，*z*))

20. 证明下列各式。

（1）(∀*x*)( ┐*A*(*x*)→*B*(*x*))，(∀*x*) ┐*B*(*x*) ⇒(∃*x*)*A*(*x*)

（2）(∃*x*)*A*(*x*)→(∀*x*)*B*(*x*) ⇒(∀*x*) (*A*(*x*)→*B*(*x*))

（3）(∀*x*)(*A*(*x*)→*B*(*x*))，(∀*x*)(*C*(*x*)→┐*B*(*x*))⇒(∀*x*)(*C*(*x*)→┐*A*(*x*))

（4）(∀*x*)(*A*(*x*)∨*B*(*x*))，(∀*x*)(*B*(*x*)→┐*C*(*x*))，(∀*x*)*C*(*x*)⇒ (∀*x*)*A*(*x*)

**证明：**

（1）

(1) (∀*x*) ┐*B*(*x*)P

(2) ┐*B*(*a*)ES(1)

(3) (∀*x*)( ┐*A*(*x*)→*B*(*x*))P

(4) ┐*A*(*a*)→*B*(*a*)US(3)

(5) *A*(*a*) T(2)(4) I

(6) (∃*x*)*A*(*x*) EG(5)

（2）

(∃*x*)*A*(*x*)→(∀*x*)*B*(*x*)

⇔┐(∃*x*)*A*(*x*)∨(∀*x*)*B*(*x*)⇔(∀*x*)┐*A*(*x*)∨(∀*x*)*B*(*x*) ⇒(∀*x*)(┐*A*(*x*)∨*B*(*x*))⇔ (∀*x*) (*A*(*x*)→*B*(*x*))

（3）

(1) (∀*x*)(*C*(*x*)→┐*B*(*x*))P

(2) *C*(*a*)→┐*B*(*a*)US(1)

(3) (∀*x*)(*A*(*x*)→*B*(*x*))P

(4) *A*(*a*)→*B*(*a*)US(3)

(5) ┐*B*(*a*)→┐*A*(*a*)T(4) E

(6) *C*(*a*)→┐*A*(*a*)T(2)(5) I

(7) (∀*x*)(*C*(*x*)→┐*A*(*x*)) UG(6)

（4）(∀*x*)(*A*(*x*)∨*B*(*x*))，(∀*x*)(*B*(*x*)→┐*C*(*x*))，(∀*x*)*C*(*x*)⇒ (∀*x*)*A*(*x*)

(1) (∀*x*)*C*(*x*) P

(2) *C*(*a*) US(1)

(3) (∀*x*)(*B*(*x*)→┐*C*(*x*))P

(4) *B*(*a*)→┐*C*(*a*)US(3)

(5) ┐*B*(*a*) T(2)(4) I

(6) (∀*x*)(*A*(*x*)∨*B*(*x*))P

(7) *A*(*a*)∨*B*(*a*) US(6)

(8) *A*(*a*) T(5)(7) I

(9) (∀*x*)*A*(*x*) UG(8)

21. 用CP规则证明。

（1）(∀*x*) (*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇒ (∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)

（2）(∀*x*) (*P*(*x*)∨*Q*(*x*))⇒ (∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)

**证明：**

（1）(∀*x*) (*P*(*x*)→*Q*(*x*))⇒ (∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)

**证明：**

(1) (∀*x*)*P*(*x*)P(附加前提)

(2) *P*(*a*)ES(1)

(3) (∀*x*) (*P*(*x*)→*Q*(*x*))P

(4) *P*(*a*)→*Q*(*a*)US(3)

(5) *Q* (*a*)T(2)(4) I

(6) (∀*x*)*Q*(*x*) UG(5)

(7) (∀*x*)*P*(*x*)→(∀*x*)*Q*(*x*)CP(1) (6)

（2）(∀*x*) (*P*(*x*)∨*Q*(*x*))⇒ (∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)

**证明：**

(1) ┐(∀*x*)*P*(*x*) P(附加前提)

(2) (∃*x*)┐*P*(*x*)T(1) E

(3) ┐*P*(*a*) ES(2)

(4) (∀*x*) (*P*(*x*)∨*Q*(*x*))P

(5) *P*(*a*)∨*Q*(*a*)US(4)

(6) *Q*(*a*) T(3)(5) I

(7) (∃*x*)*Q*(*x*) EG(6)

(8) ┐(∀*x*)*P*(*x*)→(∃*x*)*Q*(*x*)CP(1) (7)

(9) (∀*x*)*P*(*x*)∨(∃*x*)*Q*(*x*)T(8) E

22. 符号化下列命题，并推证其结论：

（1）任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车。每一个人或者喜欢汽车或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车。因而有人的不爱步行。

（2）不存在能表示成分数的无理数。有理数都能表示成分数。因此，有理数都不是无理数。

（3）每个自然数不是奇数就是偶数。自然数是偶数当且仅当它能被2整除。并不是所以的自然数都能被2整除。因此，有的自然数是奇数。

（4）三角函数都是周期函数。一些三角函数是连续函数。所以，一些周期函数是连续函数。

（5）每个科学家都是勤奋的。每个勤奋又身体健康的人在事业中都会获得成功。存在着身体健康的科学家。所以存在着事业获得成功的人或事业半途而废的人。

**解：**

（1）*F*(*x*)：*x*喜欢步行。*C*(*x*)：*x*喜欢喜欢乘汽车。*B*(*x*)：*x*喜欢骑自行车。论域是{人}。

(∀*x*) (*F*(*x*)→┐*C*(*x*))，(∀*x*) (*C*(*x*)∨*B*(*x*))，(∃*x*)┐*B*(*x*) ⇒ (∃*x*)┐*F*(*x*)

**证明：**

(1) (∃*x*)┐*B*(*x*)P

(2) ┐*B*(*a*)ES(1)

(3) (∀*x*) (*C*(*x*)∨*B*(*x*))P

(4) *C*(*a*)∨*B*(*a*)US(3)

(5) *C*(*a*)T(2)(4) I

(6) (∀*x*) (*F*(*x*)→┐*C*(*x*))P

(7) *F*(*a*)→┐*C*(*a*)US(6)

(8) *C*(*a*)→┐*F*(*a*)T(7) E

(9) ┐*F*(*a*)T(5)(8) I

(10) (∃*x*)┐*F*(*x*) EG(9)

（2）*Q*(*x*)：*x*是有理数。*W*(*x*)：*x*是无理数。*D*(*x*)：*x*能表示成分数。

┐(∃*x*)(*W*(*x*)∧*D*(*x*))，(∀*x*)(*Q*(*x*)→*D*(*x*))⇒(∀*x*)(*Q*(*x*)→┐*W*(*x*))

**证明：**

(1) ┐(∃*x*)(*W*(*x*)∧*D*(*x*))P

(2) (∀*x*)┐(*W*(*x*)∧*D*(*x*))T(1) E

(3) (∀*x*) (*W*(*x*)→┐*D*(*x*))T(2 E

(4) *W*(*a*)→┐*D*(*a*)US(3)

(5) *D*(*a*)→┐*W*(*a*) T(4) E

(6) (∀*x*)(*Q*(*x*)→*D*(*x*))P

(7) *Q*(*a*)→*D*(*a*)US(6)

(8) *Q*(*a*)→┐*W*(*a*)T(5)(7) I

(9) (∀*x*)(*Q*(*x*)→┐*W*(*x*))UG(8)

（3）*O*(*x*)：*x*是奇数。*E*(*x*)：*x*是偶数。*D*(*x*)：*x*能被2整除。论域为{自然数}。

(∀*x*)(*O*(*x*)←∣ → *E*(*x*))，(∀*x*)(*E*(*x*)→← *D*(*x*))，┐(∀*x*)*D*(*x*)⇒(∃*x*)*O*(*x*)

**证明：**

(1) ┐(∀*x*)*D*(*x*)P

(2) (∃*x*) ┐*D*(*x*)T(1) E

(3) ┐*D*(*a*)ES(2)

(4) (∀*x*)(*E*(*x*)→← *D*(*x*))P

(5) *E*(*a*)→← *D*(*a*)US(4)

(6) ┐*E*(*a*) T(3)(5) I

(7) (∀*x*)(*O*(*x*)←∣ → *E*(*x*))P

(8) *O*(*a*)←∣ → *E*(*a*)US(7)

(9) *O*(*a*) T(6)(8) I

(10) (∃*x*)*O*(*x*) EG(9)

（4）*S*(*x*)：*x*是三角函数。*D*(*x*)：*x*是周期函数。*H*(*x*)：*x*是连续函数。论域是{函数}。

(∀*x*) (*S*(*x*)→*D*(*x*))，(∃*x*)(*S*(*x*)∧*H*(*x*)) ⇒(∃*x*)(*D*(*x*)∧*H*(*x*))

**证明：**

(1) (∃*x*)(*S*(*x*)∧*H*(*x*))P

(2) *S*(*a*)∧*H*(*a*)ES(1)

(3) *S*(*a*) T(2) I

(4) *H*(*a*) T(2) I

(5) (∀*x*) (*S*(*x*)→*D*(*x*))P

(6) *S*(*a*)→*D*(*a*)US(5)

(7) *D*(*a*) T(3)(6) I

(8) *D*(*a*)∧*H*(*a*) T(4)(7) I

(9) (∃*x*)(*D*(*x*)∧*H*(*x*)) EG(8)

（5）*S*(*x*)：*x*是科学家。*D*(*x*)：*x*是勤奋的。*H*(*x*)：*x*是身体健康的。*C*(*x*)：*x*是成功的。论域是{人}。

(∀*x*) (*S*(*x*)→*D*(*x*))，(∀*x*) (*D*(*x*)∧*H*(*x*)→*C*(*x*))，(∃*x*)(*S*(*x*)∧*H*(*x*)) ⇒ (∃*x*)*C*(*x*)∨(∃*x*)┐*C* (*x*)

**证明：**

(1) (∃*x*)(*S*(*x*)∧*H*(*x*))P

(2) *S*(*a*)∧*H*(*a*)ES(1)

(3) *S*(*a*) T(2) I

(4) *H*(*a*) T(2) I

(5) (∀*x*) (*S*(*x*)→*D*(*x*))P

(6) *S*(*a*)→*D*(*a*)US(5)

(7) *D*(*a*) T(3)(6) I

(8) (∀*x*) (*D*(*x*)∧*H*(*x*)→*C*(*x*))P

(9) *D*(*a*)∧*H*(*a*)→*C*(*a*)US(8)

(10) *C*(*a*) T(4)(7) (9) I

(11) (∃*x*)*C*(*x*) EG(10)

(12) (∃*x*)*C*(*x*)∨(∃*x*)┐*C* (*x*) T(11) I

## 习题三

1. 分别用描述法和列举法表示下列集合：

1. 非负偶数集；
2. 整数24的全部正因子的集合；
3. 不超过9且与9互质的正整数集合（该集合的元素个数称欧拉函数ϕ (9)）。

**解：**

描述法

（1）{x|x是非负偶数}

（2）{x|x是24的正因子}

（3）{x| x是不超过9且与9互质的正整数}

列举法

（1）{0,2,4,…}

（2）{1,2,3,4,6,8,12,24}

（3）{1,2,4,5,7,8}

2. 是否存在集合*A*和*B*，使得*A*⊆*B*且*A*∈*B*？若存在，请举一例。

**解：**存在。A={1}，B={1,{1}}，则*A*⊆*B*且*A*∈*B*均成立。

3. 求下列集合的幂集：

（1）∅；

（2）{∅}；

（3）{a,{a}}；

（4）{{1,2}}。

**解：**

（1）P(∅)={∅}

（2）P({∅})={∅,{∅}}

（3）P({a,{a}})={∅,{a},{{a}},{a,{a}}}

（4）P({{1,2}})={∅,{{1,2}}}

4. 设*S* = {0, 1}，求集合*S*×*P*(*S*)。

**解：**

P(S)={∅,{0},{1},{0,1}}

*S*×*P*(*S*)={< 0, ∅>, <0, {0}>,<0, {1}>,<0, {0,1}>,<1, ∅>,<1, {0}>,<1, {1}>,<1, {0,1}>}

5. 证明：对任意集合*A*，*B*都有

*P*(*A*)∩*P*(*B*)＝*P*(*A*∩*B*)，*P*(*A*)∪*P*(*B*)⊆*P*(*A*∪*B*)

并举例说明，一般*P*(*A*)∪*P*(*B*)≠*P*(*A*∪*B*)。

**证明：**

对任意的集合C，若

C∈*P*(*A*)∩*P*(*B*)⇔C∈*P*(*A*)∧C∈*P*(*B*)⇔C⊆*A*∧C⊆*B*⇔C⊆*A*∩*B*

所以*P*(*A*)∩*P*(*B*)＝*P*(*A*∩*B*)成立。

对任意的集合C，若

C∈*P*(*A*)∪*P*(*B*)⇔C∈*P*(*A*)∨C∈*P*(*B*)⇔C⊆*A*∨C⊆*B*⇒C⊆*A*∪*B*

所以*P*(*A*)∪*P*(*B*)⊆*P*(*A*∪*B*)成立。

举例：A={1,2}，B={2,3}，*P*(*A*)={ ∅，{1}，{2}，{1,2}}，*P*(*B*)={ ∅，{2}，{3}，{2,3}}，

*P*(*A*)∪*P*(*B*)={ ∅，{1}，{2}，{1,2}，{3}，{2,3}}，

*A*∪*B*={1,2,3}，*P*(*A*∪*B*)= { ∅，{1}，{2}，{1,2}，{3}，{2,3}，{1,3}，{1,2,3}}。

所以，*P*(*A*)∪*P*(*B*)≠*P*(*A*∪*B*)。

6. 设*A*，*B*，*C*是任意集合，证明：

（1）*C*∩(*A*⊕*B*)=(*C*∩*A*)⊕(*C*∩*B*)；

（2）已知*A*∩*B*⊆*B*∩*C*，且有*A*-*B*⊆*B*-*C*，则*A*⊆*B*。

**证明：**

（1）*C*∩(*A*⊕*B*)

=*C*∩((*A*－*B*)∪(*B*－*A*))=(*C*∩(*A*－*B*))∪(*C*∩(*B*－*A*))

= ((*C*∩*A*)－(*C*∩*B*))∪((*C*∩*B*)－(*C*∩*A*))=(*C*∩*A*)⊕(*C*∩*B*)

（2）反证法。假设结论不成立，则存在*x*∈*A*，且*x*∉*B*，则*x*∈*A*-*B*，*x*∈*B*-*C*，即*x*∈*B*。与*x*∉*B*矛盾。

7. 确定下列关系具备哪些性质？

（1）当且仅当|*i*-*k*|<11(*i*, *k*∈***Z***)时，有*iRk*；

（2）当且仅当*mn*>8(*m*, *n*∈*N*)时，有*mRn*；

（3）当且仅当*i*≤*k*(*i*, *k*∈*N*)时，有*iRk*。

**解：**

（1）自反，对称

（2）对称

（3）自反，对称，传递

8. 请在集合*A*＝{*a*,*b*,*c*}上分别构造满足下述要求的二元关系：

（1）既是对称又是反对称的；

（2）既不自反也不反自反；

（3）对称且自反；

（4）自反,对称且传递；

（5）以{<*a*,*b*>,<*b*,*c*>}为子集而且还是传递的。

**解：**

（1）{<*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>}

（2）{<*a*,*a*>,<*b*,*b*>}

（3）{<*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>,<*a*,*b*>,<*b*,*a*>}

（4）{<*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>,<*a*,*b*>,<*b*,*a*>}

（5）{<*a*,*b*>,<*b*,*c*><*a*,*c*>}

9. 设*Rj*表示***Z***上模*j*等价关系，*Rk*表示***Z***上模*k*等价关系, 证明：***Z****/Rk*细分***Z****/Rj*当且仅当*k*是*j*的整数倍。

**证明：**充分性：若*k*是*j*的整数倍，即∃*l*∈***Z***，使*k*=*lj*，

***Z****/Rk*={[*a*]*Rk*| *a*∈***Z***}，***Z****/Rj*={[*a*]*Rj*| *a*∈***Z*** }，[*a*]*Rk*={*x*| *x*∈***Z***∧*aRkx*}，[*a*]*Rj*={*x*| *x*∈***Z***∧*aRjx*}，显然对任意的*x*∈[*a*]*Rk*，*a*≡*x*(*mod**k*)，即∃*m*∈***Z***，使得*a*−*x*=*km*= *ljm*= *lmj*，即*x*∈[*a*]*Rj*，因此***Z****/Rk*细分***Z****/Rj*。

必要性：若***Z****/Rk*细分***Z****/Rj*，即[*a*]*Rk*⊆[*a*]*Rj*，显然<*k*,0>∈[*a*]*Rk*，因此<*k*,0>∈[*a*]*Rj*，所以*k*−0=1·*k*=*c*·*j*， *c*∈***Z***，于是*k*是*j*的整数倍。

10. 证明：若关系*R*是对称的, 则*Rk*(*k*≥1, *k*∈*N*)也是对称的。

**证明：**

设*R*是*A*上的二元关系，∀*x*，*y*∈*A*，若*xRky*成立，则由关系复合的定义，存在*x*0=*x*,*x*1,*x*2,…*xk*-1,*xk*=*y*，使得*x*0*Rx*1, *x*1*Rx*2,…, *xk*-1*Rxk*成立，由*R*是对称的,故*xkRxk*-1, *xk*-1*Rxk*-2, …, *x*2*Rx*1, *x*1*Rx*0成立,再由关系复合的定义，有*xkRkx*0成立，即*yRkx*，因而*Rk*(*k*≥1, *k*∈*N*)是对称的。

11. 设集合*A*={*a*,*b*,*c*,*d*}上的关系*R*={<*a*,*b*>,<*b*,*a*>,<*b*,*c*>,<*c*,*d*>}，用矩阵运算求出*R*的自反、对称和传递闭包。

**解：**

，，,

∨=。

所以r(R)={<*a*,*b*>,<*b*,*a*>,<*b*,*c*>,<*c*,*d*><*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>,<*d*,*d*>}

∨=

所以s(R)={<*a*,*b*>,<*b*,*a*>,<*b*,*c*>,<*c*,*d*><*c*,*b*>,<*d*,*c*>}







所以

t(R)={ <*a*,*a*>,<*a*,*b*>,<*a*,*c*>,<*a*,*d*>,<*b*,*a*>,<*b*,*b*>,<*b*,*c*>,<*b*,*d*>,<*c*,*d*>}

12. 设*R*和*S*是*A*上的二元关系，且*R*⊆*S*，证明：

（1）r(*R*) ⊆r(*S*)

（2）s(*R*) ⊆s(*S*)

（3）t(*R*) ⊆t(*S*)

**证明：**

（1）∀<x,y>∈r(*R*),由r(*R*)的定义有<x,y>∈*R*∨<x,y>∈*IA,* 若<x,y>∈*R* ,由*R*⊆*S*, <x,y>∈r(*S*), 若<x,y>∈*IA,* 有<x,y>∈r(*S*),所以r(*R*)⊆r(*S*)。

（2）∀<x,y>∈s(*R*)，由s(*R*)的定义有<x,y>∈*R*∨<x,y>∈*R*−1*,* 若<x,y>∈*R* ,由*R*⊆*S*, <x,y>∈s(*S*), 若<x,y>∈ *R*−1*,* 有<y,x>∈*R*,因而<y,x>∈*S*,所以<x,y>∈*S*−1*,* 即<x,y>∈s(*S*)，所以s(*R*)⊆s(*S*)。

（3）∀<x,y>∈ t(*R*),由t(*R*)的定义有<x,y>∈*Rk*(*k*≥1, *k*∈*N*)，即存在*x*0=*x*,*x*1,*x*2,…*xk*-1,*xk*=*y*，使得*x*0*Rx*1, *x*1*Rx*2,…, *xk*-1*Rxk*成立，由*R*⊆*S*,因而*x*0*Sx*1, *x*1*Sx*2,…, *xk*-1*Sxk*成立，所以<x,y>∈*Sk*(*k*≥1, *k*∈*N*)，即<x,y>∈ t(*S*),因而t(*R*) ⊆t(*S*)。

13. 设*R*和*S*是*A*上的二元关系，证明：

（1）r(*R*∪*S*)= r(*R*)∪r(*S*)

（2）s(*R*∪*S*)= s(*R*)∪s(*S*)

（3）t(*R*)∪t(*S*)⊆t(*R*∪*S*)

**证明：**

（1）r(*R*∪*S*)= (*R*∪*S*)∪*IA*= (*R*∪*IA*)∪(*S*∪*IA*) = r(*R*)∪r(*S*)。

（2）s(*R*∪*S*)= (*R*∪*S*)∪(*R*∪*S*) −1= (*R*∪*S*)∪(*R*−1∪*S*−1) = (*R*∪*R*−1)∪(*S*∪*S*−1) = s(*R*)∪s(*S*)。

（3）t(*R*)∪t(*S*) =∪，t(*R*∪*S*) ==∪∪，显然t(*R*)∪t(*S*)⊆t(*R*∪*S*)。

14. 求集合{*a*，*b*，*c*，*d*}的所有划分和等价关系。

**解：**集合{*a*，*b*，*c*，*d*}中共有4个元素，可作如下划分：

1. 4＝1＋1＋1＋1型划分，只有一个，即{ {*a*}，{*b*}，{*c*}，{*d*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>}。
2. 4＝2＋1＋1型划分，有＝6个，即{ {*a*，*b*}，{*c*}，{*d*}}，{ {*a*，*c*}，{*b*}，{*d*}}，{ {*a*，*d*}，{*b*}，{*c*}}，{ {*b*，*c*}，{*a*}，{*d*}}，{ {*b*，*d*}，{*a*}，{*c*}}，{ {*c*，*d*}，{*a*}，{*b*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*c*，*c*>，<*b*，*b*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*d*，*d*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>}，{ <*b*，*b*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*c*，*c*>，<*a*，*a*>，<*d*，*d*>}，{ <*b*，*b*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*d*，*d*>，<*a*，*a*>，<*c*，*c*>}，{ <*c*，*c*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*>，<*d*，*d*>，<*a*，*a*>，<*b*，*b*>}。
3. 4＝3＋1型划分，有＝4个，即{ {*a*，*b*，*c*}，{*d*}}，{ {*a*，*b*，*d*}，{*c*}}，{ {*a*，*c*，*d*}，{*b*}}，{ {*b*，*c*，*d*}，{*a*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*b*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*b*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*d*，*d*>，<*c*，*c*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*c*，*c*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*>，<*d*，*d*>，<*b*，*b*>}，{ <*a*，*a*>，<*b*，*b*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>}。
4. 4＝2＋2型划分，有＝3个，即{ {*a*，*b*}，{*c*，*d*}}，{ {*a*，*c*}，{ *b*，*d*}}，{ {*a*，*d*}，{*b*，*c*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*c*，*c*>，<*b*，*b*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*d*，*d*>}，{ <*a*，*a*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*d*，*d*>，<*b*，*b*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*c*，*c*>}。
5. 4＝4＋0型划分，有1个，即{ {*a*，*b*，*c*，*d*}}，对应的等价关系为：{ <*a*，*a*>，<*b*，*b*>，<*c*，*c*>，<*d*，*d*>，<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*a*，*c*>，<*c*，*a*>，<*a*，*d*>，<*d*，*a*>，<*b*，*c*>，<*c*，*b*>，<*b*，*d*>，<*d*，*b*>，<*c*，*d*>，<*d*，*c*> }。

综上，集合{*a*，*b*，*c*，*d*}的划分和等价关系共有15个。

15. 设*R*是非空集合*A*上的二元关系。如果对∀*a*,*b*,*c*∈*A*满足*aRb*且*bRc*⇒*cRa*，则称*R*为*A*上循环关系。证明：*R*是自反和循环的关系当且仅当*R*是等价关系。

**证明：**

必要性：若*R*是自反和循环的，对∀*a*,*b*,*c*∈*A*，*aRa*成立，若*aRc*成立*，*由*R*是循环的，有*cRa*，因此*R*是对称的，再若*aRb*且*bRc，*由*R*是循环的，有*cRa*，再由*R*是对称的，有*aRc*，因此*R*是传递的，因而*R*是等价关系。

充分性：若*R*是等价关系，则显然*R*是自反的，只需证*R*是循环的。对∀*a*,*b*,*c*∈*A*，若

*aRb*且*bRc，*由*R*的传递性，有*aRc*，再由*R*的对称性，*有cRa*，因此*R*是循环的。

16. 设*A*, *B*是非空集合，*f*是从*A*到*B*的映射。定义*A*上二元关系*R*为：

*x*，*y*∈*A*, *xRy*当且仅当*f*(*x*)=*f*(*y*)

证明：*R*是*A*上等价关系，并描述由*R*生成的*A*的划分。

**证明：**

显然*f*(*x*)=*f*(*x*)，因此*xRx*当，即*R*是自反的。

若*xRy*，有*f*(*x*)=*f*(*y*)，因此*f*(*y*)=*f*(*x*)，所以*yRx*，即*R*是对称的。

若*xRy*，*yRz*，有*f*(*x*)=*f*(*y*)，*f*(*y*)=*f*(*z*)，因此*f*(*x*)=*f*(*z*)，所以*xRz*，即*R*是传递的。

因此*R*是*A*上等价关系。

由*R*生成的*A*的划分中凡是对应的值相同的自变量属于同一分块。

17. 给出一个既是等价关系又是偏序关系的二元关系。

**解：** *A*＝{*a*,*b*,*c*}上的*R*={<*a*,*a*>,<*b*,*b*>,<*c*,*c*>}。

18. 设*A*1、*A*2和*A*3是全集*U*的子集，则形如*Ai*′(*Ai*′为*Ai*或~*Ai*)的集合称为由*A*1、*A*2和*A*3产生的小项。试证由*A*1、*A*2和*A*3所产生的所有非空小项的集合构成全集*U*的一个划分。

**证明：**

（1）*Ai*′≠∅

（2）*Ai*′∩*Aj*′=∅

（3）(*A*1∩*A*2∩*A*3)∪(*A*1∩*A*2∩~*A*3)∪(*A*1∩~*A*2∩*A*3)∪(*A*1∩~*A*2∩~*A*3)∪(~*A*1∩*A*2∩*A*3)∪(~*A*1∩*A*2∩~*A*3)∪(~*A*1∩~*A*2∩*A*3)∪(~*A*1∩~*A*2∩~*A*3)=(*A*1∩*A*2)∪(*A*1∩~*A*2)∪(~*A*1∩*A*2)∪(~*A*1∩~*A*2) = *A*1∪~*A*1=*U*

因此，由*A*1、*A*2和*A*3所产生的所有非空小项的集合构成全集*U*的一个划分。

19. 设*R*和*S*是*A*上的相容关系，问：

（1）复合关系*R**S*是*A*上的相容关系吗？

（2）*R*∩*S*是*A*上的相容关系吗？

（3）*R*∪*S*是*A*上的相容关系吗？

**解：**

（1）设*A*={1,2,3}，*R*={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>}，*S*={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,3>,<3,2>}，*R**S*={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<1,3>}，不是相容关系。

（2）*R*∩*S*显然是自反的，<*x*,*y*>∈*R*∩*S*，则<*x*,*y*>∈*R*且<*x*,*y*>∈*S*，因而<*y*,*x*>∈*R*且<*y*,*x*>∈*S*，即<*y*,*x*>∈*R*∩*S*，因此*R*∩*S*是*A*上的相容关系。

（3）*R*∪*S*显然是自反的，<*x*,*y*>∈*R*∪*S*，则<*x*,*y*>∈*R*或<*x*,*y*>∈*S*，因而<*y*,*x*>∈*R*或<*y*,*x*>∈*S*，即<*y*,*x*>∈*R*∪*S*，因此*R*∪*S*是*A*上的相容关系。

是*A*上的相容关系。

20. 画出集合S={1,2,3,4,5,6}在偏序关系“整除”下的哈斯图，

（1）写出{1,2,3,4,5,6}的最大(小)元和极大(小)元；

（2）分别写出{2,3,6}和{2,3,5}的上(下)界、上(下)确界。

**解：**哈斯图如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | {1,2,3,4,5,6}的最大元：无。{1,2,3,4,5,6}的最小元：1。  {1,2,3,4,5,6}的极大元：4、5、6。{1,2,3,4,5,6}的极小元：1  {2,3,6}的上界：6。{2,3,6}的下界：1。  {2,3,6}的上确界：6。{2,3,6}的下确界：1。  {2,3,5}的上界：无。{2,3,5}的下界：1。  {2,3,5}的上确界：无。{2,3,5}的下确界：1。 |

## 习题四

1. 分析下列各个函数，指出其性质（入射、满射或双射）

（1）*f*: ***Z***→***Z***, *f*(*j*)=*j* mod 3

（2）*f*: *N*→*N*，

（3）*f*: *N*→{0,1}，

（4）*f*: ***Z***→*N*，*f*(*i*)=|2*i*|+1

（5）*f*: *R*→*R*，*f*(*r*)=2*r* –15

**解：**

（1）、（2）、（4）既不是入射，也不是满射。

（3）是满射。

（5）是双射。

2. 假设*f*和*g*是函数，求证*f*∩*g*也是函数。

**证明：**

*f*∩*g*={<*x*,*y*>|*x*∈dom *f*∧*x*∈dom *g*∧*y*=*f*(*x*)∧*y*=*g*(*x*)}={<*x*,*y*>|*x*∈dom *f*∩dom *g*∧*y*=*f*(*x*)=*g*(*x*)}

令*h* = *f*∩*g*，则

dom *h* ={*x*|*x*∈dom *f*∩dom *g*∧*f*(*x*) =*g*(*x*)}

若*y*1≠ *y*2，因为*f*是函数，故必有*y*1=*f*(*x*1)，*y*2=*f*(*x*2)，且*x*1≠*x*2，所以*h* = *f*∩*g*是一个函数。因为dom *h*存在且*y*1≠ *y*2时*x*1≠*x*2，即

*h* ={<*x*,*y*>|*x*∈dom *h*，*y*=*h*(*x*) =*f*(*x*) =*g*(*x*)}

3. 设*A*={1，2，…，*n*}，证明从*A*到*A*的任意单射函数必是满射函数，其逆亦真。

**证明：**设*f*是从*A*到*A*的单射函数，则|*A*|=| *f*(*A*)|，因为*f*是*A*到*A*的函数，所以

*f*(*A*) ⊆ *A*，又因为|*A*|=| *f*(*A*)|，且|*A*|是有限的，因此必有*f*(*A*) = *A*，即*f*是满射函数。

反之，若*f*是从*A*到*A*的满射函数，根据满射定义有，*f*(*A*) = *A*，于是|*A*|=| *f*(*A*)|，又由|*A*|是有限的，故*f*是从*A*到*A*的单射函数。

4. 证明从**N**×***N***到**N**的函数*f*(*x*，*y*)=*x*+y和*g*(*x*，*y*)=*x***∙**y是满射，但不是单射。

**证明：**对任意*z*∈***N***，显然存在0，1，*z*∈***N***，使得0+*z*=*z*，1**∙***z*=*z*，因而*f*(*x*，*y*)=*x*+y和*g*(*x*，*y*)=*x***∙**y是满射。由于3+2=4+1=5，因而*f*(*x*，*y*)=*x*+y不是单射，由于3**∙**2=6**∙**1=6，因而*g*(*x*，*y*)=*x***∙**y不是单射。

5. 试给出满足下列条件的函数例子。

（1）是单射而不是满射。

（2）是满射而不是单射。

（3）不是单射也不是满射。

（4）既是单射又是满射。

**解：**

（1）设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2,3,4}，*f*={<*a*,2>,<*b*,3>,<*c*,4>}。

（2）设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2}，*f*={<*a*,2>,<*b*,1>,<*c*,1>}。

（3）设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2,3,4}，*f*={<*a*,2>,<*b*,1>,<*c*,1>}。

（4）设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2,3}，*f*={<*a*,2>,<*b*,3>,<*c*,1>}。

6. 有限集*A*和*B*，|*A*|=*m*，|*B*|=*n*，问：

（1）*A*到*B*的不同的二元关系有多少？

（2）从*A*到*B*存在多少不同的函数？

（3）从*A*到*B*存在入射的条件是什么？有多少不同的入射？

（4）从*A*到*B*存在满射的条件是什么？有多少不同的满射？

（5）从*A*到*B*存在双射的条件是什么？有多少不同的双射？

**解：**（1）2 *mn* 。（2）*n m*。（3）*m*≤*n*，。 （4）*n*≤*m*，*n*!*S*(*m*，*n*)。(本题具有一定的难度，*S*(*m*，*n*)的意义请参见9.5节，本题即第9章44题。)（5）*m*=*n*，*m*！。

7. 证明：

（1）*f*(*A*∪*B*)= *f*(*A*)∪*f*(*B*)

（2）*f*(*A*∩*B*)⊆ *f*(*A*)∩*f*(*B*)

（3）*f*(*A*)-*f*(*B*) ⊆ *f*(*A*-*B*)

**证明：**

（1）对任意的*y*∈*f*(*A*∪*B*)有，

*y*∈*f*(*A*∪*B*) ⇔∃*x*∈*A*∪*B*∧*f*(*x*)= *y*⇔∃*x*∈*A*∨∃*x*∈*B*∧*f*(*x*)= *y* ⇔(∃*x*∈*A*∧*f*(*x*)= *y*)∨(∃*x*∈*B*∧*f*(*x*)= *y*) ⇔ *y*∈*f*(*A*)∨*y*∈*f*(*B*) ⇔ *y*∈*f*(*A*)∪*f*(*B*)

（2）对任意的*y*∈*f*(*A*∩*B*)有，

*y*∈*f*(*A*∩*B*) ⇔∃*x*∈*A*∩*B*∧*f*(*x*)= *y*⇔∃*x*∈*A*∧∃*x*∈*B*∧*f*(*x*)= *y* ⇒(∃*x*1∈*A*∧*f*(*x*1)= *y*) ∧(∃*x*2∈*B*∧*f*(*x*2)= *y*) ⇔ *y*∈*f*(*A*)∧*y*∈*f*(*B*) ⇔ *y*∈*f*(*A*)∩*f*(*B*)

（3）对任意的*y*∈ *f*(*A*)-*f*(*B*)有，*y*∈*f*(*A*)∧*y*∉*f*(*B*)。即对某个*x*1∈*A*，*y*=*f*(*x*1)，但对任意*x*∈*B*，*y*∉*f*(*x*)。故对某个*x*1∈*A*-*B*，*y*=*f*(*x*1)，即 *y*∈ *f*(*A*-*B*)

于是 *f*(*A*)-*f*(*B*) ⊆ *f*(*A*-*B*)。

8. 设*f*: *A*→*B*是满射函数，且函数*g*: *B*→*P*(*A*)定义为:

*g*(b)={*x*|*x*∈*A*∧*f*(*x*)=*b*}

证明：*g*是单射。其逆成立吗？若成立给出证明，否则给出例子予以说明。

**证明：**因为*f*是满射函数，则对任意*b*∈*B*，至少存在一个*x*∈*A*，使得*f*(*x*)=*b*，故*g*的定义域为*B*。对任意的*b*1，*b*2∈*B*，且*b*1≠*b*2，

*g*(*b*1)={*x*|*x*∈*A*∧*f*(*x*)= *b*1}

*g*(*b*2)={*y*|*y*∈*A*∧*f*(*y*)= *b*2}

因为*b*1≠*b*2，*f*(*x*)≠*f*(*y*)，而*f*是函数，故*x*≠*y*，所以 *g*(*b*1) ≠*g*(*b*2)

故*g*是单射。

逆不成立。

例如：*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={*x*,*y*,*z*}，则

*f*: *A*→*B*，*f*(*a*)=*x*，*f*(*b*)=*x*，*f*(*c*)=*y*。

*g*: *B*→*P*(*A*)，*g*(*x*)={*a*,*b*}，*g*(*y*)={*c*}，*g*(*z*)= ∅。

*g*是单射，但*f*不是满射。

9. 证明：若*f*: *A*→*B*，*g*: *B*→*A*，且*g**f* =*IA*，*f* *g* =*IB*，则*g*=*f*-1，且*f*=*g*-1。

**证明：**因为*g**f* =*IA*，所以*g**f* (*a*1)= *g*(*f* (*a*1)) =*a*1，*g**f* (*a*2)= *g*(*f* (*a*2)) =*a*2，若*a*1≠*a*2，*g*(*f* (*a*1))≠*g*(*f* (*a*2))，所以*f* (*a*1)≠*f* (*a*2)，即*f*:是入射。

又对任意的*a*∈*A*有*g**f* (*a*)= *g*(*f* (*a*)) =*a*，即存在*f* (*a*)=*b*∈*B*，使得*g*(*b*) =*a*，因此*g*是满射。同理，若*f* *g* =*IB*，则*g*是入射且*f*是满射，故可知*f*和*g*都是双射函数。

设<*a*,*b*>∈*f*，因为<*a*,*a*>∈*IA*，而*g**f* =*IA*，故必有某个*c*∈*B*，使得<*a*,*c*>∈*f*且<*c*,*a*>∈*g*，由<*a*,*b*>∈*f*∧<*a*,*c*>∈*f*⇒*b*=*c*

因此<*b*,*a*>∈*g*。

反之，若<*b*,*a*>∈*g*，由<*b*,*b*>∈*IB*，故必有某个*d*∈*A*，有<*b*,*d*>∈*g*∧<*d*,*b*>∈*f*，由<*b*,*a*>∈*g*∧<*b*,*d*>∈*g*⇒*a*=*d*

因此<*a*,*b*>∈*f*。

上述证明得到<*a*,*b*>∈*f*当且仅当<*b*,*a*>∈*g*，所以*g*=*f*-1且*f*=*g*-1。

10. 证明：若(*g**f*)-1是一个函数，则*f*和*g*不一定是入射。

**证明：**设*A*={*a*,*b*,*c*}，*B*={1,2,3,4}，*C*={*x*,*y*,*z*}，*f*是*A*到*B*的函数，*g*是*B*到*C*的函数，

*f*={<*a*,2>,<*b*,3>,<*c*,4>}，*g*={<1,*x*>,<2,*x*>,<3,*y*>,<4,*z*>},

则*g**f*={<*a*,*x*>,<*b*,*y*>,<*c*,*z*>}，(*g**f*)-1={<*x*,*a* >,<*y*,*b* >,<*z*,*c*>}是双射函数，但*g*不是入射。